НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. М. НЕДЕЛЬКО

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие

Новосибирск
2011

Неделько В. М. Основы теории вероятностей: Учеб. пособие / Новосиб. гос. техн. ун-т. Новосибирск, 2011. 102 с.

Учебное пособие соответствует программе базового курса теории вероятностей для технических вузов и может использоваться как для проведения учебных практических занятий, так и для самостоятельного изучения дисциплины.

Отличительной особенностью издания является доступность изложения в сочетании с математической строгостью, а также минимизация объема сообщаемой информации за счет выбора тем, наиболее важных для понимания предмета и для решения практических задач.

Пособие организовано в форме сборника задач, включающего подробное руководство к их решению, а также необходимый справочный минимум теоретической информации.

Рецензенты:
д-р техн. наук, профессор А.А. Попов,
д-р техн. наук В.Б. Бериков

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие соответствует программе базового курса теории вероятностей для технических вузов, а также нематематических специальностей университетов.

Отличительной чертой данного издания является примерное равенство теоретической и практической составляющих, что обеспечивает определенную самодостаточность в качестве пособия для изучения основ теории вероятностей и обучения решению задач. Вместе с тем изложенного материала не вполне достаточно для изучения теоретических аспектов дисциплины, поэтому для полноценной подготовки необходимо использовать классические учебники, например [2, 3, 7, 8, 9], а также учебные пособия [4, 5], сочетающие строгость и доступность изложения. Поскольку изучение теории вероятностей обычно подразумевает последующее знакомство с математической статистикой, в список рекомендованной литературы включены источники [10 -13].

Прообразом настоящего издания является учебное пособие [6], по сравнению с которым материал очень существенно переработан и дополнен. Значительная часть задач заимствована из сборника [1], для таких задач рядом с их номером в квадратных скобках указан их оригинальный номер в первоисточнике.

Каждый раздел пособия посвящён определенной теме и включает теоретический материал и задачи для самостоятельного решения. Некоторые задачи внесены в текст изложения теоретического материала в качестве упражнений, при этом для них также могут быть приведены указания, ответы и решения.

Раздел «Указания» содержит подсказки к решению для многих задач; раздел «Ответы» — ответы ко всем задачам, постановка которых подразумевает определенный ответ; раздел «Решения» — полные решения значительной части задач, в том числе большинства задач на доказательство.

Введение данных разделов преследует цель максимизировать обучающий эффект при самостоятельном решении задач. При возникновении затруднений в решении задачи рекомендуется обратиться к разделу «Указания» и продолжить решение задачи. В качестве следующей подсказки можно использовать ответ. Если и после этого задачу не удаётся решить в разумное время, то следует обратиться к решениям, после чего попробовать решить аналогичную задачу.

Глава 1. ВЕРОЯТНОСТИ НА СОБЫТИЯХ

§ 1.1. Алгебра событий

Понятие события

Первым понятием, с которым нужно познакомиться, является понятие элементарного исхода. *Элементарный исход* есть некоторый вариант того, что может произойти. При этом, конечно, нужно понимать, что вариантов того, что может произойти, на самом деле можно выделить сколько угодно и различными способами.

Например, мы бросаем монету на стол, поверхность которого чертой разделена на две половины. Можно указать следующие возможные варианты: монета упадёт гербом, монета упадёт решёткой, монета попадёт в левую половину, монета попадёт в правую половину, монета попадёт на черту, монета упадёт со стола, мы вообще промахнёмся мимо стола и т. д. Если измерять координаты упавшей на стол монеты, то каждая пара значений координат — тоже вариант исхода, причём таких вариантов бесконечное (континуальное) множество.

Чтобы применять аппарат теории вероятностей, необходимо из всех подобных вариантов выбрать некоторое множество Ω, оно будет называться *множеством элементарных исходов* ω. При этом Ω нужно составлять так, чтобы при любом развитии событий случился ровно один исход.

Это означает две вещи. Во-первых, что бы ни случилось, этот вариант должен быть предусмотрен в списке исходов. Во-вторых, не должно быть ситуаций, удовлетворяющих одновременно двум исходам.

Например, множество {монета упадет гербом, монета упадет решеткой} является множеством элементарных исходов (считаем, что монета на ребро встать не может), поскольку указанные нами варианты несовместны и один из них обязательно случится.

Наоборот, множество {монета упадет гербом, монета попадёт в правую половину, монета упадет со стола} множеством элементарных исходов не является, поскольку ситуация, когда монета ложится гербом в правую половину стола, удовлетворяет сразу двум вариантам, а ситуация, когда монета ложится решеткой в левую половину, не предусмотрена вовсе.

Заметим, что множество элементарных исходов всегда можно выбрать настолько «подробным», насколько нужно. Например: {монета гербом ляжет на стол, монета гербом ляжет на пол, монета решёткой ляжет на стол, монета решёткой ляжет на пол}.

Исход называется элементарным, потому что более подробные (более мелкие) исходы мы договариваемся не рассматривать. Например, если решили исходом считать, в какую из половин стола попала монета, то конкретные координаты монеты уже не измеряем.

С точки зрения математики все сказанное эквивалентно одной фразе: рассмотрим некоторое множество Ω элементарных исходов ω.

Событиями называются некоторые подмножества из Ω, причем если Ω конечно или счётно, то любое $A \subseteq \Omega$ есть событие. Если же Ω континуально, то событиями будет только часть его подмножеств.

Пример континуального множества — это множество точек возможного положения центра монеты на поверхности стола. При этом событиями будут только те множества точек поверхности стола, которые имеют площадь (в том числе нулевую).

Пустое множество $\varnothing$ будем называть *невозможным* событием, а множество Ω – *достоверным* событием.

Операции над событиями

Поскольку события являются множествами, над ними определены все операции, определённые для множеств. При этом для некоторых операций вводятся синонимы. Так, пересечение множеств $A \bigcap B$ называется *произведением* AB событий A и B, а объединение $A \bigcup B$ обозначается как *сумма* $A + B$. *Отрицанием* $\overline{A}$ события A называется дополнение множества A до Ω.

Перечисленные операции являются основными. Реже используются различные производные операции, такие как *разность* $A \setminus B \equiv A\overline{B}$ и *симметрическая разность* $A \Delta B \equiv A\overline{B} + \overline{A}B$.

Важно отметить, что «разность», несмотря на название, никоим образом не является операцией, обратной сложению. Это в частности означает, что при доказательстве тождеств нельзя «сокращать слагаемые».

Утверждение. $\overline{AB} \equiv \overline{A} + \overline{B}$, $\overline{A + B} \equiv \overline{A}\,\overline{B}$.

Доказательство. Заметим, что достаточно доказать лишь одно из приведенных тождеств, так как другое получается простым переобозначением и взятием отрицания.

Таблица 1. Таблица истинности.

A	B	AB	$\overline{AB}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}+\overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Построим таблицу истинности (таблица 1) для первого тождества. Сравнивая значения в столбцах для $\overline{AB}$ и $\overline{A}+\overline{B}$, обнаруживаем их совпадение, откуда делаем заключение о тождественности сравниваемых выражений.

Строго говоря, правомерность такого метода нуждается в обосновании, однако такое обоснование выходит за рамки курса и интересующиеся могут самостоятельно найти его в литературе.

Отношение $A \rightarrow B$ читается как «из *A следует B*» и обозначает $A \subseteq B$.

Говорят, что некоторое множество событий образует *полную группу*, если сумма этих событий дает Ω. События *A* и *B* называются *несовместными*, если $AB = \varnothing$.

Определение. Множество событий $\Lambda \subseteq 2^{\Omega}$ называется *алгеброй событий*, если оно удовлетворяет условиям:

1) $\varnothing \in \Lambda$;
2) $A \in \Lambda \Rightarrow \overline{A} \in \Lambda$;
3) $A \in \Lambda, B \in \Lambda \Rightarrow A + B \in \Lambda$.

Последние два условия называют требованием замкнутости относительно операций отрицания и сложения соответственно.

Упражнение 1.1.а. Доказать, то если Λ — алгебра, то выполнены свойства:

1) $\Omega \in \Lambda$;
2) $A \in \Lambda, B \in \Lambda \Rightarrow AB \in \Lambda$.

Определение. Алгебра Λ называется σ-*алгеброй*, если

$$A_i \in \Lambda \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Lambda .$$

Заметим, что не любая алгебра является σ-алгеброй, т. е. из того, что алгебра включает все конечные объединения из некоторого набора множеств, не следует, что она включает бесконечные объединения.

Проиллюстрируем сказанное примером.

Пусть $\mathcal{B}'$ — алгебра над двумерными интервалами на плоскости. Иными словами, множество $\mathcal{B}'$ включает всевозможные объединения из конечного числа прямоугольников, стороны которых параллельны координатным осям. Очевидно, что круги в множество $\mathcal{B}'$ не входят, хотя для любого заданного круга в $\mathcal{B}'$ можно найти множество, сколь угодно мало от этого круга отличающееся (в смысле меры симметрической разности), поскольку круг можно сколь угодно точно аппроксимировать прямоугольниками достаточно малого размера. Однако если образовать σ-алгебру $\mathcal{B}$, включающую не только конечные, но и все счетные объединения всевозможных интервалов, то в нее войдут и круги (см. задачу *1.1.17*).

Задачи

1.1.1 [1.1]**.** Что означают события $A+A$ и AA?

1.1.2 [1.2]**.** Когда возможно равенство $AB = A$?

1.1.3 [1.4]**.** События: A — хотя бы один из трех проверяемых приборов бракованный, B — все приборы доброкачественные. Что означают события $A + B$ и AB?

1.1.4. Из таблицы случайных чисел наудачу взято одно число. Событие A — выбранное число чётное; событие B — данное число оканчивается нулем. Что означают события AB и $A \backslash B$?

1.1.5 [1.7]**.** События: A — хотя бы одно из четырёх изделий бракованное, B — бракованных изделий не менее двух. Что означают противоположные события $\overline{A}$ и $\overline{B}$?

1.1.6 [1.8]**.** Упростить выражение $A = (B + C)(B + \overline{C})(\overline{B} + C)$.

1.1.7 [1.9]**.** Когда возможны равенства: а) $A + B = \overline{A}$; б) $AB = \overline{A}$; в) $A + B = AB$?

1.1.8 [1.10]**.** Найти случайное событие X из равенства

$$\overline{X + A} + \overline{X + \overline{A}} = B.$$

1.1.9 [1.11]**.** Доказать, что $\overline{A}B + A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B} = \overline{AB}$.

1.1.10 [1.12]**.** Доказать эквивалентность и справедливость следующих двух неравенств: $\overline{\sum\limits_{k=1}^{n} A_k} = \prod\limits_{k=1}^{n} \overline{A_k}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \overline{A_k} = \overline{\prod\limits_{k=1}^{n} A_k}$.

1.1.11 [1.13]**.** Совместны ли события A и $\overline{A + B}$?

1.1.12 [1.14]**.** Доказать, что события A, $\overline{A}B$, $\overline{A + B}$ образуют полную группу.

1.1.13 [1.15]**.** Два шахматиста играют одну партию. Событие A — выигрывает первый игрок, B — выигрывает второй игрок. Какое событие следует добавить к указанной совокупности, чтобы получилась полная группа событий?

1.1.14. Два стрелка по одному разу стреляют в мишень. Событие A — попадает первый стрелок и промахивается второй, событие B — попадает второй стрелок и промахивается первый. Какие события следует добавить к указанной совокупности, чтобы получилась полная группа событий?

1.1.15. Дано множество исходов $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$, является ли множество событий $S = \{\{a, b, c, d\}, \{c, d\}\}$ алгеброй? Если нет, то дополнить до алгебры (минимальной мощности).

1.1.16. Дано множество исходов $\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$, является ли множество событий $S = \{\{b, c, d\}, \{a, c, f\}, \{c\}\}$ алгеброй? Если нет, то дополнить до минимальной алгебры.

1.1.17. Доказать, что любой круг принадлежит σ-алгебре $\mathcal{B}$, порождённой двумерными интервалами на плоскости. Под интервалом понимается прямоугольник (в частности, отрезок или точка) со сторонами, параллельными осям координат.

§ 1.2. Случай равновероятных исходов. Элементы комбинаторики

Непосредственный подсчет вероятности

В некоторых случаях вероятность $\mathsf{P}(A)$ заданного события A можно вычислять как долю исходов, принадлежащих данному событию, т. е. $\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$. В этом случае исходы называются *равновероятными*.

Это так называемое классическое определение вероятности, возникшее из исследований азартных игр. На самом деле (в современной теории) это вовсе не определение вероятности, а один из способов её задания. Более того, в данном параграфе мы будем решать задачи и практически пользоваться понятием вероятности, вообще пока не давая её определения. Достаточно будет понимать, что вероятность это некоторое число от 0 до 1, сопоставленное событию.

Как правило, в компетенцию математики не входит решать, применим ли некоторый математический аппарат к какой-то задаче, и в ней не содержится правил, дающих ответ на этот вопрос. Вопрос об адекватности математического аппарата изучаемым объектам находится в ведении прикладных наук. Например, какие средства функционального анализа выбрать для описания взаимодействия элементарных частиц, решает физика. Математика лишь изучает свойства этих средств.

Исключением из этого правила является теория вероятностей, которая, являясь математической дисциплиной, опирается также на некоторые эмпирические факты, что свойственно естественным наукам. Естественнонаучный аспект теории вероятностей состоит в том, что она позволяет прогнозировать результаты экспериментов. Однако эмпирических законов теории вероятностей очень немного.

Эмпирический факт. Вероятность имеет «физический смысл». Под этим понимается, что в практических ситуациях возможно адекватное задание вероятностной меры, при котором следует в большей степени ожидать (рассчитывать на наступление) тех событий, вероятность которых больше. При этом событие, имеющее вероятность 1, произойдёт гарантированно (подробнее об этом в разделе *1.3*).

Если дана математическая постановка задачи, то вопрос об адекватности математических средств уже решен, поскольку в математической постановке уже нет реальных объектов (и нет даже идеальных физических объектов), а есть только объекты математические (а именно — множества). Но задачи по теории вероятностей часто формулируются в их практической постановке.

В рамках темы параграфа при решении практических задач возникает одна принципиальная сложность, состоящая в определении, являются ли исходы равновероятными, либо в выборе подходящего множества равновероятных исходов.

Обычно этот вопрос решается из соображений симметрии (игральная кость, монета) или однородности (шары в урне, колода карт).

Эмпирический факт. Симметричные или однородные исходы являются равновероятными.

Элементы комбинаторики

Во многих задачах часто приходится иметь дело с необходимостью подсчёта всех возможных способов расположения некоторых предметов или числа всех возможных способов осуществления некоторого действия (числа элементарных исходов, принадлежащих данному событию).

Основное правило комбинаторики. Пусть требуется выполнить k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе — n_2 способами, i-е действие — n_i способами, и т. д. до k-го действия, которое можно выполнить n_k способами, то все k действий вместе могут быть выполнены $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ способами.

Комбинаторика — теория конечных множеств. Основной характеристикой конечного множества является число его элементов или мощность множества.

Большинство задач подсчета мощности множества, образованного k-элементными подмножествами некоторого множества A, можно интерпретировать схемой выбора. Пусть в урне содержится n пронумерованных шаров (множество A) и производится выбор k шаров. При этом необходимо определить способ выбора (возвращается шар в урну или нет) и способ оценивания результата (учитывается порядок извлечения шаров из урны или нет).

Число всех k-элементных подмножеств (порядок элементов в подмножестве не имеет значения) множества из n элементов (число *сочетаний* из n по k) равно

$$C_n^k = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{1 \cdot 2...k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Это схема выбора без возвращения и без учета порядка.

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, $n = 3$, $k = 2$. Все способы выбора составляют множество $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$, которое имеет мощность $C_3^2 = 3$.

Мощность множества всех подмножеств множества из n элементов равняется $\sum_{k=1}^{n} C_n^k = 2^n$.

Количество всех k-элементных последовательностей (порядок элементов в последовательности имеет значение), составленных из неповторяющихся элементов множества мощности n, (число *размещений* из n по k) равно

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = C_n^k \cdot k!$$

Это схема выбора без возвращения и с учетом порядка.

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, $n = 3$, $k = 2$. Все способы выбора составляют множество $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$, которое имеет мощность $A_3^2 = 6$.

Число всевозможных *перестановок* множества из n элементов есть

$$P_n = A_n^n = n!$$

Количество всех k-элементных последовательностей, составленных из элементов множества мощности n, составляет

$$N_n^k = n^k .$$

Это схема выбора с возвращением и с учетом порядка.

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, $n = 3$, $k = 2$. Все способы выбора составляют множество $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$ мощности $3^2 = 9$.

Осталось рассмотреть схему выбора с возвращением и без учёта порядка. В этом случае число способов выбора составляет

$$C_{n+k-1}^{n-1} \equiv C_{n+k-1}^{k}.$$

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, $n = 3$, $k = 2$. Все способы выбора составляют множество $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ мощности $C_{3+2-1}^{2} = 6$.

Таблица 2. Число вариантов для различных схем выбора.

Способ подсчёта вариантов:	Способ выбора:	
	с повторами	без повторов
с учётом порядка	n^k	$A_n^k = C_n^k \cdot k!$
без учёта порядка	$C_{n+k-1}^{n-1} \equiv C_{n+k-1}^{k}$	C_n^k

Рассмотренные варианты можно систематизировать в виде таблицы 2.

При решении задач комбинаторики часто оказывается полезен так называемый треугольник Паскаля.

Треугольником Паскаля называют двумерную числовую последовательность $\rho_{n,i}$, такую что $\rho_{0,0} = 1$ и $\rho_{n,i} = \rho_{n-1,i-1} + \rho_{n-1,i+1}$. Последовательность определена для $n = 0, 1, 2, \ldots$, $i = -n, \ldots, 0, \ldots, n$, причём $n + i$ – чётное. Для остальных комбинаций индексов при использовании в рекуррентной формуле подставляется ноль.

Таблица 3. Треугольник Паскаля.

n	i																				
	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0											1										
1										1		1									
2									1		2		1								
3								1		3		3		1							
4							1		4		6		4		1						
5						1		5		10		10		5		1					
6					1		6		15		20		15		6		1				
7				1		7		21		35		35		21		7		1			
8			1		8		28		56		70		56		28		8		1		
9		1		9		36		84		126		126		84		36		9		1	
10	1		10		45		120		210		252		210		120		45		10		1

Графически треугольник Паскаля можно изобразить как пирамиду из расположенных в «шахматном порядке» чисел, каждое из которых есть сумма двух вышележащих (см. таблицу 3).

Оказывается, что элементы данной последовательности представляют собой биномиальные коэффициенты: $\rho_{n,i} = C_n^k$, где $k = \frac{n-i}{2}$.

Рекуррентное соотношение удовлетворяется ввиду легко проверяемого тождества $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Определение. *Производящей функцией* для числовой последовательности $a_0, a_1, \ldots$ называется степенной ряд

$$\vartheta(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n .$$

Элементы последовательности могут быть выражены через производящую функцию по формуле $a_n = n! \cdot \vartheta^{(n)}(0)$, где $\vartheta^{(n)}(z)$ – производная n-го порядка.

Производящие функции являются мощным инструментом комбинаторики, пример их использования приведён в решении к задаче *1.2.22*.

Задачи

1.2.1 [2.1]**.** Лотерея выпущена на общую сумму n рублей. Цена одного билета r рублей. Ценные выигрыши падают на m билетов. Определить вероятность ценного выигрыша на один билет.

1.2.2 [2.2]**.** Случайно выбранная кость домино оказалась не дублем. Найти вероятность того, что вторую, также взятую наудачу, кость домино можно приставить к первой.

1.2.3 [2.3]**.** В колоде 36 карт четырех мастей. После извлечения и возвращения одной карты колода перемешивается и снова извлекается одна карта. Определить вероятность того, что обе извлеченные карты одной масти.

1.2.4 [2.4]**.** Буквенный замок содержит на общей оси пять дисков, каждый из которых разделен на шесть секторов с различными нанесенными на них буквами. Замок открывается только в том случае, если каждый диск занимает одно определенное положение относительно корпуса замка. Определить вероятность открытия замка, если установлена произвольная комбинация букв.

1.2.5 [2.6]**.** В кошельке лежат три монеты достоинством по *20 коп.* и семь монет по *3 коп.* Наудачу берется одна монета, а затем извлекается вторая монета, оказавшаяся монетой в *20 коп.* Определить вероятность того, что и первая извлеченная монета имеет достоинство в *20 коп.*

1.2.6 [2.7]**.** Из партии деталей, среди которых n доброкачественных и m бракованных, для контроля наудачу взято s штук. При контроле оказалось, что первые k из s деталей доброкачественны. Определить вероятность того, что следующая деталь будет доброкачественной.

1.2.7 [2.10]**.** Определить вероятность того, что наугад выбранный в диапазоне от 0001 до 9999 четырёхзначный номер: а) не содержит одинаковых цифр; б) содержит две одинаковых цифры; в) содержит три одинаковых цифры; г) содержит две пары одинаковых цифр.

1.2.8 [2.11]**.** Десять книг на одной полке расставляются наудачу. Определить вероятность того, что при этом три определенные книги окажутся поставленными рядом.

1.2.9 [2.13]**.** Имеется пять отрезков, длины которых равны соответственно 1, 3, 5, 7, и 9 единицам. Определить вероятность того, что с помощью взятых наугад трёх отрезков из данных пяти можно построить треугольник.

1.2.10 [2.14]**.** Из десяти билетов выигрышными являются два. Определить вероятность того, что среди наудачу взятых пяти билетов: а) один выигрышный; б) оба выигрышных; в) хотя бы один выигрышный.

1.2.11 [2.15]**.** Имеется N билетов, из которых M выигрышных. Одновременно приобретаются n билетов. Определить вероятность того, что среди них m выигрышных.

1.2.12 [2.18]**.** В зале насчитывается $n + k$ мест, случайным образом занимают места n человек. Определить вероятность того, что будут заняты определённые $m \leq n$ мест.

1.2.13 [2.20]**.** Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются три карты. Определить вероятность того, что сумма очков этих карт равна 21, если валет составляет два очка, дама – три, король – четыре, туз – одиннадцать, а остальные карты – соответственно шесть, семь, восемь, девять и десять очков.

1.2.14 [2.21]**.** Имеются пять билетов стоимостью по одному рублю, три билета по 3 руб. и два билета по 5 руб. Наугад берутся три билета. Определить вероятность того, что: а) хотя бы два из этих билетов имеют одинаковую стоимость; б) все три билета стоят 7 руб.

1.2.15. В группе 10 предметов. В понедельник 3 пары, все пары разные. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?

1.2.16. Пассажир забыл номер в автоматической камере хранения. Он только помнит, что в номере были числа 23 и 37. Чтобы открыть камеру, надо правильно набрать пятизначный номер. Какое наибольшее количество номеров нужно перебрать, чтобы открыть камеру?

1.2.17. Сколькими способами из семи человек можно выбрать комиссию, состоящую из трех человек?

1.2.18. Сколько можно составить перестановок из n элементов, в которых данные два элемента не стоят рядом?

1.2.19. Найти вероятность при случайном выборе шести карт из колоды в 36 карт получить две червовых, две крестовых и две пиковых масти?

1.2.20. В аквариуме находятся 8 рыб одного вида, поровну каждого пола. Какова вероятность, что среди случайно выловленных 4 рыб число представителей каждого пола будет также одинаковым?

1.2.21. В кафетерии продаются пирожки четырех видов. Сколькими способами можно выбрать 5 пирожков?

1.2.22. Числа, определяемые рекуррентным соотношением $K_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} K_i K_{n-i}$, $K_0 = 1$, называются *числами Каталана*. Доказать, что $K_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$.

1.2.23. В очереди за билетами стоимостью 5 коп. стоят $2n$ человек, из которых половина имеют на руках пятаки, а остальные — монеты достоинством 10 коп. Перед продажей билета первому покупателю в кассе денег не было. Какова вероятность того, что ни одному из покупателей не придётся ждать сдачи?

1.2.24. Очередь в кассу, где производится продажа билетов стоимостью 5 коп., состоит из $2n$ человек, среди которых $n-m$ человек имеют на руках пятаки, а остальные — монеты достоинством 10 коп. Перед продажей билета первому покупателю в кассе было $2m$ пятаков. Какова вероятность того, что ни одному из покупателей не придётся ждать сдачи?

1.2.25 [4.33]**.** В очереди за билетами стоимостью 5 руб., стоят $n+m$ человек, из которых n человек имеют деньги пятирублёвого достоинства, а остальные — десятирублёвого. Каждый покупает один билет. В кассе до продажи билетов денег нет. Какова вероятность того, что ни одному из покупателей не придётся ожидать сдачи?

§ 1.3. Геометрические вероятности

Геометрические вероятности

В теории вероятностей фундаментальную роль играет понятие *меры*.

Мы не будем давать определение меры. Отметим лишь, что количество, длина, площадь, объем, масса этому определению соответствуют, т. е. являются мерами.

Вероятность также является мерой. Единственная особенность данной меры по отношению к другим — это ее нормированность, а именно вероятность события Ω всегда равна 1.

Пусть на Ω задана мера μ. При этом должна быть определена мера $\mu(A)$ любого события. Например, если Ω — множество точек прямоугольника (поверхности стола), то в качестве меры μ можно рассматривать площадь. Соответственно $\mu(A)$ будет обозначать площадь события A, которое есть некоторая часть поверхности стола.

Заметим, что если Ω — континуум (как в данном примере), то не все его подмножества измеримы. Так, не для любого подмножества точек прямоугольника определено понятие площади. К счастью, подмножества, не имеющие площади, нельзя даже наглядно представить, а уж сталкиваться с ними практически мы тем более не будем.

Определение. Говорят, что на Ω задано *равномерное распределение*, если для любого $A \subseteq \Omega$ имеет место $\mathsf{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$.

Отсюда, если сказано, что распределение равномерное и известна $\mu(A)$, можно найти $\mathsf{P}(A)$.

Заметим, что понятие равномерного распределения даётся относительно некоторой меры μ и от этой меры зависит. Например, представим поле, поделенное на участки (огороды) разного размера, засаженное картофелем. Предположим, что урожайность во всех частях поля получилась одинаковой. Тогда распределение урожая по площади будет равномерным, а по участкам — нет. В качестве меры μ мы можем взять также, например, затраты на возделывание и рассматривать распределение урожая относительно затрат.

В математически поставленных задачах по теории вероятностей распределение либо задано, либо вычисляется.

В практических задачах распределение угадывается из «физических» соображений. В задачах данного параграфа при подходящем выборе Ω и μ распределение будет равномерным. В некоторых случаях в условиях задач говорится о *равновозможности* исходов, что следует понимать как указание ввести равномерное распределение.

Задача 1.3.а. Частокол состоит из бревен диаметром 35 см, составленных вплотную (см. рисунок). Пуля пробивает древесину на глубину 25 см. Какова вероятность, что пуля, выпущенная без прицеливания, и попавшая в частокол перпендикулярно его направлению, пробьет его? Возможностью рикошета пренебречь.

Полное решение данной задачи приводится в соответствующем разделе. Здесь дадим лишь некоторые пояснения. На рисунке 1 приведён фрагмент частокола, вид сверху.

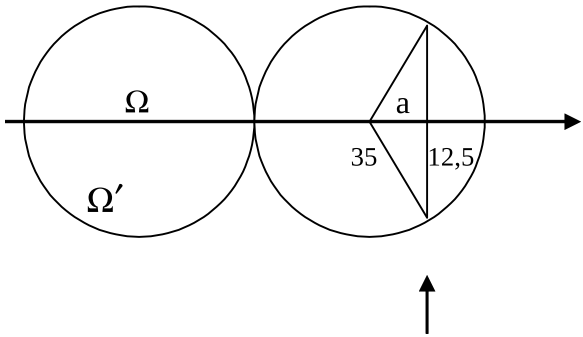

Рис. 1. Иллюстрация к задаче *1.3.а*.

Одной из главных трудностей при решении задач на геометрические вероятности является правильный выбор множества элементарных исходов. В рассматриваемой задаче множеством элементарных исходов могло бы быть Ω’ — множество возможных точек входа пули в бревно. Но на таком множестве исходов распределение не будет равномерным. Подходящим множеством исходов будет Ω — перпендикулярный движению пули диаметр бревна. При этом, если пуля попадёт в другое бревно, то мы его параллельным переносом совместим с выбранным, и исходом будем считать точку на выбранном диаметре.

Геометрические вероятности позволяют проиллюстрировать различие между достоверным событием и событиями, которые гарантированно произойдут, т.е. имеют вероятность 1. Это эквивалентно различию между невозможным событием и событиями, имеющими нулевую вероятность (которые гарантированно не произойдут).

Невозможное событие по определению имеет нулевую вероятность. Но событие, имеющее нулевую вероятность, не обязательно является невозможным. Таким образом, существуют события, которые возможны, но гарантированно не произойдут. На первый взгляд, это кажется парадоксом, поскольку непонятно, какой смысл называть событие возможным, если мы знаем, что оно не произойдёт.

Рассмотрим пример. Пусть на $\Omega = [0, 1]$ задано равномерное распределение. Вероятность любого конечного подмножества из Ω равна 0. Это значит, что если мы задумаем любое число (например, 0, 0,5, $\frac{3}{7}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ и т.д.), то можем гарантировать, что полученное в опыте случайное число не совпадёт с задуманным. Однако это не означает, что событие, например, $\{\frac{3}{7}\}$ невозможное. Действительно, пусть в результате опыта мы получили некоторое число x. Очевидно, что событие $\{x\}$ – возможное, поскольку оно произошло. При этом мы можем гарантировать, что в последующих аналогичных опытах событие $\{x\}$ не случится. Но события $\{x\}$ и $\{\frac{3}{7}\}$ в определённом смысле «равноправны», поэтому если первое возможно, то и второе возможно.

В рассмотренном примере все одноэлементные события $\{x\}$, $x \in [0, 1]$ возможны, поскольку в любом опыте одно из них обязательно произойдёт, но каждое такое событие имеет нулевую вероятность, поэтому если до опыта «задумать» какое-то одноэлементное событие, то можно гарантировать, что оно не произойдёт.

В приведённых рассуждениях мы под возможными событиями фактически подразумевали события, наступление которых не противоречит здравому смыслу. Однако мы имеем право формально рассматривать любые исходы, например, для опыта, состоящего в подбрасывании монеты, мы можем ввести исходы {«упадёт гербом», «упадёт решёткой», «встанет на ребро», «зависнет в воздухе»}. Формально событие {«зависнет в воздухе»} не является невозможным, поскольку оно не есть $\varnothing$. Но оно невозможно с точки зрения здравого смысла. Это даёт ещё один пример (правда, не имеющий практического значения), когда событие, не являющееся $\varnothing$, имеет нулевую вероятность.

Задачи

1.3.1 [3.1]**.** В точке *C*, положение которой на телефонной линии *AB* длины *L* равновозможно, произошел разрыв. Определить вероятность того, что точка *C* удалена от точки *A* на расстояние, не меньшее *l*.

1.3.2 [3.2]**.** На плоскости проведены параллельные линии, расстояния между которыми попеременно равны *1,5* и *8 см*. Определить вероятность того, что наудачу брошенный на эту плоскость круг радиуса *2,5 см* не будет пересечен ни одной линией.

1.3.3 [3.3]**.** В круге радиуса *R* проводятся хорды параллельно заданному направлению. Какова вероятность того, что длина наугад взятой хорды не более R, если равновозможны любые положения точек пересечения хорды с диаметром, перпендикулярным выбранному направлению?

1.3.4 [3.5]**.** Прямоугольная решетка состоит из цилиндрических прутьев радиуса r. Расстояния между осями прутьев равны соответственно a и b. Определить вероятность попадания шариком диаметра d в решетку при одном бросании без прицеливания, если траектория полета шарика перпендикулярна плоскости решетки.

1.3.5 [3.9]**.** На отрезке длиной l наудачу выбраны две точки. Какова вероятность, что расстояние между ними меньше kl, где $0 < k < 1$?

1.3.6 [3.11]**.** На отрезке длиной l наудачу ставятся две точки, в результате чего этот отрезок оказывается разделенным на три части. Определить вероятность того, что из трех получившихся частей отрезка можно построить треугольник.

1.3.7 [3.16]**.** Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов независимо и равновозможно в течение данных суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода один час, а второго – два часа.

1.3.8 [3.18]**.** Два судна в тумане: одно идет вдоль пролива шириной L, а другое курсирует без остановок поперёк этого пролива перпендикулярно курсу первого. Скорости движения судов соответственно равны v_1 и v_2. Второе судно подает звуковые сигналы, которые слышны на расстоянии $d < L$. Определить вероятность того, что на первом судне услышат сигналы, если пересечение курсов судов равновозможно в любом месте пролива.

1.3.9. Пассажир колеса обозрения в случайный момент времени уронил часы. Вычислить вероятность, что часы останутся целы, принимая максимально допустимую высоту падения равной 5 м. Диаметр колеса равен 15 м, минимальная высота траектории люльки составляет 2 м.

1.3.10. Найти вероятность p того, что сумма $x + y$, где x, y — случайные числа на отрезке [0, 1], больше данного числа a.

1.3.11. Какова вероятность того, что сумма двух, наугад взятых в диапазоне [0,1] чисел, более чем в 2 раза превзойдет модуль их разности?

§ 1.4. Сложение вероятностей

Аксиоматическое определение вероятности

Определение. Пусть Λ – некоторая σ-алгебра событий. *Вероятностью* называется функция $\mathsf{P}\colon \Lambda \to \mathbf{R}$, удовлетворяющая следующим аксиомам:

1) $\forall A \in \Lambda,\ \mathsf{P}(A) \geq 0$;

2) $\mathsf{P}(\Omega)=1$;

3) если задана последовательность A_i попарно несовместных событий, т. е. при $i \neq j$ $A_i \cap A_j = \varnothing$, то $\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i)$.

Последняя аксиома называется требованием *счетной аддитивности*. Очевидно, что из неё следует *аксиома сложения*: если $A \cap B = \varnothing$, то $\mathsf{P}(A+B)=\mathsf{P}(A)+\mathsf{P}(B)$.

Упражнение 1.4.а. Доказать следующие следствия из приведенных выше аксиом:

1) $\forall A \in \Lambda,\ \mathsf{P}(A) \leq 1$;

2) $\mathsf{P}(\varnothing)=0$;

3) $\mathsf{P}(\overline{A})=1-\mathsf{P}(A)$;

4) $\mathsf{P}(A+B)=\mathsf{P}(A)+\mathsf{P}(B)-\mathsf{P}(AB)$ — *теорема сложения*.

Доказательство. Свойства 1 и 2 предлагается доказать самостоятельно. Докажем свойство 3. По определению, $A+\overline{A}=\Omega$, $A\overline{A}=\varnothing$.

Далее, используя аксиому сложения, получаем требуемое:

$1=\mathsf{P}(\Omega)=\mathsf{P}(A+\overline{A})=\mathsf{P}(A)+\mathsf{P}(\overline{A})$.

Докажем теперь теорему сложения (свойство 4). Применяя алгебраические преобразования, имеем:

$$A+B=A+B\Omega=A+B(A+\overline{A})=A+AB+\overline{A}B=A(\Omega+B)+\overline{A}B=A+\overline{A}B.$$

Поскольку $A \cdot \overline{A}B=\varnothing$, то $\mathsf{P}(A+B)=\mathsf{P}(A)+\mathsf{P}(\overline{A}B)$.

Осталось показать, что $\mathsf{P}(\overline{A}B)=\mathsf{P}(B)-\mathsf{P}(AB)$.

Действительно, $B=AB+\overline{A}B$, откуда $\mathsf{P}(B)=\mathsf{P}(AB)+\mathsf{P}(\overline{A}B)$.

Доказанное утверждение станет практически очевидным, если множества A, B, AB и $A+B$ изобразить графически.

Мы рассмотрели формулу сложения для двух событий. Используя данную формулу рекуррентно, можно получить выражение для суммы любого числа событий

$$\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathsf{P}(A_i)-\sum_{i\neq j}\mathsf{P}(A_iA_j)+\sum_{\substack{i\neq j\neq k,\\ i\neq k}}\mathsf{P}(A_iA_jA_k)-\ldots+(-1)^{n+1}\mathsf{P}(A_1\cdot\ldots\cdot A_n)$$

.

Задачи

1.4.1 [5.1]**.** Каждое из четырех несовместных событий может произойти соответственно с вероятностями 0,012, 0,010, 0,006 и 0,002. Определить вероятность того, что в результате опыта произойдет хотя бы одно из этих событий.

1.4.2 [5.2]**.** Стрелок производит один выстрел в мишень, состоящую из центрального круга и двух концентрических колец. Вероятности попадания в круг и кольца соответственно равны 0,20, 0,15 и 0,10. Определить вероятность непопадания в мишень.

1.4.3 [5.5]**.** Какова вероятность извлечь из колоды в 52 карты фигуру любой масти или карту пиковой масти (фигурой называется валет, дама или король)?

1.4.4 [5.6]**.** В ящике имеется десять монет по 20 коп., пять монет по 15 коп. и две монеты по 10 коп. Наугад берутся шесть монет. Какова вероятность, что в сумме они составят не более одного рубля?

1.4.5 [5.9]**.** Событие B включает в себя событие A. Доказать, что $\mathsf{P}(A) \le \mathsf{P}(B)$.

1.4.6. Выразить $\mathsf{P}(A+B+C)$ через вероятности событий A, B и C и их произведений.

1.4.7. На балу присутствуют n дам и n кавалеров. На каждый танец кавалеры приглашают дам случайным образом. Какова вероятность того, что на очередной танец хотя бы одна пара окажется в том же составе, что и на предыдущий. Найти предел этой вероятности при $n \to \infty$.

§1.5. Условные вероятности. Независимость событий

Условная вероятность. Независимость

Запись $\mathsf{P}(A/B)$ читается как «вероятность события A при условии B».

Определение. *Условной вероятностью* (события A при условии B) называется величина $\mathsf{P}(A/B) = \dfrac{\mathsf{P}(AB)}{\mathsf{P}(B)}$.

Заметим, что данное определение имеет смысл, только если $\mathsf{P}(B) \neq 0$. При $\mathsf{P}(B) = 0$ условная вероятность $\mathsf{P}(A/B)$ также может быть определена, но другим способом (см. раздел об условных распределениях).

Эмпирический факт. Условная вероятность $\mathsf{P}(A/B)$ есть вероятность события A, когда известно, что B уже произошло.

В случае конечного множества равновероятных исходов данному факту можно привести следующее объяснение.

Если в конечном Ω исходы равновероятны, то $\mathsf{P}(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$.

Если известно, что событие *B* наступило, то исходы $\omega \notin B$ исключаются и фактически теперь в роли Ω выступает *B*. При этом из *A* остаются возможными только исходы, входящие в *AB*. Поэтому $\mathsf{P}(A)\big|_B=\frac{|AB|}{|B|}$.

Через $\mathsf{P}(A)\big|_B$ здесь обозначена вероятность события *A* при известном факте наступления *B*.

Разделив числитель и знаменатель на $|\Omega|$, получим

$$\mathsf{P}(A)\big|_B=\frac{|AB|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|}=\frac{\mathsf{P}(AB)}{\mathsf{P}(B)}\equiv\mathsf{P}(A/B).$$

Заметим, что во введенных обозначениях отмеченный ранее эмпирический факт записывается очень коротко: $\mathsf{P}(A)\big|_B\equiv\mathsf{P}(A/B)$.

Может показаться, что приведённые выше рассуждения являются доказательством данного эмпирического факта, что означало бы, что данное утверждение (для случая равновероятных исходов) является не эмпирическим фактом, а теоремой. Однако эти рассуждения фактически основывались на предположении, что наше знание о том, что событие *B* произошло, не нарушает равновероятности исходов. Это предположение представляется очевидным, поскольку равновероятность исходов — объективная реальность, которая не зависит от того, что мы знаем о событии *B*. Но последнее утверждение — о том, что знания сами по себе не изменяют реальность — это тоже факт эмпирический.

Определение. Событие *A не зависит* от *B*, если $\mathsf{P}(A/B)=\mathsf{P}(A)$.

Утверждение. $\mathsf{P}(A/B)=\mathsf{P}(A)\Leftrightarrow\mathsf{P}(AB)=\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$.

Доказательство. Достаточно записать второе равенство в виде $\mathsf{P}(A)=\frac{\mathsf{P}(AB)}{\mathsf{P}(B)}$ и заметить, что правая его часть, по определению, есть $\mathsf{P}(A/B)$.

Следствие. Если *A* не зависит от *B*, то *B* не зависит от *A*.

Для доказательства достаточно в утверждении поменять местами *A* и *B*.

Как видим, отношение независимости симметрично, поэтому можно пользоваться следующим эквивалентным определением.

Определение. События A и B *независимы*, если $\mathsf{P}(AB)=\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$.

Упражнение 1.5.а. Доказать, что если события A и B независимы, то $\overline{A}$ и B также независимы.

Замечание. Если A и B независимы, а также B и C независимы, то это не влечет независимость событий A и C.

Пример. Достаточно взять A, такое что $0<\mathsf{P}(A)<1$, и положить $B=\Omega$, а $C=\overline{A}$. Легко проверяется, что A и B, а также B и C независимы. В то же время $\mathsf{P}(AC)=\mathsf{P}(A\overline{A})=0$, а $\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(C)=\mathsf{P}(A)\cdot(1-\mathsf{P}(A))>0$, т. е. A и C зависимы.

Определение. События $A_1,\ldots,A_i,\ldots,A_n$ называются *независимыми в совокупности*, если для любого $I\subseteq\{1,\ldots,n\}$ выполнено $\mathsf{P}\left(\prod_{i\in I}A_i\right)=\prod_{i\in I}\mathsf{P}(A_i)$, т. е. если вероятность одновременного наступления любого подмножества из указанных событий равна произведению их вероятностей.

Замечание. Если некоторое множество событий попарно независимы, то они не обязательно независимы в совокупности. Контрпримером, иллюстрирующим данное утверждение, может служить решение следующей задачи.

Упражнение 1.5.б.

Пусть $\Omega=\left\{ABC, AB\overline{C}, A\overline{B}C, A\overline{B}\overline{C}, \overline{A}BC, \overline{A}B\overline{C}, \overline{A}\overline{B}C, \overline{A}\overline{B}\overline{C}\right\}$. Назначить вероятности для перечисленных восьми исходов так, чтобы события A, B и C были попарно независимы, но зависимы в совокупности.

В ответах приведен один из вариантов подходящего назначения вероятностей, в разделе решений делается проверка того, что данное распределение удовлетворяет условию. Если для читателя затруднительно найти решение рекомендуется взять его из ответов, но проверку выполнить самостоятельно.

Эмпирический факт. События, из которых наступление одних не влияет на другие, являются независимыми.

Этот факт можно сформулировать и так: независимые в «физическом смысле» события являются независимыми событиями в теории вероятностей.

Для случая конечного множества однородных (симметричных) исходов справедливость указанного факта можно проиллюстрировать на примерах.

Пример 1. Пусть испытание заключается в одновременном подбрасывании игральной кости и монеты. Очевидно, что число очков, выпавшее на кубике, не влияет на результат бросания монеты и наоборот. Поэтому, согласно последнему эмпирическому факту, события, касающиеся числа очков на кости и выпавшей стороны монеты должны быть независимыми.

Проверим, так ли это. Множеством исходов будет $\Omega = \{(1, Г), (2, Г), (3, Г), (4, Г), (5, Г), (6, Г), (1, Р), (2, Р), (3, Р), (4, Р), (5, Р), (6, Р)\}$, где, например, исход (4, Г) соответствует выпадению четырех очков на кубике и герба на монете. Поскольку все исходы симметричны, то $\mathsf{P}(\{(4, Г)\}) = \frac{1}{12}$.

С другой стороны, $\mathsf{P}(\{4\}) = \frac{1}{6}$, а $\mathsf{P}(\{Г\}) = \frac{1}{2}$. Получаем $\mathsf{P}(\{(4, Г)\}) = \mathsf{P}(\{4\})\,\mathsf{P}(\{Г\})$, т. е. события {4} и {Г} независимы.

Аналогично проверка может быть осуществлена и для других событий.

Пример 2. Пусть Ω_1 и Ω_2 – две конечные совокупности однородных исходов. Покажем, что если исходы из данных совокупностей не влияют друг на друга, то любые $A \in \Omega_1$ и $B \in \Omega_2$ независимы.

Образуем $\Omega = \{\omega_1\omega_2 \mid \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2\}$. Поскольку исходы из Ω_1 не влияют на Ω_2 и наоборот, то исходы, образующие Ω, однородны.

Отсюда $\mathsf{P}(AB) = \dfrac{|AB|}{|\Omega|} = \dfrac{|A||B|}{|\Omega_1||\Omega_2|} = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B)$.

Формула для произведения событий

Рекуррентно используя определение условной вероятности, легко получить формулу для произведения *n* событий:

$$\mathsf{P}(A_1A_2...A_n) = \mathsf{P}(A_1)\,\mathsf{P}\left({}^{A_2}\!\big/_{A_1}\right)\mathsf{P}\left({}^{A_3}\!\big/_{A_1A_2}\right)\ldots\,\mathsf{P}\left({}^{A_n}\!\big/_{A_1A_2...A_{n-1}}\right).$$

Полученное соотношение также называют *теоремой умножения*.

Несмотря на громоздкость, формула очень проста. Действительно, в правой части стоит просто произведение вероятностей каждого события при условии наступления предыдущих. На самом деле, использовать данную формулу проще, чем выписывать.

Заметим, что формула справедлива для любых событий. Для независимых событий, она принимает вид: $\mathsf{P}(A_1A_2...A_n) = \mathsf{P}(A_1)\,\mathsf{P}(A_2)\ldots\,\mathsf{P}(A_n)$.

Для иллюстрации применения теоремы умножения рассмотрим следующую задачу. Монета бросается до тех пор, пока не выпадет решетка. Какова вероятность, что в первых трёх испытаниях выпадет герб?

Сначала приведём некорректное решение данной задачи.

Обозначим через A_i выпадение герба в i-м испытании. Поскольку выпадение герба или решётки не зависит от того, что выпало в предыдущих испытаниях, то все A_i независимы, поэтому $\mathsf{P}(A_1A_2A_3)=\mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2)\mathsf{P}(A_3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$.

Ответ: $\frac{1}{8}$.

Несмотря на то что ответ верный, решение не является правильным. Оно было бы верным, если бы после выпадения решётки испытания не прекращались. В нашем же случае, например, A_3 подразумевает выпадение герба и во всех предыдущих испытаниях, т. е. $A_3 = A_1A_2A_3$. При этом события A_i оказываются зависимыми. Правильным решением будет

$$\mathsf{P}(A_1A_2A_3)=\mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}\left({A_2}/{A_1}\right)\mathsf{P}\left({A_3}/{A_1A_2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что вероятность выпадения герба в любом испытании, при условии, что это испытание проводится, есть $\frac{1}{2}$.

Задачи

1.5.1 [4.1]**.** Два стрелка, для которых вероятности попадания в мишень равны соответственно 0,7 и 0,8, производят по одному выстрелу. Определить вероятность хотя бы одного попадания в мишень.

1.5.2 [4.2]**.** Вероятность выхода из строя k-го блока вычислительной машины за время T равна p_k (k=1, 2, …, n). Определить вероятность выхода из строя за указанный промежуток времени хотя бы одного из n блоков этой машины, если работа всех блоков взаимно независима.

1.5.3 [4.3]**.** Вероятность наступления события в каждом опыте одинакова и равна 0,2. Опыты производятся последовательно до наступления события. Определить вероятность того, что придется производить четвёртый опыт.

1.5.4 [4.7]**.** Сколько нужно взять чисел из таблицы случайных чисел, чтобы с вероятностью не менее 0,9 быть уверенным, что среди них хотя бы одно число чётное?

1.5.5 [4.9]**.** В круг радиуса R вписан равносторонний треугольник. Какова вероятность того, что четыре наугад поставленные в данном круге точки окажутся внутри треугольника?

1.5.6 [4.11]**.** События A и B несовместны, $\mathsf{P}(A) \neq 0$, $\mathsf{P}(B) \neq 0$. Зависимы ли данные события?

1.5.7 [4.14]**.** Три игрока играют на следующих условиях. Сначала против первого последовательно ходят второй и третий игроки. При этом первый игрок не выигрывает, а вероятности выигрыша для второго и третьего игроков одинаковы и равны 0,3. Если первый игрок не проигрывает, то он делает по одному ходу против второго и третьего игроков и выигрывает у каждого с вероятностью 0,4. После этого игра заканчивается. Определить вероятность того, что в результате такой игры первый игрок выиграет хотя бы у одного партнера.

1.5.8 [4.15]**.** Вероятность поражения первой мишени для данного стрелка равна 2/3. Если при первом выстреле зафиксировано попадание, то стрелок получает право на второй выстрел по второй мишени. Вероятность поражения обеих мишеней при двух выстрелах равна 0,5. Определить вероятность поражения второй мишени.

1.5.9 [4.21]**.** Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и потому набирает ее наугад. Определить вероятность того, что ему придется звонить не более чем в три места. Как изменится вероятность, если известно, что последняя цифра нечетная?

1.5.10 [4.31]**.** В урне имеется n шаров с номерами от 1 до n. Шары извлекаются наудачу по одному без возвращения. Какова вероятность, что при k первых извлечениях номера шаров совпадут с номерами извлечений?

1.5.11 [4.32]**.** В урне имеется два шара — белый и черный. Производятся извлечения по одному шару до тех пор, пока не появится черный шар, причем при извлечении белого шара в урну возвращается этот шар и добавляется ещё два белых шара. Определить вероятность того, что при первых пятидесяти опытах черный шар не будет извлечен.

1.5.12 [4.22]**.** В лотерее n билетов, из которых m выигрышных. Какова вероятность выиграть, имея k билетов?

1.5.13 [5.8]**.** Доказать, что из условия $\mathsf{P}\left(B/\overline{A}\right) = \mathsf{P}\left(B/A\right)$ следует независимость событий A и B.

1.5.14 [5.10]**.** В двух урнах находятся шары, отличающиеся только цветом, причем в первой урне — 5 белых, 11 черных и 8 красных шаров, а во второй — соответственно 10, 8 и 6. Из обеих урн наудачу извлекается по шару. Какова вероятность, что оба шара одного цвета?

1.5.15 [5.23]**.** Двое поочередно кидают монету. Выигрывает тот, у которого раньше появится герб. Определить вероятности выигрыша для каждого из игроков.

1.5.16 [5.24]**.** Трое поочередно кидают монету. Выигрывает тот, у которого раньше появится герб. Определить вероятности выигрыша для каждого из игроков.

1.5.17 [5.25]**.** Вероятность получить очко, не теряя подачи, при игре двух равносильных волейбольных команд равна половине. Определить вероятность получения одного очка для подающей команды.

1.5.18 [5.27]**.** Два стрелка поочередно стреляют по мишени до первого попадания. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,2, а для второго — 0,3. Найти вероятность того, что первый стрелок сделает больше выстрелов, чем первый.

1.5.19. Двое поочередно бросают игральную кость. Выигравшим считается тот, у кого первым выпадет 6 очков. Найти вероятность выигрыша для каждого из игроков.

1.5.20. Три грани тетраэдра окрашены соответственно в красный, зелёный и синий цвета, а четвёртая грань содержит все три цвета. Обозначим через К, З, С – события, когда после подбрасывания тетраэдра, на нижней грани присутствует соответственно красный, зелёный, синий цвет. Являются ли события К, З, С: а) попарно независимыми; б) независимыми в совокупности?

1.5.21. С вероятностью 1/2 в один из восьми ящиков стола (выбран случайно) положили письмо. После этого по очереди открыли 7 ящиков — все оказались пусты. Какова вероятность того, что в последнем ящике письмо?

1.5.22 [2.22]**.** Очередь в кассу, где производится продажа билетов стоимостью 5 коп., состоит из $2n$ человек. Какова вероятность того, что ни одному из покупателей не придётся ждать сдачи, если перед продажей билета первому покупателю в кассе было только $2m$ пятаков, а получение платы за каждый билет равновозможно как пятаком, так и монетой в 10 коп.?

§ 1.6. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Формула полной вероятности

Пусть некоторое интересующее нас событие A может наступить или не наступить с одним из ряда несовместных событий

$$H_1, H_2, \ldots, H_n,$$

составляющих полную группу. События такого ряда обычно называют гипотезами. Вероятности всех гипотез известны:

$$\mathsf{P}(H_1),\ \mathsf{P}(H_2),\ \ldots,\ \mathsf{P}(H_n).$$

Известны также условные вероятности наступления события A при осуществлении каждой из указанных гипотез, т.е. даны

$$\mathsf{P}\left(A/H_1\right), \ldots, \mathsf{P}\left(A/H_n\right).$$

Вероятность события A определяется по *формуле полной вероятности*

$$\mathsf{P}(A)=\sum_{i=1}^{n}\mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}\left(A/H_i\right).$$

Доказательство легко провести, учитывая свойство несовместности полной группы событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Событие A можно представить в виде следующей суммы событий: $A = AH_1 + AH_2 + \cdots + AH_n = \sum_{i=1}^{n} AH_i$. Из аксиомы сложения вероятностей следует, что

$$\mathsf{P}(A)=\sum_{i=1}^{n}\mathsf{P}(AH_i).$$

Применяя в последней сумме определение условной вероятности, получаем искомое тождество.

Формула Байеса

Дважды воспользуемся определением условной вероятности, а именно $\mathsf{P}(A/B)=\dfrac{\mathsf{P}(AB)}{\mathsf{P}(B)}$ и $\mathsf{P}(B/A)=\dfrac{\mathsf{P}(AB)}{\mathsf{P}(A)}$. Выразив из обоих соотношений $\mathsf{P}(AB)$, получаем

$$\mathsf{P}(A/B)\,\mathsf{P}(B)=\mathsf{P}(AB)=\mathsf{P}(B/A)\,\mathsf{P}(A).$$

Оставив только крайние части, получим *формулу Байеса*

$$\mathsf{P}(A/B)\,\mathsf{P}(B)=\mathsf{P}(B/A)\,\mathsf{P}(A).$$

Или, в чаще используемом виде

$$\mathsf{P}(B/A)=\mathsf{P}(A/B)\frac{\mathsf{P}(B)}{\mathsf{P}(A)}.$$

Задачи

1.6.1 [6.1]**.** Имеется две партии изделий по 12 и 10 штук, причем в каждой партии одно изделие бракованное. Изделие, взятое наудачу из первой партии, переложено во вторую, после чего выбирается наудачу изделие из второй партии. Определить вероятность извлечения бракованного изделия из второй партии.

1.6.2 [6.2]**.** Из полного набора костей домино наугад берутся две кости. Определить вероятность того, что вторую кость можно приставить к первой.

1.6.3 [6.3]**.** В двух урнах находится соответственно m_1 и m_2 белых и n_1 и n_2 черных шаров. Из каждой урны наудачу извлекается один шар, а затем из этих двух шаров наудачу берется один. Какова вероятность того, что этот шар белый?

1.6.4 [6.5]**.** В тире имеется пять ружей, вероятности попадания из которых равны соответственно 0,5; 0,6; 0,7; 0,8 и 0,9. Определить вероятность попадания при одном выстреле, если стреляющий берёт одно из ружей наудачу.

1.6.5 [6.6]**.** Для контроля продукции из трёх партий деталей взята для испытания одна деталь. Как велика вероятность обнаружения бракованной продукции, если в одной партии 2/3 деталей бракованные, а в других — все доброкачественные?

1.6.6 [6.7]**.** Радиолампа может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями p_1, p_2, p_3, где $p_1 = p_3 = 0{,}25$, $p_2 = 0{,}5$. Вероятности того, что лампа проработает заданное число часов, равны соответственно 0,1; 0,2 и 0,4. Определить вероятность того, что лампа проработает заданное число часов.

1.6.7 [6.12]**.** Определить вероятность того, что 100 лампочек, взятых наудачу из 1000, окажутся исправными, если известно, что число испорченных лампочек на 1000 штук равновозможно от 0 до 5.

1.6.8 [6.14]**.** В ящике находятся 15 теннисных мячей, из которых 9 новых. Для первой игры наугад берутся три мяча, которые после игры возвращаются в ящик. Для второй игры также наугад берутся три мяча. Найти вероятность того, что все мячи, взятые для второй игры, новые.

1.6.9 [6.19]**.** Для поисков пропавшего самолёта выделено 10 вертолётов, каждый из которых может быть использован для поисков в одном из двух возможных районов, где самолет может находиться с вероятностями 0,8 и 0,2. Как следует распределить вертолёты по районам поисков, чтобы вероятность обнаружения самолёта наибольшей, если каждый вертолёт обнаруживает находящийся в районе поиска самолёт с вероятностью 0,2, а поиски осуществляются каждым вертолетом независимо от других? Найти вероятность обнаружения самолёта при оптимальной процедуре поисков.

1.6.10 [7.1]**.** Имеется десять одинаковых урн, из которых в девяти находятся по два черных и по два белых шара, а в одно пять белых и один чёрный шар. Из урны взятой наудачу извлечен белый шар. Какова вероятность, что шар извлечён из урны, содержащей пять белых шаров?

1.6.11 [7.5]**.** Определить вероятность того, что среди 1000 лампочек нет ни одной неисправной, если из взятых наудачу 100 лампочек все оказались исправными. Предполагается, что число неисправных лампочек из 1000 равновозможно от 0 до 5.

1.6.12 [7.7]**.** Из 18 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0,8; 7 — с вероятностью 0,7; 4 — с вероятностью 0,6 и 2 — с вероятностью 0,5.

Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел, но в мишень не попал. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот стрелок?

1.6.13 [7.8]**.** Вероятности попадания при каждом выстреле для трех стрелков равны соответственно 4/5, 3/4, 2/3. При одновременном выстреле всех трех стрелков имелось два попадания. Определить вероятность того, что промахнулся третий стрелок.

1.6.14 [7.9]**.** Трое охотников одновременно выстрелили по вепрю, который был убит одной пулей. Определить вероятности того, что вепрь убит первым, вторым или третьим охотником, если вероятности попадания для них равны соответственно 0,2; 0,4; 0,6.

1.6.15 [7.12]**.** Из двух близнецов первый – мальчик. Какова вероятность, что второй тоже мальчик, если среди близнецов вероятность рождения двух мальчиков и двух девочек соответственно равны a и b, а для разнополых близнецов вероятность родиться первым для обоих полов одинакова?

1.6.16 [7.18]**.** Получена партия из восьми изделий одного образца. По данным проверки половины партии, три изделия оказались технически исправными, а одно бракованным. Какова вероятность, что при проверке трех последующих изделий одно из них окажется исправным, а два бракованными, если любое количество бракованных изделий в данной партии равновозможно?

1.6.17 [5.37]**.** Задача о четырех лгунах. Из четырех человек *а, б, в, г* один (*а*) получил информацию, которую в виде сигнала «да» или «нет» сообщает второму (*б*), второй — третьему (*в*), третий — четвертому (*г*), а последний объявляет результат полученной информации таким же образом, как и все другие. Известно, что каждый из них говорит правду только в одном случае из трех. Какова вероятность, что первый из этих лгунов сказал правду, если четвёртый сказал правду?

1.6.18. Мегамозг решил сыграть в Поле Чудес. Ведущий выносит ему три шкатулки. В одной ключи от квартиры, в двух других пусто. Мегамозг показывает на одну из шкатулок, но прежде чем показать её содержимое, ведущий сначала открывает одну пустую из двух оставшихся (он знает, где лежат ключи), а затем предлагает поменять свой выбор. Какова вероятность получить ключи, если согласиться с таким предложением?

§ 1.7. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли. Полиномиальное распределение

Повторные независимые испытания

Пусть производится несколько испытаний, в каждом из которых может произойти некоторое событие A_i. Если вероятность события A_i в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания являются независимыми. Если при этом $\mathsf{P}(A_i)$ для всех i одна и та же, то говорят, что для таких испытаний имеет место *схема Бернулли*. Появление события A_i в некотором испытании также называют *успехом*.

Вероятность $P_{n;m}$ появления ровно m успехов при n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность $\mathsf{P}(A_i) = p$, определяется формулой *биномиального распределения* (*формула Бернулли*)

$$P_{n;m} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

Для вывода данной формулы заметим, что $\mathsf{P}\left(A_1 A_2 \cdots A_m \overline{A}_{m+1} \cdots \overline{A}_n\right) = p^m (1-p)^{n-m}$. Так как нам безразлично, в каком именно порядке случилось m успехов, необходимо просуммировать вероятности для всех комбинаций успехов и неуспехов, и, поскольку все эти вероятности одинаковы, а число комбинаций равно C_n^m, получаем искомое выражение.

Так как события, состоящие в различном числе успехов в серии из n испытаний, несовместны и образуют полную группу, то $\sum\limits_{m=0}^{n} P_{n;m} = 1$.

Вероятность появления события не менее m раз при n испытаниях вычисляется по формуле $R_{n;m} = \sum\limits_{k=m}^{n} P_{n;k}$ либо $R_{n;m} = 1 - \sum\limits_{k=0}^{m-1} P_{n;k}$.

Вероятность появления события хотя бы один раз при n опытах равна $R_{n;1} = 1-(1-p)^n$.

Из приведённой выше формулы можно получить количество n опытов, которые нужно провести для того, чтобы с вероятностью не меньше P можно было утверждать, что данное событие произойдет хотя бы один раз: $n \geq \dfrac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)}$.

Наивероятнейшим числом μ появления события в n независимых испытаниях является число, для которого вероятность $P_{n;\mu}$ не меньше вероятности каждого из остальных возможных исходов. Решая неравенства $P_{n;\mu} > P_{n;\mu+1}$ и $P_{n;\mu} \geq P_{n;\mu-1}$, получаем $\mu = \left[(n+1)p\right]$, где квадратные скобки означают взятие целой части числа, а при целом $(n+1)p$ наибольшее значение вероятности достигается при двух числах $\mu_1 = (n+1)p - 1$ и $\mu_2 = (n+1)p$.

Полиномиальное распределение

Рассмотрим общую задачу, когда в любом i-м испытании из n независимых испытаний может произойти только одно из образующих полную группу несовместных событий $D_1^i, D_2^i, ..., D_k^i$, вероятности наступления которых равны соответственно $p_1, p_2, ..., p_k$, $\sum_{j=1}^{k} p_j = 1$. Вероятность того, что события D_j^i (j = 1, …, k) произойдут ровно n_j раз ($\sum_{j=1}^{k} n_j = n$), определяется формулой полиномиального распределения:

$$P_{n;n_1,...,n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k} .$$

Очевидно, что формула биномиального распределения является частным случаем полиномиального при $k = 2$.

Задачи.

1.7.1 [8.1]**.** Определить вероятность того, что номер первой встретившейся автомашины не содержит: а) цифры пять; б) двух и более пятёрок; в) ровно двух пятёрок. Известно, что все номера четырехзначные, неповторяющиеся и равновозможные (считается возможным номер 0000).

1.7.2 [8.2]**.** В семье 10 детей. Считая вероятности рождения мальчика и девочки 0,5, определить вероятность того, что в данной семье: а) пять мальчиков; б) мальчиков не менее трех, но не более восьми.

1.7.3 [8.10]**.** По мишени в тире произведено 200 независимых выстрелов при одинаковых условиях, которые дали 116 попаданий. Определить, какое значение вероятности попадания на один выстрел более вероятно: 1/2 или 2/3, если до опыта обе гипотезы равновероятны и единственно возможны.

1.7.4 [8.18]**.** Два баскетболиста делают по три броска мячом в корзину. Вероятности попадания мяча при каждом броске равны соответственно 0,6 и 0,7. Найти вероятность того, что: а) у обоих будет равное количество попаданий; б) у первого баскетболиста будет больше попаданий, чем у второго.

1.7.5 [8.41]**.** Для данного баскетболиста вероятность забросить мяч в корзину при броске равна 0,4. Произведено 10 бросков. Найти наивероятнейшее число попаданий и соответствующую вероятность.

1.7.6 [9.1]**.** В урне имеется три шара: черный, красный и белый. Из урны шары извлекались по одному пять раз, причем после каждого извлечения шар возвращался на место. Определить вероятность того, что черный и белый шары извлекались не менее чем по два раза каждый.

1.7.7. Какова вероятность того, что при 21 бросании игральной кости количество выпадений каждого числа будет равно этому числу?

1.7.8. Автомат фасует конфеты с темной и светлой начинкой по 30 шт. в коробку. Найти вероятность того, что в заданной коробке количество конфет разных видов будет отличаться более чем вдвое, если изначально конфеты перемешаны в большом объёме в равной пропорции.

Глава 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

§ 2.1. Дискретные случайные величины

Понятие случайной величины

Определение. Функция $X(\omega)$ называется *измеримой,* если прообраз любого интервала из области значений является измеримым множеством.

Определение. *Случайной величиной* X называется измеримая функция $X:\Omega\to\mathbf{R}$ на множестве элементарных исходов.

Данное определение удобно в использовании, но не вполне наглядно, так как в нем исходы полагаются ненаблюдаемыми элементами некоторого «абстрактного» множества.

Если X не входит в систему случайных величин (см. § 2.6), то значения этой величины можно отождествить с самими исходами, т. е. считать Ω подмножеством действительных чисел и положить $X(\omega)\equiv\omega$. Такая интерпретация подразумевалась в теме «Геометрические вероятности».

Измеримость функции $X(\omega)$ означает существование функции распределения.

Определение. *Функцией распределения* случайной величины X называется функция $F:X\to[0,1]$, значение которой в точке x есть $F(x)=\mathsf{P}(X(\omega)<x)$.

Из определения элементарно устанавливаются следующие свойства функции распределения:

1) функция распределения является монотонно неубывающей, т. е.
$$x_2>x_1\Rightarrow F(x_2)\geq F(x_1);$$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$;

4) $\mathsf{P}\left(x_1 \le X(\omega) < x_2\right) = F(x_2) - F(x_1)$;

5) $F(x) = F(x-0)$ – непрерывность слева.

Запись $F(x-0)$ обозначает предел функции слева: $F(x-0) \equiv \lim\limits_{x'<x,\ x'\to x} F(x')$.

Дискретные случайные величины

Определение. Случайная величина называется *дискретной*, если найдётся не более чем счётное подмножество её значений, имеющее вероятность 1.

Таким образом формально множество значений дискретной случайной величины составляют все вещественные числа, однако на практике она может принимать только счетный набор значений. При этом мы будем, за редким исключениям, рассматривать только случаи, когда все элементарные исходы являются целыми числами.

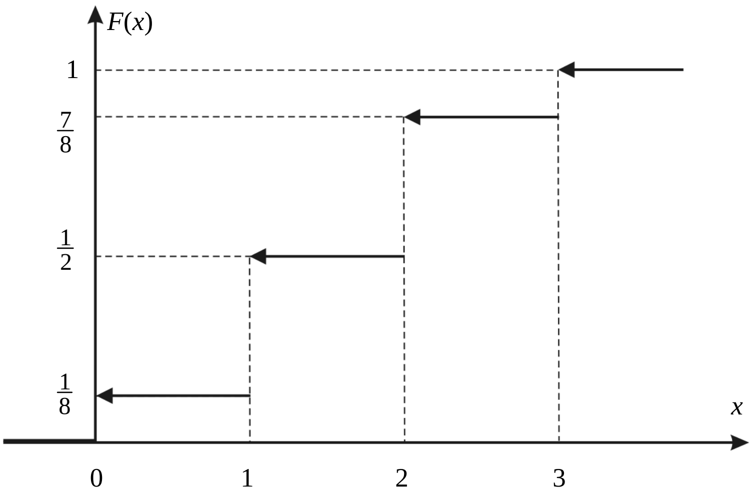

Рис. 2. Функция распределения для числа выпадений герба при трёх бросаниях монеты.

Функция распределения дискретной случайной величины вычисляется по формуле

$$F(x)=\mathsf{P}(X(\omega)<x)=\sum_{x_i<x} p_i \,.$$

Определение. *Рядом распределения* дискретной случайной величины называется совокупность всех возможных ее значений и соответствующих им вероятностей, т. е. множество пар (x_i, p_i), где $p_i = \mathsf{P}(X(\omega)=x_i)$.

Графическое изображение ряда называется *многоугольником* распределения.

На рис. 2 приведён пример функции распределения для дискретной случайной величины (числа выпадений герба при трёх бросаниях монеты). Стрелки на графике указывают, что в точках разрыва функция непрерывна слева.

Обычно функция распределения дискретной случайной величины является кусочно-постоянной. В дальнейшем мы только такие величины и будем рассматривать, за исключением следующего примера.

Зададим распределение на множестве всех правильных дробей (включая сократимые). Заметим, что под дробью мы здесь понимаем пару чисел (числитель и знаменатель), а не соответствующее рациональное число.

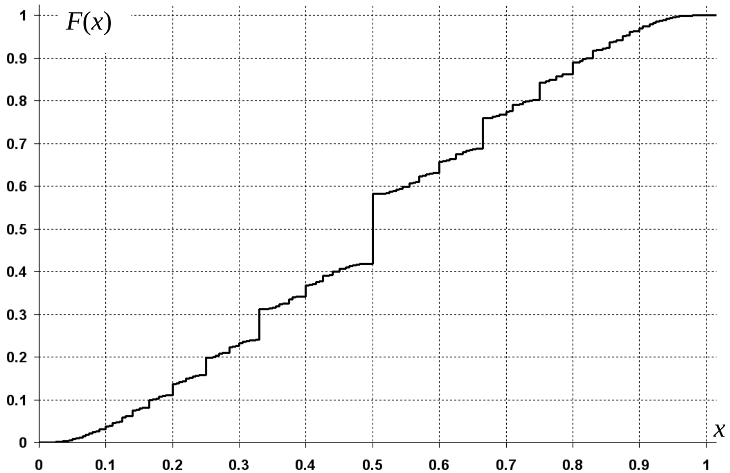

Рис. 3. Функция распределения на множестве правильных дробей.

Припишем подклассу дробей со знаменателем k вероятность $p_k = (1-q)\,q^{k-2}$, $k = 2,\ldots,\infty$. В пределах подкласса дроби с разными числителями положим равновероятными. Таким образом $\mathsf{P}\left(\frac{n}{k}\right)=\frac{p_k}{k-1}$.

Рассмотрим теперь случайную величину, соответствующую значениям рассмотренных дробей.

Очевидно, что её распределение дискретно. При этом на отрезке $[0,1]$ не существует пары чисел с одинаковым значением функции распределения (поскольку между любыми числами находится бесконечное множество рациональных чисел, и каждому рациональному числу из $[0,1]$ мы приписали ненулевую вероятность).

На рис. 3 приведён график функции распределения для рассмотренной случайной величины при $q = 0{,}9$.

Упражнение 2.1.а. Построить функцию распределения для случайной величины, тождественно равной нулю.

Задачи

2.1.1 [10.1]**.** Построить ряд распределения и функцию распределения случайного числа попаданий мячом в корзину при одном броске, если вероятность попадания мячом в корзину при одном броске равна 0,3.

2.1.2 [10.2]**.** Опыт состоит из трех независимых бросаний монеты, при каждом из которых герб выпадает с вероятностью $p = 0{,}5$. Для случайного числа появления герба построить: а) ряд распределения; б) многоугольник распределения; в) функцию распределения.

2.1.3 [10.3]**.** Производятся последовательные независимые испытания пяти приборов на надёжность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надёжным. Построить ряд распределения случайного числа испытанных приборов, если вероятность выдержать испытание для каждого из них равна 0,9.

2.1.4 [10.4]**.** Независимые опыты продолжаются до первого положительного исхода, после чего они прекращаются. Найти для случайного числа опытов: а) ряд распределения; б) многоугольник распределения; в) наивероятнейшее число опытов, если вероятность положительного исхода при каждом опыте равна 0,5.

2.1.5 [10.5]**.** Два баскетболиста поочередно забрасывают мяч в корзину до тех пор, пока один из них не попадёт. Построить ряд распределения случайного числа бросков, производимых каждым из баскетболистов, если вероятность попадания для первого равна 0,4, а для второго 0,6.

2.1.6 [10.9]**.** Производятся испытания n изделий на надёжность, причем вероятность выдержать испытание для каждого изделия равна p. Построить ряд распределения случайного числа изделий, выдержавших испытания.

2.1.7. На плоскости нанесены точки в узлах квадратной сетки со стороной 1. На плоскость бросается монета, диаметром 2. Построить ряд распределения для случайного числа точек, закрытых монетой.

2.1.8. Построить ряд и функцию распределения для случайного числа номеров, угадываемых в одном лотерейном билете «Спортлото 5 из 36».

§ 2.2. Непрерывные случайные величины

Понятие непрерывной случайной величины

Для непрерывной случайной величины не определено понятие ряда распределения, взамен которого вводится понятие плотности вероятности.

Определение. Случайная величина называется *абсолютно непрерывной*, если для нее определена плотность вероятности.

Следуя работе [1], мы для краткости такие величины будем называть просто *непрерывными*.

Определение. *Плотностью вероятности* для случайной величины X называется функция $f(x)$, такая что

1) $\mathsf{P}\big(a \le X(\omega) < b\big) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Интеграл в данном выражении следует понимать в смысле интеграла Лебега (см. следующий раздел).

Неравенства в условии могут быть как строгими, так и нестрогими, поскольку $\mathsf{P}\big(X(\omega)=a\big)=\mathsf{P}\big(X(\omega)=b\big)=0$ — вероятность принятия непрерывной случайной величиной любого заданного значения равна нулю.

Приведённое выражение определяет $f(x)$ не вполне однозначно, поскольку если изменить произвольным образом значения функции на любом множестве с нулевой мерой Лебега (не давая строгого определения, отметим, что длина, площадь и объём являются примерами меры Лебега), то значение интеграла не изменится.

Известно, что абсолютно непрерывная функция распределения является дифференцируемой *почти всюду*, т.е. на всей области определения за исключением, возможно, некоторого множества меры нуль.

Кроме того известно, что почти всюду выполняется равенство $f(x)=\frac{dF(x)}{dx}$.

При этом, из приведённого определения плотности не следует, что $f(x)=\frac{dF(x)}{dx}$ во всех точках, где производная существует, поскольку на любом множестве меры нуль мы можем произвольным образом переопределять $f(x)$, не меняя значений интеграла.

Чтобы уменьшить неопределённость, потребуем от плотности выполнения ещё двух свойств:

2) $f(x)=\frac{dF(x)}{dx}$ везде, где производная существует;

3) $f(x)\geq 0$.

Свойства 2 и 3 могут выступать в качестве определения плотности вероятности.

Очевидно, что для плотности вероятности также справедливы свойства:

4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$;

5) $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

Для понимания содержательного смысла плотности вероятности полезно провести аналогию с плотностью физических тел, когда вероятность выступает в роли массы. Так для нахождения массы тела достаточно проинтегрировать плотность по объему, а для нахождения вероятности попадания в область интегрируется плотность вероятности.

Функция распределения непрерывной случайной величины является непрерывной. При этом непрерывность функции распределения есть необходимое, но не достаточное условие непрерывности случайной величины.

Определение. Функция $f(x)$, заданная на некотором отрезке $[a,b]$, называется *абсолютно непрерывной*, если для любого $\varepsilon>0$ найдётся $\delta>0$, такое что какова бы ни была конечная система попарно непересекающихся интервалов (a_k,b_k), $k=1,\ldots,n$, с суммой длин, меньшей δ, выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}\left| f(b_k)-f(a_k)\right|<\varepsilon .$$

Свойство. Всякая абсолютно непрерывная функция равномерно непрерывна.

Свойство. Непрерывность случайной величины эквивалентна абсолютной непрерывности её функции распределения.

Сингулярные случайные величины

Кроме (абсолютно) непрерывных случайных величин непрерывной функцией распределения обладают сингулярные случайные величины.

Определение. Случайная величина называется сингулярной, если существует множество её значений, имеющее нулевую меру Лебега и единичную вероятностную меру, и при этом вероятность любого значения в отдельности равна нулю.

Классическим примером сингулярного распределения является функция распределения (рис. 4) в виде «лестницы Кантора».

Данная функция $F_K(x)$ строится следующим образом.

На концах единичного отрезка функции приписываются соответственно значения 0 и 1.

Отрезок разбивается на три равные части. На средней части значение функции полагается равным среднему арифметическому значений функции на концах отрезка. На остальных частях функция определяется рекурсивным применением описанной процедуры.

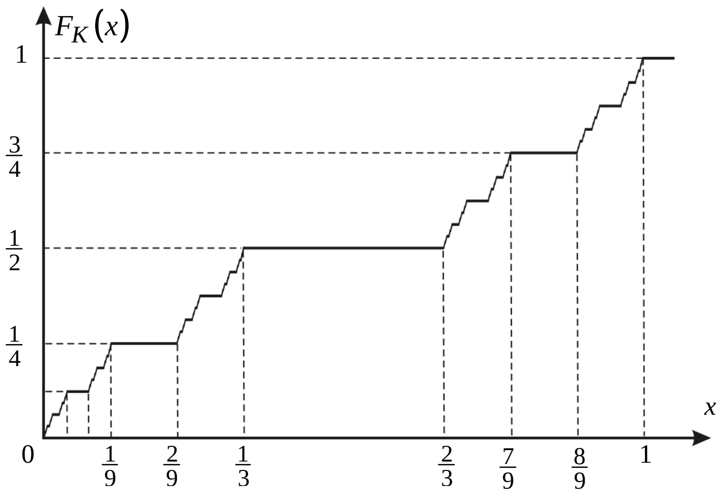

Рис. 4. Функция распределения в виде «лестницы Кантора».

В точках, не принадлежащих ни одному «серединному интервалу», функция доопределяется по непрерывности.

Полученная функция почти везде постоянна, за исключением континуального множества, имеющего нулевую меру Лебега.

Заметим, что если обратить функцию дискретного распределения на рис. 3, то получится функция, качественно похожая на «лестницу Кантора». Такое сходство неслучайно.

Функция $F_K(x)$ имеет области постоянства, поэтому её обращение неоднозначно.

Упражнение 2.2.а. Доказать, что функцию $F_K(x)$ можно обратить, определяя обратную функцию в точках неоднозначности таким образом, что результат будет являться дискретной функцией распределения. Построить соответствующий ряд распределения.

Определение. *Смесью* распределений с функциями $F_1(x)$ и $F_2(x)$ называется распределение $F(x) = \alpha F_1(x) + (1-\alpha)F_1(x)$, где $0 < \alpha < 1$.

Свойство. Любое распределение может быть представлено как смесь дискретного, абсолютно непрерывного и сингулярного распределений.

Таким образом, мы охарактеризовали все возможные типы распределений. В дальнейшем будут рассматриваться только дискретные и непрерывные случайные величины.

Задачи

2.2.1 [11.1]**.** Функция распределения равномерно распределенной случайной величины *X* имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \le x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найти плотность вероятности случайной величины *X*.

2.2.2 [11.2]**.** Дана функция распределения случайной величины $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ (закон нормального распределения). Найти плотность вероятности случайной величины *X*.

2.2.3 [11.8]**.** Дана функция распределения (закон Коши) случайной величины *X*: $F(x) = c + b \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a}$, $-\infty < x < +\infty$. Определить постоянные b и c и плотность вероятности.

2.2.4 [11.10]**.** При каком значении a функция

$$f(x) = \frac{a}{1+x^2} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

является плотностью вероятности случайной величины *X*?

Найти: а) функцию распределения случайной величины *X*; б) вероятность попадания случайной величины в интервал [–1, 1].

2.2.5 [11.13]**.** Известно, что вероятность выхода из строя электронной лампы в течение Δx дней, с точностью до величины порядка малости более высокого чем Δx, равна $k\,\Delta x$ независимо от величины x дней, которые лампа проработала до интервала времени Δx. Какова вероятность выхода из строя лампы в течение l дней?

2.2.6 [11.4]**.** Функция распределения случайного времени безотказной работы радиоаппаратуры имеет вид (экспоненциальный закон распределения)

$$F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}, \quad t \geq 0 .$$

Найти: а) вероятность безотказной работы аппаратуры в течение времени T; б) плотность вероятности $f(x)$.

2.2.7. Пассажир «колеса обозрения» в некоторый случайный момент времени обронил на землю часы. Найти функцию распределения и плотность вероятности для координаты часов на оси, расположенной вдоль прямой, образованной пересечением плоскости вращения колеса и земной поверхностью. Радиус колеса равен R.

2.2.8. Пусковая установка выстреливает заряд фейерверка на высоту 500 м. Заряд срабатывает равновероятно в промежутке с 10 по 15 секунду от момента выстрела. Найти функцию распределения и плотность вероятности для высоты срабатывания фейерверка. Принять $g = -10\, м/c^2$.

2.2.9. В планету, лишенную атмосферы, врезается астероид. Найти плотность вероятности попадания астероида на единицу поверхности в зависимости от местоположения. Диаметр планеты — 5000 км .

2.2.10. Магазин реализует в сутки 500 кг колбасных изделий. Срок годности товара 1 сутки. Весь товар реализуется с витрины, вместимость которой 200 кг. По мере реализации продуктов витрина немедленно пополняется. Какова вероятность приобрести в этом магазине просроченный товар, если по истечении срока годности продукты не убираются с витрины? Считать, что магазин работает круглосуточно, а спрос равномерный.

§ 2.3. Характеристики случайных величин

Математическое ожидание и дисперсия

Определение. *Математическое ожидание* для дискретной случайной величины X определяется формулой

$$\bar{x} = \mathsf{E}\, X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\, p_i \ ,$$

где x_i — возможные значения случайной величины X, $p_i = \mathsf{P}(X = x_i)$ — соответствующие им вероятности. При этом должна иметь место абсолютная сходимость ряда, т.е. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i| \cdot p_i < \infty$.

Для непрерывной случайной величины

$$\bar{x} = \mathsf{E}\, X = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx,$$

где $f(x)$ — плотность вероятности, причём должно выполняться $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot f(x)\, dx < \infty$.

Математическое ожидание случайной величины иногда называют просто средним значением случайной величины.

Определение. *Дисперсия* дискретной случайной величины определяется формулой

$$\mathsf{D}\, X = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \bar{x})^2\, p_i = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i)^2\, p_i - \bar{x}^2 .$$

Для непрерывной случайной величины:

$$\mathsf{D}\, X = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2\, f(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x)\, dx - \bar{x}^2 .$$

Отметим, что для существования математического ожидания в приведенных выше формулах ряд и интеграл должны сходиться абсолютно.

Другие характеристики

Определение. *Среднее квадратическое отклонение* σ определяется соотношением

$$\sigma = +\sqrt{\mathsf{D}\, X} .$$

Данная величина характеризует рассеивание случайной величины, т. е. отражает величину сгруппированости возможных значений случайной величины около центра рассеивания (математического ожидания).

Для симметричного закона распределения характеристикой рассеивания случайной величины может служить *срединное отклонение E*, которое определяется из соотношения*:*

$$\mathsf{P}(|X - \bar{x}| < E) = \tfrac{1}{2} .$$

Число v называется *квантилем* непрерывной случайной величины X для вероятности η, если $F(\nu)=\eta$.

Квантиль для вероятности 0,5 называется *медианой* случайной величины.

Медиана является альтернативной математическому ожиданию характеристикой среднего.

Интеграл Лебега

Для интегрирования по вероятностной мере (в частности для вычисления моментов) интеграл Римана представляет собой неудобную и неестественную конструкцию, поскольку применим только для непрерывных случайных величин.

Для интегрирования по мере служит интеграл Лебега, который позволяет единообразно вести интегрирование по любым распределениям (дискретные, непрерывные, сингулярные).

Поскольку любой интеграл по вероятностной мере можно рассматривать как вычисление математического ожидания некоторой случайной величины, будем определять интеграл Лебега в терминах математических ожиданий.

Определение. *Интеграл Лебега* дискретной случайной величины есть её математическое ожидание, то есть

$$\int_{\Omega} X(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i\,\mathsf{P}(x_i).$$

Это определение соответствует принятому в функциональном анализе определению интеграла Лебега для так называемых простых измеримых функций.

Заметим, что $\mathsf{P}(d\omega)$ – это просто часть обозначения интеграла, и не стоит интерпретировать эту запись как вероятность какого-то события.

Распространим теперь понятие интеграла на другие типы случайных величин.

Определение. Если существует равномерно сходящаяся к $X(\omega)$ последовательность дискретных случайных величин $X_n(\omega)$ с определённым математическим ожиданием, то существует предел

$$\int_{\Omega} X(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega)=\lim_{n\to\infty}\mathsf{E}\,X_n,$$

который называется *интегралом Лебега* функции $X(\omega)$.

Если в интеграле Римана область определения функции разбивается на интервалы, и затем рассматривается предел сумм при устремлении длины интервала к нулю, то интеграл Лебега для ограниченных функций можно ввести, разбивая на интервалы область значений.

Свойство. Пусть $X(\omega)$ – ограниченная измеримая функция, заданная на множестве конечной меры P. Интеграл Лебега функции $X(\omega)$ есть предел

$$\int_{\Omega} X(\omega)\mathsf{P}(d\omega) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \mathsf{P}(A_i),$$

где $x_i = a + (b-a)\frac{i}{n}$, $(a,b]$ – некоторый интервал, которому принадлежит область значений функции $X(\omega)$, A_i – прообраз интервала $(x_{i-1}, x_i]$.

В отличие от интеграла Римана, интеграл Лебега применим в случаях, когда область определения интегрируемой функции представляет собой пространство, даже нечисловой природы, где не определено понятие интервала. Кроме того, он позволяет интегрировать даже некоторые всюду разрывные функции, например, функцию Дирихле (функция определена на интервале [0, 1] и принимает значение 1 во всех рациональных точках и значение 0 в иррациональных).

Определение. *Математическое ожидание* случайной величины $X(\omega)$ есть

$$\mathsf{E}X = \int_{\Omega} X(\omega)\mathsf{P}(d\omega).$$

Ранее мы ввели понятие математического ожидания для дискретной случайной величины, затем с его помощью определили понятие интеграла Лебега, и теперь через этот интеграл определили математическое ожидание в общем случае.

Введённое ранее независимое определение математического ожидания непрерывной случайной величины не противоречит общему определению, поскольку, когда существует интеграл Римана, его значение совпадает со значением интеграла Лебега.

Для математического ожидания очень удобна форма записи в виде *интеграла Лебега-Стилтьеса*

$$\mathsf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF(x).$$

В контексте случайных величин данное выражение можно считать попросту альтернативной формой записи интеграла Лебега.

Упражнение 2.3.а. Вычислить математическое ожидание и дисперсию для случайной величины с функцией распределения (рис. 4) в виде «лестницы Кантора».

При определении математического ожидания мы требовали абсолютную интегрируемость.

Действительно, если нет дополнительных оговорок, то, говоря о существовании математического ожидания, предполагают его конечность. Однако в некоторых случаях имеет смысл говорить о бесконечном математическом ожидании.

Обозначим $\mathsf{E}^{+}X = \int\limits_{0}^{\infty} x\,dF(x)$ и $\mathsf{E}^{-}X = \int\limits_{-\infty}^{0} x\,dF(x)$.

Определение. При $\mathsf{E}^{+}X = +\infty$ и $\mathsf{E}^{-}X > -\infty$ положим $\mathsf{E}X = +\infty$, при $\mathsf{E}^{+}X < +\infty$ и $\mathsf{E}^{-}X = -\infty$ положим $\mathsf{E}X = -\infty$.

Заметим, что при $\mathsf{E}^{+}X = +\infty$ и $\mathsf{E}^{-}X = -\infty$ математическое ожидание не существует ни в каком смысле (даже если соответствующий интеграл существует в смысле главного значения).

Упражнение 2.3.б. Доказать, что математическое ожидание для распределения Коши не существует. Распределение Коши имеет плотность вероятности $\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$.

Задачи

2.3.1 [12.1]**.** Определить математическое ожидание числа приборов, давших отказ за время испытаний на надежность, если испытанию подвергается один прибор, а вероятность его отказа — p.

2.3.2 [12.2]**.** Считая, что вес тела с одинаковой вероятностью может быть равен любому целому числу граммов от 1 до 10, определить, при какой из трех систем разновесов: а) 1, 2, 2, 5, 10; б) 1, 2, 3, 4, 10; в) 1, 1, 2, 5, 10 — среднее число необходимых для взвешивания гирь будет наименьшим, если при взвешивании разрешается гири ставить только на одну чашу, а подбор гирь при взвешивании осуществляется так, чтобы использовать наименьшее число гирь.

2.3.3. Найти математическое ожидание и дисперсию количества выпавших очков при одном бросании игральной кости.

2.3.4 [12.7]**.** Первый игрок бросает 3, а второй 2 одинаковых монеты. Выигрывает и получает все 5 монет тот, у которого выпадает большее число гербов. В случае ничьей игра повторяется до получения определенного результата. Каково математическое ожидание выигрыша для каждого из игроков?

2.3.5 [12.28]**.** Из сосуда, содержащего m белых и n черных шаров, извлекаются шары до тех пор, пока не появится белый шар. Найти математическое ожидание числа вытянутых черных шаров и его дисперсию, если каждый шар после извлечения возвращался.

2.3.6 [13.1]**.** Плотность вероятности случайной величины X имеет вид (закон равномерного распределения)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2l} & \text{при}\,|x-a|\le l,\\ 0 & \text{при}\,|x-a|>l.\end{cases}$$

Определить: а) $\mathsf{E}\,X$; б) $\mathsf{D}\,X$; в) найти связь между средним квадратическим и срединным отклонениями случайной величины X.

2.3.7 [13.11]**.** Случайная величина X имеет плотность вероятности (бета-распределение)

$$f(x)=\begin{cases}Ax^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & \text{при}\,0\le x\le 1\,(\alpha>0;\beta>0),\\ 0, & \text{при}\,x<0\ \text{и}\ x>1.\end{cases}$$

Определить параметр A, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

2.3.8 [13.15]**.** Вероятность обнаружения затонувшего судна за время поиска t задается формулой

$$p(t)=1-e^{-\gamma t}\quad(\gamma>0).$$

Определить среднее время поиска, необходимое для обнаружения судна.

2.3.9. Предлагается билет на следующую лотерею. Производятся бросания монеты до первого выпадения решётки. При выпадении подряд n гербов владельцу билета выплачивается сумма 2^n долларов (то есть за каждый последующий герб сумма удваивается). Найти математическое ожидания выигрыша. Оценить справедливую стоимость такого билета.

2.3.10. Данная задача известна как «парадокс конвертов».

Игроку предлагается выбрать один из двух одинаковых на вид запечатанных конвертов с деньгами, причём известно, что сумма в одном из них в 10 раз больше, чем в другом. При этом игроку разрешается вскрыть один конверт, после чего решить, забрать его или оставшийся запечатанным.

Предположим, что игрок открыл наугад взятый конверт и обнаружил в нём 10 долларов. Получается, что в другом конверте можно в равной степени ожидать сумму в 1 доллар или в 100 долларов. В среднем получаем 50 с половиной.

Следует ли из этих рассуждений, что игроку выгоднее отказаться от первоначально выбранного конверта и забрать себе другой конверт? Можно ли считать, что математическое ожидание выигрыша в этом случае (для рассмотренного примера) составит 50,5 долларов?

§ 2.4. Распределение Пуассона

Основные формулы

Определение. Распределение дискретной случайной величины X является *законом распределения Пуассона,* если

$$\mathsf{P}(X = m) = P_m = P(m,a) = \frac{a^m}{m!}e^{-a}.$$

Упражнение 2.4.а. Доказать, что для распределения Пуассона $\mathsf{E}X = \mathsf{D}X = a$.

Распределение Пуассона может быть использовано как приближенное в тех случаях, когда точным распределением случайной величины является биномиальное распределение и когда математическое ожидание мало отличается от дисперсии, т.е. $np \approx np(1-p)$. В этом случае имеет место приближенное равенство

$$P_{n,m} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \approx \frac{a^m}{m!}e^{-a},$$

где $a = np$.

Упражнение 2.4.б. Доказать справедливость приведенного выше соотношения.

Задача. На телефонную станцию в течение определенного часа дня поступает в среднем 30 вызовов. Найти вероятность того, что в течение минуты поступает не более двух вызовов.

Решение. Математическое ожидание числа вызовов за минуту равно $a = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$. Вероятность того, что в течение данной минуты возникнет не более двух вызовов, равна сумме вероятностей того, что в течение данной минуты будет либо 0, либо 1, либо 2 вызова. Поэтому искомая вероятность есть

$$\mathsf{P}(X \le 2) = P_0 + P_1 + P_2 = \frac{a^0}{0!}e^{-a} + \frac{a}{1!}e^{-a} + \frac{a^2}{2!}e^{-a} = e^{-\frac{1}{2}}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4\cdot 2!}\right] \approx 0{,}986$$

.

Задачи

2.4.1 [14.1]**.** Математическое ожидание числа отказов радиоаппаратуры за 10000 часов работы равно 10. Определить вероятность отказа радиоаппаратуры за 100 часов работы.

2.4.2 [14.2]**.** Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течении часа равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 300 абонентов. Какова вероятность, что в течение часа позвонят 4 абонента?

2.4.3 [14.7]**.** Найти вероятность того, что среди 200 изделий окажется более трех бракованных, если в среднем одно изделие составляет 1%.

2.4.4 [14.9]**.** В наблюдениях Резерфорда и Гейгера радиоактивное вещество за промежуток времени 7,5 с испускало в среднем 3,87 α-частицы. Найти вероятность того, что за 1 с это вещество испустит хотя бы одну α-частицу.

2.4.5 [14.8]**.** Корректура в 500 страниц содержит 500 опечаток. Найти вероятность того, что на странице не меньше трех опечаток.

2.4.6. Слон проходит по полю, на котором сидят жуки, в среднем пять особей на 1 м^2. Найти распределение вероятностей для числа раздавленных жуков, если слон сделал 100 шагов, а площадь контакта ступни с поверхностью составляет 10 дм^2.

2.4.7. Грибник находит в среднем 1 гриб в 1 мин. Какова вероятность за час найти более 50 грибов?

2.4.8. Полоса леса длиной 1 км насчитывает 10 000 деревьев. Приняв диаметр ствола равным 0,2 м, найти вероятность того, что пуля, пущенная сквозь полосу перпендикулярно ее направлению, не встретит препятствий.

2.4.9. Стадо слонов численностью 100 голов проходит по полю, расположенному в долине шириной 100 м. Оценить долю вытоптанной растительности, приняв площадь контакта ступни с поверхностью равной 10 дм^2 и длину шага равной 1 м.

§ 2.5. Нормальный закон

Основные формулы

Среди распределений непрерывных случайных величин центральное место занимает *нормальный закон* (закон Гаусса), плотность вероятности которого имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}},$$

где $\bar{x}$ — математическое ожидание, σ_x — среднее квадратическое отклонение.

Имеет место ещё одна форма нормального закона, когда для характеристики нормальной кривой $f(x)$ используют срединное (иногда называемое «вероятное») отклонение E (см. § 2.3), $E = \rho\sqrt{2}\sigma_x \approx 0{,}675\sigma_x$:

$$f(x) = \frac{\rho}{E\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\rho^2}{E^2}(x-\bar{x})^2}.$$

Вероятность того, что нормально распределенная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $[\alpha, \beta]$,

$$\mathrm{P}(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta-\bar{x}}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-\bar{x}}{\sigma_x}\right)\right],$$

где $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ — функция Лапласа (интеграл вероятностей), значения которой даны в таблице.

Функция Лапласа имеет следующие свойства:

1. $\Phi(0) = 0$;
2. $\Phi(\infty) = 1$;
3. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Нормальный закон распределения очень широко распространен в задачах практики. Примерами случайных величин, имеющих нормальное распределение, могут служить различного рода отклонения от номинальных размеров, ошибки при измерении, отклонения при стрельбе и др. Основная особенность нормального закона в том, что он во многих случаях является предельным (см. § 2.8).

Таблица 4. Функция Лапласа.

x	**0,0**	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**
0,	0	797	1585	2358	3108	3829	4515	5161	5763	6319
1,	6827	7287	7699	8064	8385	8664	8904	9109	9231	9426
2,	9545	9643	9722	9786	9836	9876	9907	9931	9949	9963
3,	9973	9981	9986	9990	9993	9995	9997	9998	9999	9999

В таблице 4 приведены значения $\Phi(x)\cdot 10^4$. В первом столбце указаны целые, а в верхней строке — десятые доли аргумента x.

Задачи

2.5.1 [15.1]**.** Измерительный прибор имеет систематическую ошибку 5 м и среднюю квадратическую ошибку 75 м. Какова вероятность того, что ошибка измерения не превзойдет по абсолютной величине 5 м ?

2.5.2 [15.2]**.** Систематическая ошибка удержания высоты самолетом +20 м, а случайная ошибка имеет среднее квадратическое отклонение 75 м. Для полета самолета отведен коридор высотой 100 м. Какова вероятность, что самолет будет лететь ниже, внутри и выше коридора, если самолету задана высота, соответствующая середине коридора?

2.5.3 [15.9]**.** Определить для нормально распределенной случайной величины X, имеющей $\mathsf{E}\, X = 0$,

1) $\mathsf{P}(X \geq k\sigma)$ и 2) $\mathsf{P}(|X| \geq k\sigma)$, при $k = 1, 2, 3$.

2.5.4. Размер диаметра пробирок, изготовляемых лабораторией, можно считать нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием $\bar{x} = 2{,}5$ см и дисперсией $\sigma_x^2 = 0{,}0001\,\text{см}^2$. В каких границах можно практически гарантировать нахождение диаметра пробирки, если за вероятность практической достоверности принимается 0,997 ?

2.5.5. Вероятность попадания в окоп гранатой равна 0,5. Найти возможный диапазон для дисперсии дальности броска. Ширина окопа 1 м. Распределение считать нормальным.

Глава 3. СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

§ 3.1. Основные понятия

Определение. *Системой случайных величин* $X_1, \ldots, X_n$ называется измеримая вещественная вектор-функция $\vec{X}(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ на множестве элементарных исходов.

Область значений этой функции будет некоторым подмножеством в $\mathbf{R}^n$.

Приведенное определение не очень наглядно, поскольку использует понятие абстрактного множества исходов, вообще говоря, ненаблюдаемых. Практически же обычно нет смысла различать исходы, на которых рассматриваемая вектор-функция принимает одинаковые значения, поэтому в качестве исхода можно использовать непосредственно совокупность значений, принимаемых случайными величинами системы, т. е. соответствующие точки в $\mathbf{R}^n$.

Измеримость в приведенном определении эквивалентна существованию функции распределения.

Определение. *Функция распределения* системы случайных величин $X_1,\dots,X_n$ есть $F(x_1,\dots,x_n) = \mathsf{P}(X_1 < x_1,\dots,X_n < x_n)$ — вероятность того, что одновременно каждая из величин примет значение, меньшее соответствующего заданного.

Определение. Случайные величины $X_1,\dots,X_n$ *независимы*, если $F(x_1,\dots,x_n) = F_1(x_1)\cdot\ldots\cdot F_n(x_n)$, т. е. совместная функция распределения представляется как произведение функций распределения по каждой переменной.

Введённое понятие более точно называть *независимостью в совокупности*, но мы будем для краткости говорить просто о независимости.

Также существует понятие попарной независимости, которое мы использовать не будем.

Аналогично одномерному случаю для системы непрерывных случайных величин можно определить плотность вероятности как функцию, интеграл от которой по любой (измеримой) области равен вероятности попадания в эту область.

Свойство. Совместная плотность вероятности $f(x_1,\dots,x_n) = \frac{dF(x_1,\dots,x_n)}{dx_1\dots dx_n}$, если производная существует.

Плотность вероятности по каждой переменной может быть найдена из совместной плотности интегрированием по оставшимся переменным.

В случае дискретных величин ряд распределения для каждой переменной можно найти суммированием многомерного распределения.

Таким образом, зная совместное распределение, всегда можно найти распределения для каждой величины. Поэтому для любой величины, входящей в систему, определены все характеристики, которые введены в § 2.3 для отдельных случайных величин.

Дополнительно для каждой пары случайных величин, входящих в систему, определено понятие корреляции.

Определение. *Корреляционным моментом* случайных величин X_i и X_j называется величина $k_{ij} = \mathsf{E}\left((X_i - \mathsf{E}\,X_i)(X_j - \mathsf{E}\,X_j)\right)$.

В частности, для непрерывных величин

$$k_{ij} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)\,f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n$$

Коэффициентом корреляции называется величина $r_{ij} = \dfrac{k_{ij}}{\sqrt{\mathrm{D}\,X_i\;\mathrm{D}\,X_j}}$.

Упражнение 3.1.а. Показать, что для независимых случайных величин коэффициент корреляции равен нулю, однако некоррелированные случайные величины могут быть зависимы.

Задачи

3.1.1. Выразить вероятность попадания точки (x, y) в выделенную фигуру (см. рисунок) через значения функции распределения $F(x_i, y_i)$ в угловых точках.

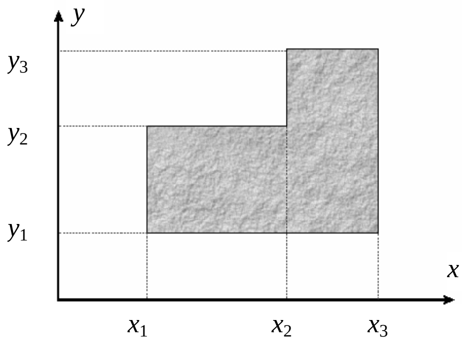

Рис. 5. Иллюстрация к задаче 3.1.1.

3.1.2. На множестве правильных обыкновенных дробей со знаменателем, меньшим 10, задано равномерное распределение. Найти ряд распределения вероятностей для значений числителя.

3.1.3. Являются ли независимыми случайные величины X и Y, плотность совместного распределения которых равна $f(x, y) = A\,(15xy + 10y + 2x + 1)$, при $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, и $f(x, y) = 0$ в остальных точках. Найти A.

3.1.4 [18.1]**.** Координаты X, Y случайной точки распределены равномерно внутри прямоугольника, ограниченного абсциссами $x = a$, $x = b$ и ординатами $y = c$, $y = d$ $(b > a,\ d > c)$. Найти плотность вероятности и функцию распределения системы величин X, Y.

3.1.5 [18.2]**.** Система случайных величин (X, Y) имеет плотность вероятности

$$f(x,y)=\frac{A}{\pi^2(16+x^2)(25+y^2)}.$$

Требуется: а) определить величину A; б) найти функцию распределения $F\,(x,y)$.

3.1.6 [18.3]**.** Определить плотность вероятности системы трех положительных случайных величин (X, Y, Z) по заданной функции распределения

$$F(x,y,z)=(1-e^{-ax})(1-e^{-by})(1-e^{-cz})$$
$$(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0).$$

3.1.7 [18.6]**.** Система независимых случайных величин X_1, …, X_n задана плотностями вероятностей $f_1(x_1)$, …, $f_n(x_n)$. Определить функцию распределения этой системы случайных величин.

3.1.8 [18.18]**.** Определить математическое ожидание и корреляционную матрицу системы случайных величин (X, Y), если плотность вероятности

$$f(x,y)=\frac{2}{\pi\left(x^2+y^2+1\right)^3}.$$

3.1.9 [18.19]**.** Определить плотность вероятности, математическое ожидание и корреляционную матрицу системы случайных величин (X, Y), заданных в интервалах $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ и $0\le y\le\frac{\pi}{2}$, если функция распределения системы $F\,(x,y)=\sin x\sin y$.

3.1.10 [20.2]**.** Положение случайной точки (X, Y) равновозможно в любом месте круга радиуса R, центр которого совпадает с началом координат. Определить плотность вероятности и функцию распределения каждой из прямоугольных координат X, Y. Являются ли случайные величины X и Y зависимыми?

3.1.11 [20.4]**.** В условиях задачи 3.1.10 вычислить корреляционную матрицу системы случайных величин X и Y. Являются ли случайные величины X и Y коррелированными?

§ 3.2. Многомерное нормальное распределение

Плотность вероятности для системы n нормально распределенных случайных величин $X_1,\ldots,X_n$ есть

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\varDelta}}\,e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{n}k_{ij}^{(-1)}(x_i-\bar{x}_i)(x_j-\bar{x}_j)},$$

где $\bar{x}_i = \mathsf{E}\, X_i$, а $\Delta = |A|$ — определитель корреляционной матрицы $A = \begin{pmatrix} k_{11} & \dots & k_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix}$; $k_{ij}^{(-1)}$ — элементы обратной матрицы A^{-1}, равные $k_{ij}^{(-1)} = \frac{1}{\Delta}\bar{A}_{ji} = \frac{1}{\Delta}\bar{A}_{ij}$, $\bar{A}_{ij}$ — алгебраическое дополнение элемента k_{ij}.

В матричном виде плотность имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{|A|}} e^{-\frac{1}{2}(x-\bar{x})' A^{-1}(x-\bar{x})},$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вектор из значений переменных, $\bar{x}$ – вектор средних, а штрих в записи квадратичной формы обозначает транспонирование вектора.

Попробуем наглядно описать класс многомерных нормальных распределений. Для этого выясним, какими заменами переменных можно привести любое нормальное распределение к «стандартному» виду.

Рассмотрим некоторый набор переменных $Y_1, \dots, Y_n$, такой что значения переменных $X_1, \dots, X_n$ выражаются через них по формуле

$x_j = \bar{x}_j + \sum_{k=1}^{n} t_{jk} y_k$. Последнее выражение можно записать в матричной форме $x = \bar{x} + Ty$, где $y = (y_1, \dots, y_n)$, а $T = (t_{ij})$ — невырожденная квадратная матрица замены переменных. Используя обратную матрицу T^{-1} можно произвести обратную замену $y = T^{-1}(x - \bar{x})$.

Подставляя $(x - \bar{x}) = Ty$ в выражение нормальной плотности и умножая на модуль якобиана $\frac{\partial(x)}{\partial(y)} = |T|$, получаем

$$f_y(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{|B|}} e^{-\frac{1}{2} y' B^{-1} y},$$

где $B^{-1} = T' A^{-1} T$, что эквивалентно $A = TBT'$.

Известно, что для любой симметричной матрицы *A*, то есть такой матрицы, для которой $A = A'$, а ковариационная матрица как раз симметрична, существует ортогональная матрица *T*, такая что $A = T\Lambda T'$, где Λ —

диагональная матрица. Ортогональной называется матрица, для которой $T^{-1} = T'$.

Элементы λ_i, стоящие на диагонали матрицы Λ, можно найти решением *характеристического уравнения*

$$\left| A - \lambda_i I \right| = 0 .$$

Известно, что для симметричной матрицы все корни характеристического уравнения вещественны.

Матрицу T можно найти решением системы уравнений

$$At_i = \lambda_i t^i ,$$

с дополнительными ограничениями в виде нормировки, а для кратных корней λ_i требуется дополнительно накладывать условие ортогональности. Через t^i здесь обозначены столбцы матрицы T.

При диагонализации ковариационной матрицы можно ограничиться ортогональными преобразованиями, которые являются вращениями.

Если ковариационная матрица нормального распределения диагональная, то случайные величины независимы.

Любое нормальное распределение может быть получено из «стандартного» нормального распределения, т.е. распределения с нулевым вектором математических ожиданий и единичной ковариационной матрицей, выполнением следующих шагов:

1) умножение случайных величин на соответствующие положительные константы – в результате получается распределение с диагональной ковариационной матрицей;

2) замена переменных с помощью преобразования вращения – так можно получить произвольную ковариационную матрицу;

3) сдвиг начала отсчёта – получаем заданные математические ожидания.

Плотность вероятности для системы двух нормально распределенных случайных величин (X, Y) может быть записана в виде

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2\left(1-r^2\right)}\left[\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\bar{y})^2}{\sigma_y^2}\right]}$$

Геометрическое место точек, имеющих равную плотность вероятности, есть эллипс (*эллипс распределения*), определяемый уравнением

$$\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\bar{y})^2}{\sigma_y^2} = k^2 .$$

Если $r = 0$, то оси симметрии эллипса распределения параллельны координатным осям, а случайные величины независимы.

Задачи

3.2.1 [19.2]**.** Даны математические ожидания двух нормальных случайных величин $\mathsf{E}\,X = 26$, $\mathsf{E}\,Y = -12$ и их корреляционная матрица

$$\left\| k_{ij} \right\| = \left\| \begin{matrix} 196 & -91 \\ -91 & 169 \end{matrix} \right\|.$$

Определить плотность вероятности системы (X, Y).

3.2.2. Найти вероятности попадания в каждое из пяти колец мишени, если вероятность попадания в мишень равна 0,8. Распределение считать нормальным, симметричным по направлению. Кольца имеют одинаковую ширину. Внутренний круг также считаем кольцом, за ширину которого принимаем радиус.

3.2.3. Двумерная нормальная случайная величина имеет нулевой вектор математических ожиданий и ковариационную матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти вращение T, приводящее A к диагональному виду и соответствующую диагональную матрицу.

§ 3.3. Функции случайных величин. Композиция законов распределения

Функции случайных величин

Пусть $X = X(\omega)$ — непрерывная случайная величина с плотностью вероятности $f_X(x)$ и $\varphi(x)$ — некоторая строго монотонная функция. Тогда суперпозиция $Y = Y(\omega) = \varphi(X(\omega))$ будет также случайной величиной. Найдем для нее плотность вероятности.

Пусть для определенности и $\varphi(x)$ — возрастающая. Тогда очевидно, что $\mathsf{P}(a < y < b) = \mathsf{P}(\psi(a) < x < \psi(b))$, где введено обозначение $\psi(y) = \varphi^{-1}(y)$. Пользуясь определением плотности, можно заменить вероятности на интегралы $\int\limits_a^b f_y(y)dy = \int\limits_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f_x(x)dx$. Делая замену переменных $y = \varphi(x)$, получаем $\int\limits_{\psi(a)}^{\psi(b)} f_x(x)dx = \int\limits_a^b f_x(\psi(y))\,\psi'(y)\,dy$.

Откуда $f_y(y) = f_x(\psi(y))\psi'(y)$.

Легко убедиться, что для убывающей $\varphi(x)$ получится такое же выражение, но со знаком «минус». Откуда для произвольной строго монотонной $\varphi(x)$ имеем $f_y(y) = f_x(\psi(y))\,|\psi'(y)|$.

В случае, когда $\varphi(x)$ не монотонна, обратная функция $\psi(y)$ будет неоднозначной. Тогда в выражении для плотности появится сумма по всем k ветвям обратной функции: $f_y(y) = \sum\limits_{j=1}^{k} f_x(\psi_j(y))\,|\psi'_j(y)|$.

При решении задач с функциями нескольких случайных величин как правило удобнее сначала находить функцию распределения.

В общем случае для функции нескольких случайных аргументов, если известен определитель Остроградского—Якоби преобразования от случайных величин $(X_1,..., X_n)$ к случайным величинам $(Y_1,...,Y_n)$

$$D = \frac{\partial(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial(y_1,y_2,...,y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

и если это преобразование взаимно однозначно, то имеем

$$f_y(y_1, y_2,..., y_n) = |D|\; f_x(x_1, x_2,..., x_n),$$

где величины $x_1, x_2,..., x_n$ выражены через $y_1, y_2,..., y_n$.

Упражнение 3.3.а. Доказать, что линейное преобразование $aX + b$ случайной величины X не изменяет вид закона распределения.

Композиция законов распределения

Частным случаем функции нескольких случайных величин является их сумма. Нахождение закона распределения суммы независимых случайных величин называется *композицией законов распределения*.

Если X и Y — независимые дискретные случайные величины, то ряд распределения случайной величины $Z = X + Y$ определяется формулой

$$\mathsf{P}(Z = z_i) = \sum_j \mathsf{P}(X = x_j)\,\mathsf{P}(Y = z_i - x_j) = \sum_k \mathsf{P}(Y = y_k)\,\mathsf{P}(X = z_i - y_k)$$

,

где суммирование ведется по всем возможным значениям случайных величин.

Найдем теперь плотность вероятности $f_Z(z)$ для случайной величины $Z = X + Y$, когда X и Y — независимые непрерывные случайные величины с заданными плотностями $f_X(x)$ и $f_Y(y)$.

Из определения функции распределения имеем

$$F_Z(z) = P(X + Y < z) = \iint\limits_{x+y<z} f_X(x) f_Y(y)\,dxdy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{z-y} f_X(x) f_Y(y)\,dxdy .$$

После замены $r = x + y,\ \ t = y$ последний интеграл сводится к $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{z} f_X(r-t) f_Y(t)\,drdt$. Изменяя порядок интегрирования, получаем

$$F_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{z} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(r-t) f_Y(t)\,dtdr .$$

Наконец, дифференцированием по верхнему пределу получаем

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-t) f_Y(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(z-t)\,dt .$$

Последнее равенство справедливо, поскольку X и Y в выражении $Z = X + Y$ можно поменять местами.

Моменты

Математическое ожидание для случайной величины Y, которая является функцией $\varphi(x)$ непрерывной случайной величины X, есть

$$\mathsf{E}Y = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)\,dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, f_X(x)\,dx = \mathsf{E}\varphi(X) .$$

Если X – дискретная случайная величина, то

$$\mathsf{E}\varphi(X) = \sum_i \varphi(x_i)\,\mathsf{P}(X = x_i).$$

Математическое ожидание функции нескольких непрерывных случайных величин есть

$$\mathsf{E}\varphi(X_1,...,X_n) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ... \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1,...,x_n)\, f(x_1,...,x_n)\,dx_1...dx_n ,$$

где $f(x_1,...,x_n)$ — совместная плотность вероятности.

Для математического ожидания справедливы следующие тождества:

1) $\mathsf{E}\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\, X_i$ для любых случайных величин;

2) $\mathsf{E}\, aX = a\mathsf{E}\, X$, если a – константа;

3) для независимых X и Y справедливо $\mathsf{E}(XY) = \mathsf{E}\, X\, \mathsf{E}Y$.

Упражнение 3.3.б. Доказать приведенные тождества для случая непрерывных случайных величин, используя выражение для математического ожидания функции нескольких случайных величин.

Начальный m_k и *центральный* μ_k *моменты* k-го порядка случайной величины X определяются формулами:

$$m_k = \mathsf{E}\, X^k,\ \mu_k = \mathsf{E}\, (X - \bar{x})^k,$$

где $\bar{x}$ — математическое ожидание случайной величины X.

Заметим, что m_1 есть математическое ожидание, а μ_2 — дисперсия.

Упражнение 3.3.в. Доказать, что

1) $\mathsf{D}\, X = \mathsf{E}(X - \bar{x})^2 = \mathsf{E}\, X^2 - (\mathsf{E}\, X)^2$;

2) $\mathsf{D}(aX) = a^2 \mathsf{D}\, X$, если a – константа;

3) для независимых X и Y справедливо $\mathsf{D}(X + Y) = \mathsf{D}\, X + \mathsf{D}Y$.

Задачи

3.3.1 [21.1]**.** Определить математическое ожидание длины хорды, соединяющей заданную точку окружности радиуса a с другой точкой, все положения которой на окружности равновозможны.

3.3.2 [21.4]**.** Неподвижная точка O находится на высоте h над концом A горизонтального отрезка AK длины l. На отрезке AK наудачу выбрана точка B. Найти математическое ожидание угла Φ между линиями OA и OB.

3.3.3 [21.6]**.** Случайная величина X подчиняется нормальному закону распределения ($\bar{x}, \sigma_x$). Определить математическое ожидание случайной величины Y, если

$$Y = e^{\frac{\bar{x}^2 - 2\bar{x}X}{2\sigma_x^2}}.$$

3.3.4 [22.2]**.** Дана плотность вероятности $f(x)$ случайной величины X ($0 < x < \infty$). Найти плотность вероятности случайной величины $Y = \ln X$.

3.3.5 [22.5]**.** Случайная величина *X* равномерно распределена в интервале (0,1) и связана с *Y* функциональной зависимостью $tg\frac{\pi Y}{2}=e^{X}$. Найти плотность вероятности случайной величины *Y*.

3.3.6 [22.6]**.** Найти плотность вероятности объема куба, ребро которого *X* — случайная величина, равномерно распределенная в интервале [0, *a*].

3.3.7 [22.8]**.** Случайная величина *X* равномерно распределена в интервале $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$. Определить плотность вероятности случайной величины $Y=a\sin\frac{2\pi}{T}X$.

3.3.8 [22.11]**.** Случайная величина *X* распределена в интервале $(0,\infty)$ с плотностью вероятности $f_X(x)=e^{-x}$. Определить плотность вероятности случайной величины *Y*, если: а) $Y^2=X$, а знак у *Y* равновероятен; б) $Y=+\sqrt{X}$.

3.3.9 [22.3]**.** Найти плотность вероятности случайной величины $Z=aX^2$, если X — нормальная случайная величина, $\bar{x}=0$, $\mathrm{D}X=\sigma^2$, $a>0$.

3.3.10. Система случайных величин (X_1,X_2) имеет плотность вероятности $f(x_1,x_2)$. Найти плотность вероятности для случайной величины а) $Y=X_1+X_2$; б) $Y=X_1-X_2$; в) $Y=X_1X_2$; г) $Y=\frac{X_1}{X_2}$. Рассмотреть случай, когда случайные величины X_1 и X_2 независимы.

3.3.11. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $\bar{x}=0$ и $\sigma_x=1$. Найти распределение случайной величины $Y=X^2$.

3.3.12. Показать, что композиция нормальных распределений является нормальным распределением.

3.3.13. Найти плотность вероятности для длины отрезка, координаты которого независимо подчиняются нормальному распределению с параметрами 0, 1.

3.3.14. Два приятеля договорились о встрече и условились, что пришедший первым ожидает опаздывающего в течение 5 мин. Какова вероятность, что встреча состоится, если времена прибытия каждого независимы и подчинены нормальному распределению со стандартным отклонением 3 мин.

3.3.15. Время, которое проходит с момента начала звонка телефона до подъема трубки абонентом подчиняется экспоненциальному распределению с параметром 10 с. Время ожидания ответа вызывающей стороной распределено экспоненциально с параметром 20 с. Какова вероятность, что разговор не состоится?

3.3.16 [12.3]**.** Испытуемый прибор состоит из пяти элементов. Вероятность отказа для элемента с номером i равна

$$p_i = 0{,}2 + 0{,}1\,(i - 1).$$

Определить математическое ожидание и дисперсию числа отказавших элементов, если отказы элементов независимы.

§ 3.4. Виды сходимости

Поскольку случайная величина – это функция (исхода), то сходимость случайных величин можно определять как сходимость функций.

Такой подход действительно используется, хотя и не является единственным.

Определение. Последовательность случайных величин X_n сходится при $n \to \infty$ к случайной величине X *почти наверное*, если $\mathsf{P}\big(\omega \big|\ X_n(\omega) \to X(\omega)\big) = 1$.

В качестве синонима сходимости почти наверное используют также термин сходимость *почти всюду*.

Сходимость почти наверное означает обычную поточечную сходимость функций, причём допускается, что в некоторых точках сходимость не имеет места, но эти точки образуют множество с нулевой вероятностной мерой.

Рассмотренный вид сходимости предполагает явное задание множества элементарных исходов и случайных величин в виде отображений. Однако на практике часто имеют дело с распределениями на значениях случайных величин, не вводя множество элементарных исходов явно. Рассмотрим виды сходимости, применимые в подобных ситуациях.

Определение. Последовательность случайных величин X_n сходится при $n \to \infty$ к случайной величине *по вероятности*, если для любого $\varepsilon > 0$ имеет место $\mathsf{P}\big(|X_n - X| < \varepsilon\big) \to 1$, при $n \to \infty$.

Чтобы определить сходимость по вероятности достаточно, чтобы были определены попарные совместные распределения величин X_n с X.

Сходимость по вероятности является более слабой чем сходимость почти наверное, то есть из сходимости почти наверное следует сходимость по вероятности, а обратное, вообще говоря, неверно.

Упражнение 3.4.a. Пусть на множестве элементарных исходов $\Omega = [0{,}1]$ заданы случайные величины X_n, а именно $X_n(\omega) = 1$, при

$\omega < \frac{1}{n}$, и $X_n(\omega) = 0$, при $\omega \geq \frac{1}{n}$. Доказать, что X_n сходится к некоторой случайной величине *X* почти наверное, найти *X*.

Упражнение 3.4.б. На множестве элементарных исходов $\Omega = [0,1]$ случайные величины X_n заданы следующим образом: $X_n(\omega) = 1$, при $s_n \leq \omega < s_n + \frac{1}{n}$, и $X_n(\omega) = 0$ иначе. Здесь s_n – дробная часть суммы $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}$. Доказать, что X_n сходится к некоторой случайной величине *X* по вероятности, найти *X*. Доказать, что сходимость почти наверное не имеет места.

Рассмотренные виды сходимости подразумевали в некотором смысле «сближение» самих значений случайных величин. Следующий вид сходимости означает «сближение» их распределений.

Определение. Говорят, что имеет место *слабая сходимость* последовательности случайных величин X_n сходится при $n \to \infty$ к случайной величине *X*, если $F_n(x) \to F(x)$ при $n \to \infty$ для всех точек *x*, в которых $F(x)$ непрерывна. Здесь $F_n(x)$ – функция распределения случайной величины X_n, $F(x)$ – функция распределения случайной величины *X*.

Существенным моментом является то, что в точках разрыва функции $F(x)$ сходимость не требуется. Если не сделать такого «послабления», то определяемая сходимость не будет «слабой» в том смысле, что она не будет следовать даже из самой сильной из рассмотренных сходимостей – сходимости почти наверное.

Упражнение 3.4.в. Пусть на множестве элементарных исходов Ω случайные величины X_n заданы как $X_n(\omega) \equiv -\frac{1}{n}$. Доказать, что X_n сходится к некоторой случайной величине *X* почти наверное, найти *X*. Показать, что сходимость функций распределения $F_n(x) \to F(x)$ имеет место не для всех x.

Задачи

3.4.1. На множестве элементарных исходов $\Omega = [0,1]$ случайные величины X_n заданы следующим образом: $X_n(\omega) = n^2$, при $\omega < \frac{1}{n}$, и $X_n(\omega) = 0$ иначе. Доказать, что X_n сходится к некоторой случайной величине X почти наверное, найти X. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}\, X_n$, сравнить с $\mathsf{E}\, X$.

3.4.2. В условиях предыдущей задачи исследовать поточечную сходимость функций распределения.

§ 3.5. Предельные теоремы

Закон больших чисел

Независимо от закона распределения случайной величины X для любого $\varepsilon > 0$ справедливо *неравенство Чебышёва*

$$\mathsf{P}\left(\left|X - \overline{x}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathsf{D}\, X}{\varepsilon^2}.$$

Данное неравенство позволяет оценивать вероятность того, что случайная величина будет отличаться от своего среднего более чем на заданную величину. Заметим, что эта оценка в общем случае не может быть улучшена, что предлагается установить в следующем упражнении.

Упражнение 3.5.а. Доказать, что для дискретной случайной величины, принимающей всего два значения, причем с равной вероятностью, неравенство Чебышёва может обратиться в равенство, т. е. для некоторого $\varepsilon > 0$ имеет место $\mathsf{P}\left(\left|X - \overline{x}\right| \geq \varepsilon\right) = \frac{\mathsf{D}\, X}{\varepsilon^2}$.

Пусть имеется n независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ с конечной дисперсией. Обозначим их среднее как $\tilde{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

Так как все величины подчиняются одному распределению, то все их характеристики совпадают, поэтому можно обозначить $\mathsf{E}\, X_i = \mu$, $\mathsf{D}\, X_i = d$. Из свойств математического ожидания и дисперсии имеем $\mathsf{E}\, \tilde{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{E}\, X_i = \mu$, $\mathsf{D}\, \tilde{X} = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{D}\, X_i = \frac{d}{n}$.

Используя неравенство Чебышёва, получаем

$\mathsf{P}\left(\left|\tilde{X} - \mathsf{E}\, \tilde{X}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{d}{n\varepsilon^2}$, откуда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\left|\tilde{X} - \mathsf{E}\, \tilde{X}\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Последнее выражение описывает так называемый *закон больших чисел*.

Предельные теоремы

Согласно *теореме Муавра—Лапласа* для числа «успехов» m в схеме Бернулли справедливо следующее предельное равенство:

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(a \le \frac{m-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le b \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \tfrac{1}{2}\big(\Phi(b) - \Phi(a)\big).$$

Иначе говоря, с ростом числа испытаний биномиальное распределение стремится к нормальному.

Теорема *Ляпунова***.** Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – независимые и одинаково распределенные случайные величины с конечной и ненулевой дисперсией, тогда для любых вещественных $a < b$ имеет место

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(a \le \frac{\sum_i X_i - n\mathsf{E}\, X_1}{\sqrt{n\mathsf{D}\, X_1}} \le b \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \tfrac{1}{2}\big(\Phi(b) - \Phi(a)\big).$$

Другими словами, случайная величина $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ имеет плотность распределения близкую к нормальной плотности, т. е. $f(y) \approx \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma_y^2}}$.

Теорема Ляпунова может рассматриваться как одна из формулировок так называемой *центральной предельной теоремы*.

Упражнение 3.5.б. Показать, что теорема Муавра—Лапласа является следствием теоремы Ляпунова.

Содержательный смысл вероятности

В данном подразделе речь пойдёт о том, как содержательно интерпретировать вероятность.

Как уже говорилось, вероятность – это мера неопределённости события.

В математике, помимо вероятности, известно несколько различных формализмов, связанных с неопределённостью: нечёткие множества, «субъективные вероятности», теория возможностей.

Наиболее очевидно отличие вероятности и нечёткости.

Например, найдена некоторая окаменелость, по которой непонятно, это остаток живого организма или элемент неживой природы. При этом правильный ответ является вполне однозначным, но мы его не знаем, однако можем оценивать вероятности обоих вариантов.

Другой пример: вирусы – живые или нет. Здесь неопределённость не в том, что мы не знаем, живые они или нет, а в том, что они являются в некотором смысле живыми и неживыми одновременно (имеют признаки тех и других). Это пример нечётких понятий. В этом контексте нет смысла говорить о том, с какой вероятностью вирусы являются живыми, но можно оценивать, в какой степени они живые.

Субъективные вероятности обычно подразумевают просто эвристическую или экспертную оценку вероятности. В некоторых источниках субъективную вероятность считают отличным от вероятности понятием. Однако это вряд ли имеет смысл, поскольку математический смысл величины не зависит от способа её оценивания. Например, мы можем измерить массу тела, пользуясь весами, а можем «измерить» её, оценив «на глаз». Во втором случае мы получим, конечно, гораздо менее точный результат. Но вряд ли имеет смысл говорить, что при этом мы оценили не массу, а новую физическую величину, называемую «субъективной массой».

Можно рассмотреть, например, оценки вероятности экономического роста в ближайшие пять лет и вероятности выпадения герба. Первая оценка, очевидно, является эвристической оценкой эксперта и, вероятно, основана отчасти на интуиции, отчасти на идеализированных экономических моделях.

Во втором случае оценка, хоть и выглядит «строгой», также является экспертной (и эвристической), потому что подразумевает идеализацию: возможность считать монету симметричной. Заключение о том, что реальную монету можно считать достаточно симметричной – это по сути экспертная оценка.

С точки зрения содержательного смысла, вероятность является отражением скорее объективной неопределённости, а не неопределённости из-за недостатка знаний о явлении. Под объективной неопределённостью здесь понимается принципиальная невозможность точного прогноза результата эксперимента, даже при наличии максимально полных знаний и максимально точных измерений. Так невозможно предугадать, какой стороной ляжет подброшенная монета. Даже если мы очень точно измерим начальную скорость монеты и измерим скорости всех воздушных потоков в зоне эксперимента, это не позволит вычислить движение монеты с достаточной точностью, поскольку флуктуации воздушных потоков содержат квантовую неопределённость, которая неустранима в принципе (согласно современным физическим воззрениям).

Однако существует так называемая «байесовская теория», особенностью которой является использование вероятности для отражения неопределённости, вызванной отсутствием знаний. «Байесовская теория» постулирует исходы (точнее говоря, гипотезы) априорно равновероятными в случае, когда их вероятности на самом деле неизвестны. Как вариант такого подхода: неизвестная величина полагается случайной величиной с заданным распределением.

Следует оговориться, что в ряде задач действительно есть основания считать гипотезы случайными и даже равновероятными. В этом случае использование формулы Байеса вполне естественно и очевидно. Однако «байесовская теория» предполагает постулирование случайности в том числе для величин, которые не являются случайными, если исходить из их содержательного смысла, а также предполагает эвристическое задание некоторого априорного распределения (часто равномерного).

Очевидно, что задание конкретного априорного распределения – это сильное предположение, а сильное предположение, сделанное без достаточных оснований, как правило, приводит к погрешности в выводах. Более строгий путь – не делать такого рода предположений и пользоваться аппаратом проверки статистических гипотез. Вместе с тем, практика использования «байесовской теории» показывает, что она во многих случаях даёт практически приемлемые результаты, что ввиду простоты и наглядности этого подхода оправдывает его использование.

Важнейшая черта вероятности, которая отличает её от других формализмов, связанных с неопределённостью, в частности от теории возможностей, – это *симулируемость*. Симулируемость здесь означает возможность провести имитационное (статистическое) моделирование, например, на компьютере. При этом само моделирование проводить не требуется, достаточно умозрительно убедиться в возможности построения модели опыта, где исход определяется на основе датчика случайных чисел (см. решение к задаче *2.3.10*).

По сути, вероятность – объективная физическая величина. В частности, в квантовой механике – это фактически базовое понятие. Однако в отличие от обычных физических величин, она не может быть непосредственно измерена. Вместо измерения для вероятности строятся в той или иной мере достоверные гипотезы о её возможных значениях. Вместе с тем, обычные физические величины тоже измеряются с погрешностью, и результат измерения тоже не бывает полностью достоверен (из-за человеческого фактора нельзя полностью исключать возможность ошибки, когда измерения оказываются неверны в принципе).

В некоторых случаях (например, для однородных исходов) можно непосредственно вычислить вероятности. Однако в большинстве практических задач для оценивания вероятностей используются статистические данные, которые представляют собой результаты многократного проведения опыта (наблюдений). Это даёт повод для утверждений о том, что вероятностные модели применимы только для задач, в которых возможно многократное повторение эксперимента.

Такие утверждения отчасти являются наследием использовавшегося когда-то «частотного определения» вероятности, когда вероятность определялась как предел частоты наступления события при неограниченном повторении эксперимента в одинаковых условиях (в схеме Бернулли). Однако сходимость частот к вероятности имеет место по вероятности, т.е. получаем определение вероятности через вероятность, что попросту некорректно математически. Кроме того, «частотное определение» некорректно и методологически, поскольку определяет математическое понятие через результат физического эксперимента.

На самом деле для применимости вероятностных моделей повторяемость не обязательна. В частности для случайных процессов или зависимых выборок обычно нет повторяемости «в чистом виде». Кроме того, можно рассматривать вероятность событий, которые в принципе неповторяемы, например, вероятность экономического роста в определённый период. Однако говорить о вероятности в таких случаях вполне корректно, если можно построить имитационную модель. К слову, компьютерное моделирование позволяет сделать любое число повторений, поэтому повторяемость всё же имеет место, но не обязательно реальная – достаточно умозрительной.

В заключение заметим, что любая модель – это идеализация, которая, как правило, описывает только часть особенностей изучаемого явления. Например, при компьютерном статистическом моделировании обычно вместо случайных используются так называемые псевдослучайные числа. Последние ни коим образом не случайны, так как детерминированы. Вместе с тем описанная замена на практике обычно является вполне адекватной. В других ситуациях адекватность математической модели обеспечивается опытом и квалификацией того, кто её применяет.

Задачи

3.5.1 [29.1]**.** С помощью неравенства Чебышёва оценить вероятность того, что нормальная случайная величина отклонится от своего математического ожидания более чем на четыре срединных отклонения.

3.5.2. Найти приближенное выражение для плотности вероятности суммы 24 независимых равномерно распределенных в интервале (0, 1) случайных величин. Найти вероятность того, что сумма будет заключена в пределах от 6 до 8.

3.5.3. Найти вероятность того, что в результате 1000 бросаний монеты число выпадений герба будет заключено в интервале (475, 525).

3.5.4. С помощью неравенства Чебышёва оценить вероятность того, что нормальная случайная величина отклонится от своего математического ожидания больше, чем на три средних квадратических отклонения.

3.5.5 [29.4]**.** Случайная величина X подчиняется показательно-степенному закону распределения $f(x)=\frac{x^m}{m!}e^{-x}$ ($x \ge 0$). Доказать справедливость неравенства $\mathsf{P}(0 < X < 2(m+1)) > \frac{m}{m+1}$.

3.5.6 [30.1]**.** Вероятность появления события при одном опыте равна *0,3*. С какой вероятностью можно утверждать, что частота этого события при 100 опытах будет лежать в пределах от 0,2 до 0,4?

3.5.7 [30.7]**.** Сколько нужно произвести опытов, чтобы с вероятностью 0,9 утверждать, что частота интересующего нас события будет отличаться от вероятности появления этого события, равной 0,4, не более чем на 0,1?

3.5.8 [30.5]**.** Вероятность некоторого события определяется методом Монте-Карло. Определить число опытов, обеспечивающих с вероятностью не менее 0,99 получение искомой вероятности с ошибкой, не превосходящей 0,01. Оценку произвести по теореме Чебышёва и по теореме Муавра—Лапласа.

3.5.9 [30.10]**.** Вычисление интеграла $J=\int\limits_0^1 x^2dx$ произведено методом Монте-Карло на основании 1000 независимых опытов. Вычислить вероятность того, что абсолютная погрешность в определении величины J не превзойдет 0,01.

3.5.10. В стопке в равных пропорциях смешаны банкноты, достоинством 10, 50 и 100 руб. Наудачу берется 20 банкнот. Пользуясь нормальным приближением, найти вероятность того, что взятая сумма окажется в диапазоне от 900 до 1100 руб.

3.5.11. Вероятности выбить в тире 5, 4, 3, 2, 1 и 0 очков при каждом выстреле равны соответственно 0,1, 0,2, 0,3, 0,2, 0,1 и 0,1. Какова вероятность из 50 выстрелов выбить не менее 140 очков? Использовать нормальное приближение.

3.5.12. Найти максимальную погрешность приближения биномиального распределения нормальным при 20 испытаниях и p = 0,5.

§ 3.6. Характеристические функции

Характеристические функции основываются на преобразовании Фурье.

Определение. *Характеристической функцией* случайной величины X называется функция

$$\psi_X(t)=\mathsf{E}e^{itX}.$$

Заметим, что в данном выражении комплексные переменные использованы только для краткости записи, а именно, комплексная форма служит одновременной записи результатов косинусного и синусного преобразований Фурье с использованием формулы Эйлера

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z .$$

При этом вычисление характеристических функций не требует знания теории функций комплексного переменного, поскольку здесь нет интегрирования по комплексному пространству.

Для непрерывных случайных величин характеристическая функция представляет собой Фурье-образ плотности вероятности.

Важнейшим свойством характеристических функций является существование взаимно-однозначного соответствия между характеристическими функциями и распределениями, то есть для любой случайной величины можно вычислить характеристическую функцию и по любой характеристической функции можно однозначно восстановить функцию распределения.

Плотность вероятности для непрерывной случайной величины можно восстановить обратным преобразованием Фурье

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \psi_X(t)\, dt .$$

Упражнение 3.6.а. Вычислить характеристическую функцию для нормального распределения с параметрами 0 и 1.

Уникальность нормального распределения в частности в том, что его плотность вероятности инвариантна по отношению к преобразованию Фурье.

Практическая значимость характеристических функций обусловлена их полезными свойствами.

Упражнение 3.6.б. Выразить характеристическую функцию величины $Y = aX + b$, где a и b – константы, через характеристическую функцию случайной величины *X*.

Упражнение 3.6.в. Доказать, что характеристическая функция суммы независимых случайных величин *X* и *Y* есть произведение их характеристических функций, то есть

$$\psi_{X+Y}(t) = \psi_X(t)\, \psi_Y(t) .$$

Последнее свойство можно соотнести с известным фактом, что Фурье-образ свёртки функций есть произведение Фурье-образов функций.

Для демонстрации силы аппарата характеристических функций приведём доказательство простейшего варианта центральной предельной теоремы.

Вычислим производную *k*-го порядка от характеристической функции

$$\psi_X^{(k)}(t) = \frac{d^k}{dt^k}\,\mathsf{E}e^{itX} = \mathsf{E}\,i^k X^k e^{itX}.$$

При $t = 0$ имеем

$$\psi_X^{(k)}(0) = i^k\,\mathsf{E}\,X^k.$$

Таким образом получаем связь между производной характеристической функции и начальным моментом k-го порядка.

Для демонстрации силы аппарата характеристических функций приведём доказательство простейшего варианта центральной предельной теоремы.

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность независимых (в совокупности) одинаково распределённых случайных величин с конечной дисперсией. Без ограничения общности положим $\mathsf{E}\,X_i = 0$, $\mathsf{D}\,X_i = 1$.

Обозначим $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

Требуется доказать, что распределение случайной величины $S_n/\sqrt{n}$ сходится при $n \to \infty$ к нормальному распределению с параметрами 0 и 1.

Характеристическая функция величины $S_n/\sqrt{n}$ есть

$$\psi_{S_n/\sqrt{n}}(t) = \psi_{S_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(\psi_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n.$$

Разложим $\psi_X(t)$ в ряд Тейлора, выражая производные через известные моменты

$$\psi_X(t) = 1 + it\,\mathsf{E}\,X - \frac{t^2}{2}\mathsf{E}\,X^2 + o(t^2) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

Используя данное разложение, получаем

$$\psi_{S_n/\sqrt{n}}(t) = \left(\psi_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n \to e^{-t^2/2}.$$

На последнем шаге использован замечательный предел и в итоге получена характеристическая функция нормального распределения.

Задачи

3.6.1. Вычислить характеристическую функцию для биномиального распределения.

3.6.2. Вычислить характеристическую функцию для экспоненциального распределения с плотностью $\varphi(x) = e^{-x}$, $x > 0$.

3.6.3. Вычислить характеристическую функцию для равномерного распределения в интервале [0, 1].

3.6.4. Используя характеристическую функцию, вычислить начальный момент четвёртого порядка для нормального распределения с параметрами 0 и 1.

3.6.5. Используя характеристическую функцию, вычислить математическое ожидание и дисперсию для биномиального распределения.

§ 3.7. Условные распределения

Условные плотности

Плотность вероятности подсистемы случайных величин $X_1,\dots,X_k$, вычисленная при условии, что остальные случайные величины $X_{k+1},\dots,X_n$ приняли определенные значения, равна

$$f\left(x_1,\dots,x_k/x_{k+1},\dots,x_n\right)=\frac{f\left(x_1,\dots,x_n\right)}{f\left(x_{k+1},\dots,x_n\right)},$$

где $f\left(x_{k+1},\dots,x_n\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f\left(x_1,\dots,x_n\right)dx_1\dots dx_k$.

Естественно, что выражение имеет смысл, только если знаменатель не обращается в 0.

Заметим, что в знаменателе фигурирует совместная плотность для подсистемы $X_{k+1},\dots,X_n$, а не вероятность условия, т.е. вероятность принятия данными величинами определённых значений (эта вероятность для непрерывных величин всегда нулевая).

Плотность вероятности системы выражается через условные плотности вероятности по формуле

$$f\left(x_1,\dots,x_n\right)=f\left(x_1\right)f\left(x_2/x_1\right)f\left(x_3/x_1,x_2\right)\cdot\ldots\cdot f\left(x_n/x_1,\dots,x_{n-1}\right).$$

Условные распределения дают примеры условных вероятностей с нулевой вероятностью события в условии.

Условная функция распределения

Поскольку плотности вероятности определены только для непрерывных величин, в общем случае требуется способ задания условных распределений не через плотности.

Естественным понятием в этой ситуации будет условная функция распределения.

Для простоты ограничимся двумя случайными величинами *X* и *Y*.

Условная функция распределения есть

$$F(y/x) = \mathrm{P}(Y(\omega) < y / X(\omega) = x).$$

Поскольку $\mathrm{P}(X(\omega) = x)$ может быть равной нулю, определение условной вероятности для событий из главы 1 здесь неприменимо.

В этом случае условную функцию распределения можно определить через производную Радона-Никодима

$$F(y/x) = \frac{\mathrm{P}(dx,\, Y(\omega) < y)}{\mathrm{P}(dx)}$$

или как такую функцию, что для любого события *A* выполняется

$$\int_A dF(x,y) = \int_{A_X} \int_{A_Y(x)} dF(y/x)\, dF(x)$$

Здесь A_X – проекция области *A* на область значений случайной величины *X*, $A_Y(x)$ – проекция на область значений случайной величины *Y* сечения области *A* прямой $X = x$.

Задачи

3.7.1. Положение случайной точки (X, Y) равновозможно в любом месте круга радиуса 1 с центром в начале координат. Найти условную плотность $\varphi(y/x)$.

3.7.2 [20.7]. Дан дифференциальный закон распределения системы неотрицательных случайных величин

$$f(x,y) = kxye^{-x^2-y^2},\ x \ge 0,\ y \ge 0.$$

Определить k, $f_x(x)$, $f_y(y)$, $f(x/y)$, $f(y/x)$, первые и вторые моменты распределения.

3.7.3 [20.9]**.** Система двух случайных величин (*X*, *Y*) подчиняется нормальному закону распределения

$$f(x,y) = k\,e^{-\frac{1}{0{,}72\sigma^2}\left((x-5)^2+0{,}8(x-5)(y+2)+0{,}25(y+2)^2\right)}.$$

Определить: а) условные математические ожидания и дисперсии; б) плотность вероятности каждой из случайных величин, входящих в систему; в) условные плотности вероятности.

3.7.4 [20.11]. Дана плотность вероятности системы двух случайных величин

$$f(x,y)=k\,e^{-4x^2-6xy-9y^2}.$$

Определить постоянную k, корреляционный момент между *X* и *Y* и условные плотности $f(x/y)$, $f(y/x)$.

§ 3.8. Случайные процессы

Классификация случайных процессов

До сих пор мы рассматривали конечные системы случайных величин. В данном разделе рассмотрим бесконечные системы.

Определение. *Случайной функцией* называется семейство случайных величин $X(t)=X(t,\omega)$, заданных на одном вероятностном пространстве и зависящих от параметра *t*, принимающего значения на некотором множестве *T*.

Если множество *T* является многомерным евклидовым пространством, то случайную функцию называют *случайным полем*.

Если параметр *t* – скаляр, то случайную функцию называют *случайным процессом*. В этом случае *t* обычно отождествляется со временем, хотя его интерпретация может быть и иной.

В случае, когда *T* можно отождествить со всей или частью последовательности $\{\ldots,-1,0,1,\ldots\}$, процесс называется *процессом с дискретным временем* или *случайной последовательностью*. Если *T* совпадает с некоторым числовым интервалом $T=[a,b]$, то $X(t,\omega)$ называют *процессом с непрерывным временем*. Если *T* конечно, то имеем обычную систему случайных величин, которые рассматривались в разделе 3.1.

Если фиксировать $\omega\in\Omega$, то получим функцию $x(t)=X(t,\omega)$, которую часто называют выборочной функцией, *реализацией* или *траекторией процесса*.

Процесс $X(t)$ называется *стационарным в узком смысле* (строго стационарным), если при любых зафиксированных моментов времени $t_1,\ldots,t_k$ распределение совокупности случайных величин $\left(X(t_1+u),X(t_2+u),\ldots,X(t_k+u)\right)$, которая называется *сечением* процесса, не зависит от u.

Случайные процессы удобно описывать, используя моменты (при условии, что они существуют). В случае строгой стационарности все моменты и смешанные моменты старших порядков инвариантны во времени.

Стационарные процессы разделяются, в свою очередь, на эргодические и неэргодические процессы.

Неформально, *эргодический* процесс можно определить как процесс, для которого не имеет значения, рассматривается множество реализаций, или одна достаточно длинная реализация. Для таких процессов моменты могут быть получены усреднением по времени.

Среди процессов с дискретным временем большой интерес для задач прогнозирования представляют стационарные процессы с конечной длиной значимой предыстории, т. е. такие процессы, для которых распределение величин в момент t не зависит от t, а всецело определяется реализовавшимися значениями на предыдущих d моментах времени. Такой процесс задается переходной (условной) функцией распределения

$$F\left(x/\,x_1,\ldots,x_d\right)=\mathsf{P}\left(X\left(t,\omega\right)<x/\,X\left(t-1,\omega\right)=x_1,\ldots,X\left(t-d,\omega\right)=x_d\right).$$

В момент времени t для определения распределения на значениях переменных процесса достаточно рассматривать предысторию длины d, не обращаясь к значениям в более ранние моменты времени. При $d=1$ случайные процессы с такими свойствами являются марковскими процессами.

В общем случае *марковскими процессами* называют процессы, удовлетворяющие условию

$$F_{t,t_1,\ldots,t_d}\left(x/\,x_1,\ldots,x_d\right)=F_{t,t_1}\left(x/\,x_1\right),$$

где $t,t_1,\ldots,t_d$ – произвольные моменты времени, а $x_1,\ldots,x_d$ – значения процесса в соответствующие моменты.

Корреляционная функция

Пусть $X\left(t,\omega\right)$ – случайный процесс, для которого существуют $\bar{x}\left(t\right)=\mathsf{E}\,X\left(t\right)$ и $R\left(t,u\right)=\mathsf{E}\,\xi\left(t\right)\xi\left(u\right)$. Функция $R\left(t,u\right)$ называется *ковариационной функцией* процесса $X\left(t\right)$.

Определение. *Корреляционная (автокорреляционная) функция* процесса $X\left(t\right)$ есть $K\left(t,u\right)=\mathsf{E}\left(\xi\left(t\right)-\bar{x}\left(t\right)\right)\left(\xi\left(u\right)-\bar{x}\left(u\right)\right)$. Без ограничения общности можно считать, что $\bar{x}\left(t\right)\equiv 0$, так как от $X\left(t\right)$ всегда можно перейти к изучению процесса $X\left(t\right)-\bar{x}\left(t\right)$.

Случайный процесс называется *стационарным в широком смысле*, если $\bar{x}\left(t\right)\equiv const$ и $R\left(t,u\right)=R\left(t-u\right)$, т.е. функция $R\left(t,u\right)$ зависит лишь от разности $t-u$. Здесь среднее значение и ковариация не зависят от момента времени. Среднее значение постоянно, а ковариация зависит только от сдвига по времени.

Для числовых рядов одним из наиболее распространенных методов прогнозирования является построение авторегрессионных моделей. Рассмотрим метод на примере линейной модели одномерного ряда.

Линейная авторегрессионная модель есть:

$$z(t_r)=\sum_{i=1}^{d} a_i z(t_{r-i})+\delta(t_r),$$

где a_i – коэффициенты регрессии, а $\delta(t_r)$ – остаточная случайная ошибка.

Для нахождения коэффициентов модели обычно используется метод наименьших квадратов.

Несмотря на простоту, данная модель позволяет описывать широкий класс процессов. Чтобы проиллюстрировать гибкость линейной авторегрессии, рассмотрим задачу описания ряда из значений синусоиды.

Функция $x(t)=C\sin\kappa t$ является решением уравнения $x''=-\kappa^2 x$.

Разностными оценками производных будут: $\dot{x}(t)=x(t)-x(t-1)$ – для первой производной, $\ddot{x}(t)=\dot{x}(t+1)-\dot{x}(t)=x(t+1)-2x(t)+x(t-1)$ – для второй производной. Подставляя оценку в уравнение, имеем

$$x(t+1)-2x(t)+x(t-1)=-\kappa^2 x(t),$$

откуда

$$x(t+1)=(2-\kappa^2)\,x(t)-x(t-1).$$

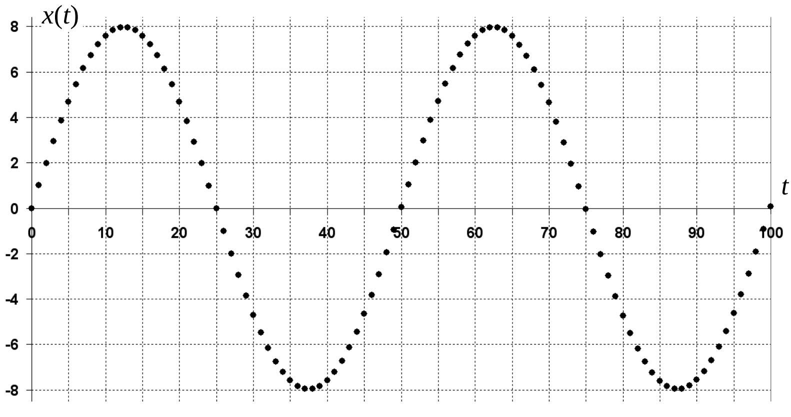

Рис. 6. Частное решение разностного уравнения авторегрессии.

Получили уравнение авторегрессии. Можно ожидать, что при $\kappa << 1$ его решения будут приближением к синусоиде. Условие $\kappa << 1$ обеспечивает близость разностных оценок к соответствующим производным.

Частота κ выражается через период ϕ по формуле $\kappa = 2\pi/\phi$.

На рисунке 6 построено решение уравнения при $\phi = 50$ и начальных условиях: $x(0) = 0$, $x(1) = 1$. Как можно видеть, оно хорошо приближает синусоидальный сигнал.

Рассмотренный пример является частной иллюстрацией связи между автокорреляционной функцией и спектральным представлением (преобразованием Фурье).

Цепи Маркова

Будем называть случайный процесс *дискретным*, если при любом *t*, случайная величина $X(t)$ является дискретной.

Без ограничения общности будем считать, что значениями $X(t)$ является подмножество натуральных чисел $\{1,...,k\}$, либо всё множество натуральных чисел (тогда $k = \infty$). Будем говорить, что процесс находится в *состоянии* i, если $X(t) = i$.

Определение. *Цепью Маркова* называется дискретный марковский случайный процесс с дискретным временем.

Цепь Маркова задаётся матрицей $\mathcal{P}(t) = (p_{ij}(t))$ переходных вероятностей $p_{ij}(t) = \mathsf{P}(X(t) = j / X(t-1) = i)$ и распределением $p(0)$ в начальный момент времени. Здесь $p(t) = (p_1(t),..., p_k(t))$, $p_j(t) = \mathsf{P}(X(t) = j)$. Величина $p_{ij}(t)$ есть вероятность перехода в момент времени *t* из состояния *i* в состояние *j*.

Очевидно, что сумма значений в каждой строке матрицы $\mathcal{P}(t)$ равна 1, т.е. для любого *i* выполняется $\sum_{j=1}^{k} p_{ij}(t) = 1$.

При заданном распределении вероятностей по состояниям в момент t_1 распределение в момент $t_2 > t_1$ находится по формуле

$$p(t_2) = p(t_1) \cdot \prod_{t=t_1}^{t_2-1} \mathcal{P}(t).$$

В задачах для цепей Маркова используется аппарат матричной алгебры. При этом в общем случае обычно получаются весьма громоздкие выкладки, поэтому здесь мы ограничимся рассмотрением наиболее простых частных случаев.

Цепь Маркова называется *однородной*, если матрица переходных вероятностей не зависит от времени, т.е. $p_{ij}(t) \equiv p_{ij}$, или $\mathcal{P}(t) \equiv \mathcal{P}$.

Одной из основных задач для цепей Маркова является нахождение $p^{\infty} = \lim\limits_{t \to \infty} p(t)$ – предельных распределений для $X(t)$ при $t \to \infty$.

Для однородной цепи при некоторых дополнительных условиях предельные вероятности p^{∞} можно найти из системы уравнений

$$p^{\infty} = p^{\infty}\mathcal{P}, \qquad \text{при условии} \qquad \sum_{j=1}^{k} p_j^{\infty} = 1.$$

Задачи

3.8.1 [31.4]. Найти дисперсию случайной функции $X(t)$, значения которой изменяются скачками на величины Δ_j в случайные моменты времени. Число скачков, происходящих в течение отрезка времени τ, подчиняется закону Пуассона с постоянной $\lambda\tau$, а величины скачков Δ_j взаимно независимы, имеют одинаковые дисперсии σ^2 и нулевые математические ожидания. Значение $X(0)$ фиксировано.

3.8.2 [31.5]. Найти корреляционную функцию случайной функции $X(t)$, которая может принимать два значения: +1 и –1; число перемен знака функции подчиняется закону Пуассона с постоянной временной плотностью λ, а $\bar{x}(t) \equiv 0$.

3.8.3 [31.7]. Корреляционная функция угла крена корабля $\Theta(t)$ имеет вид

$$K(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau.$$

Определить вероятность того, что в момент времени $t_2 = t_1 + \tau$ угол крена $\Theta(t_2)$ будет больше 15°, если $\Theta(t)$ – нормальная случайная функция, $\mathsf{E}\Theta(t) \equiv 0$, $\Theta(t_1) = 5^{\circ}$, $\tau = 2$ с, $a = 30$ *град*², $\alpha = 0{,}02$ с⁻¹, $\beta = 0{,}75$ с⁻¹.

3.8.4 [38.16]. Дана строго положительная размером $k \times k$ матрица вероятностей перехода, причём сумма значений в каждом столбце равна 1. Определить предельные вероятности.

3.8.5 [пример 38.3]. Препарат облучается потоком радиоактивных частиц через равные интервалы времени Δt. Вероятность того, что за разовое облучение препарат поглотит r радиоактивных частиц, определяется формулой $\beta_r = \frac{\alpha^r}{r!} e^{-\alpha}$. Каждая радиоактивная частица, содержащаяся в препарате, за время между последовательными облучениями может распасться с вероятностью q. Обозначим через i состояние, когда после очередного облучение препарат содержит i-частиц. Определить переходные вероятности p_{ij}.

3.8.6 [38.17]. Шары, из которых m белых и m чёрных, перемешаны и поровну распределены между двумя урнами. Из каждой урны одновременно наудачу извлекается один шар и перекладывается в другую урну. Найти вероятности того, что после бесконечного числа таких обменов в первой урне окажется i белых шаров.

3.8.7 [38.22]. Случайное блуждание частицы происходит на положительной части числовой оси по точкам с целыми координатами. Находясь в точке с координатой 1, частица перемещается на 1 вправо с вероятностью α и остаётся на месте с вероятностью $1-\alpha$. Из других точек вероятность перемещения на 1 вправо равна α, вероятность перемещения на 1 влево равна β, вероятность остаться на месте $1-\alpha-\beta$. Определить предельные вероятности нахождения в каждой точке.

Указания

1.1.а. Воспользоваться тождеством для отрицания суммы событий. **1.1.6.** Воспользуйтесь следующими свойствами событий: $B + B = B$, $BB = B$, $B+\overline{B}=\Omega$, $B\Omega = B$, $B\overline{B}=\varnothing$, $B+\varnothing = B$. **1.1.8.** Взять отрицание от обеих частей уравнения и воспользоваться тождеством $\overline{A+B} \equiv \overline{A}\cdot\overline{B}$. **1.1.9.** Воспользоваться равенством $\overline{A} = \overline{A}B + \overline{A}\,\overline{B}$. **1.1.10.** Эквивалентность показывается переходом к противоположным событиям. Равенства доказываются переходом от n к $n+1$. **1.1.12.** Воспользоваться равенством $\overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B}$. **1.1.16.** В алгебру войдут всевозможные объединения подмножеств из следующего разбиения: $\{\{a, f\}, \{b, d\}, \{c\}, \{e\}\}$.

1.2.3. Первая карта может быть любой масти. **1.2.5.** Очередность извлечения не имеет значения. **1.2.6.** Можно считать, что детали для контроля берутся из общей партии. **1.2.11.** Общее число исходов есть число способов выбора билетов. Число «благоприятных» исходов есть число способов извлечь заданное количество выигрышных и невыигрышных билетов. **1.2.19.** Задачу можно рассматривать как непосредственное обобщение задачи *1.2.11*. **1.2.21.** Рассмотреть число способов поставить три границы между пирожками разного вида.

1.2.22. Числа Каталана – очень известный объект в комбинаторике, и в литературе можно найти различные способы доказательства требуемого утверждения. В разделе решений изложен способ, основанный на производящих функциях. Другой путь – воспользоваться решением задачи *1.2.23*.

1.2.23. Один из путей решения данной задачи заключается в решении более общей задачи *1.2.24*. Другой путь – воспользоваться фактом из задачи *1.2.22*. Для этого следует заметить, что число способов расставить покупателей в очереди так, чтобы никому не пришлось ожидать сдачи, равно числу правильных (таких, в которых открывающая скобка стоит раньше соответствующей закрывающей) скобочных последовательностей. А для числа правильных скобочных последовательностей легко установить справедливость рекуррентного соотношения, определяющего числа Каталана.

1.2.24. Следует рассмотреть ситуацию, когда часть покупателей прошла и в очереди осталось k человек, при этом в кассе в результате проведённых операций оказалось j пятаков. Пусть $F(k, j)$ – число способов расстановки оставшейся очереди, при которых хотя бы одному покупателю придётся ожидать сдачи. Составив рекуррентное соотношение и подобрав граничные условия, можно убедиться, что $F(k, j)$ образуют некоторый фрагмент треугольника Паскаля.

1.2.25. Задача решается аналогично задаче *1.2.24*. Следует составить рекуррентное соотношение для $F(k, j)$ – числа способов расстановки очереди из k человек, при которых хотя бы одному покупателю придётся ждать сдачи, если в кассе есть «запас» в j пятаков. Отличие этой задачи от *1.2.24* в граничных условиях.

1.3.6. Два отрезка длины x и y. Возможные значения $0 \le x + y \le l$. Благоприятствующим событиям соответствуют значения: $x \le \frac{l}{2}$, $y \le \frac{l}{2}$, $x + y \ge \frac{l}{2}$. **1.3.7.** Пусть x, y — время прибытия пароходов, возможные значения: $0 \le x \le 24$, $0 \le y \le 24$; благоприятствующие значения: $x \le y \le x + 1$, $y \le x \le y + 2$. **1.3.10.** В системе координат (x, y) решить уравнение $x + y = a$.

1.4.a. Первое свойство легко доказывается на основе третьего, а третье — из аксиомы сложения. **1.4.4.** Найти вероятность противоположного события, т. е. что сумма монет составит ровно один рубль, тогда $\mathsf{P}(A) = 1 - \mathsf{P}(\overline{A})$. **1.4.5.** Воспользуйтесь равенством $B = B(A + \overline{A})$. **1.4.6.** Последовательно применить теорему сложения вероятностей. **1.4.7.** Использовать теорему сложения для n событий.

1.5.3. Необходимо, чтобы в предыдущих трех опытах событие не произошло. **1.5.4.** Воспользуйтесь переходом к противоположному событию и $1 - \mathsf{P}(\overline{A}) \geq 0{,}9$. **1.5.5.** Расстановка четырех точек производится независимо, следовательно, $p = p(A) = \prod_{i=1}^{4} p_i$, p_i — вероятность того, что i-я точка попадет в треугольник. **1.5.7.** Подсчитывая вероятность проигрыша на втором этапе игры, учесть, что $\mathsf{P}(A + B) = 1 - \mathsf{P}(\overline{A}\overline{B})$. **1.5.10.** Число всевозможных способов извлечения k шаров из n пронумерованных с учетом порядка есть число размещений из n по k, т. е. A_n^k. **1.5.21.** Можно рассмотреть эквивалентную задачу, когда письмо кладётся равновероятно в один из 16 ящиков, при этом в один из заданных восьми ящиков оно попадает как раз с вероятностью ½. **1.5.22.** Пусть $p_{k,j}$ – вероятность того, что перед обслуживанием k-го покупателя (нумерация с 0) в кассе оказалось $2m + j$ пятаков. Величины $p_{k,j}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям, похожим на соотношения, задающие треугольник Паскаля (см. раздел *1.2*). Дополнительное ограничение $p_{k,-2m-1} = 0$ можно удовлетворить, прибавив со сдвигом второй треугольник Паскаля, с отрицательными значениями.

1.6.11. См. задачу *1.6.7*. **1.6.17.** Следует применить формулы полной вероятности и Байеса, а также использовать тот факт, что вероятность того, что четвертый человек сказал правду при условии, что первый сказал правду, равна безусловной вероятности того, что третий человек сказал правду.

1.7.3. Использовать формулу Байеса и сравнить логарифмы вероятностей.

2.2.5. Ввести случайную величину X — момент времени, в который лампа теряет работоспособность. Составить дифференциальное уравнение для $F(x)$. Решение этого уравнения будет иметь экспоненциальный вид.

2.3.8. Обратить внимание на то, что $p(t)$ является функцией распределения случайного времени поисков *T*, необходимого для обнаружения судна.

2.4.8. Зафиксировать траекторию пули и рассмотреть случайную последовательную расстановку деревьев в полосу по схеме Бернулли. **2.4.9.** В качестве оценки взять вероятность вытаптывания выбранного отдельного растения (т. е. вероятность того, что хотя бы один слон наступит в заданную точку поля). Далее задача решается аналогично предыдущей (*2.4.8*).

2.5.5. Указанная вероятность попадания может иметь место, только если математическое ожидание точки попадания лежит в пределах окопа. Когда математическое ожидание совпадает с центром окопа, дисперсия максимальна и стремится к 0 при смещении μ к краю.

3.3.а. Факт устанавливается непосредственно на основе выражения для плотности вероятности для функции случайной величины. **3.3.10.** Рассматривая систему случайных (Y, Y_1) как функцию от (X_1, X_2), выразить плотность распределения этой системы через плотность системы случайных величин (X_1, X_2). Чтобы получить плотность вероятности $g(y)$, проинтегрируйте полученную плотность $g_1(y, y_1)$ по всей области $(-\infty, \infty)$ по переменной y_1. **3.3.11.** Учесть, что обратная функция $x = \varphi^{-1}(y)$ является неоднозначной. **3.3.13.** Сначала найти композицию. **3.3.15.** Проинтегрировать совместную плотность вероятности по области, соответствующей благоприятным исходам.

3.5.б. Достаточно число успехов представить как сумму независимых случайных величин, каждая из которых есть число успехов в одном испытании. **3.5.2.** Воспользоваться теоремой Ляпунова. **3.5.3.** Воспользоваться теоремой Муавра—Лапласа. **3.5.5.** Воспользоваться неравенством Чебышева, учитывая, что $\bar{x} = m+1$, $\mathsf{E}X^2 = (m+1)(m+2)$ и $\mathsf{P}(0 < X < 2(m+1)) = \mathsf{P}(|X - \bar{x}| < m+1)$. **3.5.8.** Ввиду того что вероятность события неизвестна, дисперсию числа появления события следует принять максимальной, т. е. положить $pq = 0{,}25$. **3.5.9.** Интеграл $J = \int_0^1 x^2 dx$ можно рассматривать как начальный момент второго порядка случайной величины, равномерно распределенной в интервале $[0,1]$. Его статистическим аналогом, определяемым методом Монте-Карло, будет

величина $J_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2$, где X_k — случайные числа из интервала $[0,1]$.
3.5.10. Предварительно найти математическое ожидание и дисперсию стоимости при извлечении одной банкноты. **3.5.12.** Найти максимальный модуль разности функций распределения для биномиального и нормального законов, когда дисперсии одинаковы, а $\bar{x}_N = \bar{x}_B - 0{,}5$. Вычисления проводить на компьютере.

3.6.в. Используется, что математическое ожидание произведения независимых случайных величин есть произведение математических ожиданий.

Ответы

1.1.1. По определению, означает само событие *A*. **1.1.2.** $A \to B$, т. е. событие *A* — частный случай события *B*. **1.1.3.** $A + B$ — достоверное событие, AB — невозможное событие. **1.1.4.** Событие AB означает выбор числа 10, событие $A \backslash B$ — выбор любого из {2, 4, 6, 8}. **1.1.5.** $\bar{A}$ — все изделия доброкачественные, $\bar{B}$ — бракованных изделий одно или нет вообще. **1.1.6.** $A = BC$. **1.1.7.** а) *A* — невозможное событие, *B* — достоверное; б) *A* — достоверное событие, *B* — невозможное; в) $A=B$. **1.1.8.** $X = \bar{B}$. **1.1.11.** События несовместны, так как $\overline{A+B} = \bar{A}\,\bar{B}$. **1.1.13.** Событие *C* — ничейный исход. **1.1.14.** Событие *C* — оба стрелка попадают, *D* — оба стрелка промахиваются. **1.1.15.** $\{\varnothing, \{e\}, \{c,d\}, \{c,d,e\}, \{a,b\}, \{a,b,e\}, \{a,b,c,d\}, \Omega\}$. **1.1.16.** $\{\varnothing, \{e\}, \{c\}, \{c,e\}, \{b,d\}, \{b,d,e\}, \{b,d,c\}, \{b,d,c,e\}, \{a,f\}, \{a,f,e\}, \{a,f,c\}, \{a,f,c,e\}, \{a,f,b,d\}, \{a,f,b,d,e\}, \{a,f,b,d,c\}, \Omega\}$.

1.2.1. $p = \frac{rm}{n}$. **1.2.2.** $\frac{4}{9}$. **1.2.3.** $p = 0{,}25$, **1.2.4.** $\frac{1}{6^5}$. **1.2.5.** $p = \frac{2}{9}$.
1.2.6. $p = \frac{n-k}{n+m-k}$. **1.2.7.** а) $\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{9999}$; б) $\frac{9\cdot8\cdot7}{9999}\cdot C_4^2$; в) $\frac{9\cdot8}{9999}\cdot C_4^3$; г) $\frac{9\cdot8}{9999}\cdot C_4^2\cdot\frac{1}{2}$. **1.2.8.** $\frac{1}{15}$ **1.2.9.** 0,3. **1.2.10.** а) $\frac{5}{9}$; б) $\frac{2}{9}$; в) $\frac{7}{9}$.

1.2.11. $p = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} = \frac{C_n^m C_{N-n}^{M-m}}{C_N^M}$. **1.2.12.** $p = \frac{C_{n+k-m}^{n-m}}{C_{n+k}^n}$ **1.2.13.** 0,079.

1.2.14. а) $p = 1 - \frac{C_5^1 C_3^1 C_2^1}{C_{10}^3} = 0{,}75$; б) $p = \frac{C_5^1 C_3^2 + C_5^2 C_2^1}{C_{10}^3} = \frac{7}{24}$. **1.2.15.** $10\cdot9\cdot8$.

1.2.16. 60. **1.2.17.** 35. **1.2.18.** $(n–1)!\,(n-2)$. **1.2.19.** $p=\dfrac{C_9^2C_9^2C_9^2C_9^0}{C_{36}^6}$. **1.2.20.** $p=\dfrac{C_4^2C_4^2}{C_8^4}$. **1.2.21.** C_8^3. **1.2.23.** $\frac{1}{n+1}$. **1.2.24.** $\frac{2m+1}{n+m+1}$. **1.2.25.** $\frac{n-m+1}{n+1}$.

1.3.а. $0{,}18$. **1.3.1.** $p=1-\frac{l}{L}$. **1.3.2.** $p=\frac{3}{9{,}5}$. **1.3.3.** $p=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **1.3.4.** $p=1-\left(1-\frac{2r+d}{a}\right)\left(1-\frac{2r+d}{b}\right)$. **1.3.5.** $k\,(2-k)$. **1.3.6.** $p=\frac{1}{4}$. **1.3.7.** p = 0,121.

1.3.8. $p=1-\left[1-\frac{d}{L}\sqrt{1+(\frac{v_2}{v_1})^2}\right]^2$ при $L\ge d\sqrt{1+(\frac{v_2}{v_1})^2}$, $p=1$ при $L\le d\sqrt{1+(\frac{v_2}{v_1})^2}$ **1.3.9.** $\frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{12}{15}\right)$ **1.3.10.** $\mathsf{P}(A)=\dfrac{(2-a)^2}{2}$ при $a\ge1$, $\mathsf{P}(A)=\dfrac{2-a^2}{2}$ при $a\le1$. **1.3.11.** $\frac{2}{3}$.

1.4.1. 0,03. **1.4.2.** 0,55. **1.4.3.** $\frac{11}{26}$. **1.4.4.** $p\approx0{,}4$. **1.4.6.** $\mathsf{P}(A+B+C)=\mathsf{P}(A)+\mathsf{P}(B)+\mathsf{P}(C)-\mathsf{P}(AB)-\mathsf{P}(BC)-\mathsf{P}(AC)+\mathsf{P}(ABC)$. **1.4.7.** $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{(-1)^{i-1}}{i!}$; $\frac{1}{e}$.

1.5.б. В порядке перечисления в условии исходам можно назначить вероятности: 0,1, 0,15, 0,15, 0,1, 0,15, 0,1, 0,1, 0,15. **1.5.1.** 0,94. **1.5.2.** $p=1-\prod\limits_{k=1}^{n}(1-p_k)$. **1.5.3.** 0,512. **1.5.4.** $n\ge4$. **1.5.5.** 0,029. **1.5.6.** События зависимы. **1.5.7.** 0,314. **1.5.8.** 0,75. **1.5.9.** 0,3 и 0,6. **1.5.10.** $\dfrac{(n-k)!}{n!}$. **1.5.11.** $p=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\frac{99}{100}\approx0.08$. **1.5.12.** $p=1-\frac{(n-m)!(n-k)!}{n!(n-m-k)!}$. **1.5.14.** 0,323. **1.5.15.** $p_1=\frac{2}{3}$, $p_2=\frac{1}{3}$. **1.5.16.** $p_1=\frac{4}{7}$, $p_2=\frac{2}{7}$, $p_3=\frac{1}{7}$. **1.5.17.** $p=\frac{2}{3}$. **1.5.18.**

$p = p_1 = 0{,}455$. **1.5.19.** $\frac{6}{11}$ и $\frac{5}{11}$. **1.5.20.** а) Да. б) Нет. **1.5.21.** $\frac{1}{9}$. **1.5.22.** $2^{-2n} \sum\limits_{i=n-m}^{n+m} C_{2n}^{i}$.

1.6.1. $\frac{13}{132}$. **1.6.2.** $\frac{7}{18}$. **1.6.3.** $p = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{n_1+m_1} + \frac{m_2}{n_2+m_2}\right)$. **1.6.4.** 0,7. **1.6.5.** $\frac{2}{9}$. **1.6.6.** *0,225*. **1.6.7.** $p = \frac{1}{6}\sum\limits_{k=0}^{5} \mathsf{P}(A\,|\,H_k) \approx 0.78$. **1.6.8.** 0,089. **1.6.9.** В первый район отправить 8 вертолетов, $p \approx 0{,}74$. **1.6.10.** $\frac{5}{32}$. **1.6.11.** $\frac{1}{6\cdot 0{,}78}$. **1.6.12.** Из второй группы. **1.6.13.** $\frac{6}{13}$. **1.6.14.** $p_1 = 0{,}103$, $p_2 = 0{,}277$, $p_3 = 0{,}62$. **1.6.15.** $\frac{2a}{1+a-b}$. **1.6.16.** $\frac{3}{14}$. **1.6.17.** $\frac{13}{41}$. **1.6.18.** $\frac{2}{3}$.

1.7.1. а) $0{,}9^4$; б) $0{,}9^4 + 4\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9^3$; в) $1 - 6\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9^2$. **1.7.2.** $\frac{63}{256}$. **1.7.3.** Вероятнее первая гипотеза. **1.7.4.** а) 0,321; б) 0,243; в) 0,488. **1.7.5.** $\mu = 4$, $p = 0{,}251$. **1.7.6.** $\frac{50}{243}$. **1.7.7.** $\frac{21!}{1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 4!\cdot 5!\cdot 6!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{21} \approx 0{,}0001$. **1.7.8.** $2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{30}\cdot\sum\limits_{i=0}^{6} C_{30}^{i}$.

2.1.а. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$. **2.1.1.** См. решение. **2.1.2.** Ряд распределения:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,125	0,375	0,375	0,125

Функция распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0{,}125, & 0 < x \le 1, \\ 0{,}500, & 1 < x \le 2, \\ 0{,}875, & 2 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$

2.1.3. Ряд распределения:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,09	0,081	0,0729	0,6561

2.1.4. а) $\mathsf{P}(X=m)=q^{m-1}p=\frac{1}{2^m}$; в) один опыт. **2.1.5.** X_1 — случайное число бросков для баскетболиста, начавшего броски; X_2 — для второго баскетболиста; $\mathsf{P}(X_1=m)=(0{,}6\cdot 0{,}4)^{m-1}(0{,}4+0{,}6^2)$; $\mathsf{P}(X_2=0)=0{,}4$; $\mathsf{P}(X_2=m)=0{,}6(0{,}4\cdot 0{,}6)^{m-1}(0{,}6+0{,}4^2)$, $m\ge 1$. **2.1.6.** $\mathsf{P}(X=m)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$ для всех $0\le m\le n$. **2.1.7.** $\mathsf{P}(2)\approx 0{,}17$; $\mathsf{P}(3)\approx 0{,}51$; $\mathsf{P}(4)\approx 0{,}32$; $\mathsf{P}(5)=0$. **2.1.8.** Ряд распределения: $\mathsf{P}\left(X=i\right)=\dfrac{C_5^iC_{31}^{5-i}}{C_{36}^5}$.

2.2.1. $f(x)=\begin{cases}1, x\in[0,1],\\ 0, x\notin[0,1].\end{cases}$ **2.2.2.** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. **2.2.3.** $c=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{\pi}$, $f(x)=\frac{a}{\pi(x^2+a^2)}$. **2.2.4.** а) $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg\ x$; б) $\mathsf{P}(|X|<1)=\frac{1}{2}$. **2.2.5.** $F(l)=1-e^{-kl}$. **2.2.6.** а) $p=e^{-1}$; б) $f(x)=\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$. **2.2.7.** $F\left(x\right)=\frac{1}{\pi}\arccos\left(-\frac{x}{R}\right)$ при $-R\le x\le R$. **2.2.8.** $F\left(x\right)=1-\frac{1}{T}\sqrt{\frac{2}{g}\left(h-x\right)}$ при 375 м $\le x\le h$, где T = 5 с, h = 500 м. **2.2.9.** $\frac{1}{2500^2\cdot\pi\cos\alpha}\ \frac{1}{км^2}$, где α — угол между направлением движения астероида и нормалью к поверхности. **2.2.10.** $e^{-2{,}5}$.

2.3.а. $\mathsf{E}X=\frac{1}{2}$, $\mathsf{D}X=\frac{1}{8}$. **2.3.1.** $\bar{x}=p$. **2.3.2.** а) $\bar{x}=1{,}8$; б) $\bar{x}=1{,}7$; в) $\bar{x}=2{,}0$; наименьшее среднее число взвешиваний будет при системе *б*. **2.3.3.** $\mathsf{E}X$ = 3,5, $\mathsf{D}X=\frac{91}{6}-3{,}5^2$. **2.3.4.** Для первого игрока $\frac{7}{11}$, для второго $-\frac{7}{11}$. **2.3.5.** $\mathsf{E}X=\frac{n}{m}$, $\mathsf{D}X=\frac{n(m+n)}{m^2}$. **2.3.6.** $\mathsf{E}X=a$, $\mathsf{D}X=\frac{l^2}{3}$, $E=\sigma\frac{\sqrt{3}}{2}$. **2.3.7.** $A=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$, $\mathsf{E}X=\frac{a}{a+b}$, $\mathsf{D}X=\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$. **2.3.8.** $\mathsf{E}T=\frac{1}{\gamma}$. **2.3.9.** $\mathsf{E}X=+\infty$. Справедливая стоимость билета около 10 долларов. **2.3.10.** Изменение первоначального выбора не имеет смысла.

2.4.1. $p=1-e^{-0.1}\approx 0{,}095$. **2.4.2.** $p=\frac{3^4}{4!}e^{-3}\approx 0{,}17$. **2.4.3.** 0,143. **2.4.4.** 0,4. **2.4.5.** $p\approx 1-\frac{1}{e}\left(2+\frac{1}{2}\right)\approx 0{,}08$. **2.4.6.** $\mathsf{P}(m)=\frac{50^m}{m!}e^{-50}$. **2.4.7.**

$\sum_{m=51}^{\infty} \frac{60^m}{m!} e^{-60}$. **2.4.8.** $P = (1-p)^n \approx e^{-np}$, где $p = 2 \cdot 10^{-4}$, n = 10 000. **2.4.9.** $P = 1-(1-p)^n \approx 1-e^{-np} \approx 0{,}33$, где $p = 4 \cdot 10^{-3}$, n = 100.

2.5.1. $p = 0{,}053$. **2.5.2.** $p_{ниже} = 0{,}18$; $p_{внутри} = 0{,}48$; $p_{выше} = 0{,}34$. **2.5.3.** 1) 0,1587; 0,0228; 0,00135; 2) 0,3173; 0,0455; 0,0027. **2.5.4.** Диаметр пробирки с вероятностью 0,997 принадлежит интервалу $(2{,}47; 2{,}53)$. **2.5.5.** $\mathrm{D}X \in \,]0, \sigma^2_{\max}]$, где $\sigma_{\max} = \frac{0{,}5}{\rho\sqrt{2}}$ м $\approx 0{,}74$ м.

3.1.1. $P = F(x_3, y_3) - F(x_3, y_1) - F(x_2, y_3) + F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$. **3.1.2.** $p_i = \frac{9-i}{36}$, $i = \overline{1,8}$. **3.1.3.** $A = \frac{4}{43}$; $f_x(x) = \frac{2}{43}(19x + 12)$, $0 < x < 1$; $f_y(y) = \frac{2}{43}(35y + 4)$, $0 < y < 1$; величины зависимы, так как $f(x, y) \neq f_x(x) f_y(y)$. **3.1.4.** $f(x, y) = \frac{1}{(b-a)(d-c)}$ при $a \le x \le b$, $c \le y \le d$; $f(x, y) = 0$ вне прямоугольника. Функция распределения есть $F(x, y) = F_1(x)F_2(y)$, где

$$F_1(x) = \begin{cases} 1, & при \quad x \ge b, \\ \frac{x-a}{b-a}, & при \quad a \le x \le b, \\ 0, & при \quad x \le a. \end{cases} \quad F_2(y) = \begin{cases} 1, & при \quad y \ge d, \\ \frac{y-c}{d-c}, & при \quad c \le y \le d, \\ 0, & при \quad y \le c. \end{cases}$$

3.1.5. A = 20, $F(x, y) = \left(\frac{1}{\pi} arctg \frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi} arctg \frac{y}{5} + \frac{1}{2}\right)$. **3.1.6.** $f(x, y, z) = abc \cdot e^{-(ax+by+cz)}$. **3.1.7.** $F(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{x_i} f_i(\xi_i) d\xi_i$. **3.1.8.** $\mathrm{E}X = \mathrm{E}Y = 0$; $\|k_{ij}\| = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{Vmatrix}$. **3.1.9.** $f(x, y) = \cos x \cos y$, $\mathrm{E}X = \mathrm{E}Y = \frac{\pi}{2} - 1$, $\|k_{ij}\| = \begin{Vmatrix} \pi - 3 & 0 \\ 0 & \pi - 3 \end{Vmatrix}$. **3.1.10.** При $|x| \le R$, $|y| \le R$, $f_x(x) = \frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{R^2 \pi}$, $f_y(y) = \frac{2\sqrt{R^2 - y^2}}{R^2 \pi}$, $F_y(y) = \frac{1}{\pi}\left[\arcsin \frac{y}{R} + \frac{y}{R}\sqrt{1 - \frac{y^2}{R^2}}\right] + \frac{1}{2}$, $F_x(x) = \frac{1}{\pi}\left[\arcsin \frac{x}{R} + \frac{x}{R}\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}\right] + \frac{1}{2}$, случайные величины X и Y зависимы, так как $f(x,y) \neq f_x(x) f_y(y)$. **3.1.11.** $\left\| k_{ij} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{R^2}{4} & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{4} \end{matrix} \right\|$, X и Y не коррелированы.

3.2.1. $f(x,y) = \dfrac{1}{182\pi\sqrt{3}} e^{-\frac{2}{3}\left[\frac{(x-26)^2}{196} + \frac{(x-26)(y+12)}{182} + \frac{(y+12)^2}{169}\right]}$.

3.2.2. Вероятность попадания в i-е кольцо равна $0{,}2^{\left(\frac{i-1}{5}\right)^2} - 0{,}2^{\left(\frac{i}{5}\right)^2}$, $i = \overline{1, 5}$. Ответ: 0,06, 0,16, 0,21, 0,2, 0,16. **3.2.3.** $T = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3.3.1. $\frac{4a}{\pi}$. **3.3.2.** $\mathsf{E}\varphi = arctg\frac{l}{h} - \frac{h}{2l}\ln\left(1 + \frac{l^2}{h^2}\right)$. **3.3.3.** $\mathsf{E}Y = 1$. **3.3.4.** $f_y(y) = f_x(e^y)e^y$. **3.3.5.** $f_y(y) = \begin{cases} \frac{\pi}{\sin(y\pi)}, \text{при } \frac{1}{2} \le y \le \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} e, \\ 0, \text{ при } y > \frac{1}{2} \text{ или } y > \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} e. \end{cases}$

3.3.6. $f(v) = \begin{cases} \frac{1}{3av^{2/3}}, \text{ при } & 0 < v \le a^3, \\ 0, \quad \text{при} & v < 0 \text{ или } v > a^3. \end{cases}$

3.3.7. $f_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - y^2}}, & \text{при} |y| < a, \\ 0, & \text{при} |y| \ge a. \end{cases}$ закон распределения арксинуса.

3.3.8. а) $f_y(y) = |y| e^{-y^2}$ $(-\infty < y < \infty)$; б) $f_y(y) = \begin{cases} 2ye^{-y^2}, \textit{при } y \ge 0, \\ 0, \quad \text{при } y < 0. \end{cases}$

3.3.9. $f_z(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi az}} e^{-\frac{z}{2a\sigma^2}}, & \text{при } z \ge 0, \\ 0, & \text{при } z < 0. \end{cases}$

3.3.10. а) $g(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y - x_2, x_2,) \, dx_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, y - x_1) \, dx_1$, если случайные величины X_1 и X_2 независимы, то $g(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(y - x_2) f_2(x_2) dx_2 =$

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) f_2(y-x_1)dx_1$; б) $g(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y+x_2,x_2,)dx_2=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_1-y)dx_1$;

в) $g(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\frac{y}{x_1})\frac{1}{|x_1|}dx_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_2,\frac{y}{x_2})\frac{1}{|x_2|}dx_2$; г) $g(y)=$

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\frac{x_1}{y})\left|\frac{x_1}{y^2}\right|dx_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_2,yx_2)\,|\,x_2\,|\,dx_2$. **3.3.11.** $g(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}(y>0)$.

3.3.13. $g(y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{l^2}{4}}$, $(l>0)$. **3.3.14.** $\Phi\left(\frac{5}{3\sqrt{2}}\right)$. **3.3.15.** $\frac{1}{3}$. **3.3.16.** $\mathsf{E}\,X=2$, $\mathsf{D}\,X=1{,}1$.

3.4.а. $X(\omega)\equiv 0$. **3.4.б.** Последовательность X_n сходится по вероятности к $X(\omega)\equiv 0$. **3.4.в.** $X(\omega)\equiv 0$, $F_n(0)=1$, $F(0)=0$. **3.4.1.** $X(\omega)\equiv 0$, $\mathsf{E}\,X_n=n$, $\mathsf{E}\,X=0$. **3.4.2.** Поточечная сходимость функций распределения имеет место для всех x.

3.5.1. $\mathsf{P}(|\,X-\bar{x}\,|\geq 4E)\leq 0{,}1375$. **3.5.2.** $f(y)\approx\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(y-12)^2}{4}}$, $\mathsf{P}(6<y<8)\approx 0{,}0023$. **3.5.3.** $\mathsf{P}(475<Y<525)\approx 0{,}8854$. **3.5.4.** $\mathsf{P}(|\,X-\bar{x}\,|\geq 3\sigma)\leq\frac{1}{9}$. **3.5.6.** $\mathsf{P}\left(0{,}2\leq\frac{m}{n}<0{,}4\right)=0{,}98$. **3.5.7.** $n\approx 65$. **3.5.8.** а) $n\approx 250000$; б) $n\approx 16600$. **3.5.9.** 0,71. **3.5.10.** 0,42. **3.5.11.** $\frac{1}{2}\left(1-\Phi\left(\frac{5}{\sqrt{100{,}5}}\right)\right)$. **3.5.12.** Порядка 0,001. **3.6.а.** $e^{-t^2/2}$. **3.6.б.** $\psi_Y(t)=\psi_X(at)\cdot e^{itb}$. **3.6.1.** $\psi(t)=(1-p+pe^{it})^n$. **3.6.2.** $\psi(t)=\frac{1}{1-it}$. **3.6.3.** $\psi(t)=\frac{1}{it}(e^{it}-1)$.

3.7.1. $\varphi(y/x)=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$, при $|y|\leq\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$, $|x|<1$, и $\varphi(y/x)=0$, иначе. **3.7.2**. $k=4$; $f_x(x)=2xe^{-x^2}$, $x\geq 0$; $f_y(y)=2ye^{-y^2}$, $y\geq 0$; $f(y/x)=f_y(y)$, $f(x/y)=f_x(x)$; $\mathsf{E}\,X=\mathsf{E}Y=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\mathsf{D}\,X=\mathsf{D}Y=1-\frac{\pi}{4}$, $k_{xy}=0$. **3.7.3.** Так как $\mathsf{E}\,X=5$, $\mathsf{E}Y=-2$, $\sigma_x=\sigma$, $\sigma_y=2\sigma$, $r=-0{,}8$, то

а) $\mathsf{E}\,X\,|_y=5-\frac{0{,}8}{2}(y+2)=4{,}2-0{,}4y$; $\mathsf{E}Y\,|_x=-2-0{,}8\cdot 2(x-5)=$

$6-1{,}6x$; $\sigma_{x|y}=0{,}6\sigma$, $\sigma_{y|x}=1{,}2\sigma$; б) $f_x(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-5)^2}{2\sigma^2}}$,

$f_y(y)=\frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y+2)^2}{8\sigma^2}}$; в) $f(x/y)=\frac{1}{0{,}6\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+0{,}4y-4{,}2)^2}{0{,}72\sigma^2}}$,

$f(y/x)=\frac{1}{1{,}2\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y+1{,}6x-6)^2}{2{,}88\sigma^2}}$. **3.7.4.** $k=\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$, $k_{xy}=-\frac{1}{18}$,

$f(x/y)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-(2x+1{,}5y)^2}$, $f(y/x)=\frac{3}{\sqrt{\pi}}e^{-(x+3y)^2}$.

3.8.1. $\mathrm{D}X(t)=\sigma^2\,\mathrm{E}n(t)=\sigma^2\lambda t$. **3.8.2.** $K(\tau)=e^{-2\lambda t}$. **3.8.3.** $P\approx\frac{1}{2}(1-\Phi(2{,}68))\approx 0{,}0037$. **3.8.4.** $p_i^\infty=\frac{1}{k}$, $i=1,\ldots,k$. **3.8.5.** $p_{ij}=\sum\limits_{k=0}^{\min(i,j)}C_i^k p^k(1-p)^{i-k}\frac{\alpha^{j-k}}{(j-k)!}e^{-\alpha}$. **3.8.6.** $p_i^\infty=(C_m^i)^2\big/C_{2m}^m$. **3.8.7.** $p_i^\infty=(1-\frac{\alpha}{\beta})(\frac{\alpha}{\beta})^{i-1}$, при $\alpha<\beta$; $p_i^\infty=0$, при $\alpha\ge\beta$.

Решения

1.1.8. Очевидно, что при обращении обеих частей равенства получится эквивалентное уравнение $\overline{\overline{X+A}+\overline{X+\overline{A}}}=\overline{B}$. Выполняя тождественные преобразования, имеем: $(X+A)(X+\overline{A})=\overline{B}$ $\Leftrightarrow$ $X+X\overline{A}+AX=\overline{B}$ $\Leftrightarrow$ $X=\overline{B}$.

1.1.15. Множество S алгеброй событий не является, поскольку, например $\varnothing\notin S$. Чтобы дополнить S до алгебры, нужно помимо Ø добавить в него все события, которые можно выразить из исходных с помощью операций пересечения, отрицания и объединения. Чтобы упорядочить данный процесс, найдем разбиение множества Ω, которое можно получить на основе S. Напомним, что разбиением множества называется некоторая совокупность его непересекающихся подмножеств, в сумме образующих исходное множество. В рассматриваемой задаче таким разбиением будет $\breve{S}=\{\{a,b\},\{c,d\},\{e\}\}$. Теперь искомую алгебру можно получить, перебирая все подмножества множества $\breve{S}$ и включая в алгебру объединение событий из каждого такого подмножества:

$$\Lambda_S = \{\varnothing, \{e\}, \{c,d\}, \{c,d,e\}, \{a,b\}, \{a,b,e\}, \{a,b,c,d\}, \Omega\}.$$

1.1.17. Для доказательства попытаемся сконструировать круг как объединение бесконечного числа квадратов. Для этого на первом шаге впишем в круг квадрат. На втором шаге впишем по квадрату в каждый из четырех полученных на первом шаге сегментов. На третьем шаге впишем 12 квадратов, по одному в каждую из фигур, отсеченных от круга вписанными на предыдущих шагах квадратами. После бесконечного числа шагов все внутренние точки круга попадут в какой-либо квадрат. Однако лишь счетное подмножество точек граничной окружности попадут в объединение квадратов. Нам же нужно включить в построенную фигуру весь круг, включая границу. Если добавлять недостающие точки по-отдельности, то счетным числом операций объединения не обойтись. Поэтому поступим наоборот: вычтем из полученного объединения все уже включенные в него точки окружности (это возможно, так как число последних счетно). Таким образом, доказано, что множеству $\mathcal{B}$ принадлежит внутренность круга. Это не то, что требовалось доказать, зато теперь легко догадаться, что аналогичные рассуждения нужно применить не к кругу, а к его дополнению. Доказав, что дополнение круга принадлежит $\mathcal{B}$, получим в силу определения алгебры, что и сам круг принадлежит $\mathcal{B}$.

1.2.11. Общее число способов выбора n билетов есть C_N^n. Число способов извлечь m выигрышных из M есть C_M^m, при этом оставшиеся билеты можно извлечь C_{N-n}^{M-m} способами. Другой способ решения задачи — считать, что выбор билетов фиксирован и подсчитывать число способов назначения выигрышей. При этом формула в ответе будет иной, но тождественной предыдущей. Полученное выражение часто называют *гипергеометрическим*.

1.2.18. Определим число перестановок, в которых два элемента стоят рядом. Могут быть следующие случаи: первый элемент может стоять на 1-м месте, на 2-м, …, на $(n-1)$ месте, а второй элемент правее его. Число таких вариантов равно $n-1$. Кроме того, эти два элемента можно поменять местами, и следовательно, существует $2(n-1)$ способов размещения двух элементов рядом. Каждому из этих способов соответствует $(n-2)!$ перестановок других элементов. Следовательно, общее число перестановок равно $2(n-1)\,(n-2)!$. Поэтому искомое число перестановок есть $n! - 2(n-1)! = (n-1)!\,(n-2)$.

1.2.22. Для системы уравнений $K_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} K_i K_{n-i}$, $K_0 = 1$ следует подобрать эквивалентное уравнение на производящую функцию. Искомым уравнением будет $z\vartheta(z)\vartheta(z)+1=\vartheta(z)$, при дополнительном условии $\vartheta(0)=1$.

Подставив в это уравнение степенной ряд $\vartheta(z)=\sum_{n=0}^{\infty} K_n z^n$, приведя подобные и приравняв нулю коэффициенты при одинаковых степенях z, получаем в точности исходную систему рекуррентных уравнений. Отсюда следует эквивалентность уравнений.

Решая квадратное уравнение, находим $\vartheta(z)=\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}$. Второй корень отбросили ввиду условия $\vartheta(0)=1$.

Для нахождения K_n нам потребуется вычислять производные найденной функции $\vartheta(z)$. Это удобнее сделать, разложив $f(z)=\sqrt{1-4z}$ в ряд $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Вычисляя производные $f^{(n)}(0)$ и используя представление в виде ряда Тейлора, устанавливаем, что $b_0 = 1$, $b_1 = -2$, $b_{n+1} = b_n \cdot \frac{2\cdot(2n-1)}{n+1}$.

Подставляя разложение для $f(z)$ в $\vartheta(z)=\frac{1-f(z)}{2z}$, находим, что $K_n = -\frac{b_{n+1}}{2}$, откуда следует $K_{n+1} = K_n \cdot \frac{4n+2}{n+2}$. Непосредственной подстановкой проверяется, что решением последнего рекуррентного соотношения будет $K_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{2}$.

1.2.24. Рассмотрим ситуацию, когда часть покупателей прошла и в очереди осталось k человек, при этом в кассе в результате проведённых операций оказалось j пятаков. Обозначим число способов расстановки оставшейся очереди, при которых хотя бы одному покупателю придётся ждать сдачи, через $F(k, j)$.

При $j > 0$ на $F(k, j)$ можно составить очевидное рекуррентное соотношение $F(k, j)= F(k-1, j-1)+ F(k-1, j+1)$. Действительно, после обслуживания очередного покупателя k уменьшается на 1, а j уменьшается или увеличивается на 1 в зависимости от того, было у данного покупателя 10 или 5 коп.

Видим, что рекуррентное соотношение получилось такое же, как для элементов $\rho_{n,i}$ треугольника Паскаля, поэтому естественно попытаться выразить $F(k, j)$ через $\rho_{n,i}$. Для этого нужно учесть краевые условия.

При $j = 0$ имеем $F(k, 0) = C_{k-1}^{k/2} + F(k-1, 1)$, поскольку если очередной покупатель имеет 10 коп., то уже ему нет сдачи и оставшуюся очередь можно расставлять всеми $C_{k-1}^{k/2}$ способами (число способов расставить $\frac{k}{2}$ человек с пятаками в очереди из $k-1$ человек). Заметим, что при $j = 0$ число k – чётное.

Формально приняв $F(k-1, -1) = C_{k-1}^{k/2}$, мы распространяем общее рекуррентное соотношение на случай $j = 0$ и получаем первое граничное условие.

Второе граничное условие есть $F(k,k) = 0$, поскольку если в кассе есть k пятаков, то все k покупателей заведомо получат сдачу.

Легко проверить, что указанным условиям удовлетворяет решение $F(k, j) = \rho_{k, j+2}$, т.е. $F(k, j) = C_k^i$, где $i = \frac{n-j-2}{2}$.

Подставляя исходные данные, получаем, что число расстановок очереди с ожиданием сдачи есть $F(2n, 2m) = C_{2n}^{n-m-1}$. Общее число способов расставить $n-m$ покупателей с пятаками есть C_{2n}^{n-m}, откуда число расстановок без ожидания сдачи есть $C_{2n}^{n-m} - C_{2n}^{n-m-1} = \frac{2m+1}{n+m+1} \cdot C_{2n}^{n-m}$.

Таким образом, вероятность того, что ни одному покупателю не придётся ожидать сдачи, есть $\frac{2m+1}{n+m+1}$.

1.3.a. Множеством неблагоприятных исходов будет сумма двух отрезков длины a. Им соответствуют случаи, когда длина пути пули в бревне больше 25 см. Из теоремы Пифагора $a = \sqrt{17{,}5^2 - 12{,}5^2} \approx 12{,}25$. Искомая вероятность есть $1 - \frac{2 \cdot 12{,}25}{30} \approx 0{,}18$.

1.3.11. Возможные значения первого наугад взятого числа $0 \le x \le 1$, второго числа $0 \le y \le 1$, следовательно, $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$. Благоприятствующие события выражаются, очевидно, уравнением

$x+y \ge 2|x-y|$. Решив уравнение, получим $A=\{(x,y) \mid 3y \ge x, 3x \ge y\}$, следовательно, $\mathsf{P}(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}=\frac{2/3}{1}=\frac{2}{3}$.

1.4.4. $p=1-\frac{1}{C_{17}^6}\left(C_{10}^6+C_{10}^5C_5^1+C_{10}^5C_2^1+C_{10}^4C_5^2+C_{10}^4C_5^1C_2^1+C_{10}^3C_5^3\right)$.

1.5.а. Из тождества $\mathsf{P}(B)=\mathsf{P}(AB)+\mathsf{P}(\overline{A}B)$, используя условие независимости, получаем $\mathsf{P}(B)=\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)+\mathsf{P}(\overline{A}B)$. Откуда $\mathsf{P}(\overline{A}B)=(1-\mathsf{P}(A))\mathsf{P}(B)=\mathsf{P}(\overline{A})\mathsf{P}(B)$, что и требовалось доказать.

1.5.13.

$$\mathsf{P}(B)=\mathsf{P}(B(A+\overline{A}))=\mathsf{P}(AB)+\mathsf{P}(\overline{A}B)=[\mathsf{P}(A)+\mathsf{P}(\overline{A})]\,\mathsf{P}(B/A)=$$
$$=\mathsf{P}(B/A).$$

1.5.15. Пусть A_i и B_i — события, означающие выигрыш при i-м бросании первого и второго игрока соответственно. Выигрыш при i-м бросании означает, что при предыдущих бросаниях никто не выиграл (иначе игра бы прекратилась раньше). Отсюда $A_i = A_i\prod\limits_{j=1}^{i-1}\overline{A}_j\overline{B}_j$. Используя теорему умножения, получаем

$$\mathsf{P}(A_i)=\mathsf{P}(\overline{A}_1)\mathsf{P}(\overline{B}_1/\overline{A}_1)\mathsf{P}(\overline{A}_2/\overline{A}_1\overline{B}_1)\ldots\ \mathsf{P}(A_i/\overline{A}_1\overline{B}_1\ldots\overline{A}_{i-1}\overline{B}_{i-1})=\left(\tfrac{1}{2}\right)^i.$$

Вероятность выигрыша первого игрока есть $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mathsf{P}(A_i)=\frac{2}{3}$.

Другой способ решения задачи заключается в составлении уравнения, исходя из того, что после первого бросания монеты второй игрок выступает в роли первого.

1.5.22. Обозначим через $p_{k,j}$ – вероятность того, что перед обслуживанием k-го покупателя (нумеруем с 0) в кассе оказалось $2m+j$ пятаков.

Величины $p_{k,j}$ удовлетворяют рекуррентному соотношению $2p_{k,j}=p_{k-1,j-1}+p_{k-1,j+1}$ при $k>0$ и $\max(-2m,-k) \le j \le k$; кроме того $p_{0,0}=1$. Для остальных значений индексов $p_{k,j}=0$.

Полученные соотношения похожи на соотношения, задающие треугольник Паскаля (см. раздел *1.2*). При этом имеется дополнительное граничное условие $p_{k,-2m-1}=0$, связанное с тем, что в кассе не может быть отрицательное число пятаков. Это дополнительное ограничение можно удовлетворить, прибавив со сдвигом второй треугольник Паскаля, с отрицательными значениями — приём, аналогичный «методу изображений» в электростатике.

В результате можно убедиться, что составленная система уравнений и граничных условий имеет решение $p_{k,j} = 2^{-k} \cdot (\rho_{k,j} - \rho_{k,j+4m+2})$, где $\rho_{k,j}$ – элементы треугольника Паскаля.

Искомая вероятность есть $\sum\limits_{i=-m}^{n} p_{2n,2i}$.

Подставляя найденные выражения для $p_{k,j}$, а также выражения для $\rho_{k,j}$ через сочетания (см. раздел *1.2*), получаем

$$\sum_{i=-m}^{n} p_{2n,2i} = 2^{-2n}\left(\sum_{i=-m}^{n} C_{2n}^{n-i} - \sum_{i=-m}^{n-2m-1} C_{2n}^{n-2m-1-i}\right) = 2^{-2n} \sum_{i=n-m}^{n+m} C_{2n}^{i}.$$

1.6.16. Обозначим H_i гипотезу о том, что в партии i бракованных деталей. По условию задачи $\mathsf{P}(H_i) = \frac{1}{9}$, $i = \overline{0...8}$. Пусть A — событие, когда среди четырех проверенных оказалось три исправных, а одно бракованное, а B — событие, когда среди трех, выбранных из оставшихся, оказалось одно исправное, а два бракованными. Требуется найти $\mathsf{P}(B/A)$.

Если в роли Ω использовать событие A, то легко получить формулу полной вероятности в виде $\mathsf{P}(B/A) = \sum\limits_{i=0}^{8} \mathsf{P}(B/AH_i)\mathsf{P}(H_i/A)$.

Найдем вероятности, входящие в формулу.

Имеем $\mathsf{P}(H_i/A) = \mathsf{P}(A/H_i)\frac{\mathsf{P}(H_i)}{\mathsf{P}(A)}$, $\mathsf{P}(A/H_i) = \dfrac{C_{8-i}^{3} C_i^1}{C_8^4}$ для i от 1 до 5, $\mathsf{P}(A) = \sum\limits_{i=0}^{8} \mathsf{P}(A/H_i)\mathsf{P}(H_i) = \frac{1}{9 \cdot 70}(35 + 40 + 30 + 16 + 5) = \frac{1}{5}$.

Событие B при условии одновременного выполнения A и H_i может произойти только при i, равном 3 или 4. Непосредственно вычисляем $\mathsf{P}(B/AH_3) = \dfrac{C_2^1 C_2^2}{C_4^3} = \frac{1}{2}$, $\mathsf{P}(B/AH_4) = \dfrac{C_1^1 C_3^2}{C_4^3} = \frac{3}{4}$.

Подставляя найденные величины, получаем

$$\mathsf{P}(B/A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{21}+\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{63}=\frac{3}{14}.$$

1.6.18. Обозначим через A – событие, что ключи находятся в выбранной первоначально шкатулке, B – событие, что ведущий откроет пустую шкатулку. Искомая вероятность есть

$$\mathsf{P}(\overline{A}/B)=1-\mathsf{P}(A/B)=1-\mathsf{P}(B/A)\frac{\mathsf{P}(A)}{\mathsf{P}(B)}=1-1\cdot\frac{1/3}{1}=\frac{2}{3}.$$

1.7.2. $C_{10}^5\frac{1}{2^{10}}$. **1.7.6.** $p=P_{5;2,2,1}+2P_{5;3,2,0}$.

2.1.1. Дискретная случайная величина X принимает два значения $x_1=0$ и $x_2=1$. Вероятности $\mathsf{P}(X=0)=0{,}7$, $\mathsf{P}(X=1)=0{,}3$. Функция распределения $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 0{,}7, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$

2.2.a. Точки неоднозначности функции $F_K^{-1}(y)$, обратной к $F_K(x)$, имеют вид $y_{i,j}=\frac{j}{i}$, где i, j – целые, $i>1$, $0<j<i$. Чтобы $F_K^{-1}(y)$ была функцией распределения, в точках неоднозначности её достаточно определить по непрерывности слева. Соответствующий ряд распределения есть $\mathsf{P}(y_{i,j})=3^{-i}$. При желании вместо двойного индекса можно ввести сквозную нумерацию.

2.2.10. Массу товара будем выражать в единицах ёмкости витрины, а время в сутках. Пусть $G(t)$ – доля товара, пролежавшего на витрине время, большее t. За время Δt будет продано $k\,\Delta t$ товара, где $k=\frac{500}{200}$, и столько же товара будет добавлена на витрину. Товар, пролежавший к моменту $t+\Delta t$ время $t+\Delta t$, состоит из товара, пролежавшего к моменту t время t, за вычетом его доли, реализованной за время Δt.

Имеем уравнение $G(t+\Delta t)=G(t)-G(t)\cdot k\,\Delta t$. Переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, получаем $G'(t)=-k\,G(t)$, откуда $G(t)=e^{-kt}$. Искомая вероятность есть $G(1)$.

2.3.a. Поскольку распределение симметрично относительно точки $x=\frac{1}{2}$, имеем $\mathsf{E}X=\frac{1}{2}$.

Легко заметить, что для «лестницы Кантора» справедливо соотношение: $F_K(x) = \frac{1}{2} F_K(3x)$, при $0 \le x \le \frac{1}{3}$, $F_K(x) = \frac{1}{2}$, при $\frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3}$, $F_K(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} F_K(3x-2)$, при $\frac{2}{3} \le x \le 1$.

Отсюда получаем

$$\mathsf{E} X^2 = \int_0^1 x^2 dF_K(x) = \frac{1}{2}\int_0^{1/3} x^2 dF_K(3x) + 0 + \frac{1}{2}\int_{2/3}^1 x^2 dF_K(3x-2).$$

Делая в последних интегралах замены $t = 3x$ и $z = 3x - 2$, получаем

$$\mathsf{E} X^2 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{9} t^2 dF_K(t) + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{9}(z^2 + 4z + 4) dF_K(z).$$

Замечая что интегралы представляют собой моменты, имеем $\mathsf{E} X^2 = \frac{1}{9}\mathsf{E} X^2 + \frac{2}{9}\mathsf{E} X + \frac{2}{9}$, откуда $\mathsf{E} X^2 = \frac{3}{8}$, $\mathsf{D} X = \mathsf{E} X^2 - (\mathsf{E} X)^2 = \frac{1}{8}$.

2.3.1. Ряд распределения дискретной случайной величины X

x_i	0	1
p_i	$1-p$	p

Откуда, пользуясь определением, получаем математическое ожидание $\bar{x} = \mathsf{E} X = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$.

2.3.9. Вероятность выпадения подряд n гербов есть $p(n) = 2^{-n}$. Математическое ожидание вычисляем непосредственно:

$$\mathsf{E} X = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n p(n) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty.$$

Математическое ожидание выигрыша равно бесконечности, но это не означает, что «разумная» цена такого билета может быть сколь угодно высока.

Поскольку вряд ли кто будет всерьёз рассчитывать на наступление событий, имеющих вероятность порядка $2^{-30} \approx 10^{-9}$, разумно оборвать суммирование на $n = 30$, что соответствует справедливой цене билета в 30 долларов.

Однако можно привести обоснование того, что такая цена завышена.

Для этого вычислим не ожидаемый выигрыш, а ожидаемую полезность.

Разумно положить, что полезность $u(x)$ полученной суммы x зависит от текущего дохода получателя и пропорциональна отношению этой суммы к тому, что получатель уже имеет.

Такое предположение приводит к логарифмическому виду функции полезности $u(x) = x_0 \ln \frac{x+x_0}{x_0}$, где x_0 – «начальный капитал» игрока (можно взять месячный доход).

Ожидаемая полезность $\mathsf{E}u(X) = \sum_{n=1}^{\infty} x_0 \ln \frac{2^n + x_0}{x_0} \cdot 2^{-n}$ конечна.

Поскольку x_0 в задаче не дано, зададим сами некоторое «реалистичное» значение, например, $x_0 = 1000$. Произведя численное суммирование ряда, получаем величину около 11 долларов.

При других значениях x_0 результат принципиально не отличается, например, при $x_0 = 100$ получаем $\mathsf{E}u(x) \approx 7{,}6$, при $x_0 = 10000$ имеем $\mathsf{E}u(x) \approx 14$.

2.3.10. Очевидно, что изменять первоначальный выбор не имеет смысла. Если мы всегда в итоге берём не тот конверт, что вскрыли первоначально, то ничего не изменится, если первый конверт вообще не вскрывать. Но тогда нет разницы, взяли мы наугад конверт сразу, либо наугад указали на один конверт, а забрали в итоге другой.

Осталось понять, почему неверен вывод о том, что при обнаружении во вскрытом конверте 10 долларов, математическое ожидание суммы во втором конверте равно 50,5 долларов.

Дело здесь в том, что вероятность, в отличие от других мер неопределённости, обладает принципиально важной особенностью: она подразумевает возможность статистического моделирования. Это означает, что вероятностная модель должна строиться так, чтобы можно было указать некоторый, хотя бы умозрительный, способ случайного выбора исхода из множества элементарных исходов, например, моделируя на компьютере выбор исхода с помощью датчика случайных чисел.

В данном примере мы не можем в качестве исходов взять наличие 1 или 100 долларов во втором конверте, поскольку невозможно представить способ непосредственного «разыгрывания» этих исходов.

Адекватной здесь была бы, например, такая вероятностная модель. Выбирается множество пар сумм, которые могут быть помещены в конверты, и на этих парах задаётся некоторое распределение. В этом случае можно было бы вполне корректно вычислить условное математическое ожидание суммы во втором конверте в зависимости от суммы, обнаруженной в первом. Однако из условий задачи такого рода распределение неизвестно, поэтому математическое ожидание выигрыша не определено.

2.4.а. Из определения $\mathsf{E}X = \sum_{m=0}^{\infty} m\,\mathsf{P}(m) = \sum_{m=1}^{\infty} m\frac{a^m}{m!}e^{-a} = a\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m}{m!}e^{-a}$.

Последняя сумма есть сумма ряда распределения вероятностей и равна 1. Далее $\mathsf{E}X^2 = \sum_{m=0}^{\infty} m^2\,\mathsf{P}(m) = \sum_{m=1}^{\infty} m^2\frac{a^m}{m!}e^{-a} = a\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\frac{a^m}{m!}e^{-a}$

$= a\sum_{m=0}^{\infty} m\frac{a^m}{m!}e^{-a} + a\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m}{m!}e^{-a} = a^2 + a$.

Используя, что $\mathsf{D}X = \mathsf{E}X^2 - (\mathsf{E}X)^2$, получаем искомое.

2.4.1. Пусть X — дискретная случайная величина числа отказов радиоаппаратуры за 100 часов работы, тогда вероятность отказа радиоаппаратуры есть $\mathsf{P}(X \ge 1) = 1 - \mathsf{P}(X = 0)$.

Математическое ожидание числа отказов радиоаппаратуры за 100 ч работы равно $10^{-4}\cdot 10\cdot 100 = 10^{-1}$. Применяя формулу распределения Пуассона, получаем $\mathsf{P}(X = 0) = \frac{0{,}1^0}{0!}e^{-0{,}1} = e^{0{,}1}$.

3.2.7. Вероятность попадания в круг радиуса R равна $\mathsf{P}\left(X^2 + Y^2 < R^2\right) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\iint_{x^2+y^2<R^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\,dxdy$. Тригонометрической заменой интеграл приводится к виду $\frac{1}{\sigma^2}\int_0^R e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\,rdr$. Далее заменой $t = \frac{r^2}{2\sigma^2}$ получаем $\int_0^{R^2/2\sigma^2} e^{-t}dt = 1 - e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}}$. Учитывая, что вероятность попадания в мишень равна 0,8, находим, что вероятность попадания вне круга радиуса wR_0 , где $R_0 = \sigma\sqrt{-2\ln 0{,}2}$ — радиус мишени, равна $0{,}2^{w^2}$. Откуда получаем вероятности попадания в кольца.

3.3.12. $f_z(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_x(t) f_y(z-t)dt = \dfrac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}-\frac{(z-t-\bar{y})^2}{2\sigma_y^2}} dt$. Теперь показатель нужно привести к виду $az^2+(bt+cz)^2$. Экспонента с первым слагаемым выносится из интеграла, а оставшийся интеграл вычисляется.

3.4.б. Последовательность X_n сходится по вероятности к $X(\omega)\equiv 0$. Интервалы $I_n=[s_n,\ s_n+\frac{1}{n})$ последовательно покрывают точки из $(0, 1]$, причём каждая точка покрывается бесконечное число раз, поскольку ряд $\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}$ расходится. Отсюда следует, что при $\omega\in(0, 1]$ поточечная сходимость $X_n(\omega)$ не имеет места.

3.5.11. Пусть X_i — число очков, выбитое при i-м выстреле, а $X=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$, n = 50. Вычислим

$\mathsf{E}X_i=0{,}1\cdot 0+0{,}1\cdot 1+0{,}2\cdot 2+0{,}3\cdot 3+0{,}2\cdot 4+0{,}1\cdot 5=2{,}1$,

$\mathsf{E}X_j^2=0{,}1\cdot 0^2+0{,}1\cdot 1^2+0{,}2\cdot 2^2+0{,}3\cdot 3^2+0{,}2\cdot 4^2+0{,}1\cdot 5^2=9{,}3$,

$\mathsf{D}X_j=9{,}3-2{,}7^2=2{,}01$, $\mathsf{E}X=n\cdot\mathsf{E}X_i=135$, $\mathsf{D}X=n\cdot\mathsf{D}X_i=100{,}5$,

$\sigma=\sqrt{\mathsf{D}X}\approx 10$.

Из нормального распределения $\mathsf{P}(X\geq 140)\approx\frac{1}{2}\left(1-\Phi\left(\frac{140-135}{10}\right)\right)\approx 0{,}3$.

3.6.а. Подставляя нормальную плотность в определение характеристической функции и используя формулу Эйлера, получаем $\psi(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{itx}e^{-x^2/2}\,dx=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos(tx)e^{-x^2/2}\,dx$. Мнимая компонента обратилась в ноль ввиду нечётности синуса. Далее дифференцируем по параметру и интегрируем по частям $\dfrac{\partial\psi(t)}{\partial t}=-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin(tx)\,xe^{-x^2/2}\,dx=-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}t\cos(tx)\,e^{-x^2/2}\,dx=-t\psi(t)$. Решая получившееся дифференциальное уравнение с учётом $\psi(0)=1$, получаем $\psi(t)=e^{-t^2/2}$.

3.6.4. $\psi^{(4)}(t)=(3-6t^2+t^4)\cdot e^{-t^2/2}$, $\mathsf{E}X^4=i^{-4}\psi^{(4)}(0)=3$.

3.6.5. $\psi'(t)=npi\,e^{it}\cdot(1-p+pe^{it})^{n-1}$, $\mathsf{E}X=i^{-1}\psi'(0)=np$,

$\psi''(t)=npi^2\,e^{it}\cdot(1-p+pe^{it})^{n-2}\cdot(1-p+npe^{it})$,

$\mathsf{E}X^2=i^{-2}\psi''(0)=np(1-p)+(np)^2$, $\mathsf{D}X=\mathsf{E}X^2-(\mathsf{E}X)^2=np(1-p)$.

3.8.1. Из условия задачи $X(t)=X(0)+\sum\limits_{j=1}^{n(t)}\Delta_j$. Вычисляем $\mathsf{E}X(t)=X(0)$, $\mathsf{E}X^2(t)=X^2(0)+\mathsf{E}\sum\limits_{j=1}^{n(t)}(\Delta_j)^2$. Откуда $\mathsf{D}X(t)=\sigma^2\,\mathsf{E}n(t)=\sigma^2\lambda t$.

3.8.2. Корреляционная функция $K(\tau)=\mathsf{E}(X(t)\,X(t+\tau))$, где $X(t)X(t+\tau)=(-1)^n$, n – число перемен знака за время τ, откуда

$$K(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}=e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda t)^n}{n!}.$$

Последняя сумма есть ряд Тейлора для $e^{-\lambda t}$, поэтому $K(\tau)=e^{-2\lambda t}$.

3.8.3. Обозначим $X=\Theta(t_1)$, $Y=\Theta(t_2)$. Совместное распределение случайных величин X и Y является нормальным с нулевым средним и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix}K(0) & K(\tau)\\ K(\tau) & K(0)\end{pmatrix}$, величина X распределена нормально с нулевым средним и дисперсией $K(0)$. Подставляя данные из условия задачи, находим $K(0)=30$, $K(\tau)\approx 2{,}0389$. Находим условную плотность $f(y/x)=\frac{f(x,y)}{f(x)}$. Вычисляем, что $f(y/x=5^\circ)$ имеет нормальное распределение со средним $\bar{y}\approx 0{,}34$ и стандартным отклонением $\sigma\approx 5{,}46$. Откуда $P\approx\frac{1}{2}(1-\Phi(2{,}68))\approx 0{,}0037$.

3.8.6. Обозначим через i состояние, когда в первой урне i шаров. Переходные вероятности есть $p_{i,i}=\frac{2i\cdot(m-i)}{m^2}$, $p_{i,i+1}=\frac{(m-i)^2}{m^2}$, $p_{i,i-1}=\frac{i^2}{m^2}$.

Имеем систему уравнений $p_i^\infty = p_{i-1}^\infty p_{i-1,i} + p_i^\infty p_{i,i} + p_{i+1}^\infty p_{i+1,i}$. Последовательно выражая все p_i^∞ через p_0^∞, получаем $p_i^\infty = p_0^\infty (C_m^i)^2$.

Из условия $\sum_{i=0}^{m} p_i^\infty = 1$ находим $(p_i^\infty)^{-1} = \sum_{i=0}^{m} (C_m^i)^2 = C_{2m}^m$.

Окончательно $p_i^\infty = (C_m^i)^2 \Big/ C_{2m}^m$.

3.8.7. Обозначим через i состояние, когда частица находится в i -й точке. Переходные вероятности есть: $p_{1,1} = 1-\alpha$, $p_{i,i+1} = \alpha$, $p_{i+1,i} = \beta$ $p_{i,i} = 1-\alpha-\beta$.

Имеем систему уравнений $p_i^\infty = p_{i-1}^\infty p_{i-1,i} + p_i^\infty p_{i,i} + p_{i+1}^\infty p_{i+1,i}$. Последовательно выражая все p_i^∞ через p_1^∞, получаем $p_i^\infty = p_1^\infty (\frac{\alpha}{\beta})^{i-1}$.

Учитывая, что в случае ненулевых p_i^∞ выполняется условие $\sum_{i=1}^{\infty} p_i^\infty = 1$, получаем $p_i^\infty = (1-\frac{\alpha}{\beta})(\frac{\alpha}{\beta})^{i-1}$, при $\alpha < \beta$. При $\alpha \ge \beta$ частица неограниченно уходит вправо и $p_i^\infty = 0$.

Библиографический список

Основная литература.

1. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций, под редакцией А.А. Свешникова. –М.: Наука.-1972. –656с
2. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – М.: Дрофа – 2007 – 253 с.
3. А.А. Боровков Теория вероятностей. — М.: Едиториал УРСС, 2003 г. — 472 с.
4. В.И. Лотов. Теория вероятностей и математическая статистика. Курс лекций. / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2006. 128 с.
5. Н.И. Чернова Теория вероятностей: Учеб. пособие. / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2007, 160 с.
6. В.М. Неделько, Т.А. Ступина Основы теории вероятностей и математической статистики в примерах и задачах. Учеб. пособие. / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2006, 81 с.

Дополнительная литература.

7. Б.В. Гнеденко Курс теории вероятностей: Учебник. Изд. 8-е, испр. и доп. — М.: Едиториал УРСС, 2005. — 448 с.
8. Гурский Е. И. Теория Вероятностей с элементами математической статистики. М.: Высш. шк., 1971. 328 с.
9. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1969.
10. Г. Н. Миренкова, С. В. Неделько, В. М. Неделько, Т. В. Тренева. Основы математической статистики. Учебно-методическое пособие. НГТУ. 2008. 36 с.
11. В. М. Неделько. Основы математической статистики: методы анализа данных. Учебно-методическое пособие. НГТУ. 2008. 44 с.
12. Лбов Г.С., Теория и методы построения решающих функций распознавания образов. Уч. Пособие НГУ, 2000, 62 с.
13. В.М. Неделько. Статистические методы машинного обучения. НГТУ. 71 с.