Конспект лекций по курсу

ПРИКЛАДНАЯ АЛГЕБРА

группа 417, осенний семестр 2016/17 уч. года

Лектор *С. И. Гуров*

2016

Глава 1

Булевы алгебры

1.1 Основные понятия булевой алгебры

Определение 1.1. *Булевой алгеброй* $\mathfrak{B}$ называется множество B, содержащее по крайней мере два элемента — o (*нуль*) и ι (*единица*), с заданными на нём бинарными операциями $\sqcup$ (*объединения*), $\sqcap$ (*пересечения*) и унарной операцией $'$ (*дополнения*), таких, что для любых элементов $x, y, z \in B$ выполняются следующие *законы* (*аксиомы*) *булевой алгебры*:

$$
\begin{aligned}
Com\sqcup:&\quad x\sqcup y \;=\; y\sqcup x,\\
Com\sqcap:&\quad x\sqcap y \;=\; y\sqcap x,\\
Dtr1:&\quad (x\sqcup y)\sqcap z \;=\; (x\sqcap z)\sqcup(y\sqcap z),\\
Dtr2:&\quad (x\sqcap y)\sqcup z \;=\; (x\sqcup z)\sqcap(y\sqcup z),\\
\sqcup o:&\quad x\sqcup o \;=\; x,\\
\sqcap \iota:&\quad x\sqcap \iota \;=\; x,\\
Cmp':&\quad x\sqcup x' \;=\; \iota,\\
Isl':&\quad x\sqcap x' \;=\; o,\\
Inv':&\quad (x')' \;=\; x,\\
\iota':&\quad \iota' \;=\; o,\\
o':&\quad o' \;=\; \iota,\\
DeM1:&\quad (x\sqcup y)' \;=\; x'\sqcap y',\\
DeM2:&\quad (x\sqcap y)' \;=\; x'\sqcup y',\\
\sqcup \iota:&\quad x\sqcup \iota \;=\; \iota,\\
\sqcap o:&\quad x\sqcap o \;=\; o,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Ass\sqcup :&\quad x \sqcup (y \sqcup z) \;=\; (x \sqcup y) \sqcup z,\\
Ass\sqcap :&\quad x \sqcap (y \sqcap z) \;=\; (x \sqcap y) \sqcap z,\\
Id\sqcup :&\quad x \sqcup x \;=\; x,\\
Id\sqcap :&\quad x \sqcap x \;=\; x,\\
Abs1 :&\quad x \sqcap (x \sqcup y) \;=\; x,\\
Abs2 :&\quad x \sqcup (x \sqcap y) \;=\; x.
\end{aligned}
$$

Множество B называется *носителем* булевой алгебры $\mathfrak{B}$, а o и ι — *выделенными элементами* или *универсальными гранями.*

Обозначения законов понятны: указаны законы ассоциативности Ass, дитрибутивности Dtr, нейтральности универсальных граней относительно o и ι. Законы Cmp' и Isl' являются *основными законами, описывающие свойства дополнения*; они постулируют, соответственно, его полноту и обособленность. Далее приведены законы инволютивности дополнения, взаимной дополнительности o и ι, 1-й и 2-й законы Де Моргана, поглощающих свойств универсальных граней, ассоциативности Ass, идемпотентности Id и, наконец, 1-й и 2-й законы поглощения Abs.

Введённые операции называют *абстрактными*, поскольку ни они сами, ни носитель, на котором они определены, никак не конкретизируются и никаких иных требований, кроме удовлетворения данным законам, к ним не предъявляется.

Понятно, что в булевой алгебре определены объединения и пересечения *любой конечной совокупности* элементов.

Основные соотношения в булевой алгебре

Лемма 1.1 (основные свойства элементов булевой алгебры). *Для любых элементов x и y булевой алгебры справедливы следующие утверждения.*

1. $x \sqcup y = o \Leftrightarrow x = y = o$ *и*

   $x \sqcap y = \iota \Leftrightarrow x = y = \iota$;

2. *Следующие четыре соотношения эквивалентны —*

$$(1)\; x \sqcap y = x, \qquad (2)\; x \sqcup y = y,$$
$$(3)\; x' \sqcup y = \iota, \qquad (4)\; x \sqcap y' = o.$$

3. *Лемма о единственности дополнения —*

$$\begin{cases} x \sqcap y = o \\ x \sqcup y = \iota \end{cases} \Leftrightarrow \; y = x'$$

(в некоторых аксиоматизациях дополнение вводится как элемент, удовлетворяющий условиям Cmp' и Isl', и тогда необходимо доказывать его единственность, чем и объясняется данное традиционное название леммы).

Доказательство. При пояснении выкладок применение законов коммутативности и ассоциативности специально указывать не будем.

1. $x \overset{Abs1}{=} x \sqcap (\underbrace{x \sqcup y}_{=o}) = o$; $x \overset{Abs2}{=} x \sqcup (\underbrace{x \sqcap y}_{=\iota}) = \iota$ и аналогично для y.

   Обратные следования очевидны.

2. Выведем требуемые соотношения циклически выведены друг из друга.

   $(1) \to (2),\ \sqcup y:\ \ x \sqcap y = x \ \Rightarrow$
   $$\Rightarrow\ y \sqcup (x \sqcap y = y \sqcup x \ \overset{Abs2}{\Rightarrow}\ y = y \sqcup x;$$

   $$(2) \to (3),\ \sqcup x':\ \ x' \sqcup y = x' \sqcup (y \sqcup x) \ \overset{Cmp'}{=}\ \iota;$$

   $$(3) \to (4),\ DeM1:\ \ x' \sqcup y = \iota \ \Rightarrow\ x \sqcap y' = o;$$

   $(4) \to (1),\ \sqcup(x \sqcap y):\ \ (x \sqcap y') \sqcup (x \sqcap y) =$
   $$= o \sqcup (x \sqcap y) \ \overset{Dtr1}{\Rightarrow}\ x \sqcap (\underbrace{y \sqcup y'}_{=\iota}) = x = x \sqcap y$$

3. *Достаточность.*

$$y = y \sqcap (\underbrace{x \sqcup x'}_{=\iota}) \overset{Dtr1}{=} (\underbrace{y \sqcap x}_{=o}) \sqcup (y \sqcap x') =$$
$$= (y \sqcap x') \sqcup (\underbrace{x \sqcap x'}_{=o}) \overset{Dtr1}{=} x' \sqcap (\underbrace{x \sqcup y}_{=\iota}) = x'.$$

Необходимость очевидна.

□

Пусть V — выражение или равенство булевой алгебры. Обозначения для результата одновременной замены всех символов в V:

$V^\sharp$ — $\sqcap \leftrightarrow \sqcup$ и $\iota \leftrightarrow o$;

$V^\flat$ — $x \leftrightarrow x'$, где x — элемент носителя, не являющийся универсальной гранью;

V^* — когда производятся обе указанные замены.

Утверждение 1.1 (Принцип двойственности).

1. *Если V — булево равенство, истинное для любых входящих в него элементов, то равенства $V^\sharp$, $V^\flat$ и V^* также истинны.*

2. *Если V — выражение булевой алгебры, то $V^* = V\,'$.*

Доказательство.

1. Приведённые выше законы, кроме $Inv\,'$, разбиваются на пары взаимодвойственных, переходящих друг в друга при замене $^\sharp$; а $Inv\,'$ самодвойственен.

   Преобразование $^\flat$ переводит все законы, кроме $Inv\,'$, или с точностью до обозначений в себя, или в двойственные, а $Inv\,'$ — в тождество $x' = x'$.

   Поэтому и при замене * истинность булева равенства сохранится.

2. Справедливость этого утверждения следует из равенства $V = z$, где z — соответствующий элемент булевой алгебры: $V = z \Rightarrow V^* = z\,' \Rightarrow V^* = (V)\,'$.

□

Данная система из 21-ой аксиомы избыточна

- Законы Id вытекают из законов Abs: для любого $x \in B$ —

  $Id \sqcup :\qquad x \sqcup x \overset{Abs1}{=} x \sqcup (x \sqcap (x \sqcup x)) \overset{Abs2}{=} x.$

  $Id \sqcap$ — по принципу двойственности.

- Законы Abs влекут эквивалентность $Dtr1$ и $Dtr2$: для любых элементов $x, y, z \in B$ имеем

$$(x \sqcup z) \sqcap (y \sqcup z) \overset{Dtr1}{=} (x \sqcap (y \sqcup z)) \sqcup \overbrace{(z \sqcap (y \sqcup z))}^{z} \overset{Dtr1}{=}$$
$$= (x \sqcap y) \sqcup \underbrace{(x \sqcap z) \sqcup z}_{z} \overset{Abs2}{=} (x \sqcap y) \sqcup z,$$

т.е. $Dtr1 \Rightarrow Dtr2$ и двойственно $Dtr2 \Rightarrow Dtr1$.

- Законы де Моргана выводимы из остальных:
  1) используя законы Dtr, свойства дополнения и единицы показывается, что для любых $x, y \in B$ справедливы соотношения

$$(x \sqcap y) \sqcup (x' \sqcup y') = \iota \quad \text{и} \quad (x \sqcap y) \sqcap (x' \sqcup y') = o;$$

  2) в соответствии с леммой о единственности дополнения это означает, что $x' \sqcup y'$ — дополнение к $x \sqcap y$, т.е. из указанных законов выведен закон $DeM1$; а по двойственности — и $DeM2$.

Две «рабочие» системы аксиом

1. Пары аксиом коммутативности, дистрибутивности, нейтральных свойств особых элементов, а также основные законы дополнения — *первые 8 из приведенных выше законов.*

   Данная система не является независимой: например, каждый из законов $\sqcup o$ и $\sqcap \iota$ выводим из остальных семи.

2. Пары законов законов Dtr, Abs вместе с Cmp' и Isl'.

   Это единственная кратчайшая (6 аксиом) известная на сегодняшний день безызбыточная самодвойственная система аксиом булевой алгебры.

Известны и весьма «экзотические» системы аксиом для булевой алгебры (с одним основным символом, одной аксиомой и др.).

Алгебраические системы. Булева алгебра — пример *алгебраической системы (АС)* или *структуры*, точнее, частного случая АС — *алгебры*. АС $\mathfrak{A}$ задается парой $\mathfrak{A} = \langle A, \sigma_A \rangle$, где

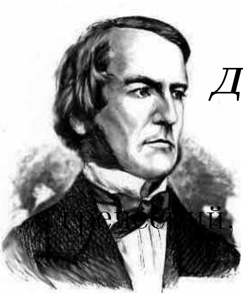
A — *носитель* или *базовое множество* ($A \neq \varnothing$); упрощая, АС часто обозначают символом базового множества;

σ_A — *сигнатура* на A — упорядоченная совокупность символов операций, отношений и особых элементов на A.

- Если σ_1 и σ_2 — две сигнатуры на A и $\sigma_1 \subset \sigma_2$, то АС $\langle\, A, \sigma_1 \,\rangle$ является *редуктом* АС $\langle\, A, \sigma_2 \,\rangle$.

- Все операции АС должны быть *устойчивы* на её носителе.

- Явное указание местности и арности операций и отношений: $\langle\, \sqcup^2,\ \sqcap^2,\ '^1,\ o^0,\ \iota^0 \,\rangle$ — для булевой алгебры.



Джорж Буль (George Boole, 1815–1864) — английский математик–самоучка. Самостоятельно выучил латынь, греческий, французский и немецкий языки, изучил обширные труды Лапласа и Лагранжа. Основные законы, характеризующие булеву алгебру, сформулированы в его работе «*Исследование законов мысли, на которых основаны математические теории логики и вероятностей*» (1854).

Однако полного перечня аксиом и точного определения предложенной им алгебры Буль не дал. АС, эквивалентная булевой алгебре в современном её понимании, впервые приведена в вышедшем в том же году 3-м томе трактата А. де Моргана «Формальная логика».

1.2 Алгебры множеств

Алгебры на множествах. Пусть $A \neq \varnothing$ — множество, $\mathcal{P}(A)$ — множество всех подмножеств (*булеан*) A; $\mathcal{S}(A)$ — некоторая совокупность подмножеств A, устойчивая относительно объединения $\cup$, пересечения $\cap$ и дополнения до A $(^{-})$, а также содержащая $\varnothing$ и A. Понятно, что $\{\varnothing, A\} \subseteq \mathcal{S}(A) \subseteq \mathcal{P}(A)$.

АС $\langle \mathcal{S}(A), \cup, \cap, ^{-}, \varnothing, A \rangle$ — *алгебра множеств.*

Алгебра множеств с носителем $\mathcal{P}(A)$ — *тотальная (над A)*, а с двухэлементным носителем $\{\varnothing, A\}$ — *тривиальная.*

Утверждение 1.2. *Всякая алгебра множеств $\mathcal{S}(A)$ есть булева алгебра с нулём $\varnothing$ и единицей A.*

Доказательство. Убедимся, что в алгебре множеств выполняются пары законов Com, Dtr, $\sqcup o$, $\sqcap \iota$, и Cmp', Isl', в формулировке которых произведены подстановки

$$\sqcup \mapsto \cap,\ \ \sqcap \mapsto \cap,\ \ {}' \mapsto {}^{-},\ \ \iota \mapsto A,\ \ o \mapsto \varnothing.$$

1. Законы Com, $\sqcup o$, $\sqcap \iota$ и Cmp', Isl', очевидно, справедливы.
2. В силу двойственности достаточно показать $Dtr1$: для любых подмножеств X, Y, $Z \in \mathcal{S}(A)$ справедливо

$$(X \cup Y) \cap Z \ = \ (X \cap Z) \cup (Y \cap Z).$$

$\Rightarrow$ Произвольный элемент w из $(X \cup Y) \cap Z$ принадлежит Z, а также либо X, либо Y, т.е. справедливо «либо $w \in X \cap Z$, либо $w \in Y \cap Z$» и, следовательно, $w \in (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$.

$\Leftarrow$ Если $w \in (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$, то $w \in X \cap Z$ или $w \in Y \cap Z$, т.е. «$w \in Z$ и либо $w \in X$, либо $w \in Y$» $\Leftrightarrow$ $w \in (X \cup Y) \cap Z$. □

Алгебра множеств, замкнутая относительно операции счётного объединения, называется *σ-алгеброй* и, следовательно, является булевой алгеброй.

Например, аксиоматика А. Н. Колмогорова теории вероятностей построена на σ-алгебре подмножеств пространства элементарных событий.

Булева алгебра, в которой операции $\sqcup$ и $\sqcap$ определены для произвольной совокупности её элементов называется *полной*.

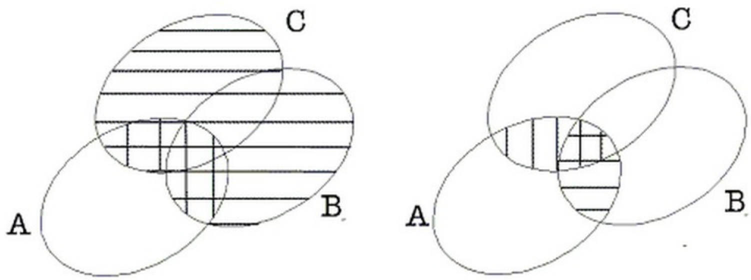
Любая алгебра множеств — полная, а σ-алгебра (где эти операции могут быть взяты лишь по счётной совокупности множеств), является “промежуточной” между обычной и полной булевыми алгебрами:

$$\boxed{\text{полные булевы алгебры}}$$
$$|$$
$$\boxed{\sigma\text{-алгебры}}$$
$$|$$
$$\boxed{\text{булевы алгебры}}$$

Формально для булевой алгебры с носителем B и объединения $S = \bigsqcup\limits_{x\,\in\, X\subseteq B} x$ считают, что $S = x$ при одноэлементном множестве $X = \{x\}$ и $S = o$ при пустом X. Для пересечения элементов — $\bigsqcap\limits_{x\,\in\,\varnothing} x = \iota$.

Составляющие системы множеств. Проверку равенств булевой алгебры $\mathcal{P}(A)$ проводят, используя известные *диаграммы Эйлера-Венна.*

Пример 1.1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ —



Это будет являться доказательством, если диаграмма *правильно построена*. Формализуем данное понятие.

Определение 1.2. Пусть дано множество $U \neq \varnothing$ и система $\{X_1, \ldots, X_n\}$ его подмножеств.
Составляющие данной системы множеств задаются индуктивным определением:

1) у одноэлементной системы $\{X_1\}$ — две составляющие: X_1 и $\overline{X}_1$;
2) если s — составляющая системы $\{X_1, \ldots, X_{n-1}\}$, то $s \cap X_n$ и $s \cap \overline{X}_n$ — составляющие системы $\{X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n\}$.

Система множеств X называется *независимой*, если все её составляющие непусты.

Пример 1.2. Рассмотрим множество $U = \{a, b, c, d\}$.

1. Найдём составляющие системы $X_1 = \{a, b\}$, $X_2 = \{b\}$.

Шаг 1: $X_1 = \{a, b\}$, $\overline{X}_1 = \{c, d\}$;
Шаг 2: $X_1 \cap X_2 = \{b\}$, $\overline{X}_1 \cap X_2 = \varnothing$,
$X_1 \cap \overline{X}_2 = \{a\}$, $\overline{X}_1 \cap \overline{X}_2 = \{c, d\}$,

и, следовательно, данная система множеств *не является независимой*.

2. Составляющие системы $X_1 = \{a, b\}$, $X_2 = \{b, c\}$ суть $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a\}$, $\{d\}$, и, следовательно, данная система множеств *независима*.

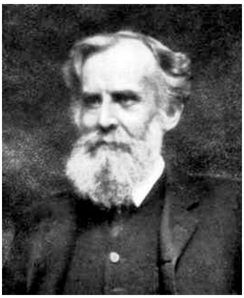
Утверждение 1.3. *1. Различные составляющие независимой системы множеств не пересекаются.*

2. Независимая система из n множеств имеет 2^n различных составляющих.

3. *Объединение всех составляющих совпадает со всем множеством U.*

Доказательство. — пп. (1) и (3) легко проводятся по индукции, (2) следует из (1). □

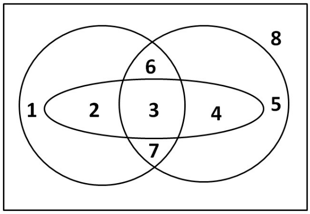
Теорема 1.1 (Венн). *Если в алгебре множеств булево равенство выполнено для некоторой независимой системы подмножеств, то оно справедливо для любой системы подмножеств.*



Джон Венн (John Venn 1834–1923) — английский логик и философ. Введённые им диаграммы используется во многих научных областях (теория множеств, теория вероятностей, логика, статистика, информатика...).

Следствие. *Диаграммы Венна будут являться доказательством булева равенства, если несвязанным условиям элементам булевой алгебры соответствуют независимая система кругов (общего положения).*

Например, множества, изображённые на нижеприведённом рисунке не являются множествами общего положения.



1.3 Изоморфизмы булевых алгебр

Примеры булевых алгебр

1. *Алгебра логики* или *алгебра высказываний* — АС $\mathbf{2} = \langle\, B, \sigma \,\rangle$, где $B = \{1, 0\}$ («истина» и «ложь»), а $\sigma = \langle \vee, \&, \neg, 0, 1 \rangle$ является булевой алгеброй; она играет фундаментальную роль в логике.

Cmp': $x \vee \neg x = 1$ — *закон исключенного третьего;*

Isl': $x \,\&\, \neg x = 0$ — *закон противоречия.*

2. *Булева алгебра n-мерных двоичных векторов* — АС $\mathbf{2}^n = \langle\, B^n, \vee, \&, \neg, \widetilde{0}, \widetilde{1} \,\rangle$, где B^n — n-мерный единичный куб, $\widetilde{0} = (0, \ldots, 0)$ и $\widetilde{1} = (1, \ldots, 1)$, а сигнатурные операции применяются к булевым векторам покомпонентно (многомерный вариант алгебры $\mathbf{2}$).

3. *Булева алгебра логических функций* — АС $\langle\, P_2, \vee, \&, \neg, \mathbf{0}, \mathbf{1} \,\rangle$, где P_2 — множество всех двузначных булевых функций, а $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ — функции «тождественный нуль» и «тождественная единица».

4. Пусть N — *свободное от квадратов* натуральное число (т.е. справедливо *примарное разложение* $N = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$, где $p_1, \ldots, p_k$ — различные простые числа) и $D(N)$ — совокупность всех натуральных де-

лителей N.
Например, для $N = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ имеем
$D(30) = \{ 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 \}$.

Обозначим: $m \vee n$ — наименьшее общее кратное чисел, $m \wedge n$ — наибольший общий делитель чисел m и n, $m' = \frac{N}{m}$.
Тогда АС $\langle D(N), \vee, \wedge, ', 1, N \rangle$ — булева алгебра, широко используемая в теории чисел.

5. *Алгебра контактных схем.*
Рассмотрим множество электрических выключателей, или контактов, которые могут находиться в одном из двух состояний — замкнутом (проводящем) или разомкнутом (не проводящем).

У таких контактов различают входной и выходной полюсы, которые можно соединять с полюсами других контактов, строя электрические двухполюсные (один вход и один выход) цепи.

Если соединять друг с другом только входные и выходные полюсы, то имеется только два способа объединения таких цепей: *последовательное* и *параллельное.*

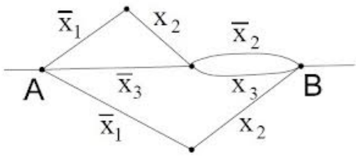
В результате получаем π-*схемы.*

Под произведением $A \cdot B$ понимаем цепь, образованную последовательным, а под суммой $A + B$ — параллельным соединением цепей A и B.

Под цепью $\overline{A}$ понимаем цепь, полученную размыканием всех замкнутых контактов A и замыканием всех её разомкнутых контактов.

Проводимость двухполюсной цепи может быть описана формулой над множеством логических связок

$\{\vee, \&, \neg\}$ ($\&$ опускают), в которой каждому контакту цепи соответствует пропозициональная переменная x (с отрицанием или без), выражающая его проводимость. Две цепи одинаковы, если можно так сопоста-



$$(\overline{x}_1 x_2 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_2 \vee x_3) \vee \overline{x}_1 x_2 = \overline{x}_1 x_2 \vee \overline{x}_2 \overline{x}_3$$

вить контактам переменные, что при одном и том же состоянии контактов обе рассматриваемые цепи являются одновременно либо проводящими, либо не проводящими.

Это — отношение эквивалентности на множестве цепей.

Обозначим I постоянно замкнутый, O — постоянно разомкнутый цепи.

Если C — множество всех попарно неэквивалентных π-схем (последовательно-параллельных двухполюсных электрических цепей), то АС $\langle\, C, +, \cdot, ^-, O, I\,\rangle$ — булева *алгебра переключательных схем*.

Применение формульного аппарата булевых алгебр для анализа и синтеза электрических схем имеет огромное прикладное значение.

Кроме параллельно-последовательных, существуют ещё т.н. *мостиковые схемы*.

Для описания подобных схем язык булевой алгебры оказывается недостаточным: *не удаётся так усовершен-*

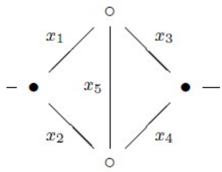


Рис. 1.1. Мостиковая схема

ствовать обычный булев аппарат алгебры логики, добавив к нему ещё несколько (конечное число!) операций так, чтобы он стал содержать средства для описания строения не только параллельно-последовательных, но и мостиковых схем, притом описания адекватного, т.е. такого, при котором каждому контакту в схеме соответствует ровно одна буква в формуле, выражающая проводимость данной схемы (Кузнецов А.В.).

Такая схема она не может быть построена указанными операциями последовательного и параллельного соединения цепей — формула

$$x_1 \,\&\, (x_3 \vee (x_4 \,\&\, x_5)) \;\vee\; x_2 \,\&\, (x_4 \vee (x_3 \,\&\, x_5)),$$

не является *бесповторной*, и никакое эквивалентное преобразование F не приведёт к бесповторной форме над множеством связок $\{\vee, \&, \neg\}$.

В 1960-х гг. российский логик и философ *Е. К. Войшвилло* построил алгебру для адекватного описания двухполюсных цепей общего вида.

6. *Алгебра случайных событий.* Пусть в ходе некоторых экспериментов могут наблюдаться или не наблюдаться определённые события. Такие события называют *случайными*, не различая при этом события, кото-

рые в данном эксперименте появляются только одновременно.

Введём три операции на таких событиях в данном эксперименте:

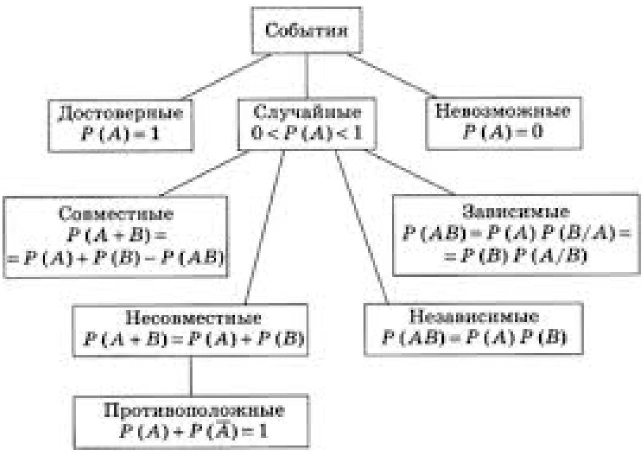
$+$ — *сложение* двух событий означающее, что наблюдается хотя бы одного из указанных событий;

$\cdot$ — *умножение* двух событий, означающее, что наблюдаются оба этих события;

$^{-}$ — *отрицание* события, означающее, что данное событие не наблюдалось.

Зафиксируем также никогда не наступающее событие $\varnothing$ и всегда наступающее при проведении данного эксперимента событие $\mathbf{1}$. Совокупность всех случайных событий, связанных с данным экспериментом, является булевой алгеброй относительно введённых операций и выделенных элементов $\varnothing$ и $\mathbf{1}$.

Далее вводят понятие вероятностной меры $P(\cdot)$ на элементах алгебры событий,



однако это не предмет нашего рассмотрения.

Вышеприведенные АС являются *представлениями* или *реализациями* булевой алгебры.

Максиминная алгебра. Для действительных чисел a, b из отрезка $[\,0,\,1\,]$ положим

$$a \oplus b = \max\{a,\,b\},\ a \otimes b = \min\{a,\,b\},\ \ominus a = 1 - a.$$

АС $\langle\,[\,0,\,1\,],\,\oplus,\,\otimes,\,\ominus,\,0,\,1\,\rangle$ — *максиминная алгебра.*

Она *не будет являться булевой алгеброй*: в ней не выполняются аксиомы Cmp' и Isl' и причём *только эти* из приведённой выше системы из 21-ой аксиомы. Кстати, это доказывает их независимость от остальных и необходимость присутствия этих законов в любой системе аксиом для булевой алгебры введённой сигнатуры.

Дополнения в максиминной алгебре единственны и т.о. максиминная алгебра *чрезвычайно близка к булевой алгебре*, но ей всё-таки не является.

Изоморфизм булевых алгебр

Определение 1.3. Пусть B и B_1 — булевы алгебры и $\varphi\colon B \to B_1$ — такая биекция, что для всех $x, y \in B$ справедливы равенства

1. $\varphi(x \sqcup y) \;=\; \varphi(x) \sqcup \varphi(y)$,
2. $\varphi(x \sqcap y) \;=\; \varphi(x) \sqcap \varphi(y)$,
3. $\varphi(x') \;=\; \varphi(x)'$.

Тогда говорят, что φ — *булев изоморфизм* между B и B_1, а данные алгебры *булево изоморфны* (символически $B \cong B_1$).

Замечание. Из (1) –(3) следует

$$4.\ \ \varphi(o) = o, \quad 5.\ \ \varphi(\iota) = \iota.$$

Действительно:

$$\varphi(o) = \varphi(x \sqcap x') = \varphi(x) \sqcap \varphi(x') = \varphi(x) \sqcap \varphi(x)' = o$$

и аналогично для $\varphi(\iota)$.

Неформально булев изоморфизм — взаимно-однозначное отображение носителей булевых алгебр, сохраняющее операции и особые элементы o и ι.

Примеры 1.1 (изоморфных булевых алгебр).

1. Алгебра высказываний изоморфна тривиальной алгебре множеств: $\mathbf{2} \cong \{\varnothing, A\}$.
2. Тотальная алгебра над n-элементным множеством $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ изоморфна булевой алгебре n-мерных двоичных векторов B^n.
   Булев изоморфизм — биекция элементов A и векторов первого слоя в B^n.
3. Определим для булевой алгебры $\mathfrak{B} = \langle B, \sqcup, \sqcap, ', o, \iota \rangle$ двойственную к ней $\mathfrak{B}^* = \langle B^*, \sqcap^*, \sqcup^*, '^*, \iota^*, o^* \rangle$, положив

   $$B^* = B,\ \sqcup^* = \sqcap,\ \sqcap^* = \sqcup,\ '^* =',\ o^* = \iota,\ \iota^* = o.$$

   В силу принципа двойственности — $\mathfrak{B}^* \cong \mathfrak{B}$.

Теорема 1.2 (Критерий изоморфности тотальных алгебр множеств). *Две тотальные алгебры множеств $\mathcal{P}(A)$ и $\mathcal{P}(B)$ изоморфны, если и только если A и B имеют одинаковую мощность.*

Доказательство. Необходимость. Пусть существует изоморфизм φ между алгебрами $\mathcal{P}(A)$ и $\mathcal{P}(B)$.

Тогда φ — взаимно-однозначное соответствие между $\mathcal{P}(A)$ и $\mathcal{P}(B)$ и, следовательно, между множествами A и B, откуда следует их равномощность.

Достаточность. Если множества A и B равномощны, то между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие f.

Однако элементами $\mathcal{P}(A)$ и $\mathcal{P}(B)$ служат подмножества A и B соответственно, и f не является искомым изоморфизмом.

Поэтому распространим отображение f на подмножества данных множеств:

$$\varphi(X) = \bigcup_{a \in X} f(a) \subseteq B.$$

Простая проверка показывает, что φ является булевым изоморфизмом между $\mathcal{P}(A)$ и $\mathcal{P}(B)$. $\square$

1.4 Теорема Стоуна

Атомы. Справедлива следующая фундаментальная теорема о представлении произвольных булевых алгебр алгебрами множеств. Она показывает, что элементы любой булевой алгебры можно считать подмножествами некоторого множества, а булевы операции отождествлять с одноимёнными теоретико-множественными.

Теорема 1.3 (*Стоун*). *Всякая булева алгебра изоморфна подходящей алгебре множеств.*

Теорема Стоуна утверждает существование вложения (какого конкретно?) любой булевой алгебры в некоторую (какую конкретно?) тотальную алгебру множеств.

Мы докажем эту теорему для *конечного случая*, для чего введём новое понятие.

Определение 1.4. Ненулевой элемент a булевой алгебры B называется *атомом*, если для любого элемента $x \in B$ справедливо

$$\text{либо } a \sqcap x = o, \text{ либо } a \sqcap x = a.$$

В последнем случае говорят, что *элемент* x *содержит атом* a.

Например, атомы в B^n — двоичные наборы первого слоя, в $\mathcal{P}(A)$ — *одноэлементные* подмножества A.

Маршал Стоун
(Marshall Harvey Stone, 1903–1989) — американский математик. Занимался теорией операторов, теорией групп, теорией булевых алгебр.

Утверждение 1.4 (основное свойство атомов). *Если* a_1 *и* a_2 *— различные атомы булевой алгебры, то*

$$a_1 \sqcap a_2 = o.$$

Доказательство. Если $a_1 \sqcap a_2 = b \neq o$, то согласно определению должно быть и $b = a_1$, и $b = a_2$. $\square$

Лемма 1.2. *В конечной булевой алгебре каждый ненулевой элемент содержит хотя бы один атом.*

Доказательство. Алгоритм нахождения атома, содержащегося в элементе $x \in B$: для $x \neq o$ берём сначала $a = x$; затем, последовательно перебирая все элементы $b_1, b_2, \ldots, b_m$ носителя B, вычисляем $z = a \sqcap b_k$, полагая $a = z$, если $z \neq o$ (и $z \neq a$).

После окончания работы алгоритма получим

$$a = x \sqcap \prod_{b \in B' \subset B} b \neq o,$$

причём для любого $b \in B$ пересечение $a \sqcap b$ равно либо o, либо (в частности, для $b = x$) a, т.е. a — искомый атом. □

Булева алгебра называется

- *атомной* (или *дискретной*), если каждый её ненулевой элемент содержит атом,
- *безатомной* (или *непрерывной*) если она не содержит ни одного атома.

Все конечные (и рассмотренные ранее) алгебры — атомные.

Пример 1.3 (безатомной булевой алгебры). Пусть S — совокупность всех конечных объединений всевозможных полуинтервалов вида $(x,\, y]$ из промежутка $I = (0,\, 1]$: $0 < x \leqslant y \leqslant 1$. S устойчива относительно теоретико-множественных операций $\cup$, $\cap$ и дополнения до I, и в ней выполняются все законы булевой алгебры. Единица в S — весь интервал I, нуль — пустое множество $(x,\, x]$.

Алгебра S является безатомной: любой интервал $(x, y] \neq \varnothing$ содержит в себе ненулевой подынтервал.

Обозначения для булевой алгебры B:

$At(x)$ — совокупность всех атомов, содержащихся в элементе $x \in B$ (и формально $At(o) = \varnothing$);

$At(B)$ — совокупность всех атомов B.

Лемма 1.3 (о разложении ненулевого элемента на атомы). *Всякий ненулевой элемент атомной булевой алгебры может быть представлен в виде объединения содержащихся в нём атомов:*

$$x = \bigsqcup_{a \in At(x)} a.$$

Пример 1.4. В $\mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$ элемент $x = \{a, b, c\}$ содержит атомы $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ и равен их объединению: $x = \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$.

При $At(x) = \{a\}$ формально полагают $x = \bigsqcup\limits_{a} a$ и $o = \bigsqcup\limits_{\varnothing} a$.

Доказательство леммы будет дано далее.

Единица ι есть объединение всех атомов булевой алгебры: действительно, пусть $b = \bigsqcup\limits_{a \in At(B)} a$, тогда

$$o = b' \sqcap b = b' \sqcap \left(\bigsqcup_{a \in At(B)} a \right) = \bigsqcup_{a \in At(B)} (b' \sqcap a)$$

(последнее равенство — по дистрибутивности). Тогда $b' \sqcap a = o$ для любого атома a. Это означает, что b' не содержит ни одного атома, т.е. $b' = o$, $b = \iota$ и $At(\iota) = At(B)$.

Для конечного случая теорема Стоуна допускает следующее *усиление*.

Теорема 1.4. *Всякая конечная булева алгебра изоморфна некоторой тотальной алгебре множеств.*

Доказательство. Пусть B — конечная булева алгебра.

Покажем, что тотальная алгебра множеств над $At(B)$ изоморфна B, т.е. $B \cong \mathcal{P}(At(B))$.

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = At(x)$, сопоставляющую каждому элементу x из B множество $At(x)$ содержащихся в нём атомов и покажем, что она является искомым изоморфизмом. Также считаем, что $\varphi(o) = \varnothing$.

Убедимся сначала, что $\varphi(x)$ — биекция между B и $\mathcal{P}(At(B))$.

Из разложения элемента на атомы следует, что

1) элемент x однозначно определяется множеством $At(x)$ своих атомов и наоборот, т.е. отображение $\varphi(x)$ *инъективно*;
2) для произвольного подмножества $A \subseteq At(B)$ можно определить элемент x как
$$x = \bigsqcup_{a \in A} a,$$
тогда $\varphi(x) = A$ и φ — *сюръективно*.

Биективность отображения φ показана.

Теперь удостоверимся, что для φ выполнены свойства (1)–(3) изоморфизма булевых алгебр.

1. Очевидно, что

$$x \sqcup y = \bigsqcup_{a_1 \in At(x)} a_1 \sqcup \bigsqcup_{a_2 \in At(y)} a_2 = \bigsqcup_{a \in At(x) \cup At(y)} a,$$

откуда $\varphi(x \sqcup y) = \varphi(x) \cup \varphi(y)$.

2. Покажем, что $\varphi(x \sqcap y) = \varphi(x) \cap \varphi(y)$

$$x \sqcap y = \bigsqcup_{a_1 \in At(x)} a_1 \sqcap \bigsqcup_{a_2 \in At(y)} a_2 =$$

$$= \bigsqcup_{\substack{a_1 \in At(x) \\ a_2 \in At(y)}} (a_1 \sqcap a_2) = \bigsqcup_{a \in At(x) \cap At(y)} a\,.$$

Второе равенство здесь — по дистрибутивности, а последнее — по основному свойству атомов.

3. Подставляя в полученные выше равенства $y = x'$ с учётом $At(\iota) = At(B)$ получим

$$At(x) \cup At(x') = At(B) \quad \text{и} \quad At(x) \cap At(x') = \varnothing,$$

откуда по лемме о единственности дополнения —

$$At(x') = At(B) \setminus At(x) \text{ и } \varphi(x') = \overline{\varphi(x)}.$$

□

Следствие. Конечная n-атомная булева алгебра содержит 2^n элементов, т.к. мощность множества всех подмножеств совокупности из атомов n есть 2^n.

Теорема Стоуна показывает, что элементы любой булевой алгебры можно представлять подмножествами некоторого множества, а булевы операции отождествлять с одноимёнными теоретико-множественными.

Заметим, что для доказательства теоремы Стоуна в случае бесконечных булевых алгебр используется понятие ультрафильтра.

1.5 Задачи с решениями

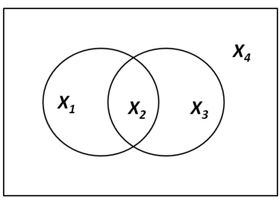
Задача 1.1. *Определить максимальное количество подмножеств, которые можно образовать из n различных подмножеств некоторого универсального множества с помощью теоретико-множественных операций объединения, пересечения и дополнения?*

А для случая, когда подмножества образуют разбиение исходного множества?

Решение. 1. 2^{2^n} множеств: если система множеств $\{X_1, \ldots, X_n\}$ независима, она порождает 2^n непустых составляющих — атомов.

Они попарно не пересекаются и их объединение совпадает с U, т.е., существует 2^{2^n} различных объединений составляющих (включая пустое).

2. 2^n



Задача 1.2. *Рассмотрим АС* $\langle \{0, 1\}, \oplus, \&, \neg, 0, 1\rangle$. *Является ли она булевой алгеброй?*

Решение. Проверкой убеждаемся, что эта АС удовлетворяет только 7 из первых 8 первым аксиомам булевой алгебры, а именно, не выполняется второй дистрибутивного закона $Dtr2$:

$$(x \& y) \oplus z \neq (x \oplus z) \& (y \oplus z),$$

т.к. при $x = 0$, $y = z = 1$ имеем

$$(0 \& 1) \oplus 1 = 1 \neq 0 = (0 \oplus 1) \& (1 \oplus 1).$$

Рассматриваемая АС — кольцо с единицей, а не булева алгебра.

Дополнительно показана независимость аксиомы $Dtr2$ от остальных.

Задача 1.3. *Показать выводимости законов Де Моргана из остальных законов булевой алгебры.*

Решение. Для любых $x, y \in B$ справедливо

$$(x \sqcap y) \sqcup (x' \sqcup y') = \iota \quad \text{и} \quad (x \sqcap y) \sqcap (x' \sqcup y') = o.$$

Покажем это: $(x \sqcap y) \sqcup (x' \sqcup y') \overset{Dtr}{=}$

$$= (x \sqcup x' \sqcup y') \sqcap (y \sqcup x' \sqcup y') = \iota \sqcap \iota = \iota,$$

и $(x \sqcap y) \sqcap (x' \sqcup y') = o$ по двойственности.

По лемме о единственности дополнения это означает, что

$$x' \sqcup y'$$

— дополнение к $x \sqcap y$, т.е. из указанных законов выведен закон $DeM1$.

Аналогичная выводимость $DeM2$ следует из принципа двойственности.

Задача 1.4. *Пусть $D(N)$ — совокупность всех делителей натурального N. Построить булевы алгебры с носителями*

$$1.\ D(18), \qquad 2.\ D(110)$$

или показать, что это невозможно.

Решение.

1. Нет. Если стандартно использовать операции НОК и НОД как $\sqcap$ и $\sqcup$ соответственно, то не существует дополнения $6'$ для 6. Должно быть: $6 \vee 6' = 18,\ 6 \wedge 6' = 1$.
   Только $6 \vee 9 = 18$, но $6 \wedge 9 = 3$.
   Причина: 18 не есть число, свободное от квадратов.

   Или ещё проще: $D(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, $|D(18)| = 6 \neq$ степень 2.

2. Да, т.к. $110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$ — число, свободное от квадратов, и для каждого $a \in B = \{1,\ 2,\ 5,\ 10,\ 11,\ 22,\ 55,\ 110\}$ можно единственным образом определить дополнение $a' = \frac{110}{a}$.

Задача 1.5. *Справедливо основное свойства атомов булевой алгебры: если a_1 и a_2 — различные атомы, то $a_1 \sqcap a_2 = o$.*

Равенство, двойственное к данному $a_1 \sqcup a_2 = \iota$ в булевой алгебре с более, чем 4 элементами, очевидно, неверно. Почему?

Решение. Здесь существенно, что a_1 и a_2 не произвольные элементы булевой алгебры, а именно атомы.

Обозначим через V выражение

$$((a_1 \sqcap x = a_1) \vee (a_1 \sqcap x = o)) \ \& \\ \& \, ((a_2 \sqcap x = a_2) \vee (a_2 \sqcap x = o)) \ \& \\ \& \, (a_1 \neq a_2) \ \Rightarrow \ a_1 \sqcap a_2 = o\,.$$

Тогда $V^\natural$ будет истинное выражение

$$[(a_1 \sqcup x = a_1) \vee (a_1 \sqcup x = \iota)] \ \& \\ \& \, ((a_2 \sqcup x = a_2) \vee (a_2 \sqcup x = \iota)) \ \& \\ \& \, (a_1 \neq a_2) \ \Rightarrow \ a_1 \sqcup a_2 = \iota\,.$$

Задача 1.6. *Показать, что в булевой алгебре* **2** *для* $x, y, z \in B$ *справедливы соотношения (приоритет* $\cdot$ *выше* $\vee$*, символ* $\cdot$ *будем иногда опускать):*
1. $(x \vee y)(\overline{x} \vee y) = y$; *2.* $(z \vee x)(\overline{z} \vee y) = zy \vee \overline{z}x$;

Решение.

1. $$(x \vee y)(\overline{x} \vee y) = x\overline{x} \vee xy \vee y\overline{x} \vee y = \\ = 0 \vee xy \vee y\overline{x} \vee y \cdot 1 = y \cdot (x \vee \overline{x} \vee 1) = y \cdot 1 = y.$$

2. Для справедливости равенства $A = B$ можно:

А. Показать, что
$$\begin{cases} A \vee B' = 1, \\ A \cdot B' = 0 \end{cases}$$
и воспользоваться леммой о единственности дополнения (приведённые равенства проверить легче, чем исходное $A = B$).

Имеем $A = (z \vee x)(\overline{z} \vee y)$, $B = zy \vee \overline{z}x$.
Далее $B' = (\overline{z} \vee \overline{y})\&(z \vee \overline{x})$.

Б. Привести A и B в некоторую единую форму.

- Приведение к виду «полином Желалкина». Введём операцию $x + y \stackrel{\text{def}}{=} x\overline{y} \vee \overline{x}y$. Тогда $\overline{x} = x + 1$, $\overline{x}+x = 0$, операция $\cdot$ ассоциативна, коммутативна и для $\cdot$ и $+$ выполняется первый дистрибутивный закон. Получаем

$$(z \vee x)(\overline{z} \vee y) = (x \vee z)(y \vee (z+1)) = \\ = (xz + x + y)(y(z+1) + y + z + 1) = \\ = (xz + x + y)(yz + z + 1) = \\ = xyz + xz + xz + xyz + xz + x + yz + z + z = \\ = xz + yz + x\,.$$

С другой стороны, $zy \vee \overline{z}x = yz \vee (z+1)x =$

$$= yz \vee (xz + x) = yz(xz + x)yz + xz + x = \\ = xyz + xyz + yz + xz + x = yz + xz + x\,.$$

- Приведение к виду ДНФ (крайний случай - СДНФ).

$$(z \vee x)(x \vee \overline{z}) = zy \vee x\overline{z} \vee xy = \\ = zy \vee x\overline{z} \vee xy(z \vee \overline{z}) = \\ = yz \vee x\overline{z} \vee xyz \vee xy\overline{z} \stackrel{\text{поглощение}}{=} yz \vee x\overline{z}\,.$$

Задача 1.7. *Показать, что следующие утверждения о подмножествах A и B универсального множества U равносильны:*

1) $A \cup B = U$; *2)* $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$; *3)* $\overline{A} \subseteq B$.

Решение. $X \subseteq Y \stackrel{?}{\Leftrightarrow} X \cap Y = X \Leftrightarrow X \cup Y = Y$

$1) \Rightarrow 2)$ По правилу Де Моргана.

$2) \Rightarrow 3)$ $(\cup B)$

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing \Leftrightarrow (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup B = B \Leftrightarrow$$
$$\Rightarrow (\overline{A} \cup B) \cap (B \cup \overline{B}) = B \Leftrightarrow$$
$$\Rightarrow (\overline{A} \cup B) \cap U = (\overline{A} \cup B = B) \Rightarrow \overline{A} \subseteq B\,.$$

$3) \Rightarrow 1)$ $(\cup A)$

$$\overline{A} \cup B = B \Rightarrow \overline{A} \cup B \cup A = B \cup A \Rightarrow$$
$$\Rightarrow U = A \cup B\,.$$

Задача 1.8. *Введём в булевой алгебре отношение $\sqsubseteq$ по правилу*

$$a \sqsubseteq b = a \sqcap b = a.$$

Показать, что следующие утверждения об элементах a и b булевой алгебры равносильны:

$$(1)\quad a \sqsubseteq b\,;\quad (2)\quad a \sqcap b' = o\,;\quad (3)\quad a' \sqcup b = \iota;$$
$$(4)\quad a \sqcup b = b.$$

Решение.

$(1) \Rightarrow (2) : a \sqsubseteq b \overset{\text{def}}{=} (a = a \sqcap b) \overset{\sqcap b'}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow (a \sqcap b' = a \sqcap b \sqcap b') \Rightarrow (a \sqcap b' = o)\,.$$

$(2) \Rightarrow (3)$: по двойственности: $a \sqcap b' = o \Leftrightarrow a' \sqcup b = \iota.$

$(3) \Rightarrow (4)$ — пересекаем с $(a \sqcup b)$:

$$(a' \sqcup b = \iota) \Rightarrow (a \sqcup b) \sqcap (a' \sqcup b) = a \sqcup b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (\underbrace{a \sqcap a'}_{\iota}) \sqcup b \,=\, a \sqcup b \ \Rightarrow\ a \sqcup b \,=\, b\,.$$

$(4) \Rightarrow (1)$ — пересекаем с a:

$$(a \sqcup b = b)\ \Leftrightarrow\ a \sqcap (a \sqcup b) = a \sqcap b\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ a = a \sqcap b\ \Rightarrow\ a \sqsubseteq b\,.$$

Глава 2

Отношения и соответствия

2.1 Декартово произведение множеств и отношения

Определение 2.1. *Декартовым* (или *прямым*) *произведением* непустых множеств $A_1, \ldots, A_n$, символически $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, называют совокупность всех конечных последовательностей вида $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $a_i \in A_i$, $i \in \overline{1, n}$.

Декартово произведение n экземпляров множества A обозначают A^n и называют *n-ой декартовой степенью* множества A: $A^1 = A$, под A^0 понимают некоторое одноэлементное подмножество A.

Свойства:

- $A \times B \neq B \times A$,
- $A \times B \times C$, $(A \times B) \times C$ и $A \times (B \times C)$ — разные множества.
- $A^m \times A^n \neq A^{m+n}$.

Определение 2.2. *Отношения* — подмножества декартовых произведений множеств; символически $\rho \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$.

Число множеств в соответствующем декартовом произведении есть *местность* или *арность* отношения.

<u>*Определение*</u> 2.3. Если ρ — отношение на $A_1 \times \ldots \times A_n$, то совокупность всех элементов $a_1 \in A_1$ для которых существуют такие $a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$, что $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \rho$, называют *проекцией отношения* ρ *на множество* A_1 или *первой проекцией* ρ.

Аналогично определяются вторые, третьи и т.д. проекции.

Символически i-я проекция ρ обозначается $Pr_i\,\rho$.

Отношения можно рассматривать как предикаты (функции, принимающие два значения — «истина» и «ложь»): $\rho\,(a_1, \ldots, a_n) = 1$ (истинно), если $(a_1, \ldots, a_n) \in \rho$ и ложно ($= 0$) в противном случае. Поэтому к отношениям можно применять операции алгебры логики: дизъюнкции ($\vee$), конъюнкции ($\&$), отрицания ($\neg$), тождества ($\equiv$), импликации ($\supset$) и др.

Унарные отношения — описывают различные свойства его элементов.

Бинарные отношения — будут рассматриваться далее.

Тернарные отношения (пример): отношение «*между*»: $\rho(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow x < y < z$ на $\mathbb{R}$.

Соответствия. Бинарные отношения на декартовом произведении множеств A и B называют отношениями *между* A *и* B или *соответствиями* между данными множествами.

Для соответствия $\rho \subseteq A \times B$:

• обозначение — $a\rho b$, если $(a, b) \in \rho$;

• задание — направленным двудольным графом $\overrightarrow{G}(\rho)$, с долями A и B, вершинами которого служат элементы этих долей, причём, если $a\rho b$, то из вершины, соответствующей $a \in A$, дуга ведёт в вершину, соответствующую $b \in B$.

$$\begin{tikzcd} a_1 \arrow[d] \arrow[dr] & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{tikzcd}$$

Граф отношения $\{\, (a_1, b_1), (a_1, b_2) \,\}$ на $\{a_1, a_2\} \times \{b_1, b_2\}$

Соответствие ρ —

первая проекция — область определения $\operatorname{Dom} \rho$;

вторая проекция — область значений $\operatorname{Im} \rho$.

образ элемента $a \in A$ — множество

$$\rho(a) = \{\, b \in B \mid a\rho b \,\};$$

образ множества X — множество $\rho(X) = \bigcup\limits_{x \in X} \rho(x)$.

Свойства теоретико-множественных операций, применённые к соответствиям $\alpha, \beta \subseteq A \times B$ ($a \in A$, $b \in B$):

1) $a(\alpha \cup \beta)b \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a\alpha b \vee a\beta b \Leftrightarrow (a, b) \in \alpha$ или $(a, b) \in \beta$;

2) $a(\alpha \cap \beta)b \Leftrightarrow a\alpha b \& a\beta b \Leftrightarrow (a, b) \in \alpha$ и $(a, b) \in \beta$;

3) $a\overline{\alpha}b \Leftrightarrow \neg(a\alpha b) \Leftrightarrow (a, b) \notin \alpha$.

Теперь мы введём две новые операции для бинарных отношений (соответствий): унарную *псевдообращения* и бинарную *произведения*.

<u>*Определение*</u> 2.4. Унарная операция $^\sharp$ *псевдообращения* соответствия $\rho \subseteq A \times B$ задаёт *псевдообратное* к нему соответствие $\rho^\sharp \subseteq B \times A$: $b\rho^\sharp a \Leftrightarrow a\rho b$ для любых $a \in A$, $b \in B$.

Свойства псевдообращения:

$$(\rho^\sharp)^\sharp = \rho, \quad \overline{\rho^\sharp} = (\overline{\rho})^\sharp, \quad \alpha \subseteq \beta \Rightarrow \alpha^\sharp \subseteq \beta^\sharp,$$
$$(\alpha \cup \beta)^\sharp = \alpha^\sharp \cup \beta^\sharp, \quad (\alpha \cap \beta)^\sharp = \alpha^\sharp \cap \beta^\sharp.$$

Прообразы соответствия $\rho \subseteq A \times B$:

элемента $b \in B$ — множество $\rho^\sharp(b) = \{\, a \in A \mid a\rho b \,\}$;

множества $Y \subseteq B$ — множество $\rho^\sharp(Y) = \bigcup\limits_{y \in Y} \rho^\sharp(y)$.

<u>*Определение*</u> 2.5. Пусть A, B и C — непустые множества, $\alpha \subseteq A \times B$, $\beta \subseteq B \times C$. Тогда *произведение* или *умножение* $\alpha \diamond \beta$ соответствий α и β определяется для произвольных $a \in A$, $c \in C$ как

$$a(\alpha \diamond \beta)c \;\Leftrightarrow\; \mathop{\exists}_{B} b : (a\alpha b) \,\&\, (b\beta c).$$

Часто знак $\diamond$ опускают и вместо $\alpha \diamond \beta$ пишут $\alpha\beta$.

Свойства произведения соответствий (в случае существования):

- $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$;
- $(\alpha\beta)^\sharp = \beta^\sharp\alpha^\sharp$;
- $\begin{cases} \alpha \subseteq \beta \\ \gamma \subseteq \delta \end{cases} \Rightarrow \alpha\gamma \subseteq \beta\delta$
- $\alpha(\beta\cup\gamma) = \alpha\beta\cup\alpha\gamma, \quad (\alpha\cup\beta)\gamma = \alpha\gamma\cup\beta\gamma$, откуда
- $(\alpha \cup \beta)(\gamma \cup \delta) = \alpha\gamma \cup \alpha\delta \cup \beta\gamma \cup \beta\delta$;
- $(\alpha \cap \beta)\gamma \subseteq \alpha\gamma \cap \beta\gamma, \quad \alpha(\beta \cap \gamma) \subseteq \alpha\beta \cap \alpha\gamma.$

Доказательства. Соотношения

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma \quad \text{и} \quad \begin{cases} \alpha \subseteq \beta \\ \gamma \subseteq \delta \end{cases} \Rightarrow \alpha\gamma \subseteq \beta\delta$$

доказываются элементарно.

Покажем, что $(\alpha\beta)^\sharp = \beta^\sharp\alpha^\sharp$.
Пусть $\alpha \subseteq A \times B$, $\beta \subseteq B \times C$, тогда для любых $a \in A$, $c \in C$ справедливо:

$$\begin{aligned} c(\alpha\beta)^\sharp a = a(\alpha\beta)c &= \underset{B}{\exists} b : a\alpha b \mathbin{\&} b\beta c = \\ &= \underset{B}{\exists} b : c\beta^\sharp b \mathbin{\&} b\alpha^\sharp a = c(\beta^\sharp\alpha^\sharp)a. \end{aligned}$$

Докажем, что $(\alpha\cap\beta)\gamma \subseteq \alpha\gamma\cap\beta\gamma$: для произвольных элементов a и c соответствующих множеств получим

$$a[(\alpha \cap \beta) \diamond \gamma]c = \exists\, b : a(\alpha \cap \beta)b \mathbin{\&} (b\gamma c) =$$

$$= \exists\, b : a\alpha b \,\&\, a\beta b \,\&\, b\gamma c \;=$$
$$= \exists\, b : a\alpha b \,\&\, b\gamma c \,\&\, a\beta b \,\&\, b\gamma c \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; (\exists\, x : a\alpha x \,\&\, x\gamma c) \;\&\; (\exists y : a\beta y \,\&\, y\gamma c) \;=$$
$$=\; a(\alpha\gamma)c \,\&\, a(\beta\gamma)c \;=\; a(\alpha\gamma \cap \beta\gamma)c\,.$$

$\alpha(\beta \cap \gamma) \subseteq \alpha\beta \cap \alpha\gamma$ — доказывается аналогично.

Представление соответствий (0,1)-матрицами. $\rho \subseteq \{a_1,\, \ldots,\, a_m\} \times \{b_1,\, \ldots,\, b_n\}$ — соответствие на конечных множествах. Матрица $M(\rho)$ отношения ρ:

$$M(\rho) \;=\; (\, r_{ij}\,)_{i=1,\, j=1}^{m,\, n} \;=\; \begin{cases} 1, & a_i\, \rho\, b_j \\ 0, & \text{иначе}\,. \end{cases}$$

$\mathcal{M}_{m\times n}$ — множество всех (0,1)-матриц размера $m \times n$, I — универсальная матрица из 1, 0 — нуль-матрица из 0. К матрицам из $\mathcal{M}$ поэлементно применяют логическую операцию $\neg$, а к матрицам одинакового размера — логические операции $\vee$ и $\&$ по правилам алгебры высказываний **2**.

АС $\langle\, \mathcal{M}_{m\times n},\, \vee,\, \&,\, \neg,\, O,\, I\, \rangle$ — булева алгебра, изоморфная $\mathcal{P}(A \times B)$, поскольку

$$M(\alpha \cup \beta) \;=\; M(\alpha) \vee M(\beta); \quad M(\alpha \cap \beta) \;=\; M(\alpha)\&M(\beta);$$
$$M(\overline{\alpha}) = \neg\, M(\alpha).$$

Пусть $M_1 \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $M_2 \in \mathcal{M}_{n\times k}$.
Произведение $M_1 \times M_2 \in \mathcal{M}_{m\times k}$ данных матриц — обычное матричное произведение с заменой операции суммирования на $\vee$, а умножения — на $\&$.

Для квадратных матриц обычным образом вводиться натуральная степень M^n матрицы M.

Для конечных множеств A, B, C и $\alpha \subseteq A \times B$ и $\beta \subseteq B \times C$ справедливы равенства

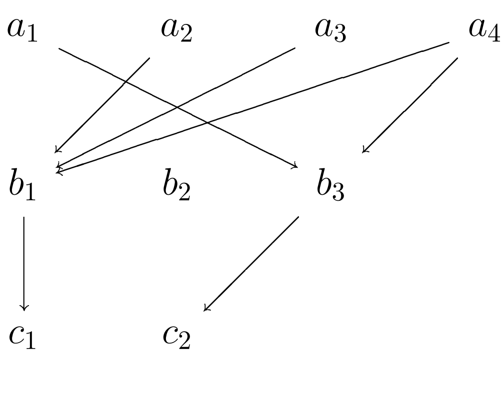
$$M(\alpha \diamond \beta) = M(\alpha) \times M(\beta), \quad M(\alpha^n) = M^n(\alpha).$$

Образ $\rho(X)$ подмножества X находится умножением слева вектора-строки, задающей X, на матрицу $M(\rho)$.

Пример 2.1. Пусть $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, $C = \{c_1, c_2\}$

$$\rho = \{(a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_3, b_1), (a_3, b_2), (a_4, b_1), (a_4, b_3)\} \subseteq \\ \subseteq A \times B,$$
$$\sigma = \{(b_1, c_1), (b_3, c_2)\} \subseteq B \times C,\ X = \{a_1, a_2\} \subseteq A\,.$$

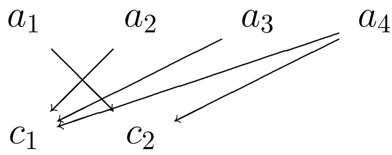
Представление отношений ρ и σ в виде графа:



Пример 2.2. Находим, что $\rho(X) = \{\, b_1,\, b_3 \,\}$,

$$\rho\sigma = \{\, (a_1,\, c_2),\, (a_2,\, c_1),\, (a_3,\, c_1),\, (a_4,\, c_1),\, (a_4,\, c_2) \,\}.$$

Граф отношения $\rho\sigma$: Матрицы, соответствующие X,



ρ и σ записывается как

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; M(\rho) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; M(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Образу $\rho(X)$ множества X соответствует

$$\rho(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а произведению $\rho\sigma$ —

$$M(\rho\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

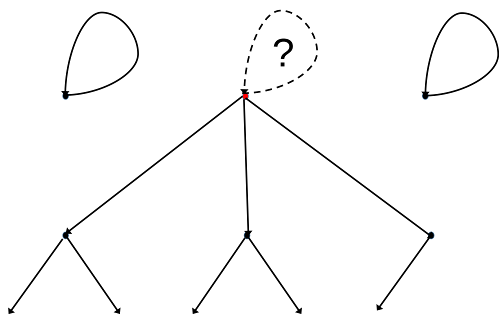
2.2 Однородные отношения

Определение 2.6. Отношение $\rho \subseteq A^2$ называется *бинарным на* A (*однородным*).
$\mathcal{R}(A)$ — совокупность всех бинарных на A отношений.

Элемент $a \in A$ такой, что $a\overline{\rho}a$ для некоторого отношения $\rho \in \mathcal{R}(A)$ назовём ρ-*нерефлексивным*.

Утверждение 2.1 (канторовость отношений). *Подмножество* $B = \{\, a \in A \mid a\overline{\rho}a \,\}$ *всех* ρ-*нерефлексивных элементов множества* A *не является образом* $\rho(x)$ *какого-либо элемента* $x \in A$.

Допущение $B = \rho(x)$ для некоторого $x \in A$ противоречиво: оно равносильно одновременному выполнению $x\rho x$ и $x\overline{\rho}x$.



Георг Кантор
(*Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor*, 1845–1918) — выдающийся немецкий математик, создатель теории множеств. Дал определения бесконечного и вполне упорядоченного множеств и доказал, что мощность множества действительных чисел больше мощности множества натуральных.

Однородные отношения $\rho \in \mathcal{R}(A)$ удобно (особенно в случае, когда A — конечное множество с небольшим числом элементов) изображать в виде ориентированного графа $\overrightarrow{G}(\rho)$, вершинам которого соответствуют элементы A, а дуга ведёт из x в y, если $x\rho y$. Если $x\rho x$, то у вершины x рисуют петлю. Когда $x\rho y$ и $y\rho x$, вместо пары дуг противоположной направленности между x и y рисуют (ненаправленное) ребро.

Пример такого графа для отношения $\{(1,3),\ (1,4),\ (4,2),\ (2,4)\}$ на множестве $\{1,2,3,4\}$:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d] \arrow[dr] & 2 \arrow[d, dash] \\ 3 & 4 \end{tikzcd}$$

Отношения $\sigma_\alpha = \alpha \cup \alpha^\sharp$ и $\iota_\alpha = A^2 \smallsetminus \sigma_\alpha = \overline{\alpha \cup \alpha^\sharp}$ называют соответственно отношениями *сравнимости* и *несравнимости* для отношения $\alpha \in \mathcal{R}(A)$.

Если $a\sigma_\alpha b$ $[a\iota_\alpha b]$, то элементы a и b *сравнимы* [*несравнимы*].

Если $\rho \in \mathcal{R}(A)$ и $\varnothing \neq B \subseteq A$, то отношение $\rho \cap B^2$ называют *сужением* или *ограничением отношения* ρ *на подмножество* B и обозначают $\rho\,|_B$.

Обозначение для натурального k: $\alpha^k = \overbrace{\alpha \diamond \ldots \diamond \alpha}^{k \text{ символов } \alpha}$. Разумеется, $\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \alpha^k \subseteq \beta^k, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots$.

Покажем, что $(\alpha \cap \beta)^2 \subseteq \alpha^2 \cap \beta^2$ (квадрат пересечения однородных отношений лежит в пересечении их квадратов): если $\alpha, \beta \in \mathcal{R}(A)$, то для любых $a, c \in A$

получим

$$a\big[(\alpha\cap\beta)(\alpha\cap\beta)\big]c \;=\; \exists\, b : a(\alpha\cap\beta)b \,\&\, b(\alpha\cap\beta)c \;=$$
$$=\; \exists\, b : a\alpha b \,\&\, a\beta b \,\&\, b\alpha c \,\&\, b\beta c \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; (\exists\, x : a\alpha x \,\&\, x\alpha c) \;\;\&\;\; (\exists\, y : a\beta y \,\&\, y\beta c) \;=$$
$$=\; (a\alpha^2 c) \,\&\, (a\beta^2 c) \;=\; a(\alpha^2\cap\beta^2)c.$$

Пример 2.3 (Операции над однородными отношениями). Пусть $\alpha =<$ — отношение *строго меньше* на $\mathbb{N}$.

$\alpha^\sharp$: $m <^\sharp n \Leftrightarrow n < m \Leftrightarrow m > n$, т.е. псевдообращением отношения *строго меньше* будет отношение *строго больше*.

σ_α : $(m<n)\vee(n<m) \;\Leftrightarrow\; n\neq m$, т.е. отношением сравнимости для отношения *строго меньше* будет отношение неравенства.

ι_α : Отношением несравнимости для отношения *строго меньше* будет отношение равенства.

α^2 : $m <^2 n \Leftrightarrow \underset{\mathbb{N}}{\exists}\, x : (m<x)\&(x<n) \Leftrightarrow m+1<n$ и $m <^k n \;\Leftrightarrow\; m+k-1<n$ для $k\geqslant 1$.

$\alpha\diamond\alpha^\sharp$: $m(<\diamond>)n \;\Leftrightarrow\; \underset{\mathbb{N}}{\exists}\, x : (m<x)\,\&\,(x>n) \;\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\; \underset{\mathbb{N}}{\exists}\, x : x > \max\{m,n\} \;\Leftrightarrow\; 1,$$

т.е. отношение $<\diamond>$ на $\mathbb{N}$ *истинно всегда*.

$\alpha^\sharp\diamond\alpha$: $m(>\diamond<)n \;\Leftrightarrow\; \underset{\mathbb{N}}{\exists} x :\; (m>x)\,\&\,(x<n) \;\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \underset{\mathbb{N}}{\exists}\, x : x < \min\{m, n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1, & \text{если } \min\{m, n\} > 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \qquad .$$

Убеждаемся, что, вообще говоря, $\alpha\beta \neq \beta\alpha$.

При $\alpha\beta = \beta\alpha$ отношения α и β называют *перестановочными*.

Специальные однородные отношения

Определение 2.7. Однородное на множестве A отношение ρ называется:

∇ : *универсальным*, если $\rho = A^2$.

$\emptyset$: *пустым* или *нуль-отношением*, если $\rho = \varnothing$.

Универсальное и пустое отношения — *несобственные* на данном множестве, остальные отношения — *собственные*;

$\triangle$: *диагональным* (*единичным*), если $x\rho y \Leftrightarrow x = y$.

Для единичного отношения на A используют также обозначение 1_A.

По определению для $\rho \in \mathcal{R}(A)$ полагают $\rho^0 = \triangle$. Очевидно, $\rho = \rho\,\triangle = \triangle\,\rho$ и $\triangle^k = \triangle$, $k = 0, 1, \ldots$.

F : *полным*, если $\rho \cup \rho^\sharp = \nabla$, т.е. $x\rho y \vee x\rho^\sharp y$, или из любых двух элементов A *по крайней мере один находятся в отношении* ρ *с другим*;

R : *рефлексивным*, если $\Delta \subseteq \rho$, что означает $x\rho x$;

AR : *антирефлексивным*, если $\rho \cap \Delta = \varnothing$, т.е. $x\bar{\rho}x$;

S : *симметричным*, если $\rho^\sharp \subseteq \rho$;

Поскольку $(\rho^\sharp)^\sharp = \rho$, то $\rho^\sharp = \rho$;

AS : *антисимметричным*, если $\rho \cap \rho^\sharp \subseteq \Delta$, т.е. $x\rho y \,\&\, y\rho x \;\Rightarrow\; x = y$;

$\rho \cap \rho^\sharp$ — *симметрическая часть* отношения ρ;

NS : *несимметричным* или *асимметричным*, если $\rho \cap \rho^\sharp = \varnothing$, т.е. *из двух соотношений* ρ *и* $\rho^\sharp$ *хотя бы одно не выполнено*;

T : *транзитивным*, если $\rho^2 \subseteq \rho$, т.е. $x\rho y \,\&\, y\rho z \Rightarrow x\rho z$;

Поскольку $\rho^2 \subseteq \rho \Rightarrow \rho^3 \subseteq \rho^2 \subseteq \rho$, то для транзитивного включение ρ имеем $\rho^n \subseteq \rho$, $n = 1, 2, \ldots$;

AT : *антитранзитивным*, если $\rho^2 \cap \rho = \varnothing$;

C : *содержащим цикл*, если для некоторых x и $k > 1$ справедливо $x\rho^k x$; в противном случае говорят, что ρ — отношение *без циклов* или *ациклическое.*

Обозначения с указанием множества — ∇_A.

Понятно, что ни отношение $\rho\rho^\sharp$, ни $\rho^\sharp\rho$ могут не быть равными единичному, что объясняет выбор термина “псевдообратное” для отношения $\rho^\sharp$.

Теорема 2.1. *Симметричное и транзитивное отношение на множестве A, первая проекция которого совпадает с A, рефлексивно.*

Доказательство. Пусть $\rho \in \mathcal{R}(A)$ обладает указанными свойствами.

$Pr_1\,\rho = A$ означает существование для любого x такого y, что $x\rho y$, откуда по симметричности и $y\rho x$. Поэтому для произвольного x справедливо

$$\forall\, x\,\exists\, y : (x\rho y)\,\&\,(y\rho x) \;\Leftrightarrow\; x\rho^2 x \;\Rightarrow\; x\rho x,$$

что и означает $\Delta \subseteq \rho$. □

Теорема 2.2 (свойства произведения отношений). *Для однородных отношений α, β и γ справедливы следующие утверждения.*

1. *Если β рефлексивно, то $\alpha \subseteq \alpha\beta$ и $\alpha \subseteq \beta\alpha$.*

   Отсюда $\Delta \subseteq \alpha^n$ для рефлексивного α, $n = 0, 1, \ldots$.
2. *Если α рефлексивно и транзитивно, то $\alpha^n = \alpha$, $n = 1, 2, \ldots$.*
3. *Если $\alpha, \beta \subseteq \gamma$ и γ транзитивно, то $\alpha\beta \subseteq \gamma$.*

Доказательство.

1. $\underline{\beta - (R) \;\Rightarrow\; \alpha \subseteq \alpha\beta \;\&\; \alpha \subseteq \beta\alpha}$

   $\alpha = \alpha\,\Delta \subseteq \alpha\beta$ и аналогично для другого включения.

   $\Delta \subseteq \alpha^n$ следует из доказанного при $\alpha = \beta$ по монотонности произведения соответствий.

2. $\underline{\alpha - (R), (T) \Rightarrow \alpha^n = \alpha}$

   Подставляя $\beta = \alpha$ в (1) получим $\alpha \subseteq \alpha^2$, а т.к. α транзитивно, то $\alpha^2 \subseteq \alpha$, откуда $\alpha = \alpha^2$ и требуемое.

3. $\underline{\alpha, \beta \subseteq \gamma \,\&\, \gamma - (T) \Rightarrow \alpha\beta \subseteq \gamma}$

$$(\alpha \subseteq \gamma) \,\&\, (\beta \subseteq \gamma) \Rightarrow \alpha\beta \subseteq \gamma\gamma = \gamma^2 \subseteq \gamma.$$

□

Инвариантность свойств однородных отношений. Данное свойство *инвариантно* относительно некоторой операции, если при условии, что операнды обладают данным свойством, то им обладает и результат операции.

Теорема 2.3 (об инвариантности "положительных" свойств отношений). *Для однородных отношений*

1) *рефлексивность инвариантна относительно* $\cup$, $\cap$, $^\sharp$ *и* $\diamond$*;*

2) *симметричность инвариантна относительно* $^-$, $\cup$, $\cap$ *и* $^\sharp$, *а относительно* $\diamond$ *— если и только если отношения перестановочны;*

3) *транзитивность инвариантна относительно* $\cap$ *и* $^\sharp$, *а относительно* $\diamond$ *— если отношения перестановочны.*

Доказательство.

1. Первые три свойства очевидны.

Инвариантность (R) относительно *произведения* следует из теоремы о свойствах произведения отношений.

2. Инвариантность (S) относительно *дополнения* следует из свойства $\overline{\rho^{\sharp}} = (\overline{\rho})^{\sharp}$.

   Инвариантность (S) относительно *объединения и пересечения* — свойства псевдообращения.

   Симметричность отношения есть инвариантность относительно $^{\sharp}$.

   Для *произведения* симметричных α и β имеем:
   - если $\alpha\beta = \beta\alpha$, то $(\alpha\beta)^{\sharp} = \beta^{\sharp}\alpha^{\sharp} = \beta\alpha = \alpha\beta$;
   - если произведение $\alpha\beta$ симметрично, то $\alpha\beta = (\alpha\beta)^{\sharp} = \beta^{\sharp}\alpha^{\sharp} = \beta\alpha$.

3. Пусть $\alpha^2 \subseteq \alpha$, $\beta^2 \subseteq \beta$.

   Для *пересечения*: $\alpha^2 \cap \beta^2 \subseteq \alpha \cap \beta$, а по доказанному свойству $(\alpha\cap\beta)^2 \subseteq \alpha^2 \cap \beta^2$ — $(\alpha \cap \beta)^2 \subseteq \alpha \cap \beta$, откуда и следует требуемое.

   Для *псевдообращения*:
   $$\alpha^2 = \alpha\alpha \subseteq \alpha \Leftrightarrow (\alpha\alpha)^{\sharp} \subseteq \alpha^{\sharp} \Leftrightarrow$$
   $$\Leftrightarrow \alpha^{\sharp}\alpha^{\sharp} \subseteq \alpha^{\sharp} \Leftrightarrow (\alpha^{\sharp})^2 \subseteq \alpha^{\sharp}$$

   Для *произведения* отношений: если $\alpha\beta = \beta\alpha$, то
   $$(\alpha\beta)^2 = \alpha\beta\alpha\beta = \alpha\alpha\beta\beta = \alpha^2\beta^2 \subseteq \alpha\beta.$$

$\square$

Теорема 2.4 (об инвариантности "отрицательных" свойств отношений). *Для однородных отношений α и β*

1) *антирефлексивность инвариантна относительно* $\cup$, $\cap$, $^\sharp$; *а относительно произведения* $\alpha\beta$ — *если и только если*

$$\alpha \cap \beta^\sharp = \varnothing;$$

2) *антисимметричность инвариантна относительно* $\cap$, $^\sharp$;

3) *несимметричность инвариантна относительно* $\cap$, $^\sharp$; *а относительно* $\cup$ — *если и только если*

$$\alpha \cap \beta^\sharp = \alpha^\sharp \cap \beta = \varnothing.$$

Доказательство.

1. Инвариантность относительно $\cup$, $\cap$, $^\sharp$ очевидна.

   Антирефлексивность *произведения* отношений α и β означает, что ни для одного элемента a не найдётся элемента x с одновременной справедливостью $a\alpha x$ и $x\beta a$. Но это означает *ложность* $a(\alpha \cap \beta^\sharp)x$.

2. Инвариантность относительно *псевдообращения* очевидна, а относительно *пересечения* её доказывают равенства

$$(\alpha \cap \beta) \cap (\alpha \cap \beta)^\sharp = \alpha \cap \beta \cap \alpha^\sharp \cap \beta^\sharp = \\ = (\alpha \cap \alpha^\sharp) \cap (\beta \cap \beta^\sharp) \subseteq \Delta \cap \Delta = \Delta.$$

3. Инвариантность относительно $^\sharp$ очевидна.

   Для *пересечения* имеем

$$(\alpha\cap\beta) \cap (\alpha\cap\beta)^\sharp = \alpha \cap \beta \cap \alpha^\sharp \cap \beta^\sharp =$$

$$= (\alpha \cap \alpha^{\sharp}) \cap (\beta \cap \beta^{\sharp}) = \varnothing.$$

Для *объединения*:

$$(\alpha \cup \beta) \cap (\alpha \cup \beta)^{\sharp} = (\alpha \cup \beta) \cap (\alpha^{\sharp} \cup \beta^{\sharp}) =$$
$$= (\alpha \cap \alpha^{\sharp}) \cup (\beta \cap \beta^{\sharp}) \cup (\alpha \cap \beta^{\sharp}) \cup (\beta \cap \alpha^{\sharp}) =$$
$$= (\alpha \cap \beta^{\sharp}) \cup (\beta \cap \alpha^{\sharp}).$$

Это выражение будет равно $\varnothing$ если и только если $\alpha \cap \beta^{\sharp} = \alpha^{\sharp} \cap \beta = \varnothing$.

$\square$

Количество однородных отношений на n-элементном множестве, которые могут быть определены: всего однородных отношений $u(n) = 2^{n^2}$, из них рефлексивных — $r(n) = 2^{n^2-n}$; симметричных — $s(n) = 2^{\frac{n^2+n}{2}}$. Для числа $t(n)$ транзитивных отношений не известно никакой формулы.
Величины $u(n)$, $r(n)$, $s(n)$ и $t(n)$ первых значений n:

	1	2	3	4	5	6
$u(n)$	2	16	512	6 5536	33 554 432	$\approx 6,87 \cdot 10^{10}$
$r(n)$	1	4	64	4 096	104 8576	1 073 741 824
$s(n)$	1	8	64	1 024	32 768	2 097 152
$t(n)$	2	13	171	3 994	15 4301	9 415 189

The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences — http://oeis.org/

2.3 Отношение эквивалентности

Определение 2.8. Однородные рефлексивные, симметричные и транзитивные отношения называют *отношениями эквивалентности.*

Основное обозначение — $\sim$. По определению
$$\triangle \subseteq \sim = \sim^{\sharp} = \sim^{2} .$$
$\mathcal{E}(A)$ — множество всех эквивалентностей на множестве A.

Каждому $a \in A$ эквивалентности $\sim \in \mathcal{E}(A)$ сопоставляют множество $[a]_{\sim}$ эквивалентных ему элементов — классов эквивалентности или смежных классов:
$$[a]_{\sim} = \{ x \in A \mid x \sim a \} .$$
Если эквивалентность фиксирована, то смежный класс элемента a обозначаем $[a]$.

Формирование смежных классов происходит в ходе выполнения операции *абстракции отождествления* по данной эквивалентности, при которой отвлекаются от индивидуальных характеристик элементов, выделяя лишь их общность.

Классы эквивалентности элементов или совпадают, или не пересекаются.

Совокупность $\mathcal{D} = \{ A_1, A_2, \dots \}$ непустых подмножеств множества A образует его разбиение, если объединение всех подмножеств из $\mathcal{D}$ совпадает с A и все они попарно не пересекаются:
$$A = A_1 + A_2 + \dots , \qquad A_i \cap A_j = \varnothing \text{ при } i \neq j.$$

Элементы $A_1, A_2, \ldots$ разбиения $\mathcal{D}$ — блоки; символически — $(A_1 \mid A_2 \mid \ldots)$, в конечном случае — $(A_1 \mid A_2 \mid \ldots \mid A_k)$.

Разбиение $\mathcal{D}$ множества задает отношение эквивалентности $\sim$ на нём: *смежные классы* $\sim$ *есть блоки разбиения* $\mathcal{D}$.

Теорема 2.5 (о классах эквивалентности). *1. Если на множестве $A \neq \varnothing$ задана эквивалентность, то множество смежных классов образует разбиение A.*

2. Разбиение множества $A \neq \varnothing$ на блоки единственным образом определяет эквивалентность $\sim \in \mathcal{E}(A)$ так, что для любой пары a, b элементов A

$$a \sim b \Leftrightarrow \text{«}a \text{ и } b \text{ находятся в одном блоке разбиения»}.$$

«Теорема о классах эквивалентности находит в математике широчайшее применение, и её по праву можно считать одной из главных (а то и самой главной) теоремой».

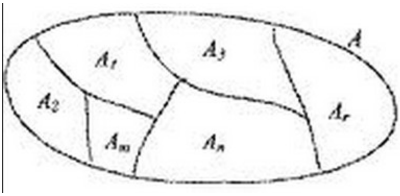
В. А. Успенский

Пример 2.4. Пусть дано разбиение $\mathcal{D}$ непустого множества A на блоки: $\mathcal{D} = (A_1 \mid A_2 \mid \ldots)$.

- Замкнём $\mathcal{D}$ относительно теоретико-множественных операций $\cup, \cap, ^{-}$, т.е. достроим $\mathcal{D}$ до множества $\mathcal{S}$ так, чтобы эти операции стали устойчивы на $\mathcal{S}$.

- Тогда $\mathcal{S}$ будет алгеброй подмножеств множества A, причём её атомами будут блоки $A_1, A_2, \ldots$.

Определение 2.9. Множество, элементами которого являются классы эквивалентности множества A по отношению эквивалентности $\sim$ называется *фактормножеством* и обозначается $A/\sim$.



$$\begin{aligned} A &= \{a_1, a_2, \ldots\} \\ \mathcal{D} &= (A_1 \mid A_2 \mid \ldots) \Leftrightarrow \sim, \; A_i \subseteq A, \; i = \overline{1, 2, \ldots} \\ A/\sim &= \{A_1, A_2, \ldots\} \end{aligned}$$

Пример 2.5. 1. Если A — множество зёрен, насыпанных в мешки и для зёрен a и b положить $a \sim b$, если они лежат в одном мешке, то

- классами эквивалентности являются множества зёрен, лежащих в одном мешке,
- фактормножеством $A/\sim$ — множество мешков.

2. Если W — множество *слов русского языка* и для слов u и v положить $u \sim v$, если они *начинаются с одной и той же буквы* (в русском языке 33 буквы), то

- классами эквивалентности будут множества слов, *начинающихся на данную букву*,

- а фактормножеством $W/\sim$ — *множество* соответствующих *букв* ($|W/\sim| = 31$).

Из теоремы инвариантности "положительных" свойств вытекает

Теорема 2.6 (об инвариантности пересечения эквивалентностей). *Отношение эквивалентности инвариантно относительно пересечения.*

Следствие. *Пересечение эквивалентностей из произвольной непустой (возможно бесконечной) совокупности есть эквивалентность.*

Эквивалентности α и β называют *когерентными*, если для любой пары смежных классов по α и по β соответственно справедливо утверждение «*либо один из данных классов лежит в другом, либо они не пересекаются*».

Теорема 2.7 (об инвариантности объединения эквивалентностей). *Пусть α и β — эквивалентности. Тогда*

1) *объединение $\alpha \cup \beta$ является эквивалентностью, если и только если α и β* когерентны;

2) *если $\alpha \cup \beta$ — эквивалентность, то $\alpha \cup \beta = \alpha\beta$ и, следовательно эквивалентности α и β* перестановочны.

Доказательство.

1. В силу теоремы об инвариантности "положительных" свойств однородных отношений достаточно

показать указанный критерий относительно транзитивности.

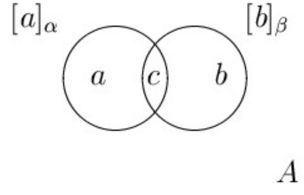
Необходимость. Пусть α и β — когерентные эквивалентности на множестве A.

Рассмотрим образы $(\alpha \cup \beta)(a)$ всех элементов $a \in A$.

При указанном условии эти подмножества A либо совпадают, либо не пересекаются и их объединение совпадает A.

Таким образом, они образуют разбиение множества A, задавая эквивалентность на нём.

Достаточность. Пусть теперь данные эквивалентности не когерентны, т.е. найдутся смежные классы $[a]_\alpha$ и $[b]_\beta$ не лежащие один в другом и содержащие общий элемент c.



Возьмём элементы $a \in [a]_\alpha \smallsetminus [b]_\beta$ и $b \in [b]_\beta \smallsetminus [a]_\alpha$. Тогда ары $(a,\, c)$ и $(c,\, b)$ содержатся в $\alpha \cup \beta$. Если бы это отношение было эквивалентностью, то оно, в силу транзитивности, содержало бы и пару $(a,\, b)$.

Последнее означает справедливость либо $a\alpha b$, либо $a\beta b$.
Поскольку это не так, то $\alpha \cup \beta$ — не эквивалентность.

2. $\underline{(\,\alpha \cup \beta) \in \mathcal{E}(A) \;\Rightarrow\; \alpha \cup \beta \;=\; \alpha\beta \;=\; \beta\alpha}$

   Пусть α, β и $\alpha \cup \beta$ — эквивалентности.

   Тогда по теореме о свойствах произведения отношений:

   из п. (1) — поскольку α и β рефлексивны, то $\alpha \subseteq \alpha\beta$ и $\beta \subseteq \alpha\beta$, откуда $\alpha \cup \beta \subseteq \alpha\beta$ по монотонности объединения;

   из п. (3) — поскольку $\alpha \subseteq \alpha \cup \beta$ и $\beta \subseteq \alpha \cup \beta$, а $\alpha \cup \beta$ транзитивно, то $\alpha\beta \subseteq (\alpha \cup \beta)^2 \subseteq \alpha \cup \beta$.

   Следовательно, $\alpha \cup \beta \;=\; \alpha\beta$.

□

Пример 2.6 (инвариантность объединения эквивалентностей). Пусть α и β — эквивалентности на множестве $A = \{\, a,\, b,\, c,\, d \,\}$ со смежными классами

$$A/\alpha \;=\; (\, a \mid b \mid c, d \,) \text{ и } A/\beta \;=\; (\, a, b \mid c \mid d \,).$$

1. $\alpha \cup \beta$ есть эквивалентность:
   $A/(\alpha \cup \beta) \;=\; (\, a, b \mid c, d \,)$.

2. Возьмём по два элемента из одного и из разных классов эквивалентности $\alpha \cup \beta$:

   $\underline{a \text{ и } b \text{ из одного класса}}$ — тогда справедливо $a(\alpha\beta)b$, поскольку справедливо и $a\alpha a$, и $a\beta b$;

a и c из разных классов — тогда $a(\alpha\beta)c$ несправедливо, т.к. не существует элемента x такого, что $a\alpha x$ и $x\beta c$ верны одновременно.

Теорема 2.8 (об инвариантности произведения эквивалентностей). *Произведение эквивалентностей будет эквивалентностью, если и только если они перестановочны.*

Это следствие теоремы о свойствах произведения отношений.

Если S — некоторое свойство элементов множества A, то *наименьшим подмножеством, обладающим свойством* S называется *пересечение всех подмножеств* A, элементы которых обладают данным свойством.

Теорема 2.9 (о произведении перестановочных эквивалентностей). *Для перестановочных эквивалентностей произведение является наименьшей эквивалентностью, их содержащей.*

Это следствие двух предыдущих теорем.

Оператор замыкания. Укажем способ построения наименьшей эквивалентности, содержащей данное отношение. Оно использует фундаментальное понятие замыкания.

Определение 2.10. *Оператором замыкания* на непустом множестве M называют отображение C множества всех подмножеств M в себя, обладающее для всех X, $Y \subseteq M$ следующими свойствами:

1. $X \subseteq C(X)$ — рефлексивность,
2. $X \subseteq Y \Rightarrow C(X) \subseteq C(Y)$ — монотонность,
3. $C(C(X)) = C(X)$ — идемпотентность.

Множество X называется *замкнутым*, если $C(X) = X$.

Наименьшее *рефлексивное* ρ^r [*симметричное* ρ^s, *транзитивное* ρ^t, *эквивалентное* ρ^e] отношение, содержащее данное отношение ρ, называется *рефлексивным* [*симметричным*, *транзитивным*, *эквивалентным*] *замыканием* ρ. Замыкание совокупности отношений есть замыкание их *объединения*.

Замыкания однородного отношения ρ

Рефлексивное, симметричное: $\rho^r = \rho \cup \triangle$, $\rho^s = \rho \cup \rho^\sharp$.

Транзитивное. Введём отношение $\rho^+ \overset{\text{def}}{=} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \rho^n$.

Ясно, что, во-первых,

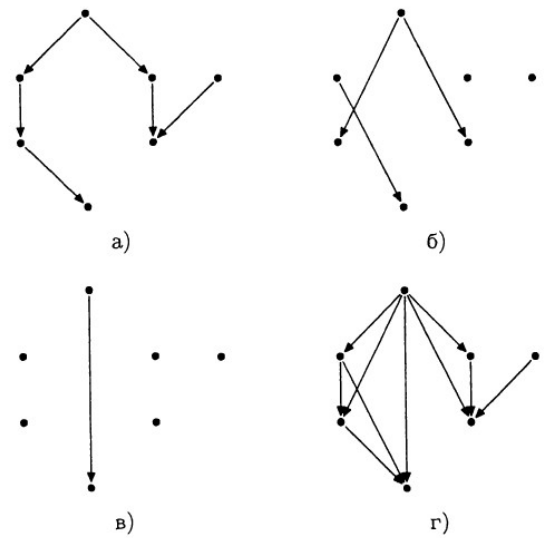
$$a\rho^+ b \;\Leftrightarrow\; \exists\, n\, \exists\, x_1, \ldots, x_n : a\rho x_1 \,\&\, x_1\rho x_2 \,\&\, \ldots \,\&\, x_n\rho b,$$

во-вторых, ρ^+ транзитивно и, в-третьих, $\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \alpha^+ \subseteq \beta^+$.

Утверждение 2.2. $\rho^t = \rho^+$.

Доказательство. Применяя операцию $^+$ к $\rho \subseteq \rho^t \subseteq \rho^+$, получим $\rho^+ \subseteq \rho^t \subseteq \rho^+$, что означает $\rho^t = \rho^+$. □

Пример 2.7. а) ρ, б) ρ^2, в) ρ^3, г) ρ^t



Эквивалентное (ρ^e). Очевидно для любого $\rho \in \mathcal{R}(A)$

$$\rho^* \overset{\text{def}}{=} (\rho^t)^r = (\rho^r)^t = \triangle \cup \rho^+ = \bigcup_{n=0}^{\infty} \rho^n.$$

ρ^* — рефлексивно-транзитивным замыкание ρ.

Обозначение: $\rho^= \overset{\text{def}}{=} (\rho \cup \rho^\sharp \cup \triangle)^t$; ясно, это эквивалентность и $\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \alpha^= \subseteq \beta^=$.

Утверждение 2.3. $\rho^e = \rho^=$.

Доказательство. Применяя операцию $^=$ к $\rho \subseteq \rho^e \subseteq \rho^=$, получим $\rho^= \subseteq \rho^e \subseteq \rho^=$, что означает $\rho^e = \rho^=$. □

Теорема 2.10. *Эквивалентное замыкание совокупности эквивалентностей совпадает с объединением всевозможных произведений этих эквивалентностей.*

Доказательство. Пусть R — совокупность эквивалентностей и E — объединение всевозможных *их произведений.*

По теореме о свойства произведения отношений: для однородных отношений α, β, γ справедливы следующие утверждения.

(1) Если β рефлексивно, то $\alpha \subseteq \alpha\beta$ и $\alpha \subseteq \beta\alpha$. Отсюда $\triangle \subseteq \alpha^n$ для рефлексивного α, $n = 0, 1, \ldots$.

(3) Если $\alpha, \beta \subseteq \gamma$ и γ транзитивно, то $\alpha\beta \subseteq \gamma$.

Тогда

из (1): $\sim \subseteq E$ для любой эквивалентности $\sim \in R$,

из (3): $E \subseteq \sim$, откуда и следует требуемое.

$\square$

Следствия. *1. Эквивалентное замыкание $\{\alpha, \beta\}^e$ двух эквивалентностей α и β совпадает с объединением всевозможных произведений вида $\alpha\beta$, $\beta\alpha$, $\alpha\beta\alpha$, $\beta\alpha\beta \ldots$.*

2. Если α и β — перестановочные эквивалентности, то

$$\{\alpha, \beta\}^e = \alpha \cup \beta = \alpha\beta$$

(последнее равенство есть утверждение теоремы о произведении перестановочных эквивалентностей).

Пример 2.8. 1. Пусть на множестве $A = \{1, \ldots, 8\}$ эквивалентности α и β порождаются разбиениями

$$D_\alpha = (\,1, 2 \mid 3, 4 \mid 5, 6, 7 \mid 8\,) \text{ и}$$
$$D_\beta = (\,1, 4 \mid 2, 3 \mid 5, 6 \mid 7 \mid 8\,).$$

Тогда $D_{(\alpha\cup\beta)^e} = (\,1, 2, 3, 4 \mid 5, 6, 7 \mid 8\,)$.

2. Пусть $\alpha,\ \beta \in \mathcal{E}(\{\,a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\,\})$ и
$D_\alpha = (\,a, b \mid c \mid d \mid e, f\,)$ и $D_\beta = (\,a \mid b, c \mid d, e \mid f\,)$.

Тогда

$$(a, c) \in \alpha\beta\,, \text{ но } (c, a) \notin \alpha\beta \quad \text{ и}$$
$$(c, a) \in \beta\alpha\,, \text{ но } (a, c) \notin \beta\alpha.$$

То есть

- эквивалентности α и β *не перестановочны*;
- ни $\alpha\beta$, ни $\beta\alpha$ *эквивалентностями не являются*.

Эквивалентное замыкание данных эквивалентностей есть $\{\alpha,\ \beta\}^e = \alpha\beta \cup \beta\alpha$ и ему соответствует разбиение $(a, b, c \mid d, e, f)$.

Дробная эквивалентность. Пусть α и β — две эквивалентности на множестве A.

Включение $\beta \subseteq \alpha$ означает, что *любой смежный класс по* β *лежит в некотором смежном классе по* α. При этом говорят, что разбиение множества A на смежные классы по β есть *подразбиение* его разбиения на смежные классы по α, или разбиение по β есть *измельчение* разбиения по α.

Для таких эквивалентностей определим на фактормножестве A/β *дробную эквивалентность* α/β по правилу

$$[x]_\beta\,(\alpha/\beta)\,[y]_\beta \;\Leftrightarrow\; [x]_\alpha = [y]_\alpha$$

для произвольных $x,\ y \in A$.

Таким образом, два смежных класса по β эквивалентны по α/β, если они находятся в одном смежном классе по α.

Определение 2.11. Пусть A и B — непустые множества и $\rho \subseteq A \times B$ — непустое соответствие между ними.

Тогда *ядром соответствия* ρ называется однородное на A отношение $\operatorname{Ker} \rho$, определяемое соотношением для a_1, $a_2 \in A$.

$$a_1 (\operatorname{Ker} \rho)\, a_2 \;\Leftrightarrow\; \rho(a_1) = \rho(a_2).$$

Очевидно $\operatorname{Ker} \rho$ есть эквивалентность на соответствующих множествах (наследуются свойства $=$), её называют *ядерной*. Смежные классы данной эквивалентности называются *ядрами*, используют обозначение $\operatorname{Core}(a) = [a]_{Ker \rho}$.

При задании отношения матрицей, *ядрам* будут соответствовать *совокупности одинаковых строк*.

Понятие ядерной эквивалентности и ядра может быть использовано для частного случая однородного отношения $(A = B)$.

Пример 2.9. Для однородного отношения на множестве $\{1, \ldots, 4\}$ заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ядрами будут $\{1, 2\}$ и $\{3, 4\}$.

Числом Белла $B(n)$ называется число всевозможных разбиений n-элементного множества.

Ясно, что для $|A| = n$ имеем $B(n) = |\mathcal{E}(A)|$. Например, трёхэлементное множество $\{\,a,\ b,\ c\,\}$ допускает пять разбиений:

$$(\,a \mid b \mid c\,),\ (\,a \mid b, c\,),\ (\,b \mid a, c\,),\ (\,c \mid a, b\,),\ (\,a, b, c\,).$$

и $B(3) = 5$.

Значения $B(n)$ для первых значений n:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$B(n)$	1	1	2	5	15	52	203	877	4 140	21 147

Числа Белла быстро растут: например,
$B(20) = 51\,724\,158\,235\,372$.

- $B(n+1) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(k)$;
- $B(n) = \dfrac{1}{e} \sum\limits_{0 \leqslant k} \dfrac{k^n}{k!}$ — *формула Добинского*;
- $\sum\limits_{0 \leqslant n} B(n)\,\dfrac{x^n}{n!} = e^{e^x - 1}$ — экспоненциальная производящая функция.

2.4 Пространства толерантности

Определение 2.12. Однородные рефлексивные и симметричные отношения называют *отношениями толерантности*, символически $\simeq$, τ.

$$\Delta \subseteq \simeq = \simeq^{\sharp}$$

Пример 2.10. Описанные ниже отношения τ суть толерантности.

1. A и B — точки евклидова пространства и $A\tau B \Leftrightarrow |A - B| \leqslant r > 0$.
2. Слова находятся в отношении τ, если они *отличаются не более, чем на одну букву.*
3. Для элементов x и y некоторого кольца

$$x\tau y \Leftrightarrow \text{элемент } x - y \text{ необратим.}$$

Определение 2.13. Пару $\langle\, A,\, \simeq \,\rangle$, где A — непустое множество, а $\simeq$ — толерантность на нём, называют *пространством толерантности.*

Пример 2.11. Пусть A — непусто и $\mathcal{P}^*(A)$ — совокупность всех его *непустых* подмножеств. Для $X, Y \in \mathcal{P}^*(A)$ положим $X \simeq Y \stackrel{\text{def}}{=} (X \cap Y \neq \varnothing)$. Тогда $\langle\, \mathcal{P}^*(A),\, \simeq \,\rangle$ — пространство толерантности.

Множество $\mathcal{P}^*(\{\, 1, \ldots, n \,\})$ называют $(n-1)$-*мерным симплексом*, символически S^n. Это обобщение понятия отрезка, треугольника и тетраэдра на многомерный случай. Очевидно $|S^n| = 2^n - 1$.

Представление толерантности симплексами. Числа $1, \ldots, n$ интерпретируются как *вершины* симплекса, и вообще k-элементные подмножества — как $(k-1)$-мерные грани.

Толерантность граней S^n означает их геометрическую *инцидентность* — наличие общих вершин.

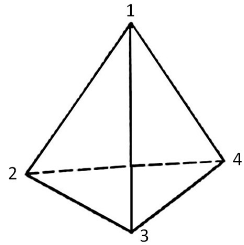


Рис. 2.1. Симплекс S^4 — 3-мерный тетраэдр

Представление симплексов графами. При таком представлении элементы S^n сопоставляются вершинам $(2^n - 1)$-элементного графа, рёбра которого отображают соответствующие толерантности.

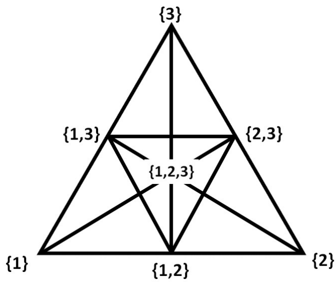


Рис. 2.2. Графовое представление симплеса S^3

Представление толерантности $(0,1)$*-матрицами* — матрица будет симметрична и содержать единицы на главной диагонали, а любая такая матрица — задавать толерантность.

Представление толерантности графами — как и любое бинарное отношение. При этом вершины x и y графа $G(\tau)$ при $x\tau y$ соединяют неориентированным ребром (симметричность), а петли при каждой вершине (рефлексивность) опускают.

Пример 2.12. Задание матрицей и графом толерантности на трёхэлементном множестве $\{1, 2, 3\}$:

$$M(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad 1 \text{———} 2 \text{———} 3$$

Алгебраические свойства операций над толерантностями

Утверждение 2.4. *Если $\simeq$ — толерантность, а $\sim$ — эквивалентность на некотором множестве такие, что $\simeq \subseteq \sim$, то $\simeq^t \subseteq \sim$.*

Доказательство: применяем операцию ^{t} к $\simeq \subseteq \sim$.

Следствие. *Транзитивное замыкание толерантности есть минимальная её включающая эквивалентность.*

Утверждение 2.5. *Пусть S — совокупность толерантностей на множестве A.*

Тогда $a\, S^e\, b$ для $a, b \in A$ справедливо, если и только если

$$\exists\, n\, \exists\, a_1, \ldots, a_n : a\tau_1 a_1 \;\&\; a_1\tau_2 a_2 \;\&\; a_2\tau_3 \;\&\; \ldots \;\&\; a_n\tau_{n+1} b,$$

где $\tau_1, \ldots, \tau_{n+1}$ — некоторые, возможно повторяющиеся, толерантности из S.

Симметризованное произведение $\circ$ однородных отношений α и β:

$$\alpha \circ \beta \stackrel{\text{def}}{=} \alpha\beta \cup \beta\alpha.$$

Теорема 2.11 (о свойствах толерантности).

1. *Толерантность инвариантна относительно $\cup$, $\cap$, $^\sharp$, а относительно $\diamond$ — если и только если толерантности перестановочны (и в этом случае $\alpha \diamond \beta = \alpha \circ \beta$).*
2. *Толерантность инвариантна относительно $\circ$.*
3. *Если τ — толерантность, то и $\overline{\tau} \cup \Delta$ толерантность.*
4. *Если α — рефлексивное однородное отношение, то отношения $\alpha \cup \alpha^\sharp$, $\alpha \cap \alpha^\sharp$ и $\alpha \circ \alpha^\sharp$ суть толерантности.*

Доказательство.

1. Все утверждения следуют из пп. (1) и (2) теоремы об инвариантности "положительных" свойств однородных отношений.
2. Пусть α и β — толерантности. Тогда

   R: рефлексивность $\alpha \circ \beta$ следует из рефлексивности $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ (п. (1) упомянутой теоремы);

   S: $(\alpha \circ \beta)^\sharp = (\alpha\beta \cup \beta\alpha)^\sharp = (\alpha\beta)^\sharp \cup (\beta\alpha)^\sharp = $
   $= \beta^\sharp\alpha^\sharp \cup \alpha^\sharp\beta^\sharp = \beta\alpha \cup \alpha\beta = \alpha \circ \beta$.

3. Дополнение сохраняет свойство симметричности, но превращает рефлексивное отношение антирефлексивное.

4. Отношения, являющиеся результатами указанных операций наследуют рефлексивность α и приобретают свойство симметричности. $\square$

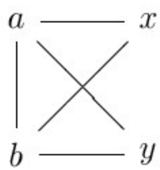
Расщепление понятий при переходе от частного к общему:

эквивалентность	$\longleftrightarrow$	ядро $=$ класс
толерантность	$\longleftrightarrow$	ядро $\neq$ класс

Ядра толерантности суть классы $\mathrm{Core}(\cdot)$ по эквивалентности $\mathrm{Ker}\,\tau$, т.е. элементы принадлежат одному ядру, если они толерантны одним и тем же элементам. Ясно, что они образуют разбиение носителя пространства толерантности.

Пример 2.13.

1. Ядра толерантности $1—2—3$ суть $\{1\}$, $\{2\}$ и $\{3\}$.
2. Для толерантности



ядрами будут $\mathrm{Core}(a) = \{a, b\}$, $\mathrm{Core}(x) = \{x\}$ и $\mathrm{Core}(y) = \{y\}$: элементы x и y не могут быть объединены в ядро, т.к. $x\tau x$, но $y\overline{\tau}x$.

Фактормножество $A^* = A/\,\mathrm{Ker}\,\tau$ *пространства толерантности* $\langle\, A, \tau \,\rangle$ *по его ядру* состоит из ядер толерантности τ.

Если на A^* ввести отношение τ^* по правилу

$$\mathrm{Core}(x)\,\tau^*\,\mathrm{Core}(y) \;\Leftrightarrow\; x\tau y,$$

то τ^* оказывается отношением толерантности, а $\langle\, A/\operatorname{Ker}\tau,\ \tau^*\,\rangle$ — пространством толерантности.

Отображение $\varphi\colon A \to A/\operatorname{Ker}\tau$, $\varphi(x) = \mathrm{Core}(x)$ ставящее в соответствие каждому элементу его ядро, обладает свойством

$$x\tau y \;\equiv\; \varphi(x)\,\tau^*\varphi(y).$$

В таких случаях говорят, что отображение φ *тождественно согласованно с парой отношений* τ и τ^* на множествах A и $A/\operatorname{Ker}\tau$ соответственно.

Пример 2.14. 1. На 9-элементном множестве $A = \{1,\ldots,9\}$ толерантность τ задана матрицей

$$M(\tau) = \begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&0&1\\
1&1&1&1&0&1&0&0&0\\
1&1&1&0&1&0&1&1&1\\
1&1&1&1&0&1&0&0&0\\
1&1&1&0&1&0&1&0&1\\
1&1&0&0&1&0&0&1&0\\
1&1&1&0&1&0&1&0&1
\end{pmatrix} &
\begin{array}{c}
C_1\\ C_1\\ C_2\\ C_3\\ C_4\\ C_3\\ C_5\\ C_6\\ C_5
\end{array}
\end{array}$$

Строки матрицы соответствующие ядрам $C_1,\ \ldots,\ C_6$ толерантности τ помечены.

Матрица толерантности τ^* на фактормножестве $A^* = A/\operatorname{Ker}\tau = \{\, C_1,\ \ldots,\ C_6\,\}$ есть

$$M(\tau^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Для толерантности 1—2—3 имеем $M(\tau^*) = M(\tau)$.

Перейдём теперь к другому обобщению понятия класса эквивалентности — классам толерантности.

Определение 2.14. Пусть $\langle A, \tau \rangle$ — пространство толерантности.

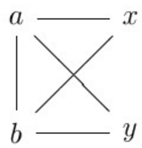
Подмножество $K \subseteq A$ называют *предклассом толерантности в* A или τ*-предклассом*, если в нём все пары элементов толерантны.

Максимальный (по включению) предкласс называют *классом толерантности в* A или τ*-классом*.

Пример 2.15. 1. Любое одноэлементное множество пространства толерантности — тривиальный пример предкласса.

2. Для толерантности 1—2—3 классы толерантности суть $\{1, 2\}$ и $\{2, 3\}$.

3. Для толерантности



классы толерантности суть $\{a, b, x\}$ и $\{a, b, y\}$.

4. Рассмотрим пространство толерантности $\langle S^n, \simeq \rangle$.

   Обозначим через $\widetilde{K}_i$ множество некоторых граней, содержащих элемент i, $1 \leqslant i \leqslant n$.
   Ясно, что $\widetilde{K}_i$ — предкласс.

   Если K_i объединяет *все* грани, содержащие элемент i, то он нерасширяем, и, следовательно, является классом толерантности в S^n.

   Геометрически класс K_i состоит из всевозможных граней симплекса, содержащих вершину i.

- Совокупность всех предклассов толерантности пространства $\langle A, \tau \rangle$ образует *покрытие* множества A, т.к. объединение всех одноэлементных предклассов уже образует покрытие A.

- Если задано *покрытие* непустого множества A его подмножествами, то тем самым задана и *толерантность* τ на нём: все элементы, принадлежащих данному подмножеству, считаем толерантными друг другу.

  При этом данные подмножества будут τ-классами толерантности.

(Ср. с теоремой о классах эквивалентности)

Лемма 2.1. *Для всякого предкласса существует содержащий его класс.*

Доказательство для конечного случая. Рассмотрим некоторый τ-предкласс K и все τ-предклассы, его содержащие. Любая цепь вложенных друг в друга таких предклассов, начинающаяся с K, будет конечной, а заключительный предкласс будет уже классом. □

Теорема 2.12. *Для всякой пары элементов пространства толерантности $\langle\, A,\, \tau\,\rangle$, находящихся в отношении τ, существует класс толерантности, их содержащий.*

Доказательство. Эта пара элементов образует предкласс; начинаем с него □

Разложение толерантности на квадраты

Утверждение 2.6. *Если $K_1, \ldots, K_m$ — все классы толерантности τ, то*

$$\tau \,=\, \bigcup_{i=1}^{m} K_i^2.$$

Пример 2.16. Для толерантности 1—2—3:

$$\tau \,=\, \{\,(1,1),\,(1,2),\,(2,2),\,(2,3),\,(3,3)\,\}$$

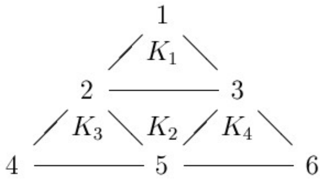
$$K_1^2 \,=\, \{\,(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\,\},$$
$$K_2^2 \,=\, \{\,(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\,\}.$$

Или при задании толерантности $(0,1)$-матрицами:

$$M(\tau) \,=\, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \,=\, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Разложение толерантности на квадраты *неприводимо*, если из него нельзя исключить если ни один квадрат.

Пример 2.17. Рассмотрим толерантность τ на 6-элементном множестве, задаваемую графом



Классы толерантности:

$K_1 = \{1, 2, 3\}$, $K_2 = \{2, 3, 5\}$,
$K_3 = \{2, 4, 5\}$, $K_4 = \{3, 5, 6\}$.

Разложения

- полное $\tau = K_1^2 \cup K_2^2 \cup K_3^2 \cup K_4^2$ — избыточно;
- $\tau = K_1^2 \cup K_3^2 \cup K_4^2$ — неприводимо.

Базис толерантности

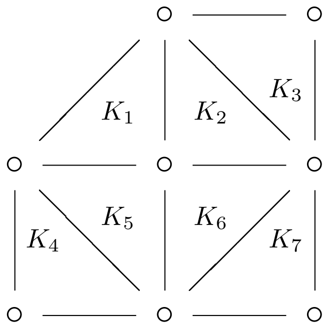
Определение 2.15. *Базисом* $\mathcal{B}(\tau)$ толерантности τ на конечном множестве называется всякий набор классов, определяющий её неприводимое разложение на квадраты.

- Толерантность может иметь *несколько базисов с различным числом входящих в них классов.*

  В предыдущем примере единственный базис толерантности τ состоит из её классов K_1, K_3 и K_4.

- Когда толерантность оказывается эквивалентностью, её базис единственен и его составляют смежные классы.

Пример 2.18. Рассмотрим толерантность на 8-элементном множестве, заданную графом с обозначенными классами:



Здесь классы
$K_1, \ldots, K_5$ и K_7 образуют 6-элементный, а классы
K_1, K_3, K_4, K_6 и K_7 — 5-элементный
базисы данного пространства толерантности.

Определение 2.16. *Фактормножеством пространства толерантности* $\langle\, A,\, \tau \,\rangle$ *по его базису* $\mathcal{B}(\tau)$ называется множество, элементами которого являются классы из $\mathcal{B}(\tau)$ и их всевозможные (не обязательно попарные) непустые пересечения.

Обозначение: $A/\mathcal{B}(\tau)$, а в случае единственного базиса — A/τ.

Пример 2.19. 1. (продолжение *Примера* 2.14 с пространством толерантности пространства $\langle\, A,\, \tau \,\rangle$ на 9-элементном множестве A)

Здесь единственный базис толерантности

$$\mathcal{B}(\tau) = \{\, \underbrace{\{1,2,3,4,6\}}_{K_1}, \underbrace{\{1,2,3,5,7,9\}}_{K_2}, \underbrace{\{1,2,5,8\}}_{K_3} \,\}.$$

Непустые попарные пересечения классов:

$$K_1 \cap K_2 = \{1, 2, 3\} = K_4,$$
$$K_1 \cap K_3 = \{1, 2\} = K_1 \cap K_2 \cap K_3 = K_5,$$
$$K_2 \cap K_3 = \{1, 2, 5\} = K_6.$$

Таким образом, фактормножество пространства A по базису $\mathcal{B}(\tau)$ есть $A/\tau = \{K_1, \ldots, K_6\}$.

Это фактормножество имеет лишь один общий элемент K_5 с также 6-элементным фактормножеством по ядру $A/\operatorname{Ker}\tau$, и поэтому $A/\tau \neq A/\operatorname{Ker}\tau$.

2. Для пространства толерантностьи 1—2—3 классы суть $K_1 = \{1, 2\}$ и $K_2 = \{2, 3\}$; они и составляют его единственный базис.

   Добавив к этим классам

$$K_3 = K_1 \cap K_2 = \{2\},$$

   получим *фактормножество по базису* — $\{K_1, K_2, K_3\}$.

   Напомним, что фактормножество по ядру есть $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\} = \{K_1 \setminus K_3, K_2 \setminus K_3, K_3\}$.

Понятие фактормножества пространства толерантности по его базису оказывается особенно полезном в случаях, кода базис содержит небольшое число элементов.

Оно используется, в частности, при минимизации конечных автоматов.

2.5 Задачи и упражнения

Задача 2.1. *Проверить дистрибутивность прямого произведение множеств относительно операции пересечения, т.е. что для любых множеств* A, B *и* C *справедливо:*

$$(A \cap B) \times C \stackrel{?}{=} (A \times C) \cap (B \times C) \quad \text{и}$$

$$A \times (B \cap C) \stackrel{?}{=} (A \times B) \cap (A \times C)\,.$$

Решение. Докажем справедливость первого равенство. Второе доказывается аналогично.

Обозначим $X = (A \cap B) \times C$ и $Y = (A \times C) \cap (B \times C)$. Имеем

$$x \in X \;\Leftrightarrow\; x = (x_1,\, x_2), \quad x_1 \in A \cap B,\, x_2 \in C\,,$$

$$y \in Y \;\Leftrightarrow\; y = (y_1,\, y_2), \quad y_1 \in A \cap B,\, y_2 \in C\,.$$

Задача 2.2. *Пусть* A *и* B *— непустые конечные подмножества универсального множества* U *и* $x \in U$. *Какие из нижеприведённых соотношений справедливы?*

(1) $\varnothing \times A = \varnothing$; (2) $U \times A = A$;

(3) $A \subseteq A \times A$;

(4) $|\, A \times \{x\} \,| = |\, A \,|$;

(5) $A \times B = B \times A \;\Leftrightarrow\; A = B$.

Решение.

Все, кроме (2) : $U \times A = \{\, (z, a) \mid z \in U,\, a \in A \,\}$.

Задача 2.3. *Проверить справедливость равенства*

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D).$$

Решение.
Пусть $X = (A \cap B) \times (C \cap D)$ и $Y = (A \times C) \cap (B \times D)$.

$$(x_1, x_2) \in X \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \in A \cap B \\ x_2 \in C \cap D \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a, c) \in A \times C \\ (b, d) \in B \times D \end{cases} \Leftrightarrow (y_1, y_2) \in Y \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 \in A \cap B \\ y_2 \in C \cap D \end{cases}$$

Задача 2.4. *Укажите четыре таких множества A, B, C и D, что*

$$(A \cup B) \times (C \cup D) \neq (A \times C) \cup (B \times D).$$

Решение.
Рассмотрим множества $A = C = \{1\}$ и $B = D = \{2\}$. Обозначим

$$X = (A \cup B) \times (C \cup D) \quad \text{и} \quad Y = (A \times C) \cup (B \times D).$$

Имеем

$$X = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\},$$
$$Y = \{(1, 1), (2, 2)\} \neq X.$$

Задача 2.5. *Несмотря на результат предыдущего упражнения покажите, что прямое произведение дистрибутивно относительно операции объединения.*

Решение. Надо показать, что

$$
\begin{aligned}
(A \cup B) \times C &= (A \times C) \cup (B \times C) \quad \text{и} \\
A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C) .
\end{aligned}
$$

Докажем первое равенств, второе доказывается аналогично.

Обозначим $X = (A \cup B) \times C$ и $Y = (A \times C) \cup (B \times C)$. Тогда

$$
\begin{aligned}
x \in X \ &\Leftrightarrow \ x = (x_1,\, x_2), \quad x_1 \in A \cup B,\, x_2 \in C\,, \\
y \in Y \ &\Leftrightarrow \ y = (y_1,\, y_2), \quad y_1 \in A \cup B,\, y_2 \in C\,.
\end{aligned}
$$

Задача 2.6. *Показать, что*

$$
(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D).
$$

Решение.

$$
\left\{ \begin{array}{l} (a,b) \in A \times B \\ (c,d) \in C \times D \end{array} \right. \Rightarrow (x_1, x_2) \in X \Leftrightarrow
$$

$$
\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 \in A \cup C \\ x_2 \in B \cup D \end{array} \right. \Leftrightarrow (x_1, x_2) \in Y
$$

Покажем на примере, что $\Rightarrow$ нельзя заменить на $\Leftrightarrow$.

Пусть $A = B = \{1\}$, $C = D = \{2\}$ и

$$
X = (A \times B) \cup (C \times D), \qquad Y = (A \cup C) \times (B \cup D)\,.
$$

Тогда

$$
A \times B = \{(1,1)\}\,; \quad C \times D = \{(2,2)\}\,;
$$

$$\begin{aligned} X &= \{(1,1),\ (2,2)\}\,; \\ A \cup C &= \{(1,2)\} \;=\; B \cup D\,; \\ Y &= \{\,(1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (2,2)\,\}\,. \end{aligned}$$

Задача 2.7. *Доказать, что для любых непустых множеств A и B и любого множества C*

$$(A \times B) \cup (B \times A) = C \times C \;\Rightarrow\; A = B = C.$$

Решение.
Ясно, что $C \neq \varnothing$ и рассмотрим $c = (c_1,\ c_2) \in C^{\,2}$. Имеем

$$\begin{cases} c_1 \in A\,, \\ c_1 \in B \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} c_2 \in B\,, \\ c_2 \in A\,, \end{cases}$$

откуда $C \in A \cup B$. С другой стороны,

$$\begin{cases} c_1 \in A\,, \\ c_2 \in B \end{cases} \;\Rightarrow\; c \in A \cap B\,.$$

т.е. $A \cup B \;=\; A \cap B \;=\; C$, откуда $A = B = C$.

Задача 2.8. *Доказать, что два множества равны если и только если результаты их объединения и пересечения совпадают.*

Решение. Надо показать, что $A \;=\; B \Leftrightarrow A{\cup}B \;=\; A{\cap}B\,.$

1. При $A \;=\; B$ утверждение очевидно.
2. Пусть $A + B \;=\; (A \cup B) \setminus (A \cap B) \;=\; (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$. Из второго представления следует, что $A \;=\; B \;\Leftrightarrow\; A + B \;=\; \varnothing$.
   Отсюда при $A \;\neq\; B$ из первого представления следует $A \cup B \neq\; A \cap B$.

Задача 2.9. *Пусть* $|A| = m$, $|B| = n$. *Найти число* $C_s(m,n)$ *сюръективных* ($Im\,\rho = B$) *соответствий* (ρ) *между множествами* A *и* B.

Решение. Каждый элемент $b \in B$ входит в m пар (a,b), $a \in A$.

Хотя бы одну такую пару во всюду определённое соответствие включить нужно, а пары $(\varnothing, b)$ быть не может. Т.о. может быть $2^m - 1$ пар (a,b).

Но каждый элемент $b \in B$ может быть выбран n способами, т.е. $C_s(m,n) = (2^m - 1)^n$.

Задача 2.10. *Пусть* α *и* β — *бинарные отношения (соответствия) между множествами* A *и* B. *Проверить, совпадают ли*

1) *проекции их объединения с объединением соответствующих проекций:*

$$Pr_1(\alpha\cup\beta) = Pr_1\alpha\cup Pr_1\beta\,, \quad Pr_2(\alpha\cup\beta) = Pr_2\alpha\cup Pr_2\beta;$$

2) *проекции их пересечения с пересечением соответствующих проекций:*

$$Pr_1(\alpha\cap\beta) = Pr_1\alpha\cap Pr_1\beta\,, \quad Pr_2(\alpha\cap\beta) = Pr_2\alpha\cap Pr_2\beta.$$

Решение. (1) Для произвольного $a \in A$ имеем:

$$a \in Pr_1(\alpha\cup\beta) \Leftrightarrow \underset{B}{\exists} b : a(\alpha\cup\beta)b \Leftrightarrow \underset{B}{\exists} b : (a\alpha b)\vee(a\beta b) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \underset{B}{\exists} b : a\alpha b \vee \underset{B}{\exists} b : a\beta b \Leftrightarrow a \in Pr_1\alpha \vee a \in Pr_1\beta\,,$$

т.е. $Pr_1(\alpha \cup \beta) = Pr_1\alpha \cup Pr_1\beta$ и аналогично для Pr_2.

(2) Казалось бы, для произвольного $a \in A$ имеем:

$$a \in Pr_1(\alpha \cap \beta) \Leftrightarrow \underset{B}{\exists} b : a(\alpha \cup \beta) b \Leftrightarrow \underset{B}{\exists} b : (a\alpha b) \& (a\beta b) \overset{?}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow \underset{B}{\exists} b : a\alpha b \,\&\, \underset{B}{\exists} b : a\beta b \Leftrightarrow a \in Pr_1\alpha \,\&\, a \in Pr_1\beta\,.$$

Это следование, однако, ошибочно: в действительности вместо равносильности $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ необходимо проставить следование $\Rightarrow$, поскольку $\exists x\,(A(x) \& B(x)) \supset \exists x A(x) \,\&\, \exists x B(x)$, но не наоборот.

Аналогично для второй проекции.

В этом месте ошибся даже А.Пуанкаре.

Задача 2.11. *Сколько существует соответствий (бинарных отношений) между конечными множествами, состоящими из m и n элементов?*

Решение. 2^{mn}.
Декартово произведение множеств, состоящих из m и n различных элементов содержит mn упорядоченных пар, и следовательно, можно выделить 2^{mn} его подмножеств.

Задача 2.12. *В чем разница между операциями $^-$ и $^\sharp$?*

Решение. Операция $^-$ может быть применена к любому множеству, содержащемуся в некотором универсальном множестве.

Операция $^\sharp$ применяется к подмножеству декартова произведения двух множеств.

Задача 2.13. *Покажите, что для однородного на A отношения справедливы следующие соотношения:*

1. $(\rho^\sharp)^\sharp = \rho\,;$
2. $\overline{\rho^\sharp} = (\overline{\rho})^\sharp\,;$
3. $\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \alpha^\sharp \subseteq \beta^\sharp\,;$
4. $(\alpha \cup \beta)^\sharp = \alpha^\sharp \cup \beta^\sharp\,;$
5. $(\alpha \cap \beta)^\sharp = \alpha^\sharp \cap \beta^\sharp\,.$

Решение. Далее a, b — произвольные элементы множества A:

1. $a(\rho^\sharp)^\sharp b = b(\rho^\sharp)a = a\rho b\,;$
2. $b\overline{\rho^\sharp}a = \neg(b\rho^\sharp a) = \neg(a\rho b) = a\overline{\rho}b = b(\overline{\rho})^\sharp a\,;$
3. $b\alpha^\sharp a = a\alpha b \Rightarrow a\beta b = b\beta^\sharp a\,;$
4. $b(\alpha\cup\beta)^\sharp a = a(\alpha\cup\beta)b = a\alpha b \vee a\beta b =$
$$= b\alpha^\sharp a \vee b\beta^\sharp a = b(\alpha^\sharp \cup \beta^\sharp)a\,.$$
5. $b(\alpha\cap\beta)^\sharp a = a(\alpha\cap\beta)b = a\alpha b \,\&\, a\beta b =$
$$= b\alpha^\sharp a \,\&\, b\beta^\sharp a = b(\alpha^\sharp \cap \beta^\sharp)a\,.$$

Задача 2.14. *Пусть ρ — однородное отношение на конечном множестве. Как будет выглядеть матрица $M(\rho) = \| m_{ij} \|$, если...*

(1) Если задана матрица $M(\rho)$, то как будет выглядеть матрица $M(\rho^\sharp)$?
$M(\rho^\sharp) = M(\rho)^T$ (транспонированная).

(2) Как будет выглядеть матрица $M(\rho)$, если ρ —

1. *несобственное*: матрицы I, у которой всё элементы равны 1 (универсальная матрица) и O, у которой всё элементы равны 0 (нуль-матрица);
2. *единичное*: содержит 1 на главной диагонали и 0 на остальных местах;
3. *рефлексивное*: содержит 1 на главной диагонали;
4. *антирефлексивное*: содержит 0 на главной диагонали;
5. *симметричное*: симметрична, т.е. $M(\rho) = M(\rho)^T$;
6. *антисимметричное*: содержит 1 на главной диагонали и при $i \neq j$ будет $m_{i,j} = 1$, только если $m_{j,i} = 0$.
   Будет ли матрица $M(\rho)$ антисимметричной? *Нет!* (возможно $m_{i,j} = m_{j,i} = 0$).
7. *транзитивное*: $M^2(\rho) = M(\rho)$.

   Или: $m_{ij} = 1 \Rightarrow \underset{1,\ldots,n}{\forall} k\ (m_{jk} = 1 \Rightarrow m_{ik} = 1)$.
8. *эквивалентность*: содержит 1 на главной диагонали. $m_{ij} = 1 \Rightarrow m_{ii} = 1, m_{jj} = 1, m_{ji} = 1, m_{ij} = 1$.

   Перестановкой столбцов и соответствующих им строк можно добиться, что матрица $M(\rho)$ отношения эквивалентности будет состоять из совокупности матриц I разного порядка, расположенных по главной диагонали.

Задача 2.15. *Пусть ρ — однородное отношение на множестве A. Является ли ρ^n декартовым произведением n множеств ρ?*

Решение. Нет (см. определение декартова произведения и степени однородного отношения: $\rho\diamond\ldots\diamond\rho \neq \rho\times\ldots\times\rho$).

Задача 2.16. *Дано конечное однородное отношение ρ на $\mathbb{N}$:*

$$\rho = \{\,(1,1),\,(1,2),\,(1,3),\,(2,3),\,(2,4),\,(3,5)\,\}\,.$$

Найти:

1. $Pr_1\rho$, $Pr_1\rho^\sharp$, $Pr_1(\rho\cup\rho^\sharp)$;
2. *Образа элементов* 1 *и* 4 *и подмножества* $\{\,1,2\,\}$ *при соответствии* ρ;
3. *Отношения* $\rho\rho^\sharp$, $\rho^\sharp\rho$ *и* ρ^2.

Решение. Имеем

$$\rho^\sharp = \{\,(1,1),\,(2,1),\,(3,1),\,(3,2),\,(4,2),\,(5,3)\,\}.$$

1. $Pr_1\rho = \{\,1,\,2,\,3\,\}$, $Pr_1\rho^\sharp = \{\,1,\,2,\,3,\,4,\,5\,\}$, $Pr_1(\rho\cup\rho^\sharp) = \{\,1,\,2,\,3,\,4,\,5\,\}$;
2. $\rho(1) = \{\,1,\,2,\,3\,\}$, $\rho(4) = \varnothing$, $\rho(\{\,1,2\,\}) = \{\,1,\,2,\,3,\,4\,\}$;
3.

$$M(\rho) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\; M(\rho^\sharp) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M(\rho\rho^{\sharp}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M(\rho\rho^{\sharp}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \rho\rho^{\sharp} &= \{\,(1,1),\,(1,2),\,(2,1),\,(2,2),\,(3,3)\,\}\,; \\ \rho^{\sharp}\rho &= \{\,(1,1),\,(1,2),\,(1,3),\,(2,1),\,(2,2),\,(2,3), \\ &\quad (3,1),\,(3,2),\,(3,3),\,(3,4),\,(4,3),\,(5,5)\}\,; \\ \rho^2 &= \{\,(1,1),\,(1,2),\,(1,3),\,(1,4),\,(1,5),\,(2,5)\,\}\,. \end{aligned}$$

Задача 2.17. *Если отношение $\rho \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$, то множество точек, ему удовлетворяющих (график ρ) есть некоторое подмножество первого квадранта координатной плоскости.*

Укажите характеристические особенности этого графика, если ρ

1) *рефлексивно;*
2) *симметрично;*
3) *транзитивно?*

Решение. Для отображения $\varphi \in Fun\,(A, B)$ *графиком* $Gr(\varphi)$ называется множество $\{\,(a,\,b) \in A \times B \mid \varphi(a) = b\,\}$.

1) содержит биссектрису первого квадранта;

2) симметричен относительно биссектрисы первого квадранта;
3) если точки $A = (a,\, b)$ и $B = (b,\, c)$ принадлежат графику, то ему принадлежит и точка $C = (a,\, c)$.

<u>Задача</u> 2.18. *Как будет выглядеть график отношения эквивалентности на* $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$*?*

Решение. Симметричен относительно биссектрисы первого квадранта, содержа её.
Если A и B принадлежат графику и ордината A равна абциссе B, то ему принадлежит и точка, лежащая на пересечении абциссы A и ординаты B.

<u>Задача</u> 2.19. *Для отношений*

$$\begin{aligned} \alpha &= \{\, (x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2 \,\} \qquad \textit{и} \\ \beta &= \{\, (x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0, \} \end{aligned}$$

найти $\alpha^{\sharp}$, $\alpha\beta$, $\beta\alpha$ *и* $\alpha\alpha$.

Решение.

- $x\alpha^{\sharp}y \;=\; \{\, (x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 \,\}$.
- $x(\alpha\beta)y \;=\; \exists\, z : (x = z^2) \& (yz > 0) \;\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow\; (x > 0) \;\&\; (y > 0)$.
- $x(\beta\alpha)y \;=\; \exists\, z : (xz > 0) \;\&\; (z = y^2) \;\Leftrightarrow\; x > 0$.
- $x\alpha^2y \;=\; \{\, (x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^4 \,\}$.

Задача 2.20. *Пусть* A, B *и* C *— непустые множества,* $\alpha \subseteq A \times B$ *и* $\beta \subseteq B \times C$.
Выразить отношения $\overline{\alpha\beta}$ *и* $\overline{\alpha}\overline{\beta}$ *и проинтерпретировать результат.*

Решение. Пусть $a \in A$, $c \in C$.

$$a(\overline{\alpha\beta})c = \neg \underset{B}{\exists} b\,(a\alpha b \& b\beta c) = \underset{B}{\forall} b \neg\,(a\alpha b \& b\beta c) = \\ = \underset{B}{\forall} b\left(a\overline{\alpha}b \vee b\overline{\beta}c\right).$$

Это означает, что подмножества $a\overline{\alpha}$ и $c\overline{\beta}^{\sharp}$ образуют разбиение множества B.

$$a(\overline{\alpha}\overline{\beta})c = \underset{B}{\exists} b\left(a\overline{\alpha}b \& b\overline{\beta}c\right) = \underset{B}{\exists} b \neg\,(a\alpha b \vee b\beta c) = \\ = \neg \underset{B}{\forall} b\ (a\alpha b \vee b\beta c).$$

Это означает, что подмножества $a\alpha$ и $c\beta^{\sharp}$ не образуют разбиения множества B.

Задача 2.21. *Известно, что из* 100 *студентов живописью увлекаются* 28, *спортом —* 42, *музыкой —* 30, *живописью и спортом —* 10, *живописью и музыкой —* 8, *спортом и музыкой —* 5, *живописью, спортом и музыкой —* 3. *Определить:*

1. *количество студентов, увлекающихся только спортом;*
2. *количество студентов, ничем не увлекающихся.*

Решение. Обозначим множества студентов, увлекающихся живописью — P, спортом — S, музыкой — M и множество всех студентов — U. Тогда

(1) количество студентов, увлекающихся только спортом есть мощность множества

$$S \setminus ((S \cap P) \cup (S \cup M) \setminus (P \cap S \cap M))$$

или $42 - (10 + 5 - 3) = 42 - 12 = 30$.

(2) количество студентов, ничем не увлекающихся есть мощность множества

$$U \setminus [(S \cup P \cup M) \setminus ((S \cap P) \cup (P \cap M) \cup (M \cap S)) \cup (P \cap S \cap M)]$$

или

$$100 - ((28 + 42 + 30) - (10 + 8 + 5) + 3) = \\ = 100 - (100 - 13 + 3) = 10.$$

Задача 2.22. *Показать, что для* α, $\beta \in A \times B$ *справедливо*

$$\alpha = \beta \;\Leftrightarrow\; \alpha^{\sharp} = \beta^{\sharp}.$$

Решение.

$$\alpha^{\sharp} = \beta^{\sharp} \;\Leftrightarrow\; \underset{A\times B}{\forall}(a,b)\,\big((b,a)^{\sharp} \in \alpha \;\equiv\; (b,a) \in \beta^{\sharp}\big) \;\Leftrightarrow \\ \underset{A\times B}{\forall}(a,b)\,(\,(a,b) \in \alpha \;\equiv\; (a,b) \in \beta\,) \;\Leftrightarrow\; \alpha = \beta\,.$$

Задача 2.23. *Покажите, что если два отношения симметричны, то их объединение и пересечение также симметричны.*

Решение. Пусть $\alpha^\sharp = \alpha$ и $\beta^\sharp = \beta$ однородные отношения. Тогда $(\alpha \cup \beta)^\sharp = \alpha^\sharp \cup \beta^\sharp = \alpha \cup \beta$.
Для $\cap$ аналогично.

Задача 2.24. *Покажите, что имеется взаимно-однозначное соответствие $A \times B \times C$ на $A \times (B \times C)$, сохраняющее первую проекцию полного отношения и переводящее Pr_2 в $Pr_1(Pr_2)$, а Pr_3 в $Pr_2(Pr_2)$.*

Решение. Возмём в качестве

$$\varphi : A \times B \times C \to A \times (B \times C)$$

тождественное отображение $\varphi(x) = x$ (слева и справа x из разных множеств).

Задача 2.25. *Найти число всевозможных антисимметричных однородных отношений на множестве из n элементов.*

Решение. $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Упорядоченных пар симметричных относительно главной диагонали элементов элементов — $\dfrac{n(n-1)}{2}$. Для каждой такой пары возможны 3 ситуации: $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$.

Задача 2.26. *Для $\rho \in \mathcal{R}(A)$ и ρ — рефлексивно и транзитивно, то $\rho = \rho^n$, $n = 1, 2, \ldots$.*
Пусть $\rho = \rho^2$ (ρ — «сильно транзитивно»). Будет ли ρ рефлексивным?

Решение. Нет. Для отношения $\rho \in \mathcal{R}(\{a, b\})$, задаваемого матрицей

$$M(\rho) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет место $\rho = \rho^2$ и $\Delta \notin \rho$.

2.6 Соответствия

Основные свойства соответствий. Для непустых соответствий ρ, α, $\beta \subseteq A \times B$ и $\sigma \subseteq B \times C$ и подмножеств X, X_1, $X_2 \subseteq A$, $Y \subseteq B$ справедливы соотношения:

$$\rho(A) = \operatorname{Im}\rho, \quad \rho^\sharp(B) = \operatorname{Dom}\rho;$$
$$X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow \rho(X) \subseteq \rho(Y); \quad \alpha \subseteq \beta \Rightarrow \alpha(X) \subseteq \beta(X);$$
$$\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Dom}\alpha \subseteq \operatorname{Dom}\beta \\ \operatorname{Im}\alpha \subseteq \operatorname{Im}\beta \end{cases};$$
$$\rho \subseteq \rho\rho^\sharp\rho.$$

Покажем, например, справедливость последнего соотношения: для произвольных $a \in A$ и $b \in B$ имеем

$$a\rho b = (a\rho b) \,\&\, (b\rho^\sharp a) \,\&\, (a\rho b) \Rightarrow a(\rho\rho^\sharp\rho)b.$$

$$\rho(X_1 \cup X_2) = \rho(X_1) \cup \rho(X_2), \quad \rho(X_1 \cap X_2) \subseteq \rho(X) \cap \rho(Y);$$
$$(\alpha \cup \beta)(X) = \alpha(X) \cup \beta(X), \quad (\alpha \cap \beta)(X) \subseteq \alpha(X) \cap \beta(X);$$
$$X \subseteq \operatorname{Dom}\rho \Leftrightarrow X \subseteq (\rho\rho^\sharp)(X),$$
$$Y \subseteq \operatorname{Im}\rho \Leftrightarrow Y \subseteq (\rho^\sharp\rho)(Y);$$

$$\operatorname{Dom}(\rho\sigma) = \rho^{\sharp}(\operatorname{Dom}\sigma)\,, \quad \operatorname{Im}(\rho\sigma) = \sigma(\operatorname{Im}\rho)\,.$$

Докажем последние два свойства: очевидно,

$$\operatorname{Dom}\sigma = \sigma^{\sharp}(C) \quad \text{и} \quad \operatorname{Im}\rho = \rho(A).$$

и далее:

$$\operatorname{Dom}(\rho\sigma) = (\rho\sigma)^{\sharp}(C) = (\sigma^{\sharp}\rho^{\sharp})(C) =$$
$$= \rho^{\sharp}(\sigma^{\sharp}(C)) = \rho^{\sharp}(\operatorname{Dom}\sigma) \subseteq \operatorname{Dom}\rho;$$

$$\operatorname{Im}(\rho\sigma) = (\rho\sigma)(A) = \sigma(\rho(A)) = \sigma(\operatorname{Im}\rho) \subseteq \operatorname{Im}\sigma.$$

Соответствие $\rho \subseteq A \times B$ называют *вполне эффективным*, если $\operatorname{Dom}(\rho) = A$ и $\operatorname{Im}(\rho) = B$.

Формула для числа $f(m,n)$ вполне эффективных соответствий между A и B в конечном случае $|A| = m \geqslant 2$, $|B| = n \geqslant 0$:

$$f(m,n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \left(2^{i} - 1\right)^{m}.$$

Типы соответствий

Определение 2.17. Соответствие ρ между множествами A и B называется —

- *многозначным отображением* или *всюду определённым соответствием*, если $\triangle_A \subseteq \rho\rho^{\sharp}$ (что эквивалентно $\operatorname{Dom}\rho = A$);

- *частичным отображением* A *в* B, если $\rho^{\sharp}\rho \subseteq \triangle_B$ (эквивалентно $a\rho b_1 \,\&\, a\rho b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$).

- *функциональным* или *отображением* A *в* B, если $\triangle_A \subseteq \rho\rho^\sharp$ & $\rho^\sharp\rho \subseteq \triangle_B$ (что эквивалентно $\forall\, a \in A\ \exists!\, b \in B : a\rho b$);

  Отображение φ из A в B называют *функцией из* A *в* B или *операцией на* A;

- *дифункциональным* или *квазиоднозначным* отображением, если $\rho\rho^\sharp\rho \subseteq \rho$ (или, по доказанному выше, $\rho\rho^\sharp\rho = \rho$).

В конечном случае $(0,1)$-матрица будет матрицей дифункционального отношения iff в прямоугольнике из двух строк и двух столбцов при том, что в трёх углах стоят 1, то и в четвёртом углу стоит 1.

Теорема 2.13 (Ка́льмар-Якубович). *Произвольное отношение толерантности $\simeq$ на множестве A может быть задано с помощью подходящего многозначного отображения φ из A на совокупность всевозможных классов толерантности как*

$$x \simeq y \;\Leftrightarrow\; \varphi(x) \cap \varphi(y) \neq \varnothing\,.$$

2.7 Основные свойства отображений

Обозначения для отображений:

$$\varphi : A \to B, \quad A \xrightarrow{\varphi} B, \quad x\varphi = b.$$

Множество всех отображений $A \to B$ будем обозначать $Fun\,(A, B)$ или B^A, при $A = B$ — $Fun\,(A)$.

Пусть $\mathfrak{B} = \langle A, \sqcup, \sqcap, {}', o, \iota \rangle$ — булева алгебра. Множество A^{A^n} всех функций из A^n в A образует булеву алгебру $\langle A^{A^n}, +, \cdot, {}^-, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$, где операции и выделенные элементы заданы следующим образом:

$$(f+g)(a) = f(a) \sqcup g(a), \ (f \cdot g)(a) = f(a) \sqcap g(a),$$
$$\overline{f}(a) = f'(a), \quad \mathbf{0} = \mathbf{0}(a) \equiv o, \quad \mathbf{1} = \mathbf{1}(a) \equiv \iota$$
$$(\text{везде } a = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n).$$

Утверждение 2.7. *Объединение [пересечение] двух отображений $\varphi\colon A \to B$ и $\psi : A \to B$ является отображением, если и только если $\varphi = \psi$.*

Доказательство. Поскольку φ и ψ — отображения из A в B, для каждого $a \in A$ φ и ψ содержат лишь по одной паре (a, b_1) и (a, b_2) соответственно, где $b_1, b_2 \in B$.

Если предположить, что $b_1 \neq b_2$, то $\varphi \cup \psi$ содержит две, а $\varphi \cap \psi$ — не содержит ни одной пары с первым элементом a. □

Отрицание отображения, очевидно, отображением не является. Т.о. применение к отображениям обычных теоретико-множественные операций интереса не представляет.

Теорема 2.14. *Если множества A, B и C непусты, φ — отображение из A в B, а ψ — отображение из B в C, то $\varphi\psi$ — отображение из A в C.*

Доказательство.

$$\begin{cases} \triangle_A \subseteq \varphi\varphi^\sharp, \ \varphi^\sharp\varphi \subseteq \triangle_B \\ \triangle_B \subseteq \psi\psi^\sharp, \ \psi^\sharp\psi \subseteq \triangle_C \end{cases} \Rightarrow \ \triangle_A \subseteq \varphi\varphi^\sharp =$$

$$= \varphi \vartriangle_B \varphi^\sharp \subseteq \varphi(\psi\psi^\sharp)\varphi^\sharp = (\varphi\psi)(\psi^\sharp\varphi^\sharp) = (\varphi\psi)(\varphi\psi)^\sharp,$$

Включение $(\varphi\psi)^\sharp(\varphi\psi) \subseteq\vartriangle_C$ показывается аналогично. □

Произведение функций как отображений принято записывать как их композицию $*$:

$$(\varphi * \psi)(x) = (\varphi \diamond \psi)(x) = \psi(\varphi(x)),$$

или в альтернативной нотации

$$(x\varphi)\psi = x(\varphi\psi) = x\varphi\psi.$$

Виды отображений. Единичное отношение $\vartriangle_A$, рассматриваемое как отображение A на себя, называют *тождественным*. Для тождественного отображения будем употреблять обозначение id_A.

Определение 2.18. Отображение $\varphi\colon A \to B$ называется

- *вложением* или *инъективным отображением* A *в* B, если $\mathrm{id}_A = \varphi\varphi^\sharp$, символически $A \overset{\varphi}{\hookrightarrow} B$; при этом различные элементы A отображаются в различные элементы B.

  Если $A \subseteq B$, то вложение $A \overset{\varphi}{\hookrightarrow} B$ такое, что $\varphi(x) = x$, называется *естественным вложением* множества A в множество B.

  С инъекцией связан *принцип Дирихле*: *не существует инъекции множества с бо́льшим числом элементов во множество с меньшим числом элементов.*

- *наложением* или *сюръективным отображением A в B*, *сюръекцией*, если $\varphi^\sharp\varphi = \mathrm{id}_B$, т.е. каждый элемент множества B имеет свой прообраз.

  Отображения проектирования — сюръективные отображения $A_1 \times \ldots \times A_n \stackrel{\pi_i}{\to} A_i$, определяемые как $(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_k) \stackrel{\pi_i}{\mapsto} a_i$, $i = \overline{1, n}$.

- *биекцией* или *взаимно-однозначным отображением*, если $\mathrm{id}_A = \varphi\varphi^\sharp \,\&\, \varphi^\sharp\varphi = \mathrm{id}_B$, т.е. оно является одновременно и вложением, и наложением.

  Множество всех биекций из A в B обозначаем $Bij\,(A, B)$, а в случае $A = B$ — $Bij\,(A)$.

  $\varphi \in Bij\,(A)$ — *перестановка* A.

  $Sym_A = \langle\, Bij\,(A), *, {}^{-1}, \mathrm{id}_A \,\rangle$ — *симметрическая группа* множества A.

Псевдообратное к отображению $\varphi\colon A \to B$ соответствие $\varphi^\sharp$, может и не быть отображением из B в A. Единственный тип отображений, имеющих обратное — биекции.

Биекция и равномощность. Напомним, что множества называют *равномощными*, если между ними существует биективное отображение.

Покажем, например, что замкнутый интервал $[\,0,\,1\,]$ равномощен открытому $(0,\,1)$: положим

$$S = [\,0,\,1\,] \setminus \{\,0,\,1,\,1/2,\,1/3,\,1/4,\,\ldots\}$$

и тогда $[\,0,\,1\,] = \{\,0,\,1,\,1/2,\,1/3,\,1/4,\,\ldots\} \cup S,$

$$(\,0,\,1\,) = \{\,1/2,\,1/3,\,1/4,\,\ldots\} \cup S.$$

Отображение $f:\,[\,0,\,1\,]\to(\,0,\,1\,)$, определённое как

$$f(x)=\begin{cases}1/2, & \text{если } x=0\,,\\ 1/(n+2), & \text{если } x=1/n,\ n=1,\,2,\,\dots\,,\\ x, & \text{если } x\in S\,,\end{cases}$$

будет *биекцией*.

Теорема 2.15 (*Кантор-Шрёдер-Бернштейн*). *Если каждое из множеств A и B равномощно подмножеству другого, то A равномощно B.*

Доказательство. Покажем, что если существуют биекции θ_1 между A и подмножеством B и θ_2 между B и подмножеством A, то существует биекция между A и B.

Обозначим $A_0=A$ и $A_1=\mathrm{Im}(\theta_2)$.

Ясно, можно считать, что

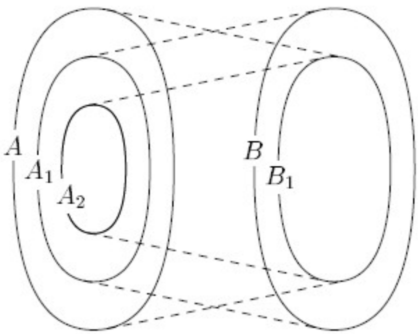
- $A_0\supset A_1$ и $\mathrm{Im}(\theta_1)\subset B$,
- A и B — бесконечные множества,

— иначе теорема тривиально справедлива.

Композиция указанных отображений даёт взаимнооднозначное отображение $\theta=\theta_1*\theta_2$ множества A_0 на своё подмножество A_2 и $A_1\supset A_2$.

Обозначим $\theta(A_i)=A_{i+2}$, $i=0,\,1,\,2\,\dots$. Получим цепочку строго содержащихся друг в друге подмножеств A: $A=A_0\supset A_1\supset A_2\supset\dots$.

Далее обозначим $C_i=A_i\smallsetminus A_{i+1}$, $i=0,1,2\dots$ и $C=\bigcap\limits_{i\geqslant 0}A_i$.



По построению между множествами C_0, C_2, C_4, … существует взаимно-однозначное соответствие θ:

$$C_{2i+2} = \theta(A_{2i}) \setminus \theta(A_{2i+1}) = \theta(C_{2i}).$$

Построим взаимно-однозначное отображение $\varphi : A_0 \overset{1:1}{\longleftrightarrow} A_1$ —

$$\varphi(x) = \begin{cases} \theta(x), & \text{если } x \in C_{2i},\ i = 0,\ 1,\ \dots \\ x, & \text{иначе} \end{cases}$$

Т.о. имеем взаимно-однозначные соответствия

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
A_0 & = & C_0 & + & C_1 & + & C_2 & + & C_3 & + & C_4 & + & \cdots & + & C \\
 & & & & \updownarrow & & \varphi & & \updownarrow & & & & & & \updownarrow \\
A_1 & = & & & C_1 & + & C_2 & + & C_3 & + & C_4 & + & \cdots & + & C
\end{array}$$

$A \xrightarrow{\varphi} A_1 \xrightarrow{\theta_2^{-1}} B$ и $\varphi * \theta_2^{-1}$ — искомая биекция. $\square$

Теорема 2.16 (свойство преобразования конечного множества). *Для преобразования конечного множества условия сюръективности, инъективности и биективности равносильны.*

Доказательство. Для $\varphi \in Fun(A)$, $|A| = n$ граф $\Gamma = \overrightarrow{G}(\varphi)$ имеет n вершин и n дуг, причём из каждой вершины исходит ровно одна дуга:

- φ сюръективно $\Rightarrow$ в каждую вершину Γ входит дуга $\Rightarrow$ φ — инъективно;
- в каждую вершину в каждую вершину Γ входит ровно одна дуга $\Rightarrow$ с каждой вершиной Γ связаны ровно по одной входящей и исходящей дуги $\Rightarrow$ φ — биективно;
- биективность отображения по определению влечёт сюръективность. □

Если $\sim$ — эквивалентность на A, то существует функция $\pi : A \to A/{\sim}$, ставящая в соответствие каждому элементу $a \in A$ его класс эквивалентности, т.е. $\pi(a) = [a]_\sim$.

Такое отображение называется *естественным (каноническим, натуральным)*; символически — $nat(A, \sim)$ или $nat(\sim)$.

Пример 2.20 (продолжение *Примера* 2.5). Если A — множество *зёрен, насыпанных в мешки*, и для зёрен a и b положить $a \sim b$, если они *лежат в одном мешке*, то классами эквивалентности являются множества зёрен, *лежащих в одном мешке*, а фактормножеством $A/\sim$ — *множество мешков*.

Тогда $\pi(a)$ — мешок, в котором лежит зерно a.

Пусть дано отображение $\varphi\colon A \to B$. Его *ядром* называется отношение $\operatorname{Ker}\varphi \in \mathcal{R}(A)$, заданное как

$$a_1(\operatorname{Ker}\varphi)a_2 \;\Leftrightarrow\; \varphi(a_1) = \varphi(a_2).$$

Ядро отображения есть частный случай понятия ядра соответствия и является *ядерной эквивалентностью*:

$$\operatorname{Ker}\varphi = \varphi\varphi^{\sharp}.$$

С ядерной эквивалентностью отображения φ из A связано фактормножество $A/\operatorname{Ker}\varphi$ и натуральное отображение $nat(A, \operatorname{Ker}\varphi)$, для которого $nat(A, \operatorname{Ker}\varphi)(x) = [x]_{\operatorname{Ker}\varphi}$.

Отображения $\varphi\colon A \to B$ и $nat(A, \operatorname{Ker}\varphi)$ имеют общую ядерную эквивалентность, но отображают A в разные множества: соответственно в B и в $A/\operatorname{Ker}\varphi$.

Коммутативные диаграммы. Если A, B, C, D — некоторые множества и

$$\alpha : A \to B, \quad \beta : B \to C, \quad \gamma : A \to C,$$
$$\delta : B \to D, \quad \varepsilon : C \to D,$$

то данные отображения наглядно задают в виде диаграмм:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & B \arrow[dl, "\beta"] \\ & C & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"'] & B \arrow[d, "\delta"] \\ C \arrow[r, "\varepsilon"] & D \end{tikzcd}$$

Говорят, что эти диаграммы коммутативны, если $\gamma = \alpha\beta$ и $\alpha\delta = \gamma\varepsilon$ соответственно. Аналогично определяется коммутативность и для более сложных диаграмм.

Биективные отображения будем обозначать на диаграммах двунаправленными стрелками $\leftrightarrow$.

Теорема 2.17 (о разложении отображений). *Если A, B — непустые и φ — отображение из A в B, то*

$$\varphi = \pi * \varphi' * \mu, \qquad (*)$$

где $\pi = nat(\operatorname{Ker}\varphi)$, φ' — биекция между $A/\operatorname{Ker}\varphi$, а $\operatorname{Im}\varphi$ и μ — вложение $\operatorname{Im}\varphi$ в B.

Доказательство. Утверждение теоремы будет справедливо в случае коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & B \\ A/\operatorname{Ker}\varphi \arrow[r, "\varphi'"] & \operatorname{Im}\varphi \arrow[u, "\mu"'] \end{tikzcd}$$

Ясно, что $\operatorname{Im}\varphi$ есть подмножество B.
В качестве μ возьмём естественное вложение.

По определению $\operatorname{Ker}\varphi$ отображение $\varphi' : A/\operatorname{Ker}\varphi \to \operatorname{Im}\varphi$ биективно, следовательно разложение $(*)$ будет справедливым, если в качестве π взять $nat(\operatorname{Ker}\varphi)$. □

Теорема 2.18 (основное свойство отображений). *Пусть даны непустые множества A, B и отображение $\varphi\colon A \to B$. Тогда имеется единственное отображение $\psi : A/\operatorname{Ker}\varphi \to B$ являющееся вложением, и такое, что нижеследующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "nat\,(\operatorname{Ker}\varphi)"'] & & B \\ & A/\operatorname{Ker}\varphi \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Доказательство. Положим $\psi = \varphi' * \mu$ в $(*)$.
Тогда $\psi([a]_{\mathrm{Ker}\,\varphi}) = \varphi(a)$ — однозначно определённое вложение $\mathrm{Ker}\,\varphi$ в B, т.е. $\varphi = \pi * \psi$. □

Основное свойство отображений: любое отображение $\varphi : A \to B$ (A и B непусты) может быть представлено в виде композиции наложения π и вложение ψ:

$$\varphi = \pi * \psi,$$

где $\pi = nat\,(\mathrm{Ker}\,\varphi)$ и $\mathrm{Ker}\,\varphi \overset{\psi}{\hookrightarrow} B$.

Очевидно ψ — *биекция* при *сюръективности* φ.

Теорема 2.19 (о дробных эквивалентностях). *Пусть дано множество A и эквивалентности α, β на нём такие, что $\beta \subseteq \alpha$. Тогда существуют отображение $\varphi\colon A/\beta \to A/\alpha$ и биекция $\psi : (A/\beta)/(\alpha/\beta) \to A/\alpha$ такие, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "nat\,\beta"'] \arrow[dr, "nat\,\alpha"] & \\
A/\beta \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "nat\,(\alpha/\beta)"'] & & A/\alpha \\
& (A/\beta)/(\alpha/\beta) \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство.

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "nat\,\beta"'] \arrow[dr, "nat\,\alpha"] & \\
A/\beta \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "nat\,(\alpha/\beta)"'] & & A/\alpha \\
 & (A/\beta)/(\alpha/\beta) \arrow[ur, leftrightarrow, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Зададим функцию $\varphi([a]_\beta) = [a]_\alpha$ (задание корректно, т.к. каждому классу $[a]_\beta$ соответствует единственный класс $[a]_\alpha$) и применим теорему об основных свойствах отображений к нижней части диаграммы.
Поскольку φ есть накрытие, то

$$\psi([[a]_\beta]_{\alpha/\beta}) = \varphi([a]_\beta) = [a]_\alpha \text{ — биекция.}$$

□

2.8 Задачи и упражнения

Устные вопросы

Задача 2.27. *Какое соответствие ρ между A и B называется*

- *многозначным отображением или всюду определённым соответствием?*

$$\triangle_A \subseteq \rho\rho^\sharp \text{ (что эквивалентно } Dom\,\rho = A\text{);}$$

- *частичным отображением (частичной функцией) A в B?*

$\rho^\sharp\rho \subseteq \triangle_B$ (*что эквивалентно* $a\rho b_1 \,\&\, a\rho b_2 \;\Rightarrow\; b_1 = b_2$ *для* $a \in A$, *при этом* $Dom\,\rho \subseteq A$);

- *функциональным или отображением* A *в* B ?

  $\triangle_A \subseteq \rho\rho^\sharp \,\&\, \rho^\sharp\rho \subseteq \triangle_B$ (*что эквивалентно существованию для всех* $a \in A$ *единственного* $b \in B$ *такого, что* $a\rho b$).

Задача 2.28. *Пусть* $|A| = m$, $|B| = n$. *Найти число* $M_m(m, n)$ *всюду определённых соответствий (многозначных отображений) между множествами* A *и* B.

Решение. Каждый элемент $a \in A$ входит в n пар (a, b), $b \in B$.

Хотя бы одну такую пару во всюду определённое соответствие включить нужно, а пары $(a, \varnothing)$ быть не может. Т.о. может быть $2^n - 1$ пар (a, b).

Но каждый элемент $a \in A$ может быть выбран m способами, т.е. $M_m(m, n) = (2^n - 1)^m$.

Задача 2.29. *Пусть* $|A| = m$, $|B| = n$. *Найти число* $M_p(m, n)$ *частичных отображений между множествами* A *и* B.

Решение. Каждый элемент $a \in A$ входит в n пар (a, b), $b \in B$.

В частичное отображение можно включить неб более одной такой пары. Т.о. может быть $n + 1$ пар (a, b).

Но каждый элемент $a \in A$ может быть выбран m способами, т.е. $M_p(m, n) = (n + 1)^m$.

Задача 2.30. *Приведете примеры отношения на некотором множестве —*

1. *рефлексивного и симметричного, но не транзитивного;*
2. *рефлексивного и транзитивного, но не симметричного;*
3. *симметричного и транзитивного, но не рефлексивного.*

Решение.

1. Для точек действительной прямой отношение *находиться не расстоянии не большим, чем данное* («близость», отношение толерантности);
2. Для точек действительной прямой отношение $\leqslant$.
3. С матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Задача 2.31. *Как выглядят матрицы $M(\rho)$ отображения $\rho : A \to B$ (A и B конечны), если ρ*

- *вложение?*
- *наложение?*
- *биекция?*

Решение. ρ —

вложение — в каждой строке находится ровно одна 1.

наложение — в каждом столбце находится не менее одного 1.

биекция — Это квадратная матрица, в каждой строке и каждом столбце которой находится ровно одна 1 ($M(\rho)$ — *перестановочная матрица*).

<u>Задача</u> 2.32. *Пусть* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,
$f(x) = y \overset{\text{def}}{=} \min\{\, z \mid x < z \,\}$.

Построить f' *сужение* f *на* $2\mathbb{N}$.

Решение. На $\mathbb{N}$ имеем $f(x) = x + 1$.
На $2\mathbb{N}$ по определению $f'(x) = x + 2$.
Однако $f'(2n) \neq f(2n)$, поэтому сужения $f(x)$ на $2\mathbb{N}$ не существует.

Означает ли это что не существует сужения $f(x)$ ни на какое подмножество $\mathbb{N}$?
- Нет! Существует сужение на $n, n+1, \ldots$.

<u>Задача</u> 2.33 (с ответами). *Какое отображение* $\varphi : A \to B$ *называется*

- *постоянным или константой?*
  $\varphi\varphi^{\sharp} = \nabla_A$.
- *инъективным отображением* A *в* B *?*
  $id_A = \varphi\varphi^{\sharp}$.
- *сюръективным отображением* A *в* B *?*
  $\varphi^{\sharp}\varphi = id_B$.
- *биекцией, биективным, взаимнооднозначным отображением?*
  $id_A = \varphi\varphi^{\sharp} \,\&\, \varphi^{\sharp}\varphi = id_B$,
  т.е. оно является одновременно и вложением, и наложением.

Задачи

Задача 2.34. *Для отношений*

$$\alpha = \{ (x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2 \} \quad \text{и}$$
$$\beta = \{ (x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0, \}$$

найти $\alpha^\sharp$, $\alpha\beta$, $\beta\alpha$ *и* $\alpha\alpha$.

Решение.

- $x\alpha^\sharp y = \{ (x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 \}$.
- $x(\alpha\beta)y = \underset{\mathbb{R}}{\exists} z \left(x = z^2 \,\&\, yz > 0\right) \Leftrightarrow x > 0 \,\&\, y > 0.$
- $x(\beta\alpha)y = \underset{\mathbb{R}}{\exists} z \left(xz > 0 \,\&\, z = y^2\right) \Leftrightarrow x > 0.$
- $x\alpha^2 y = \{ (x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^4 \}$.

Задача 2.35. *Пусть* $M = \{ 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5,\, 6 \}$ *определено отношение* ρ *— «отличаться на 2». Построить матрицы отношения* ρ *и его рефлексивного замыкания* ρ^*.

Решение. $a\rho b = a = b + 2 \vee a + 2 = b$. Матрицы ρ и ρ^* показаны ниже.

ρ	1	2	3	4	5	6
1	0	0	1	0	0	0
2	0	0	0	1	0	0
3	1	0	0	0	1	0
4	0	1	0	0	0	1
5	0	0	1	0	0	0
6	0	0	0	1	0	0

ρ^*	1	2	3	4	5	6
1	1	0	1	0	1	0
2	0	1	0	1	0	0
3	1	0	1	0	1	0
4	0	1	0	1	0	1
5	1	0	1	0	1	0
6	0	1	0	1	0	1

Задача 2.36. *Пусть* $M = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, *а отношение* ρ *на* M *задано следующей матрицей:*

ρ	a	b	c	d	e	f	g
a	0	1	0	0	0	0	0
b	0	0	1	0	0	0	0
c	0	0	0	1	0	0	0
d	0	0	0	0	1	0	0
e	0	0	0	0	0	0	0
f	0	0	0	0	0	0	1
g	0	0	0	0	1	0	0

Определить транзитивное замыкание ρ^t.

Решение. По определению $\rho^t = \rho^+ = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \rho^n$.

Имеем для ρ^2 и ρ^3

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Первая матрица — для ρ^3.

Далее $M(\rho^n) = O$ при $n \geqslant 4$. Вторая матрица — для ρ^t.

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0&1&1&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&1&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix}$$

Задача 2.37. *На множестве $\mathbb{N}_0^2$ положим по определению, что*

$$\langle\, a,\, b\,\rangle \sim \langle\, c,\, d\,\rangle \;\Leftrightarrow\; a+d \,=\, b+c.$$

1. *Покажите, что $\sim$ является отношением эквивалентности.*
2. *Опишите классы эквивалентности, порождаемые $\sim$.*

Решение. (1)
R: $a+b=b+a \;\Rightarrow\; \langle\, a,\, b\,\rangle \sim \langle\, a,\, b\,\rangle$;

S: $a+d \,=\, b+c \;\Rightarrow\; c+b \,=\, d+a$. Это означает, что $\langle\, a,\, b\,\rangle \sim \langle\, c,\, d\,\rangle \;\Rightarrow\; \langle\, c,\, d\,\rangle \sim \langle\, a,\, b\,\rangle$.

T:

$$\left\{\begin{array}{l} a+d=b+c \\ c+f=d+e \end{array}\right. \Bigg|\, + \quad \Rightarrow\; a+f=b+e\,.$$

Это означает, что

$$\left\{\begin{array}{l} \langle\, a,\, b\,\rangle \sim \langle\, c,\, d\,\rangle \\ \langle\, c,\, d\,\rangle \sim \langle\, e,\, f\,\rangle \end{array}\right. \;\Rightarrow\; \langle\, a,\, b\,\rangle \sim \langle\, e,\, f\,\rangle\,.$$

(2) Имеем $\langle\, a,\, b\,\rangle \sim \langle\, c,\, d\,\rangle \;\Rightarrow\; d = c + b - a.$
Далее $\langle\, a,\, b\,\rangle = \langle\, a,\, a + b - a\,\rangle$.
Это означает, что эквивалентны элементы только следующего вида $\langle\, x,\, x + z\,\rangle \sim \langle\, y,\, y + z\,\rangle$.

Задача 2.38. *Показать, что композиция $\varphi \diamond \psi$ инъекций (сюръекций) $\varphi \in A \times B$ и $\psi \in B \times C$ также является инъекцией (сюръекцией).*

Решение. *Доказательство для инъекций.* Поскольку φ и ψ — инъекции, то для них справедливо $id_A = \varphi\varphi^\sharp$ и $id_B = \psi\psi^\sharp$.

Но тогда

$$(\varphi\psi)(\varphi\psi)^\sharp = (\varphi\psi)(\psi^\sharp\varphi^\sharp) = \varphi(\psi\psi^\sharp)\varphi^\sharp = \\ = \varphi id_B\varphi^\sharp = \varphi\varphi^\sharp = id_A\,,$$

т.е. $\varphi\psi$ — инъекция (из A в C).
Доказательство для сюръекций. Поскольку φ и ψ — сюръекции, то для них справедливо $\varphi^\sharp\varphi = id_B$ и $\psi^\sharp\psi = id_C$.

Но тогда

$$(\varphi\psi)^\sharp(\varphi\psi) = (\psi^\sharp\varphi^\sharp)(\varphi\psi) = \psi^\sharp(\varphi^\sharp\varphi)\psi = \\ = \psi^\sharp id_B\psi = \psi^\sharp\psi = id_C\,,$$

т.е. $\varphi\psi$ — сюръекция (из A в C).

Задача 2.39. *Пусть даны отображения $f : A \to B$ и $g : C \to D$. Показать, что*

1. *если f сюръективно и g — функция, то $Im\,(g^\sharp \diamond f) = C$;*

2. *если* f *и* g *— биекции, то* $(g^{-1} \diamond f)^{-1} = f^{-1} \diamond g$;
3. *если* $Im\, g \subseteq Im\, f$, *то* $(f \diamond f^{-1} \diamond g)(C) = Im\, g$.

Решение.

1. если f сюръективно и g — функция, то $Im\,(g^{\sharp} \diamond f) = C$;
2. если f и g — биекции, то $(g^{-1} \diamond f)^{-1} = f^{-1} \diamond g$;
3. если $Im\, g \subseteq Im\, f$, то $(f \diamond f^{-1} \diamond g)(C) = Im\, g$.

Задача 2.40. *Пусть* $A = \{1, \ldots, n\}$. *Доказать, что если отображение* $f : A \to A$ *является наложением, то* f *— биекция (перестановка) на* A.

Решение. Если f — наложение, то каждый элемент $a \in A$ имеет множество прообразов $f^{-1}(a) \subseteq A$. Лишь при $|f^{-1}(a)| = 1 \in A$ отображение f не будет многозначным.

Задача 2.41. *Докажите следующие свойства функций:*

1. $f(x) : X \to Y$ *— инъекция если и только если* f *— однозначное отображение:*
$$\underset{X}{\forall} x_1 \ \underset{X}{\forall} x_2 : (f(x_1) = f(x_2)) \Leftrightarrow (x_1 = x_2); \qquad (*)$$
2. $f(x) : X \to Y$ *— сюръекция если и только если* f *— отображение «на» (каждый элемент* Y *имеет прообраз)*
$$\underset{Y}{\forall} y \ \underset{X}{\exists} x : f(x) = y. \qquad (**)$$

Решение. (1) Пусть справедливо $(*)$. Тогда определено частичное отображение $f^\sharp$ из Y в X, т.е. $ff^\sharp \subseteq id_X$. Но отображение f всюду определено, и поэтому $ff^\sharp = id_X$.

Пусть теперь $(*)$ несправедливо.
Тогда $f^\sharp$ — всюду определённое (многозначное) соответствие, и для некоторого $x \in X$ множество $ff^\sharp(x)$ более, чем одноэлементно, т.е. $ff^\sharp \neq id_X$.

(2) Пусть справедливо $(**)$.
Тогда, поскольку f — функция, прообразы $f^\sharp(y)$ элементов $y \in Y$ не пересекаются. Это означает, что их $f(f^\sharp(y))$ совпадают с y и $f^\sharp f = id_Y$.

Пусть теперь $(**)$ несправедливо. Тогда существует $y \in Y$ не имеющий прообраза, и, следовательно, $f^\sharp f \neq id_Y$.

Задача 2.42. *Является ли всюду ложное отношение эквивалентностью?*

Решение. Нет, т.к. оно не рефлексивно.

Задача 2.43. *Для отношения ρ на $\{a, b, c\}$ заданного матрицей*

ρ	a	b	c
a	0	1	0
b	1	0	0
c	0	1	0

определить отношения $\overline{\rho}$, $\rho^\sharp$, ρ^2, ρ^+ и ρ^*.

Решение.

$\overline{\rho}$	a	b	c
a	1	0	1
b	0	1	1
c	1	0	1

$\rho^\sharp$	a	b	c
a	0	1	0
b	1	0	1
c	0	0	0

ρ^2	a	b	c
a	1	0	0
b	0	1	0
c	1	0	0

ρ^+	a	b	c
a	1	1	0
b	1	1	0
c	1	1	0

ρ^*	a	b	c
a	1	1	0
b	1	1	0
c	1	1	1

Задача 2.44. *1. Пусть ρ — однородное отношение на $\mathbb{N}$, такое, что $\rho = \{ (x, y) \mid y = x + 1 \}$. Найти ρ^t и ρ^*.*

2. Рассмотрим однородное отношение $<$ — на $\mathbb{Q}$. Найти $<^t$ и $<^*$.

3. Пусть α — однородное отношение на $\mathbb{Q}$, такое, что $\alpha = \{ (x, y) \mid x \cdot y = 1 \}$. Найти α^t и α^*.

Решение.

1. $\rho^t =<$; $\rho^* =\leqslant$.
2. $<^t=<$; $<^*=\leqslant$.
3. $\alpha^t = \{ (x, x) \mid x \neq 0 \} \cup \alpha$; $\alpha^* = \alpha^t \cup \{(0, 0)\}$.

Задача 2.45. *Коммутативна ли операция умножения отображений? соответствий? Привести примеры.*

Решение. Рассмотрим два отображения φ и ψ конечного множества $A = \{1, 2, 3\}$ в себя:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\varphi \diamond \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{но} \quad \psi \diamond \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Этот пример показывает, что умножение отображений (а тем более соответствий) не коммутативно.

Задача 2.46. *Покажите формально, что если φ — отображение из A в B, то $\varphi\varphi^\sharp$ эквивалентность на A.*

Решение. Имеем $\varphi \in A \times B$, $\quad \left(\Delta_A \subseteq \varphi\varphi^\sharp\right) \& \left(\varphi^\sharp\varphi \subseteq \Delta_B\right)$

R: $\Delta_A \subseteq \varphi\varphi^\sharp$ по $(*)$.

S: $(\varphi\varphi^\sharp)^\sharp = (\varphi^\sharp)^\sharp\varphi^\sharp = \varphi\varphi^\sharp$.

T: $(\varphi\varphi^\sharp)^2 = \varphi\varphi^\sharp\varphi\varphi^\sharp = \varphi(\varphi^\sharp\varphi)\varphi^\sharp \overset{(*)}{\subseteq} \varphi\, \Delta_B\, \varphi^\sharp = \varphi\varphi^\sharp$.

$$\varphi\varphi^\sharp = Ker\,\varphi$$

Глава 3

Частично упорядоченные множества

3.1 Предпорядки и порядки

Определение 3.1. *Предпорядками* называют рефлексивные *(R)* и транзитивные *(T)* однородные отношения.

Пример 3.1. Предпорядками, например, являются следующие отношения:

1) отношение делимости $\mid$ на множестве $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$;
2) отношение выводимости $\vdash$ в логике: если из логической формулы A выводится формула B, то пишут $A \vdash B$;
3) отношение предпочтения (например, по цене или полезности товара) в экономике.

Определение 3.2. Рефлексивные *(R)*, антисимметричные *(AS)* и транзитивные *(T)* однородные отношения называют отношениями *частичного порядка.*

Пример 3.2. Все предпорядки из предыдущего примера не являются частичными порядками.

1. Для элементов $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ из $m \mid n$ и $n \mid m$ следует не $m = n$, а лишь $|m| = |n|$.

2. Возможно $A \vdash B$ и $B \vdash A$, но $A \neq B$ (формулы A и B не совпадают как строки символов): например, для $A = x \supset y$ и $B = (\neg x \vee y) \,\&\, (z \vee \neg z)$;
3. Ясно, что одинаковые и цену, и полезность могут иметь разные товары.

Пример 3.3. Частичными порядками являются:

- Отношение $\leqslant$ на множествах натуральных, целых, рациональных, действительных чисел.
- Отношение включения $\subseteq$ на совокупности $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots\}$ подмножеств некоторого множества — важнейший пример частичного порядка. Говорят, что совокупность $\mathcal{A}$ *упорядочена по включению*.
- Диагональное отношение Δ на произвольном множестве можно рассматривать не только как эквивалентность, но и как частичный порядок. Множество с таким порядком называют *тривиально упорядоченным*.

Порядок из предпорядка ρ можно построить, если отождествить такие элементы a и b, для которых одновременно и $a\rho b$ и $b\rho a$.

Теорема 3.1. *Если $\preceq$ — предпорядок на множестве P, то*

1) *однородное отношение ε на P, определяемое условием*

$$a \, \varepsilon \, b \;\Leftrightarrow\; a \preceq b \mathbin{\&} b \preceq a$$

является эквивалентностью;

2) *однородное отношение $\leq$ на фактормножестве P/ε, определяемое условием*

$$[\,a\,]_\varepsilon \;\leq\; [\,b\,]_\varepsilon \;\Leftrightarrow\; a \preceq b,$$

является частичным порядком.

Доказательство.

1. Согласно своему определению, отношение ε приобретает свойство симметричности *(S)* в дополнение к свойствам рефлексивности *(R)* и транзитивности *(T)*, наследуемых от $\preceq$.
2. Свойства рефлексивности *(R)* и транзитивности *(T)* $\leq$ *наследуются* от отношения $\preceq$.
   В силу свойства классов эквивалентности по ε, оно оказывается ещё и антисимметричным *(AS)*.

$\square$

Пример 3.4. 1. $[n]_\varepsilon = \{n, \, -n\}$ и частичный порядок $\leq$ есть отношение делимости $|$ на фактормножестве $\{\mathbb{Z} \setminus \{0\}\}/\varepsilon$.

2. Если на множестве всех логических формул $\mathcal{A}$ ввести отношение $\simeq$ *дедуктивной эквивалентности* по правилу

$$A \vdash B \mathbin{\&} B \vdash A \;\Leftrightarrow\; A \simeq B\,,$$

то $\mathcal{A}/\simeq$ — фактормножество классов дедуктивно эквивалентных формул, являющееся, более того, булевой алгеброй и называемой *алгеброй Линденбаума–Тарского* (символически L^*).

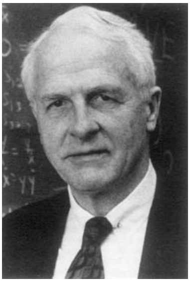
3. Ситуацию с отношением предпочтения в экономике оставляем для самостоятельного разбора.

Порядки: обозначения и термины

- Символы отношения частичного порядка: $\sqsubseteq$, $\leqslant$, $\preccurlyeq$ ... .
- Если $a \sqsubseteq b$, то говорят, что a *предшествует* b, b *следует за* a, *содержит* a.
- *Интервал*: $[\,a,\,b\,] = \{\,x \mid (a \sqsubseteq x) \,\&\, (x \sqsubseteq b)\,\}$.
- Если $[\,a,\,b\,] = \{\,a,\,b\,\}$, то говорят, что a *непосредственно предшествует* b и что b *непосредственно следует за* a или *покрывает*, *доминирует над* a (символически $a \lessdot b$).
- Элементы a и b *сравнимы*, если $(a \sqsubseteq b) \vee (b \sqsubseteq a)$, и *несравнимы* иначе (символически $a \sim b$ и $a \nsim b$ соответственно).
- Отношение *строгого порядка*: $x \sqsubset y \;\Leftrightarrow\; x \sqsubseteq y$ и $x \neq y$,
- *Двойственный порядок*: $x \sqsupseteq y \;\Leftrightarrow\; y \sqsubseteq x$ и аналогично для строгого порядка.

Определение 3.3. Пару $\mathfrak{P} = \langle\, P,\, \sqsubseteq \,\rangle$, где P — непустое множество, а $\sqsubseteq$ — частичный порядок на нём, называют *частично упорядоченным множеством* (сокращённо *ч.у. множеством*).

Понятие ч.у. множества введено Ф. Хаусдорфом в 1914 г., но развитие теории ч.у. множеств как самостоятельного раздела математики началось с работ Г. Биркгофа в 1930-х годах.



Гаррет Биркгоф
(Garrett Birkhoff, 1911–1996)
— американский математик.
Работал во многих областях
"чистой" и прикладной математики,
заложил основы универсальной алгебры.

Ч.у. множество представляет собой пример особого типа алгебраической системы — *модели*. АС является моделью, если в ней отсутствуют операции на носителе, но имеются отношения на нём.

Любое множество можно превратить в частично упорядоченное, задав на нём некоторый порядок. *Например*, на двухэлементном множестве $\{\, x,\, y \,\}$ можно построить 3 различных порядка: тривиальный, $x \sqsubseteq y$ и $y \sqsubseteq x$.

Пример 3.5. Ч.у. множествами являются:

- модели $\langle\, \mathbb{R}, \leqslant \,\rangle$, $\langle\, \mathbb{N}, \leqslant \,\rangle$, $\langle\, \mathbb{N}, \mid \,\rangle$, $\langle\, B^n, \preccurlyeq \,\rangle$ и $\langle\, \mathcal{P}(\cdot), \subseteq \,\rangle$;
- совокупность лучей на прямой с отношением включения;
- для $A \neq \varnothing$ модель $\langle\, \mathcal{E}(A), \subseteq \,\rangle$ есть ч.у. множество, состоящее из разбиений множества A (имея в виду взаимно-однозначную связь между разбиениями множества и отношениями эквивалентности на нём); при этом говорят, что A *упорядочено по измельчению*;

- множество конечных возрастающих последовательностей натуральных чисел, где
$$(a_1, \ldots, a_k) \sqsubseteq (b_1, \ldots, b_l)$$
означает, что $k \leqslant l$ и $a_i = b_i$ при $1 \leqslant i \leqslant k$.

Если $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ — ч.у. множество, $Q \subseteq P$ и $\sqsubseteq|_Q$ — сужение отношения $\sqsubseteq$ на Q, то и $\langle Q, \sqsubseteq|_Q \rangle$ — ч.у. множество, называемое *ч.у. подмножеством* P.

Если на множестве P заданы порядки $\sqsubseteq_1$ и $\sqsubseteq_2$ и $\sqsubseteq_1 \subseteq \sqsubseteq_2$ (из $x \sqsubseteq_1 y$ следует $x \sqsubseteq_2 y$ для всех $x, y \in P$), то говорят, что *порядок* $\sqsubseteq_1$ *содержится в порядке* $\sqsubseteq_2$. При построении порядка, содержащего данный, говорят о *продолжении* последнего. *Например*, тривиальный порядок на неодноэлементном множестве содержится в любом другом и может быть продолжен до него.

В зависимости от мощности P различают *конечные* и *бесконечные* ч.у. множества.

Бесконечное ч.у. множество, все *интервалы* которого конечны, называется *локально конечным.*

Например, ч.у. множества $\langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle$ и $\langle \mathbb{Q}, \leqslant \rangle$ бесконечны, но первое локально конечно, а второе — нет.

Утверждение 3.1. *Пусть $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ — локально конечное ч.у. множество, и $x, y \in P$. Тогда $x \sqsubseteq y$, если и только если в P существуют такие элементы $z_0, \ldots, z_n$ (для некоторого $n \in \mathbb{N}_0$), что $x = z_0$, $y = z_n$ и $z_i \lessdot z_{i+1}$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n-1$.*

Доказательство. проводится индукцией по числу элементов n. $\square$

Определение 3.4. Если любые два элемента неединичного ч.у. множества P сравнимы, то оно называется *линейно упорядоченным* или *цепью*.

Определение 3.5. Пусть $\langle P, \sqsubseteq_P \rangle$ и $\langle Q, \sqsubseteq_Q \rangle$ — линейно упорядоченные множества. Зададим на $P \times Q$ однородное отношение $\sqsubseteq$ следующим образом:

$$(p_1, q_1) \sqsubseteq (p_2, q_2) \iff (p_1 \sqsubset_P p_2) \vee \\ ((p_1 = p_2) \,\&\, (q_1 \sqsubseteq_Q q_2)).$$

Оно называется отношением *лексикографического порядка*.

Ч.у. множество с лексикографическим порядком линейно упорядоченно. Доказательство элементарно.

- Для строгого линейного порядка обозначение $<$.
- n-элементную цепь будем обозначать $\mathbf{n}$. *Длина цепи* $\mathbf{n}$ есть число $n-1$.
- Цепь $v_1 < \ldots < v_n$ будем записывать как $[v_1, \ldots, v_n]$. Обозначим $[n] = [1, \ldots, n]$.
- Цепь в ч.у. множестве называется *максимальной* или *насыщенной*, если её объединение с любым, не принадлежащим ей элементом, цепью не является.

  В ч.у. множестве $\langle \mathbb{N}, | \rangle$ цепью будет, например, совокупность *некоторых* степеней простого числа, а $\{ 2^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ — пример его максимальной цепи.

  Например, B^n содержит $n!$ максимальных цепей.

Для наглядного представления ч.у. множеств используют *диаграммы Хассе*.
На них изображают элементы ч.у. множеств, и если элемент a предшествует элементу b, то a рисуют ниже b и соединяют их отрезком, если это предшествование непосредственное.

Диаграммы Хассе — *не есть* представлениеч.у. множества в виде направленного графа.

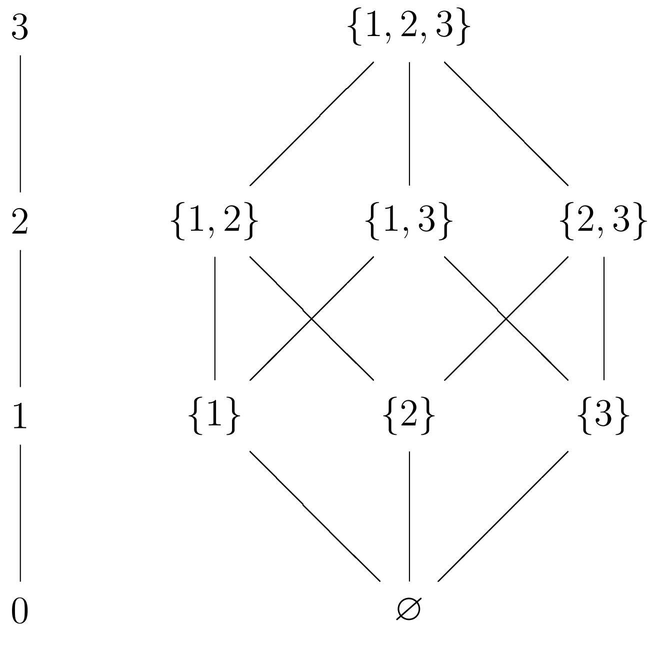


Рис. 3.1. Диаграммы Хассе цепи **4** и булевой алгебры B^3

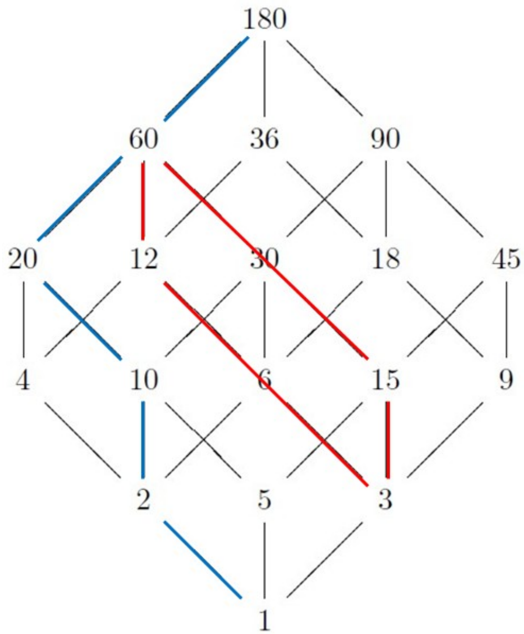


Рис. 3.2. Диаграмма $D(180)$ всех делителей числа $180 = 2^2 3^2 5$. Показаны: одна из максимальных цепей и интервал [3, 60].

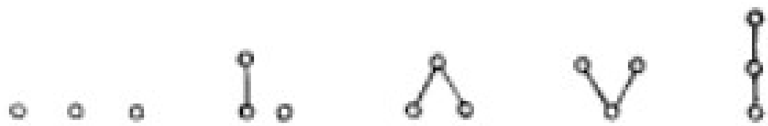


Рис. 3.3. Диаграммы 3-элементных ч.у. множеств

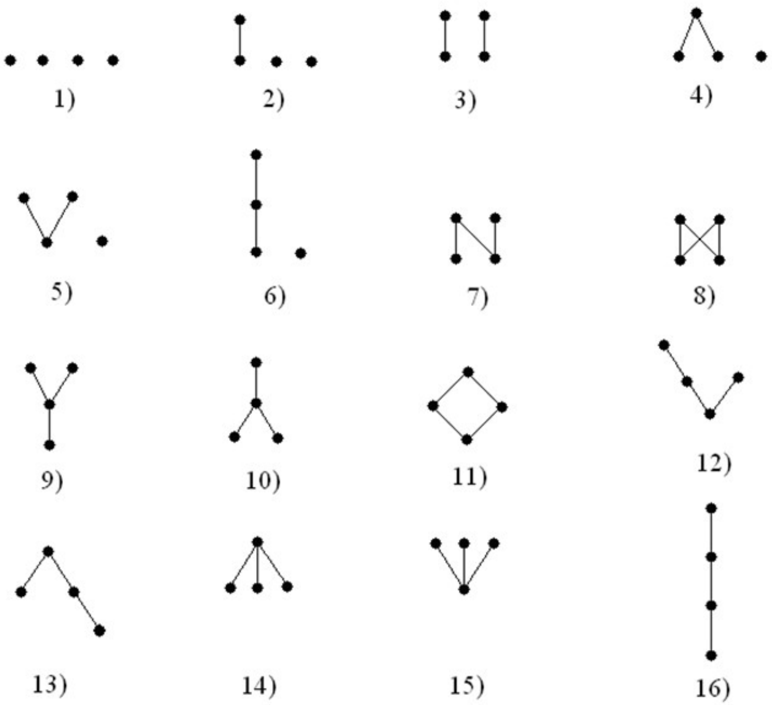


Рис. 3.4. Диаграммы всех 4-элементных ч.у. множеств

В следующей таблице обозначены:

- $h(n)$ — число неизоморфных диаграмм,
- $p(n)$ — число помеченных частичных порядков,
- $k(n)$ — число предпорядков соответственно

на n-элементном множестве.

n	1	2	3	4	5	6	7
$h(n)$	1	2	5	16	63	318	2 045
$p(n)$	1	3	19	219	4 231	130 023	6 129 859
$k(n)$	1	3	29	355	6 942	209 527	9 535 241

Точных эффективных (не содержащих суммирования и не подразумевающих перебора всех или почти всех элементов) формул для них $h(n)$, $p(n)$ и $k(n)$ неизвестно и вряд ли они существуют.

Величину $h(n)$ можно легко оценить снизу: на некотором n-элементном множестве зададим частичный порядок так, что соответствующая диаграмма Хассе есть двудольный граф, а поскольку таких порядков не менее, чем $2^{(n/2)^2}$, $h(n) \geqslant 2^{n^2/4}$. Доказано равенство $h(n) = 2^{n^2/4+3n/2+O(\log_2 n)}$ и полученная выше грубая оценка оказывается достаточно точной.

Множество всех ч.у. множеств структурно необозримо: неизвестно никакой удобной его характеризации. В нём выделяют лишь отдельные классы, которые, с одной стороны — в сумме далеко не исчерпывают всех ч.у. множеств, а с другой — сами содержат ч.у. множества с трудно определяемыми характеристиками.

3.2 Особые элементы и основные свойства ч.у. множеств

Определение 3.6. Элемент $u \in P$ ч.у. множества $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ называют:

- *максимальным*, если $u \sqsubseteq x \Rightarrow u = x$,
- *минимальным*, если $u \sqsupseteq x \Rightarrow u = x$,
- *наибольшим*, если $x \sqsubseteq u$,
- *наименьшим*, если $x \sqsupseteq u$

для любых $x \in P$.

Если ч.у. множество имеет наибольший и наименьший элемент, то оно называется *ограниченным*.

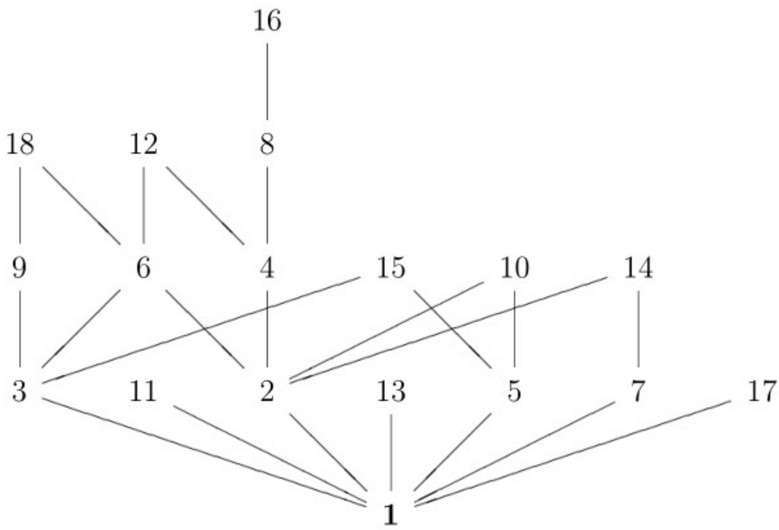
Пример 3.6. Особые элементы ч.у. множеств

1. Рассмотрим ч.у. множество $\langle\, N_f^1,\, \preccurlyeq \,\rangle$,
где N_f^1 — множество единичных наборов монотонной булевой функции $f(x_1,\, \ldots,\, x_5) \;=\; x_1 \vee x_2x_3 \vee x_3x_4x_5$.

   Для N_f^1

   - нижние единицы (10000), (01100) и (00111) функции f — *минимальные* элементы,
   - $\widetilde{1} = (11111)$ — *максимальным* и *наибольшим* элементом,
   - наименьший элемент отсутствует.

2. Диаграмма ч.у. множества $\langle\, \{\, 1,\, \ldots,\, 18\},\, |\, \rangle$:



   1 — наименьший элемент, 10, ..., 18 — максимальные, а наибольшего элемента нет.

3. В ограниченном ч.у. множестве $\langle\, \mathcal{P}(A), \subseteq \,\rangle$ наименьшим элементом является пустое множество $\varnothing$, а наибольшим — само множество A.

4. Во множестве всех непустых подмножеств непустого множества A при $|A| > 1$ нет наименьшего элемента, а минимальными являются все *одноэлементные подмножества.*

5. Обозначим через $\mathcal{P}_0(A)$ совокупность всех конечных подмножеств бесконечного множества A.
   В ч.у. множестве $\langle\, \mathcal{P}_0(A), \subseteq \,\rangle$ наименьшим элементом будет пустое множество, а максимальных (следовательно, и наибольшего) элементов нет.

Теорема 3.2 (о максимальных и минимальных элементах конечного ч.у. множества). *В конечном ч.у. множестве каждый элемент содержится в некотором максимальном элементе и содержит некоторый минимальный элемент.*

Доказательство. Пусть x — произвольный элемент ч.у. множества $\langle\, P, \sqsubseteq \,\rangle$. Если x не максимален, то найдётся такой элемент $x_1 \in P$, что $x \sqsubseteq x_1$. Повторяя рассуждения для новых элементов, получаем возрастающую цепь $x \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq \ldots$.

Поскольку множество P конечно, то и данная цепь конечна, а её последний элемент x_n, по определению будет максимальным элементом P и $x \sqsubseteq x_n$.

Для нахождения минимального элемента рассуждения аналогичны, при этом строится убывающая цепь. $\square$

Ч.у. множество может иметь не более, чем по одному наибольшему и наименьшему элементу. Их называют соответственно *единицей* (ι) и *нулём* (o), а также *универсальными гранями* данного ч.у. множества.

Высотой ч.у. множества P, символически $h(P)$, называют длину самой длинной его цепи. *Высотой элемента* v (символически $h(v)$) в конечном упорядоченном множестве называется наибольшая из длин цепей $[\,v_0,\,\ldots\,,\,v\,]$, где v_0 — минимальный элемент.

n-элементное тривиально упорядоченное ч.у. множество будем обозначать $n\mathbf{1}$.

Антицепь есть непустое подмножество A ч.у. множества P, в котором любые два элемента несравнимы. Например, в ч.у. множестве $\langle\,\mathbb{N},\,|\,\rangle$ антицепью является произвольное подмножество попарно некратных чисел, а в множестве $\langle\,B^n,\,\preccurlyeq\,\rangle$ — совокупности верхних нулей либо нижних единиц некоторой (не тождественной константам) монотонной булевой функции.

Антицепь, перестающая быть таковой при добавлении к ней произвольного элемента, называют *насыщенной*. *Максимальной* назовём антицепь с наибольшим числом элементов.

Проблема Дедекинда — задача определения количества $\psi(n)$ антицепей в B^n, ей посвящена обширная литература.

Таблица первых значений $\psi(n)$:

n	1	2	3	4	5	6	7
$\psi(n)$	3	6	20	168	7 581	7 828 354	2 414 682 040 998

Точной формулы для $\psi(n)$ неизвестно и вряд ли она существует. Найдены, однако, асимптотические формулы для $\psi(n)$.

Шириной ч.у. множества P, символически $w(P)$, называют мощность его максимальной антицепи.

Теорема 3.3 (Дилоурс). *Минимальное число цепей, на которые можно разбить конечное ч.у. множество* P *, равно* $w(P)$ *.*

Классическая задача разбиения ч.у. множества на минимальное число взаимно непересекающихся цепей. *Алгоритм*, позволяющий отыскать одно из таких разбиений.
Пусть дано ч.у. множество $\langle \{ v_1, \ldots, v_n \}, \sqsubseteq \rangle$.

1. Построим двудольный граф $\Gamma(P)$ с долями $A = \{ x_1, \ldots, x_n \}$ и $B = \{ y_1, \ldots, y_n \}$, в котором ребро (x_i, y_j) имеется если только если $v_i \sqsubset v_j$.

2. Выберем в графе $\Gamma(P)$ наибольшее паросочетание U. Для каждого ребра $(x_i, y_j) \in U$ фиксируем соответствующую пару элементов, составляющую двухэлементную цепь $[v_i, v_j]$.

3. Многократно используя свойство транзитивности, объединим двухэлементные цепи из предыдущего шага в максимальные:
$$[v_i, v_j] \cup [v_j, v_k] \to [v_i, v_j, v_k].$$

В результате получится некоторый набор цепей, причем эти цепи попарно общих элементов не имеют.

Добавив к этому набору *двухэлементные цепи* не вошедших в объединения, получим некоторое разбиение данного множества на цепи. Можно доказать, что оно минимально.

***Роберт Дилоурс* (Дилворт)** (Robert Palmer Dilworth, 1914–1993) — американский математик, внёс значительный вклад в теорию решёток и теорию групп.

Пример разбиения куб B^4 на непересекающиеся цепи.

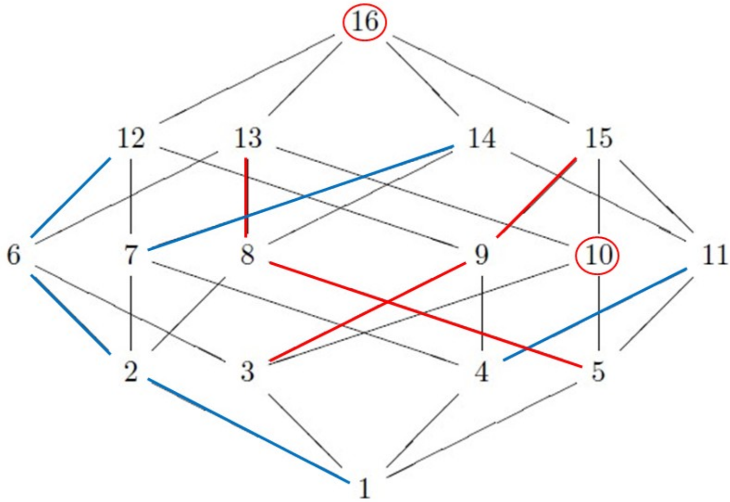


Рис. 3.5. Диаграмма ч.у. множества B^4 и его минимальное разбиение на цепи

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1
3	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
4	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
5	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 3.6. Матрица смежности графа $\Gamma(B^4)$

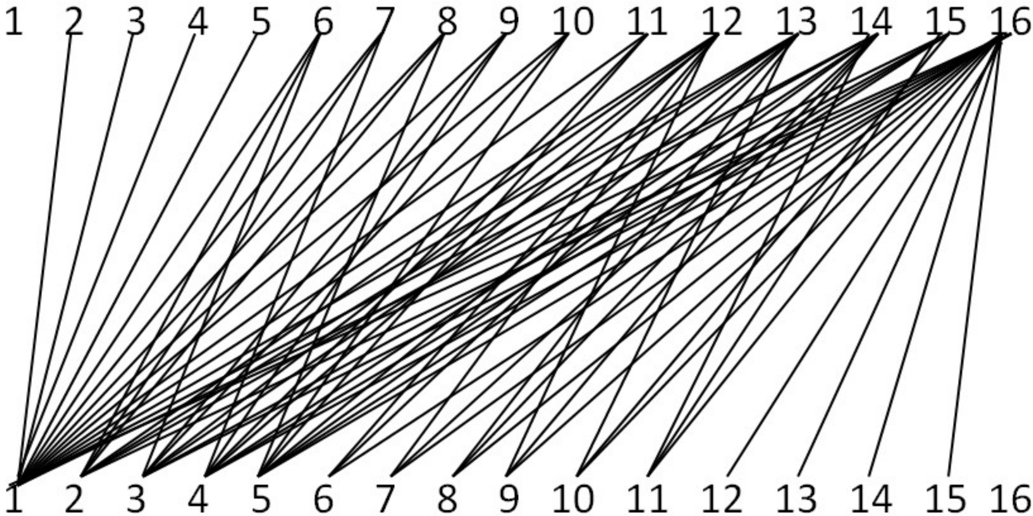


Рис. 3.7. Двудольный граф $\Gamma(B^4)$

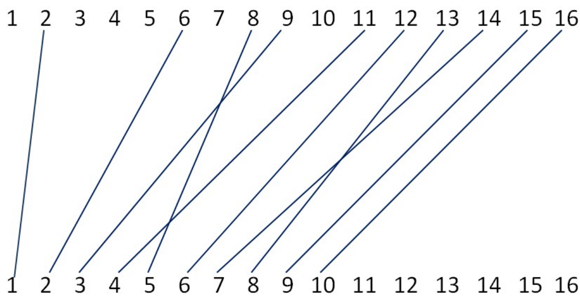
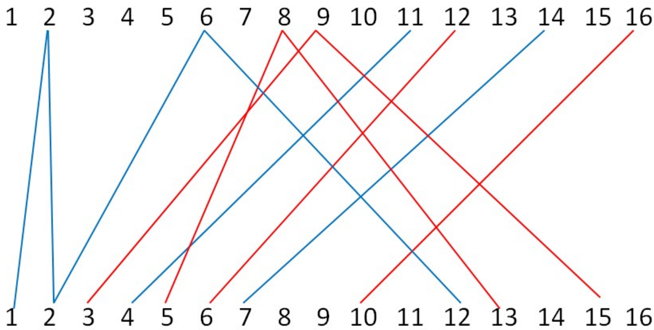


Рис. 3.8. Одно из максимальных паросочетаний графа $\Gamma(B^4)$

Двухэлементные цепи, соответствующие указанному максимальному суть $[v_1, v_2]$, $[v_2, v_6]$, $[v_3, v_9]$, $[v_4, v_{11}]$, $[v_5, v_8]$, $[v_6, v_{12}]$, $[v_7, v_{14}]$, $[v_8, v_{13}]$, $[v_9, v_{15}]$, $[v_{10}, v_{16}]$.

Используя транзитивность частичного порядка, склеим подходящие цепи:

$$[v_1, v_2, v_6, v_{12}],\ [v_3, v_9, v_{15}],\ [v_4, v_{11}],$$
$$[v_5, v_8, v_{13}],\ [v_7, v_{14}],\ [v_{10}, v_{16}].$$



Поскольку не осталось элементов данного множества вне указанных цепей, этот набор цепей и является искомым. В цепи $[v_{10}, v_{16}]$ элементы не следуют друг за другом непосредственно.

Цепное условие Жордана–Дедекинда. *Все максимальные цепи между двумя данными элементами локально конечного ч.у. множества имеют одинаковую длину.*

Если *все максимальные* цепи конечного ч.у. множества P имеет одну и ту же длину l, то говорят, что P — *градуированное (ранжированное) ч.у. множество ранга* l.

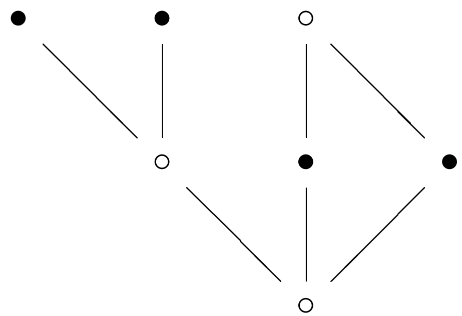
Цепное условие Жордана–Дедекинда выполняется исключительно для градуированных ч.у. множеств.

Для градуированных множеств существует единственная определённая их элементах *ранговая функция* ρ такая, что $\rho(x) = 0$, если x — минимальный элемент и $\rho(y) = \rho(x) + 1$, если $x \lessdot y$.

Если $\rho(x) = k$, то говорят, что элемент x *имеет ранг* k. Элементы одного ранга образуют *слой* ч.у. множества.

Пример 3.7. *Градуированные ч.у. множества* —

- Цепь и булеан B^n суть градуированные множества.
- Ч.у. множество $\langle \mathbb{N}, | \rangle$ ранжировано: $\rho(1) = 0$ и его k-й $(k > 0)$ уровень состоит из всех тех натуральных чисел, примарное разложение которых содержит k простых сомножителей, не обязательно различных.
- Слой градуированного ч.у. множества есть *насыщенная антицепь*. Обратное неверно:



Мощность W_k k-го слоя ранжированного ч.у. множества — *число Уитни*.

Разбиением натурального числа n называется его представление суммой натуральных невозрастающих слагаемых:

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r, \quad n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_r,$$

при этом слагаемые n_i называются *частями*, а их число r — *рангом* разбиения. При этом порядок следования частей не учитывается, то есть разбиения, отличающиеся только порядком частей, считаются одинаковыми. Записываются разбиения обычно в векторной форме: $(n_1, \ldots, n_r)$.

Число разбиений $\Pi(n)$ натурального числа n является одним из фундаментальных объектов изучения в теории чисел. Например, $\Pi(3) = \{\,(3),\ (2,1),\ (1,1,1)\,\}$.

На множестве $\Pi(n)$ устанавливается частичный порядок по их *вложимости*: *разбиение* $a = (n_1, \ldots, n_t)$ *вложимо в разбиение* $b = (m_1, \ldots, m_r)$ (символически $a \preccurlyeq b$), если a может быть получено из b подразбиением некоторых своих элементов. Например, $(2,2,2) \preccurlyeq (4,2)$, но $(2,2,2) \not\preccurlyeq (3,3)$.

$\Pi(n)$ — градуированное множество и $n-r$ есть ранг элемента $(n_1, \ldots, n_r)$.

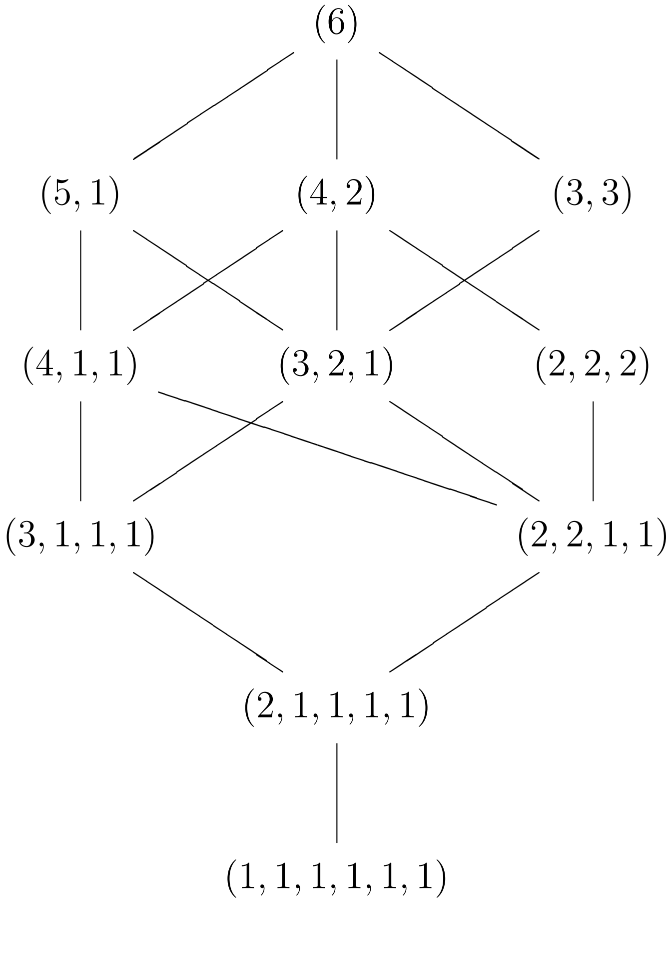


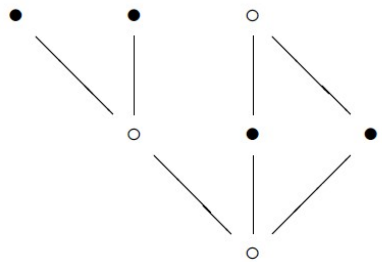
Рис. 3.9. Диаграмма ч.у. множества $\Pi(6)$

***LYM*-свойство (Любеля-Ямамото-Мешалкина).** Конечное градуированное ч.у. множество P с ранговой функцией ρ и высоты h обладает *LYM-свойством*, если *LYM-неравенство*

$$\sum_{x \in Q \subseteq P} \frac{1}{W_{\rho(x)}} \leqslant 1$$

выполняется для любой антицепи Q в P, т.е. каждый элемент x антицепи берётся в весом $\frac{1}{\text{мощность слоя, содержащего } x}$.

Пример 3.8. 1. Ч.у. множество



не обладает *LYM*-свойством: для выделенной антицепи имеем $2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3} > 1$.

2. B^n обладает *LYM*-свойством.

Пусть антицепь Q имеет a_k элементов в k-м слое B^n; $k = \overline{0, n}$. Но

- каждый элемент k-го слоя содержится в одной и той же $\dfrac{1}{\binom{n}{k}}$-й доле всех $n!$ максимальных цепей;
- и нет цепи, содержащей более одного элемента некоторой антицепи.

Поэтому сумма долей максимальных цепей, содержащих каждый элемент не может превосходить единицы:

$$\sum_{x \in Q \subseteq P} \frac{1}{W_{\rho(x)}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \leqslant 1.$$

Равенство будет в единственном случае, когда антицепь — весь некоторый слой B^n.

Сечения цепей. *Сечением* цепи $\langle C, \leqslant \rangle$ называют разбиение её на два подмножества A (нижний класс сечения) и B (верхний класс сечения) так, что $a < b$ для любых $a \in A$ и $b \in B$.
Различают следующие виды сечений:

- *скачок* — в нижнем классе имеется наибольший элемент, а в верхнем классе — наименьший;
- *дедекиндово сечение* — либо в нижнем классе имеется наибольший элемент, а в верхнем классе наименьшего элемента нет, либо в верхнем классе имеется наименьший элемент, а в нижнем классе наибольшего элемента нет;
- *щель* — в нижнем классе нет наибольшего элемента, а в верхнем — наименьшего.

Цепь называется *непрерывной*, если все её сечения дедекиндовы.

Теорема 3.4. *Минимальное число антицепей, на которые может быть разбито конечное ч.у. множество P есть $h(P)+1$ (наибольшая мощность цепи в P).*

Доказательство. Если $h(P) = 0$, то P — тривиально упорядоченное множество = антицепь. Пусть $h(P) \geqslant 1$ и теорема справедлива для $h-1$. Обозначим через A_1 множество максимальных элементов P. Поскольку A_1 — антицепь, и $P' = P \smallsetminus A_1$ имеет высоту $h-1$ (т.к. из каждой максимальной цепи было удалено по элементу), то ч.у. множество P' может быть разложено в антицепи $A_2, \ldots, A_{h+1}$ и $P = A_1 + \ldots + A_{h+1}$ — искомое разбиение. □

Атомы ч.у. множеств. Если ч.у. множество имеет наименьший элемент, то элементы, непосредственно следующие за ним, называют *атомами*.

Двойственно определяются *коатомы*: это элементы, непосредственно предшествующие наибольшему элементу.

Пример 3.9.

1. Конечная нетривиальная цепь содержит единственные атом и коатом.
2. В цепи $[\,0, \ldots, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\,]$ атомы отсутствуют.
3. Положим формально, что $0|0$. Тогда в ч.у. множестве $\langle\, \mathbb{N}_0, \,|\,\rangle$ наименьшим элементом является 1, наибольшим — 0, атомы суть простые числа, а коатомы отсутствуют.

Трёхслойные ч.у. множеств. Ч.у. множество P, все элементы которого находятся в трёх непересекающиеся антицепях X_1, X_2 и X_3 таких, что

- $|X_1| \approx |X_3| \approx |P|/4$;

- для всех $a \in X_1$, $c \in X_3$ имеет место $a < c$ (т.е. все элементы из X_3 содержат все элементы X_1);
- если $a < b$ и $a \in X_i$, $b \in X_j$, то $i < j$.

называют *трёхслойным.*

Теорема 3.5. *При $n \to \infty$ с вероятностью 1 все n-элементные ч.у. множества являются трёхслойными.*

Этот результат радикально расходится с обычным представлением о «типичном» ч.у. множестве.

3.3 Грани, изотонные отображения и порядковые идеалы

Определение 3.7. Пусть $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ — ч.у. множество и $A \subseteq P$.
Множества $A^{\vartriangle}$ и $A^{\triangledown}$ определяемые условиями

$$A^{\vartriangle} = \{ x \in P \mid \underset{A}{\forall} a \ (a \sqsubseteq x) \} \text{ и}$$
$$A^{\triangledown} = \{ x \in P \mid \underset{A}{\forall} a \ (x \sqsubseteq a) \}$$

называются *верхним* и *нижним конусами множества* A, а их элементы — *верхними* и *нижними гранями множества* A соответственно.

Если $A = \{a\}$ одноэлементно, то пользуются обозначениями $a^{\vartriangle}$ и $a^{\triangledown}$.

Понятно, например, что если $a \sqsubseteq b$,
то $a^{\vartriangle} \cap b^{\triangledown} = [a, b]$.

Теорема 3.6 (основные свойства верхнего и нижнего конусов). *Пусть* $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ *— ч.у. множество,* $A, B \subseteq P$ *и* $x, y \in P$. *Тогда*

1. $A \subseteq B \Rightarrow B^{\triangledown} \subseteq A^{\triangledown}$ *и* $B^{\vartriangle} \subseteq A^{\vartriangle}$ *(антимонотонность конусов подмножеств по включению);*
2. $A \subseteq A^{\vartriangle\triangledown} \cap A^{\triangledown\vartriangle}$;
3. $A^{\vartriangle} = A^{\vartriangle\triangledown\vartriangle}$; $A^{\triangledown} = A^{\triangledown\vartriangle\triangledown}$;
4. $(A \cup B)^{\vartriangle} = A^{\vartriangle} \cap B^{\vartriangle}$; $(A \cup B)^{\triangledown} = A^{\triangledown} \cap B^{\triangledown}$;
5. $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x^{\triangledown} \subseteq y^{\triangledown}$.

Доказательство.

1. Антимонотонность операций перехода к верхнему и нижнему конусам по включению множеств вытекает непосредственно из определения.

2. Так как для любых $x \in A$ и $y \in A^{\vartriangle}$ справедливо $x \sqsubseteq y$, то $A \subseteq A^{\vartriangle\triangledown}$.
   Аналогично показывается $A \subseteq A^{\triangledown\vartriangle}$, откуда и следует требуемое $A \subseteq A^{\vartriangle\triangledown} \cap A^{\triangledown\vartriangle}$.

3. $A^{\vartriangle} \overset{(2)}{\subseteq} (A^{\vartriangle})^{\triangledown\vartriangle} = (A^{\vartriangle\triangledown})^{\vartriangle} \overset{(1)}{\subseteq} A^{\vartriangle}$ и аналогично для (4) .

4. Включение $(A \cup B)^{\vartriangle} \subseteq A^{\vartriangle} \cap B^{\vartriangle}$ вытекает из (4) .

   Если же $x \in A^{\vartriangle} \cap B^{\vartriangle}$, то $y \sqsubseteq x$ для всех $y \in A$ и $y \in B$, откуда следует справедливость свойства (5) и аналогично для (6).

5. Свойство $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x^{\triangledown} \subseteq y^{\triangledown}$ сразу следует из определений.

$\square$

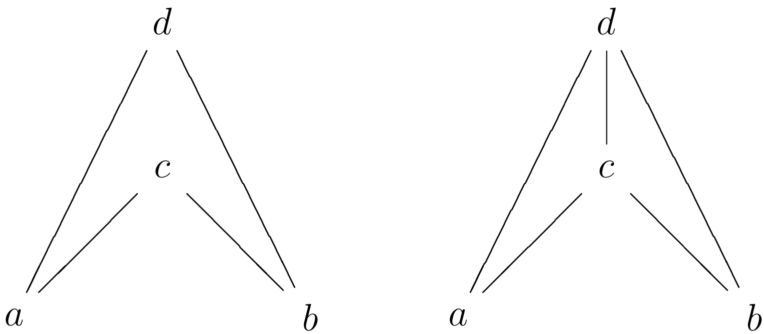
Определение 3.8. Пусть $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ — ч.у. множество и $A \subseteq P$.

Если в $A^{\triangle}$ существует наименьший элемент, то он называется *точной верхней гранью множества* A и обозначается $\sup A$.

Если в $A^{\triangledown}$ существует наибольший элемент, то он называется *точной нижней гранью множества* A и обозначается $\inf A$.

Понятно что $\inf A \sqsubseteq a \sqsubseteq \sup A$ для всех $a \in A$.

Пример 3.10. 1. Пусть $P = \{ a, b, c, d \}$ и два различных порядка на P задаются следующими диаграммами:



Для $A = \{a, b\}$ имеем $A^{\triangle} = \{c, d\}$ в обоих случаях, но в первом $\sup A$ отсутствует, а во втором $\sup A = c$[1].

2. Для элемента $\widetilde{\alpha}$ ч.у. множества $\langle B^n, \preccurlyeq \rangle$ имеем

$$\widetilde{\alpha}^{\triangle} = [\widetilde{\alpha}, \widetilde{1}], \quad \widetilde{\alpha}^{\triangledown} = [\widetilde{0}, \widetilde{\alpha}].$$

[1] вторая диаграмма не есть диаграмма Хассе: линии, соединяющие d с a и b здесь излишни

3. Пусть $\langle\, P, \sqsubseteq \,\rangle$ — ч.у. множество и $A \subseteq B \subseteq P$. Если существуют $\sup A$ и $\sup B$ ($\inf A$ и $\inf B$), то $\sup A \sqsubseteq \sup B$ ($\inf A \sqsupseteq \inf B$).

4. Для ч.у. множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ с естественным упорядочением имеем

   - $\sup \{\, x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \,\} = 0$;
   - $\sup \left\{\, x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2 \,\right\}$ не существует;

5. Если S — совокупность подмножеств некоторого множества, то, по включению, $\sup S$ совпадает с объединением, а $\inf S$ — с *пересечением* всех подмножеств из совокупности S.

Виды отображений ч.у. множеств

Определение 3.9. Пусть $\langle\, P, \sqsubseteq_P \,\rangle$ и $\langle\, Q, \sqsubseteq_Q \,\rangle$ — ч.у. множества и x, y — произвольные элементы из P. Отображение $\varphi\colon P \to Q$ называется соответственно

- *изотонным*, (*монотонным*, *порядковым гомоморфизмом*), если $x \sqsubseteq_P y \;\Rightarrow\; \varphi(x) \sqsubseteq_Q \varphi(y)$;
- *обратно изотонным*, если $\varphi(x) \sqsubseteq_Q \varphi(y) \;\Rightarrow\; x \sqsubseteq_P y$;
- *антиизотонным*, если $x \sqsubseteq_P y \;\Rightarrow\; \varphi(x) \sqsupseteq_Q \varphi(y)$.

Если φ *изотонно, обратно изотонно и инъективно*, то его называют *вложением* или *(порядковым) мономорфизмом* ч.у. множества P в ч.у. множество Q, что обозначают $P \overset{\varphi}{\hookrightarrow} Q$.

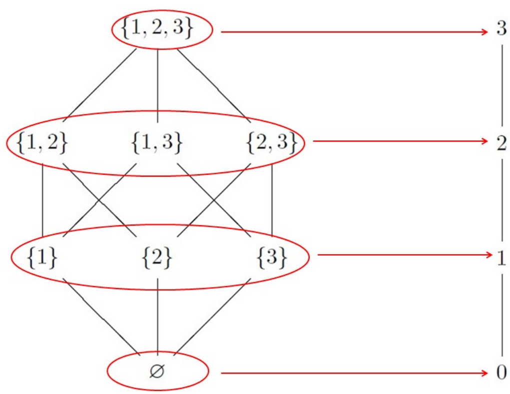
- Сюръективный мономорфизм ч.у. множеств называют *(порядковым) изоморфизмом, символически* $P \cong Q$ или, с указанием на отображение — $P \overset{\varphi}{\cong} Q$, (ясно, что φ — биекция).

- Изоморфизм ч.у. множества в себя называют *(порядковым) автоморфизмом.*

- Понятно, что для ч.у. множеств P и Q отображение $\varphi\colon P \to Q$ их носителей есть порядковый изоморфизм iff φ — изотонная и обратно изотонная биекция, т.е. для любых $x, y \in P$ справедливо $x \sqsubseteq_P y \Leftrightarrow \varphi(x) \sqsubseteq_Q \varphi(y)$.

- Если отображение $\varphi\colon P \to P'$ между носителями ч.у. множеств P и Q биективно и для любых $x, y \in P$ справедливо $x \sqsubseteq_P y \Leftrightarrow \varphi(x) \sqsupseteq_Q \varphi(y)$, то говорят, что P и Q *антиизоморфны.*

Пример 3.11. 1. Отображение $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) \overset{\varphi}{\to} \mathbf{4}$, $\varphi(x) = |x|$ — *изотонно, но не*



инъективно и, следовательно, вложением не является.

2. Тождественное отображение $\langle\,\mathbb{N}, |\,\rangle$ в $\langle\,\mathbb{N}, \leqslant\rangle$ *изотонно, но не обратно изотонно* и, следовательно, вложением также не является.

3. Если P — неодноэлементное ч.у. множество с *тривиальным порядком*, а P' — то же самое множество *с произвольным нетривиальным порядком*, то тождественное отображение P на себя является *изотонным* и *взаимно-однозначным*, но *не обратно изотонным*.

4. Естественное вложение $n\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$ для натурального n есть *мономорфизм*.

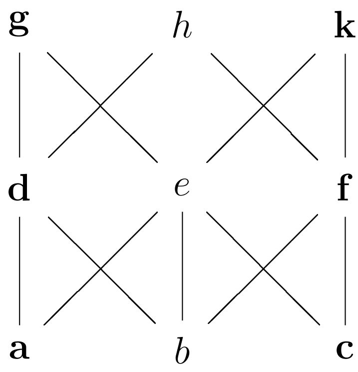
5. Отображение $\mathcal{P}(X) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{P}(X)$, $\varphi(A) = \overline{A}$, $A \subseteq X \neq \varnothing$ *антиизотонно*.

6. Любая n-элементная цепь изоморфна цепи $[n]$ с естественным порядком.

7. Отображение $\mathbf{a} \leftrightarrow \mathbf{c}$, $b \mapsto b$, $\mathbf{d} \leftrightarrow \mathbf{f}$, $e \mapsto e$, $\mathbf{g} \leftrightarrow \mathbf{k}$, $h \mapsto h$ для ч.у. множества, изображённого на нижеследующем рисунке есть автоморфизм:

<u>*Определение*</u> 3.10. Пусть $f : P \to P$ — изотонное отображение ч.у. множества носителя P ч.у. множества в себя (*изотонный эндоморфизм*). Тогда $p \in P$ называется *неподвижной точкой отображения* f, если и $f(p) = p$.

Отображение, не имеющее неподвижных точек называют *свободным от неподвижных точек*.



Ч.у. множество P обладает *свойством иметь фиксированные точки* (FPP), iff *каждое изотонное* отображение его носителя в себя имеет неподвижную точку.

Пример:

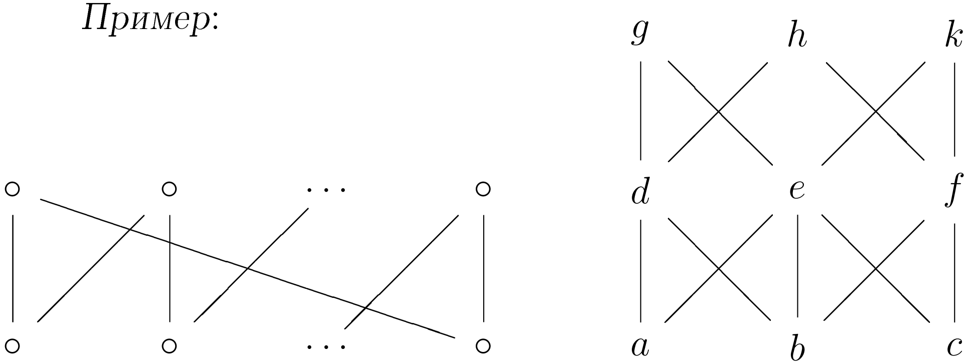


Рис. 3.10. Первое ч.у. множество (корона s_n) не обладает FPP, а второе — обладает.

Нетривиальность FPP связана, в частности, с тем, что оно не сохраняется при переходу к ч.у. подмножеству. Неизвестно никакой характеризации ч.у. множеств, обладающих свойством иметь фиксированные точки.

Порядковые идеалы и фильтры

<u>*Определение*</u> 3.11. Пусть $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ — ч.у. множество. Подмножество I элементов P называется его *порядковым идеалом*, если

$$(x \in I) \,\&\, (y \sqsubseteq x) \;\Rightarrow\; y \in I.$$

Подмножество F элементов P называется его *порядковым фильтром*, если

$$(x \in F) \,\&\, (x \sqsubseteq y) \;\Rightarrow\; y \in F.$$

Согласно определению, $\varnothing$ — порядковый идеал любого ч.у. множества.

Объединение и пересечение порядковых идеалов есть порядковый идеал.

$x^{\triangledown}$ и $x^{\vartriangle}$, $x \in P$ — порядковый идеал и фильтр соответственно. Такие идеалы и фильтры называют *главными*. Согласно определению, $\varnothing$ — порядковый идеал любого ч.у. множества.

Обозначения:

- $J(x) = x^{\triangledown}$.
- $J(P)$ — множество всех порядковых идеалов ч.у. множества $\langle P, \sqsubseteq \rangle$, упорядоченное по включению — также ч.у. множество.

  Крайние случаи: если P — n-элементные

  цепь — $J(\mathbf{n}) \cong (\mathbf{n} + \mathbf{1})$;
  антицепь — $J(n\mathbf{1}) \cong B^n$.

- $J_0(P)$ — совокупность всех главных порядковых идеалов ч.у. множества P, упорядоченное по включению — также ч.у. множество.

Понятно, что $J_0(P) \leqslant J(P)$.

Теорема 3.7 (о представлении ч.у. множеств). *Любое ч.у. множество P изоморфно $J_0(P)$ и, следовательно, может быть вложено в булеан подходящего множества.*

Доказательство. Пусть $\langle\, P, \sqsubseteq \,\rangle$ — ч.у. множество.

Докажем, что $\varphi(x) = x^{\triangledown}$ — искомый изоморфизм.

1) Покажем, что φ — *биекция*.

а) φ — *вложение*, поскольку

$$\varphi(x) = \varphi(y) \;\Leftrightarrow\; (x^{\triangledown} = y^{\triangledown}) \;\Leftrightarrow\; (x^{\triangledown} \subseteq y^{\triangledown})\,\&\,(y^{\triangledown} \subseteq x^{\triangledown}) \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; (x \sqsubseteq y)\,\&\,(y \sqsubseteq x) \;\Leftrightarrow\; x = y\,.$$

б) φ — *наложение*, т.к. каждому главному идеалу $x^{\triangledown}$ соответствует порождающий его элемент x.

2) Изотонность и обратная изотонность φ устанавливается свойств нижнего конуса:

$$x \sqsubseteq y \;\Leftrightarrow\; x^{\triangledown} \subseteq y^{\triangledown} \;\Leftrightarrow\; \varphi(x) \subseteq \varphi(y).$$

Таким образом, $P \overset{x^{\triangledown}}{\cong} J_0(P) \overset{\mathrm{id}}{\hookrightarrow} J(P) \overset{\mathrm{id}}{\hookrightarrow} \mathcal{P}(P)$. $\square$

Между антицепями и порядковыми идеалами конечного ч.у. множества существует взаимно-однозначное соответствие.

Пусть $\langle\, P, \sqsubseteq \,\rangle$, A — антицепь в P, $I \in J(P)$.
Если $I = \bigcup\limits_{a\in A} a^{\triangledown}$, то говорят, что A порождает I.

В случае $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ пишут $I = \langle a_1, \ldots, a_k\rangle$ и говорят, что идеал I *конечнопорождённый*.
Ясно, что $J(a) = \langle a\rangle$.

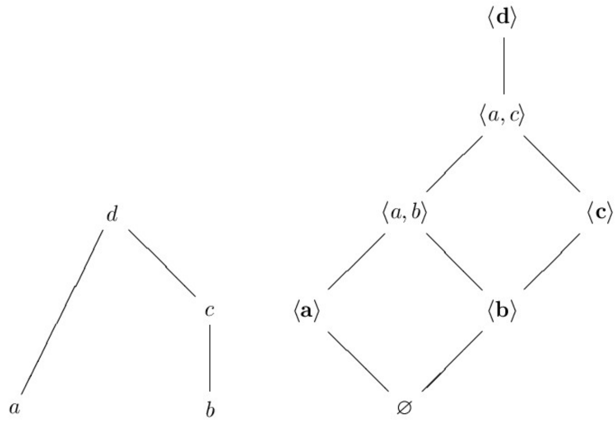


Рис. 3.11. Ч.у. множества P и $J(P)$ (подмножество $J_0(P)$ выделено)

3.4 Операции над ч.у. множествами

<u>*Двойственность*</u>

Если P — ч.у. множество с порядком $\sqsubseteq$, то ч.у. множество с тем же носителем и порядком $\sqsupseteq$ называют *двойственным* или *дуальным* к P и обозначают $P^{\sharp}$.

Если $P \cong P^{\sharp}$, то P — *самодвойственное* ч.у. множество.

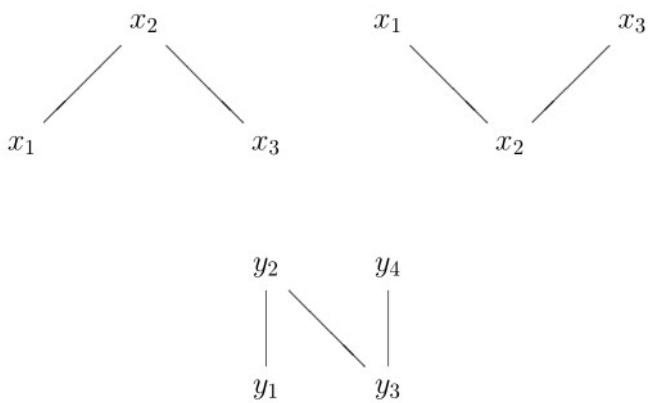


Рис. 3.12. Зигзаги или заборы: Z_3 или Λ; $Z_3^\sharp$ или V; Z_4 или N: Λ и V двойственны друг другу, а N — самодвойственно

Рис. 3.13. 5-элементные самодвойственные ч.у. множества

Принцип двойственности для ч.у. множеств — $\langle\, P, \sqsubseteq \,\rangle \overset{\mathrm{id}}{\cong} \langle\, P^\sharp, \sqsupseteq \,\rangle$.

Пересечение

Если $\langle\, P, \sqsubseteq_1 \,\rangle$ и $\langle\, P, \sqsubseteq_2 \,\rangle$ — два ч.у. множества с общим носителем, то их *пересечением* будет ч.у. множество $\langle\, P, \sqsubseteq \,\rangle$ с порядком $\sqsubseteq = \sqsubseteq_1 \cap \sqsubseteq_2$.

Пример:

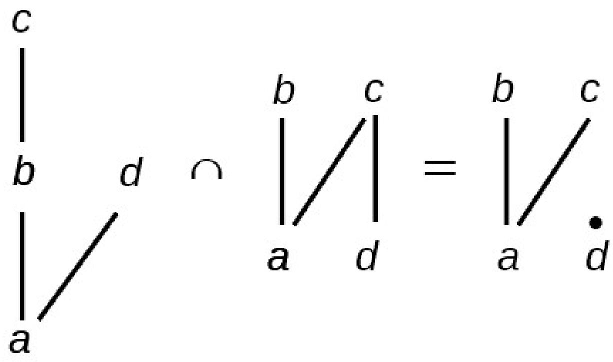


Рис. 3.14. Пересечение ч.у. множеств

Свойства ч.у. множеств могут не сохраняются при пересечении, например свойство «быть линейным порядком»: пусть P — цепь, тогда $P^{\sharp}$ — также цепь, а $P \cap P^{\sharp}$ — тривиально упорядоченное множество.

Прямая сумма

Если $\langle\, P, \sqsubseteq_P \,\rangle$ и $\langle\, Q, \sqsubseteq_Q \,\rangle$ — два ч.у. множества, $P \cap\; Q \;=\; \varnothing$, то их *прямой* или *кардинальной суммой* $P + Q$ называется множество $P \cup Q$ с частичным порядком $\sqsubseteq$ таким, что $x \sqsubseteq y$ когда либо $x \sqsubseteq_P y$, либо $x \sqsubseteq_Q y$.

Диаграмма прямой суммы состоит из двух диаграмм соответствующих ч.у. множеств, рассматриваемых как единая диаграмма.

- $\underbrace{P + \ldots + P}_{n} \cong nP$.
- n-элементная антицепь изоморфна $n\mathbf{1}$.

<u>*Порядковая сумма*</u>

Если $\langle P, \sqsubseteq_P \rangle$ и $\langle Q, \sqsubseteq_Q \rangle$ — два ч.у. множества $P \cap Q = \varnothing$, то их *порядковой* или *ординальной суммой* $P \oplus Q$ называется множество $P \cup Q$ с частичным порядком $\sqsubseteq$ таким, что $x \sqsubseteq y$ когда либо $x \sqsubseteq_P y$, либо $x \sqsubseteq_Q y$, либо $x \in P$ и $y \in Q$.

- Операция $\oplus$ ассоциативна, но не коммутативна
- $\mathbf{n} \cong \underbrace{\mathbf{1} \oplus \ldots \oplus \mathbf{1}}_{n}$

Диаграмма порядковой суммы $P \oplus Q$ состоит из диаграмм соответствующих ч.у. множеств, причём диаграмма P располагается под диаграммой Q, и между ними добавлены отрезки, соединяющие максимальные элементы P с минимальными элементами Q.

Пример

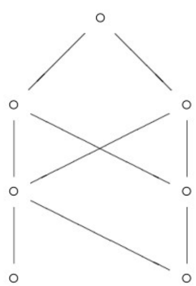


Рис. 3.15. Порядковая сумма $Z_4 \oplus Z_3$

Ч.у. множество, не представимое в виде кардинальной [ординальной] суммы своих подмножеств, называется *кардинально* [*ординально*] *неразложимым.*

Теорема 3.8. *Всякое ч.у. множество является кардинальной суммой своих кардинально неразложимых подмножеств.*

Верна также аналогичная теорема для ординальной суммы.

Ч.у. кардинально и/или ординально разложимые множества называются *последовательно-параллельными* ч.у. множествами.

Упорядоченная сумма

Пусть $\langle\, P,\, \sqsubseteq_P \,\rangle$ — ч.у. множество, каждому элементу x которого сопоставлено ч.у. множество $\langle\, Q_x,\, \sqsubseteq_x \,\rangle$. Семейство всех ч.у. множеств Q_x, индексированных элементами P, обозначим $\mathcal{F}$.

Упорядоченной (лексикографической) суммой $\sum_P Q_x$ *семейства* ч.у. множеств $\mathcal{F}$ над ч.у. множеством $\langle\, P,\, \sqsubseteq_P \,\rangle$ называется ч.у. множество $\langle\, R,\, \sqsubseteq \,\rangle$, с носителем $R = \{\, (x,\, q) \mid x \in P,\ q \in Q_x \,\}$
и порядком на нём, задаваемым соотношением $(x,\, q) \sqsubseteq (x',\, q') \;\Leftrightarrow\;$ либо $x \sqsubset_P x'$, либо $x = x'$ и $q \sqsubseteq_x q'$.

Упорядоченная сумма $\sum_P Q_p$ тривиальна, если ч.у. множество P или все множества семейства $\mathcal{F}$ одноэлементны (в этом случае $\sum_P Q_p$ изоморфно либо единственному Q, либо P).

Построение диаграммы $\sum_P Q_p$ —

1) строят диаграмму ч.у. множества P;

2) отбрасывают отрезки между элементами P;

3) каждый элемент $x \in P$ заменяют диаграммой Q_x;
4) соединяют отрезками все максимальные элементы Q_x со всеми минимальными элементами Q_y, если x непосредственно предшествует y в P.

Пример

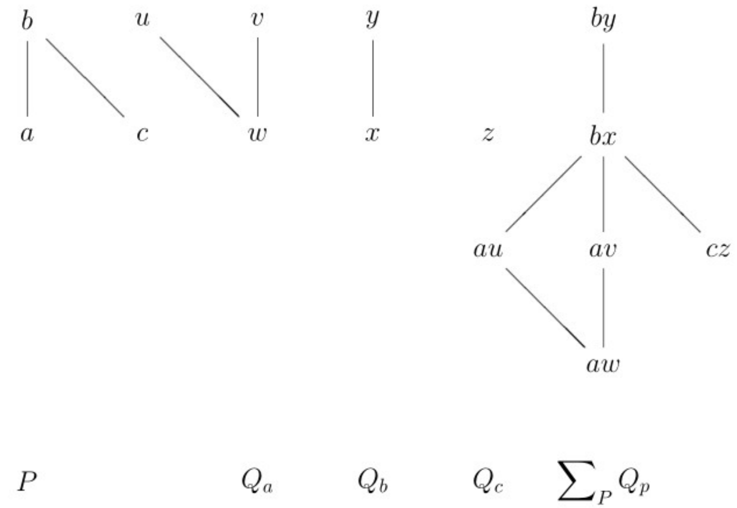


Рис. 3.16. Ч.у. множество P, семейство ч.у. множеств $F = \{Q_a, Q_b, Q_c\}$, индексированных элементами P и лексикографическая сумма $\sum_P Q_p$.

Прямое произведение

Если $\langle P, \sqsubseteq_P \rangle$ и $\langle Q, \sqsubseteq_Q \rangle$ — два ч.у. множества, то их *прямым* или *декартовым произведением* называется множество $P \times Q$ с частичным порядком $\sqsubseteq$ таким, что $(p, q) \sqsubseteq (p', q') \Leftrightarrow p \sqsubseteq_P p'$ и $q \sqsubseteq_Q q'$.

Обозначение: $P^n \stackrel{\text{def}}{=} P \times \ldots \times P$.

Справедливо соотношение

$$P \times R \cong Q \times R \ \Rightarrow \ P \cong Q\,, \quad \text{откуда}$$
$$P^n \cong Q^n \ \Rightarrow \ P \cong Q.$$

Построение диаграммы ч.у. множества $P \times Q$:

1) строят диаграмму ч.у. множества P;
2) отбрасывают отрезки между элементами P;
3) заменяют каждый элемент $x \in P$ диаграммой Q_x;
4) соединяют отрезками копии элементов из Q в Q_x и Q_y, если x непосредственно предшествует y в P.

Пример

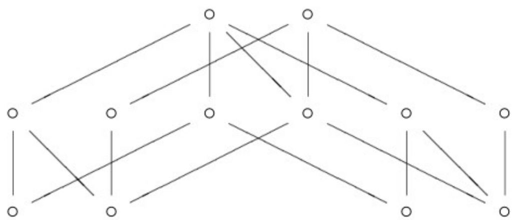


Рис. 3.17. Прямое произведение $Z_3 \times Z_4$

Диаграммы изоморфных ч.у. множеств $P \times Q$ и $Q \times P$ обычно выглядят совершенно не похожими друг на друга.

Если ч.у. множества P и Q градуированы и их ранговые функции суть ρ_P и ρ_Q, то их прямое произведение также градуировано.

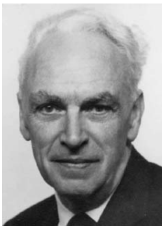
При этом

- ранг элемента $x = (x_1, x_2)$ есть $\rho(x) = \rho_P(x_1) + \rho_Q(x_2)$;

- для чисел Уитни W_k справедливо равенство
$$W_k(P \times Q) = \sum_i W_i(P)\, W_{k-i}(Q).$$
Отсюда следует и известное равенство $W_k(\mathbf{2}^n) = \binom{n}{k}$.

Если два ч.у. множества обладают LYM-свойством, то их прямое произведение этим свойством может и не обладать.

Теорема 3.9 (Оре). *Каждый частичный порядок изоморфен некоторому подмножеству декартова произведения цепей.*



Ойстин О́ре (Øystein Ore, 1899-1968) — норвежский математик, специалист в области алгебры, теории чисел и теории графов.

Определение 3.12. *Мультипликативной размерностью* ч.у. множества P называется наименьшее число k линейных порядков L_i таких, существует вложение $P \hookrightarrow L_1 \times \ldots \times L_k$.

Степень

Если $\langle\, P, \sqsubseteq_P \rangle$ и $\langle\, Q, \sqsubseteq_Q \rangle$ — два ч.у. множества, то обозначим через Q^P множество всех изотонных отображений из P в Q.

$\langle\, Q^P, \sqsubseteq \,\rangle$ — ч.у. множество с порядком $\sqsubseteq$ для $f, g \in Q^P$ $f \sqsubseteq g \;\Leftrightarrow\; f(x) \sqsubseteq_Q g(x)$ для всех $x \in P$.

Легко показывается справедливость соотношения

$$\mathbf{2^n} \cong (\mathbf{n+1}).$$

(мы заключаем $\mathbf{n+1}$ в скобки, чтобы отличить $n+1$-элементную цепь от прямой суммы n-элементной цепи и тривиального ч.у. множества).

Пример

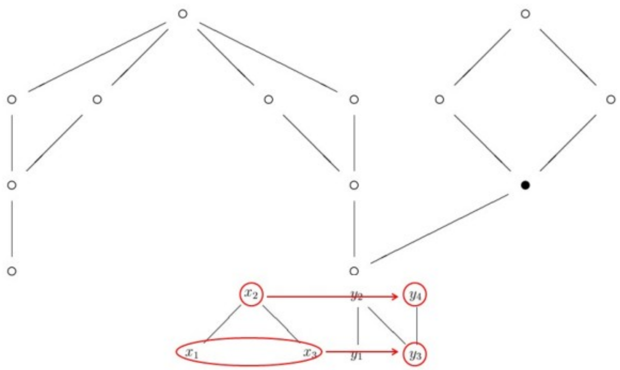


Рис. 3.18. Ч. у. множество N^Λ

Выделенному элементу $\bullet$ соответствует отображение $f\colon \Lambda \to N,\; f(x_1) = f(x_3) = y_3,\; f(x_2) = y_4$

Арифметика кардиналов

- Для ч.у. множеств — P и произвольных Q и R справедливо
$$R^P \cong R^Q \;\Rightarrow\; P \cong Q\,, \quad (Q^P)^\sharp \cong (Q^\sharp)^{P^\sharp}.$$
- Для введённых операций $+$, $\times$ над ч.у. множествами выполняются законы ассоциативности,

коммутативности и первый дистрибутивный закон —

$$P \times (Q + R) \cong (P \times Q) + (P \times R),$$

и для степени — соотношения

$$R^{P+Q} \cong R^P \times R^Q,\ (P^Q)^R \cong P^{Q\times R},$$
$$(P \times Q)^R \cong P^R \times Q^R.$$

- Также справедливы соотношения для «единицы»:

$$\mathbf{1} \times P \cong P\,, \quad \mathbf{1}^P \cong \mathbf{1}.$$

- Важное для практических приложений соотношение — $$\mathbf{n}^P \cong \left(\mathbf{2}^{\mathbf{n-1}}\right)^P \cong \mathbf{2}^{P\times(\mathbf{n-1})}.$$

3.5 Линеаризация

Принцип продолжения порядка

Теорема 3.10. *1. Любой частичный порядок P может быть продолжен до линейного на том же множестве, называемым линейным продолжением P.*

2. Каждый порядок есть пересечение всех своих линейных продолжений.

Доказательство для конечного случая. Пусть $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ — ч.у. множество и P — не цепь. Построим линейный порядок $\leqslant$, содержащий данный частичный.

В P найдутся несравнимые элементы a и b. Произвольно определим порядок на них: для определённости положим, например, $a \leqslant b$. Далее для всех $x \sqsubseteq a$ и $b \sqsubseteq y$ полагаем $x \leqslant y$. Если $\langle P, \leqslant \rangle$ ещё не цепь, то выберем новую пару несравнимых элементов и поступаем, как указано выше.

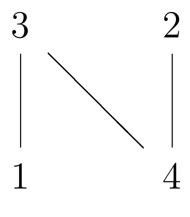
Через конечное число шагов получаем линейный порядок.

Поскольку возможен различный выбор пар несравнимых элементов a и b и при каждом выборе можно полагать как $a \leqslant b$, так и $b \leqslant a$, то действуя указанным образом можно получить различные возможные продолжения исходного частичного порядка $\sqsubseteq$ до линейного $\leqslant$.

Пересечение всех таких цепей даст исходное ч.у. множество. Действительно, если $x \sqsubseteq y$, то аналогичное следование будет и во всех полученных линейных порядках, а при несравнимых x и y всегда найдётся пара цепей с противоположным их следованием, что в пересечении цепей и даст несравнимость этих элементов. $\square$

Для *счетно-бесконечного* упорядоченного множества доказательство проводится методом *математической индукции.*

Пример: ч.у. множество и его линейное расширение (4, 2, 1, 3)



Обозначение: $\mathcal{L}(P)$ — совокупность всех линейных продолжение ч.у. множества P. По принципу продолжения порядка:

$$P = \bigcap_{L \in \mathcal{L}(P)} L.$$

В современной аксиоматической теории множеств принцип продолжения порядка играет роль, сопоставимую с аксиомой выбора.

Поиск такого продолжения для конечных ч.у. множеств, заданных парами непосредственно следующих друг за другом вершин в теоретическом программировании называют *топологической сортировкой*. Термин крайне неудачен: указанная процедура не имеет никакого отношения ни к сортировке, ни к топологии (раздел математики, изучающий понятие непрерывности).

Счётно-бесконечные ч.у. множества такие, что нижние конусы любых элементов конечны, называется *казуальными*.

Примеры: $\langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle$, $\langle \mathbb{N}, \mid \rangle$.

Алгоритм построения линейного расширения казуального множества P:

1) в произвольном порядке записываем минимальные элементы M_1 множества P,
2) удаляем из P множество M_1, получая множество P_1;
3) в произвольном порядке записываем минимальные элементы M_2 множества P_1
4) удаляем из P_1 множество M_2, получая множество P_2;

5) и т.д. (среди множеств M_1, M_2, … могут быть бесконечные).

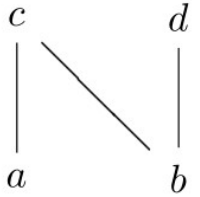
Пример 3.12. Построение линейного расширения казуального множества $\langle\, \mathbb{N}, \,|\, \rangle$:

- минимальным элементом будет 1,
- затем в произвольном порядке на каждом шаге располагаем все простые числа,
- потом в произвольном порядке — все числа, представимые в виде произведения *двух* (не обязательно неравных) простых,
- *трёх* простых и т.д.

Линейный порядок $\leqslant$, включающий в себя данный частичный порядок $\sqsubseteq$ (т.е. $\sqsubseteq \subseteq \leqslant$) на некотором множестве называют *линеаризацией* или *линейным продолжением (расширением)* исходного порядка.

Известны эффективные алгоритмы построения всех линейных расширений конечного ч.у. множества.

Число скачков в некотором линейном расширении L ч.у. множества P, есть минимальное количество пар несравнимых элементов P в L.



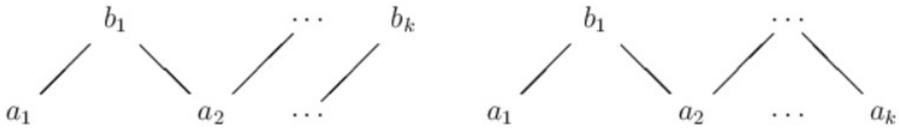
Например, в линеаризации $[\, b,\, d,\, a,\, c \,]$ зигзага N присутствует один скачок: пара $(d,\, a)$.

Задача нахождения линейного расширения ч.у. множества с минимальным числом скачков NP-трудна.

Ч.у. множества с диаграммами Хассе, являющимися двудольными графами называют *двудольными ч.у. множествами.* $K_{m,n}$ — обозначение для двудольного ч.у. множества с m максимальными и n минимальными элементам, у которого любой максимальный элемент содержит все минимальные.

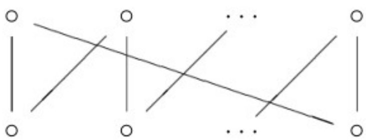
Ранее уже были указаны ч.у. множества, называемые *заборами.*

Обобщим это понятие: *заборами* или *зигзагами* будем называть двудольные ч.у. множества, состоящие из $n > 2$ элементов $\{v_1, \ldots, v_n\}$ с отношениями включения $v_{2i-1} \lessdot v_{2i}$ и $v_{2i} \gtrdot v_{2i+1}$ (последнее включение при чётном n и $i = n/2$ отсутствует) и двойственные им; символически $\mathbb{Z}_n$. Обычно элементы нижней и верхней долей множества $\mathbb{Z}_n$ обозначают соответственно символами a и b с индексами.



$a)$ Z_{2k} $b)$ Z_{2k-1}

Если в $2n$-элементном заборе при $n \geqslant 3$ добавить условие «*последний элемент покрывает первый*», то получим *малую корону* $\mathbf{s}_n$:



Полная корона S_n — это $2n$-элементное двудольное ч.у. множество, т.е. $S_n = A \cup B$, где

$A = \{ a_1, \ldots, a_n \}$ — множество минимальных, а $B = \{ b_1, \ldots, b_n \}$ — множество максимальных элементов.

Порядок $\sqsubseteq$ на S_n задаётся следующим образом: для элементов $a_i \in A$ и $b_i \in B$ полагают $a_i \sqsubseteq b_j$ для всех $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$ (и, естественно, $\sqsubseteq$ рефлексивен).

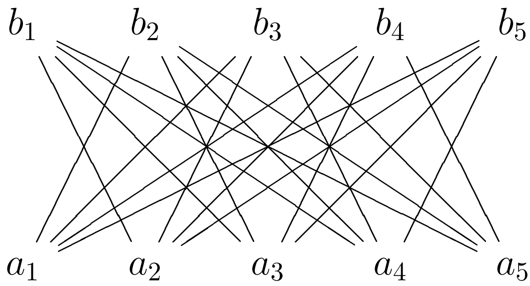


Рис. 3.19. Корона S_5

Число $e(P) =$ всевозможных линеаризаций конечного ч.у. множества P, очевидно равно мощности множества Гёльдера для P (*проблема Рейни*).

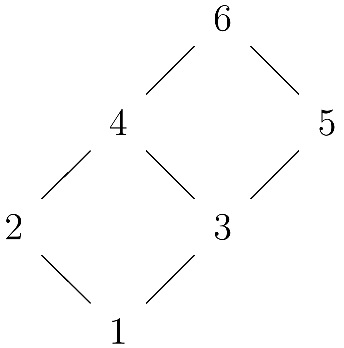
$e(P)$ может интерпретироваться как некоторая оценка сложности P. Ясно, что $e(n\mathbf{1}) = n!$, $e(C) = 1$ для цепи C и это максимально и минимально возможные значения $e(\cdot)$.

Легко показывается справедливость формул

- $e(P \oplus Q) = e(P)\, e(Q)$;
- $e(P{+}Q) = \binom{n+m}{n} e(P)\, e(Q), \quad n = |P|,\ m = |Q|$.
- $e(\mathbf{2} \times \mathbf{n}) = \dfrac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$ — числа Каталана.

Задача $e(P) = ?$ при $n > 5$ решена лишь для очень немногих типов ч.у. множеств.

Пример. Ч.у. множество $\mathbf{2}\times\mathbf{3}$ и его 5-элементное множество Гёльдера $(e(\mathbf{2}\times\mathbf{3}) = \frac{1}{4}\binom{6}{3} = \frac{6\cdot5\cdot4}{4\cdot1\cdot2\cdot3} = 5)$:



$$\{(1,2,3,4,5,6),\ (1,3,2,4,5,6),\ (1,2,3,5,4,6),\ (1,3,2,5,4,6),\ (1,3,5,2,4,6)\}$$

- $$\sum_{n\geqslant 0} \frac{e(Z_n)\,x^n}{n!} = \operatorname{tg} x + \sec x.$$

  Значения $e(Z_n)$ при чётных n называют *числами секанса*, а при нечётных — *числами тангенса*:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \ldots \\ &\qquad \ldots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!}x^{2n-1} + \ldots, \\ \sec x &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \ldots + \\ &\qquad \ldots + \frac{E_n}{(2n)!}x^{2n} + \ldots, \end{aligned}$$

  где B_n и E_n — числа Бернулли и Эйлера соответственно. Например, $e(Z_5) = \frac{2}{15}\cdot 5! = 16$.

Значение $e(Z_n)$ было впервые установлено как мощность множества up-down перестановок: их образуют первые n натуральных чисел, переставленные так, что каждый элемент либо больше, ибо меньше обоих своих соседей.

- Легко найти, что $e(S_n) = (n+1)!(n-1)!$. Соотношение для $e(s_n)$ будет приведено далее.

- $\dfrac{\log(e(B^n))}{2^n} = \log\dbinom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} - \dfrac{3}{2}\log e + o(1)$.

- В общем случае: $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{|\mathbf{m}^{\mathbf{P}}|}{m^n} = \dfrac{e(\mathbf{P})}{n!}$.

- Вычисление значения $e(P)$ — #P-полная задача.

  Один из методов определения $e(P)$ — вероятностный. Для ч.у. множества $\langle \{ v_1, \ldots, v_n \}, \sqsubseteq \rangle$ в n-мерном евклидовом пространстве определим многогранник $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P} = \{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \\ 0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ v_i \sqsubseteq v_j \Rightarrow x_i \leqslant x_j \}$$

  Если $vol(\mathcal{P})$ — объём $\mathcal{P}$, то $e(P) = n! \cdot vol(\mathcal{P})$. Для оценок $vol(\mathcal{P})$ можно применить метод Монте-Карло.

Вероятностное пространство, связанное с ч.у. множеством *Дискретное вероятностное пространство* на множестве всех линеаризаций ч.у. множества

$\langle P, \sqsubseteq \rangle$: каждой $e(P)$ его линеаризаций приписывают равную вероятность.

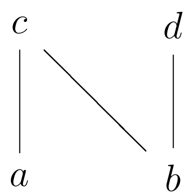
В этом пространстве для элементов x, y, z, … данного ч.у. множества рассматривают события E вида $x \sqsubseteq y$, $(x \sqsubseteq y) \,\&\, (x \sqsubseteq z)$ и т.д. *Вероятность* такого события:

$$\Pr[E] = \frac{\textit{число линеаризаций, в которых имеет место } E}{e(P)}$$

Теорема 3.11 (*XYZ*-теорема). *Пусть* $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ — *ч.у. множество и* x, y, $z \in P$. *Тогда*

$$\Pr[\,x \sqsubseteq y\,] \cdot \Pr[\,x \sqsubseteq z\,] \leqslant \Pr[\,(x \sqsubseteq y) \,\&\, (x \sqsubseteq z)\,].$$

Пример 3.13. Ч.у. множество



имеет пять линейных расширений:

$$[a, b, c, d],\ [a, b, d, c],\ [b, a, c, d],\ [b, a, d, c],\ [b, d, a, c],$$

откуда

$$\Pr[a \sqsubseteq b] = \frac{2}{5}, \quad \Pr[a \sqsubseteq d] = \frac{4}{5} \text{ и}$$
$$\Pr[(a \sqsubseteq b)\&(a \sqsubseteq d)] = \frac{2}{5}.$$

По XYZ-теореме: $8/25 \leqslant 2/5$.

Классическая проблема сортировки — состоит в определении некоторого линейного порядка L с помощью минимального количества вопросов «*верно ли, что* $x < y$ *в* L?».

Обобщение этой проблемы — задача восстановлении некоторой зафиксированной, но неизвестной линеаризации L ч.у. множества P с помощью минимального количества таких вопросов.

«1/3 – 2/3 предположение»: *Любое не являющееся цепью ч.у. множество содержит пару несравнимых элементов x и y, для которых*

$$\frac{1}{3} \leqslant \mathrm{Pr}\,[\,x \sqsubset y\,] \leqslant \frac{2}{3}$$

Пример $\mathbf{2+1}$ — показывает, что указанные границы несужаемы.

Данное предположение до сих пор успешно противостоит всем попыткам его доказать и, *представляет собой одну из наиболее интригующих проблем комбинаторной теории ч.у. множеств.*

Наиболее сильный результат на сегодняшний день:

$$0{,}2764 \approx \frac{5-\sqrt{5}}{10} \leqslant \mathrm{Pr}[x \sqsubset y] \leqslant \frac{5+\sqrt{5}}{10} \approx 0{,}7236$$

для некоторых несравнимых элементов x и y из произвольного ч.у. множества.

Спектр ч.у. множества. Для ч.у. множества $\langle\, P, \sqsubseteq\,\rangle$ совокупность

$$\{\,\mathrm{Pr}\,[\,a \sqsubseteq b\,] \mid a, b \in P,\ a \neq b\,\}$$

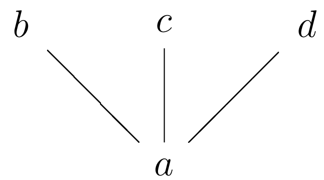
всех значений $\Pr[x < y]$ называют *спектром* P.

- Для всех неодноэлементных тривиально упорядоченных множеств спектр есть $\left\{ \frac{1}{2} \right\}$.
- $\Pr[\, a \sqsubseteq b \,] = 1 - \Pr[\, b \sqsubseteq a \,] \Rightarrow$ спектр симметричен относительно $\frac{1}{2}$.
- $\left\{ 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}$ — единственный трёхэлементный спектр.
- Все четырёхэлементные спектры должны иметь вид $\{ 0, \alpha, 1 - \alpha, 1 \}$, где $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

  Для этого случая высказано недоказанное до сих пор предположение, что всегда $\alpha = \frac{1}{3}$ (E.B. Halvorsen, 2002).

3.6 Размерность ч.у. множеств

Реализация ч.у. множества P совпадает с пересечением всех $e(P)$ своих линеаризаций, однако тот же результат можно получить, взяв значительно меньшее число линейных продолжений.
Например, ч.у. множество



имеющее 6 линеаризаций, может быть представлено в виде пересечения 2 цепей: $[\, a, b, c, d \,]$ и $[\, a, d, c, b \,]$.

Если P — ч.у. множество и $\mathcal{R} = \{\, C_1, \ldots, C_k \,\}$ — совокупность цепей такая, что $P = C_1 \cap \ldots \cap C_k$, то говорят, что $\mathcal{R}$ *реализует* ч.у. множество P.

Определение 3.13. Наименьшее число линейных порядков, дающих в пересечении данное ч.у. множество P называется его *(порядковой) размерностью* последнего и обозначается $\dim(P)$.

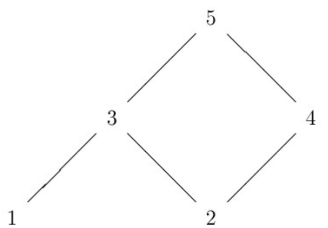
Для вышепреведённого ч.у. множества $\dim(P) \leqslant 3$.

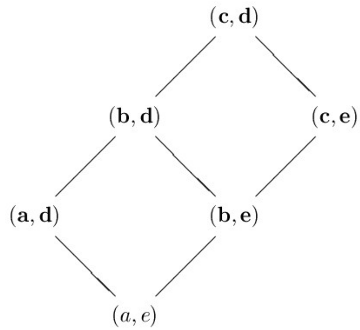
Теорема 3.12 (Оре). *Порядковая и мультипликативная размерности ч.у. множества совпадают.*

Приведённая теорема позволяет не различать указанные виды размерности и пользоваться единым символом $\dim(\cdot)$.

Размерность 1 имеют только цепи.

Пример Ч.у. множество P выделено жирным —



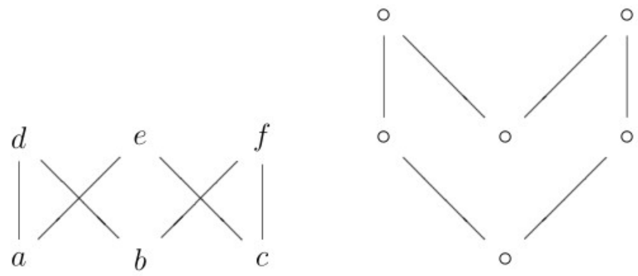


$$P \hookrightarrow [\,a, b, c\,] \times [\,d, e\,],$$
$$P = [\,1, 2, 3, 4, 5\,] \cap [\,2, 4, 1, 3, 5\,].$$

$\dim(\cdot)$ — более тонкая оценка сложности ч.у. множества, чем $e(\cdot)$; в некотором смысле $\dim(\cdot)$ играет ту же роль, что и хроматическое число для графов.

- Размерность 2 имеют:
  - *тривиально упорядоченные* неодноэлементные множества;
  - все отличных от цепей ч.у. множеств, имеющие не более 5 элементов;
  - зигзаги любой длины.

- Размерность 3 имеют 6-элементные ч.у. множества корона s_3, «шеврон» sh и $sh^\sharp$:



Стандартный пример ч.у. множества размерности n — полная корона S_n $(\dim(S_n) = n)$.

Стандартный пример показывает, что существуют ч.у. множества сколь угодно большой размерности.

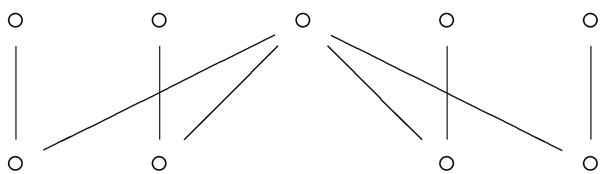


Рис. 3.20. Ч.у. множество P размерности 3

Задача распознавания свойства $\dim(P) \leqslant t$ полиномиальна при $t = 1, 2$ и является NP-полной при $3 \leqslant t$.

Для ч.у. множеств P и Q справедливо:

- $\varnothing \neq Q \subseteq P \Rightarrow \dim(Q) \leqslant \dim(P)$ и при удалении из ч.у. множества одного элемента его размерность уменьшается не более, чем на 1.
- $\dim(P+Q) = \max\{\dim(P), \dim(Q)\}$, если хотя бы одно из множеств не является цепью и $\dim(P+Q) = 2$, иначе.
- $\dim(P\times Q) \leqslant \dim(P)+\dim(Q)$, причём равенство достигается, например, когда и P, и Q — конечные неодноэлементные множества.

  В частности:

  – размерность декартова произведения n цепей (мы не считаем одноэлементные множества цепями) есть n; отсюда следует, что размерность n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, рассмотренного как декартово произведение линейных порядков $\mathbb{R}$ равна n;

  – $\dim(\mathbf{2}^n) = n$;

  – $\dim(S_n \times S_n) = 2n-2$.

- $\dim(P) \leqslant \dfrac{|P|}{2}$ при $|P| \geqslant 4$ (теорема Хирагучи).
- $\dim(P) \leqslant |P-A|$, где A — антицепь в P такая, что $|P-A| \geqslant 2$.

  Таким образом, размерность двудольных ч.у. множеств не превышает мощности наименьшей доли, если обе доли не одноэлементны.

- $\dim(P) \leqslant w(P)$.

Ясно, что наличие у ч.у. множества короны S_n в качестве подмножества означает, что его размерность уже не менее n. Однако ч.у. множество большой размерности может и не содержать стандартного примера в качестве подмножества.
Например, размерность упорядоченной по включению совокупности одно- и двухэлементных подмножеств n-элементного множества неограниченно растёт при $n \to \infty$.

Показано существование границ для почти всех n-элементных ч.у. множеств P:

$$\frac{n}{4}\left(1 - \frac{c_1}{\log n}\right) \leqslant \dim(P) \leqslant \frac{n}{4}\left(1 - \frac{c_2}{\log n}\right),$$

где c_1 и c_2 — некоторые константы.

d-несводимые ч.у. множества. Ч.у. множество P называется *d-несводимым* для некоторого $d \geqslant 2$, если $\dim(P) = d$ и $\dim(P') < d$ для любого собственного ч.у. подмножества $P' < P$.

- Единственное 2-несводимое множество — $\mathbf{1} + \mathbf{1}$.
- 3-несводимые ч.у. множества: s_3, sh, $sh^\sharp$, ...

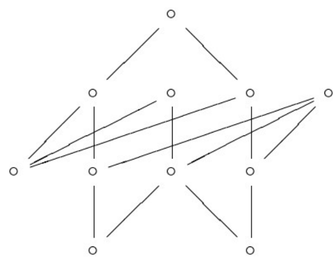


Рис. 3.21. 4-несводимое ч.у. множество

- Единственное $2n$-элементное n-несводимое множество — корона S_n.

Общепринятая точка зрения:
3-несводимые множества редки, хорошо изучены и регулярны,
4-несводимые ч.у. множества достаточно часто встречаются и весьма причудливы.

Проблема Ногина. *Каково наибольшее значение $\pi(d, n)$ мощности множества максимальных элементов d-несводимых n-элементных ч.у. множеств при $d \geqslant 4$?*

Данная проблема с 1990 г. остаётся открытой.

Утверждение 3.2. $\pi(d, n) \leqslant n - d.$

Доказательство. Пусть A — максимальная антицепь в d-несводимом n-элементном ч.у. множестве P. Тогда $|A| = w(P)$ и $|P - A| \geqslant 2$. Поэтому, $d = \dim(P) \leqslant n - w(P)$ и $w(P) \leqslant n - \dim(P)$.
Очевидно, $\pi(P) \leqslant w(P)$, откуда $\pi(P) \leqslant n - \dim(P)$. □

3.7 Вполне упорядоченные множества и смежные вопросы

Лемма Куратовского-Цорна: если в ч.у. множестве все цепи имеют верхние грани, то любой его элемент содержится в некотором максимальном (LKZ, или принцип максимальности).

Принцип Хаусдорфа: всякая цепь ч.у. множества может быть вложена в некоторую максимальную цепь.

Оказалось, что приведённые утверждения эквивалентны — любое из них может быть выведено из другого.

Более того, они также эквивалентны приводимым далее фундаментальным теоретико-множественным аксиомам *выбора* и о *полном упорядочении.*

Аксиома выбора (AC): существует отображение, сопоставляющее каждому непустому подмножеству B множества A элемент из B.

AC: для каждого множества $A \neq \varnothing$ найдётся такая функция f_A, что $f_A(B) \in B$ для любого $B \in \mathcal{P}^*(A)$ (= утверждается, что для любого всюду определённого соответствия можно построить вложенное в него функциональное).

Определение 3.14. Линейно упорядоченное множество называют *вполне упорядоченным* (в.у. множество), если каждое его непустое подмножество содержит наименьший элемент.

Ясно, что в.у. множество всегда содержит *наименьший* элемент. Элементы в.у. множества традиционно обозначают строчными греческими булавами α, β, ….

Во в.у. множестве каждый элемент α,

- если только он не является наибольшим, *имеет единственный непосредственно следующий*, обозначаемый $\alpha + 1$,
- если только он не наименьший, *может иметь не более одного непосредственно предшествующего*; в этом случае, если α не имеет непосредственно предшествующего элемента, он называется *предельным*.

Пример 3.14. 1. Вполне упорядочены все конечные цепи, а так же цепь $\langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle$. В этих ч.у. множествах нет предельных элементов.

2. Ч.у. множество $\langle \mathbb{Z}, \leqslant \rangle$ не является вполне упорядоченным, поскольку оно не имеет наименьшего элемента.

3. Множество
$$\left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, 1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{2}{3}, \ldots, \right.$$
$$\left. \ldots\, m, m+\frac{1}{2}, m+\frac{2}{3}, \ldots \right\}$$
с естественным порядком является вполне упорядоченным, его предельные элементы — натуральные числа.

4. Линейное расширение казуального множества $\langle \mathbb{N}, | \rangle$ по ранее рассмотренному алгоритму является вполне упорядоченным.

Теорема Цермело (принцип полного упорядочения): любое непустое множество можно вполне упорядочить.

Пример 3.15. Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ можно вполне упорядочить считая, например, что

$$0 < 1 < -1 < 2 < -2 < 3 < -3 \ldots \qquad \text{или}$$
$$1 < 2 < \ldots < 0 < -1 < -2 < \ldots$$

Утверждения, эквивалентные приведённым: о равномощности множеств X и $X \times X$; о непустоте декартова произведения произвольной совокупности непустых множеств и др.

Т.о. истинными или ложными все эти утверждения могут быть только одновременно.

Что же имеет место "*в действительности*"? Ответ зависит от того, какими свойствами мы наделяем понятие множества в данной аксиоматике.

Об аксиоме выбора AC (предложена Цермело при разработке аксиоматической теории множеств):

- Для конечных множеств её справедливость очевидна, но при рассмотрении бесконечных совокупностей бесконечных множеств эта очевидность теряется.
- *все попытки свести AC к другим фундаментальным принципам оказались безуспешными*[2].
- AC является независимым от остальных аксиом теории множеств утверждением и добавление к

[2] Доказательство невозможности опровергнуть AC в аксиоматике NBG дал в 1940 г. К.Гёдель. В 1963 г. П.Коэн доказал независимость AC от остальных аксиом ZFC. Аксиоматики теории множеств NBG и ZFC равнообъёмны: любая теорема о множествах, доказуемая в одной системе, также доказуема и в другой.

ним как самой этой аксиомы, так и её отрицания порождает две равноправные непротиворечивые аксиоматики теории множеств.

- При практических, не связанных с вопросами оснований математики и теории множеств исследованиях, можно как принять аксиому выбора, так и отказаться от неё.

К чему ведёт принятие/отклонение AC

Отклонение AC — обеднение содержания конкретных математических теорий: не удаётся доказать —

- условия существования максимальных элементов ч.у. множеств;
- наличие базиса у произвольного векторного пространства;
- эквивалентности двух определений непрерывности функции в точке (на языке ε–δ и через пределы последовательностей);
- ...

Принятие AC влечёт существование объектов с парадоксальными свойствами:

- неизмеримого по Лебегу множества действительных чисел;
- такого разбиения шара на четыре части, что из них движениями в пространстве оказывается возможным составить два таких же шара;
- ...

К. Гёдель показал:

- присоединение АС к системе аксиом теории множеств не увеличивает опасности впасть в противоречие (т.е. если в расширенной системе встретилось противоречие, то причина его в исходной системе, а не в АС);
- всякое свойство натуральных чисел, доказываемое с помощью аксиомы выбора, может быть доказано и без неё (т.е. в теории чисел АС можно рассматривать лишь как вспомогательное средство, нужное лишь для упрощения доказательств).

При конкретных математических исследованиях АС, как правило, принимают. Доказательства, не использующие аксиому выбора (или эквивалентные ей утверждения) называют *эффективными*.

В нашем курсе мы остаёмся в рамках *наивной теории множеств* с аксиомами (x, y, … — множества)

объёмности: $(x \subseteq y)\&(y \subseteq x) \supset (x = y)$;

свёртки: $y = \{\, x \mid \varphi(x)\,\}$, $\varphi(x)$ — предикат.

Неограниченное применение аксиомы свёртки может привести к противоречиям (*парадоксам*).

Пример 3.16 (Парадокс Рассела). *Множество Рассела* — $R = \{\, x \mid x \notin x\}$, т.е. $z \in R \Leftrightarrow z \notin z$. При подстановке $z \mapsto R$ получаем $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$ — противоречие.

В современных аксиоматических теориях множеств ни R, ни подобные «экзотические» множества не могут быть построены.

Если α — элемент в.у. множества, то интервал $[\,o,\,\alpha\,) \overset{\text{def}}{=} \alpha^{\triangledown} \setminus \{\alpha\}$ называют *начальным отрезком* α. Символ $[\,o,\,o\,)$ понимается как пустое множество.

Теорема 3.13 (свойства вполне упорядоченных множеств). *Пусть* $\langle\, C,\, \leqslant \rangle$ *— в.у. множество. Тогда*

1) *если и* $C^{\sharp}$ *вполне упорядочено, то* C *— конечная цепь;*

2) *если* α *— предельный элемент вполне упорядоченного множества, то*

$$[o,\alpha) \;=\; \bigcup_{\beta<\alpha}[o,\beta).$$

Доказательство.

1. Поскольку C и $C^{\sharp}$ вполне упорядочены, то C содержит o и ι, каждый её элемент, отличный от ι имеет последующий, а отличный от o — предшествующий. Следовательно в C отсутствуют предельные элементы, все её сечения — скачки, что вместе с наличием o и ι означает конечность C.

2. Если $\gamma \in [\,o,\,\alpha\,)$, то поскольку между γ и $\gamma+1$ элементов нет, $\gamma+1 \leqslant \alpha$. Однако в силу предельности α, равенство невозможно.

   Таким образом

$$\gamma \in [\,o,\,\gamma+1\,) \;\subseteq\; \bigcup_{\beta<\alpha}[\,o,\,\beta\,), \qquad \text{т.е.}$$

$$[\,o,\,\alpha\,) \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} [\,o,\,\beta\,).$$

Обратное включение очевидно. □

Сравнение в.у. множеств и кардинальные числа

Теорема 3.14 (о сравнении вполне упорядоченных множеств). *Пусть A и B — два вполне упорядоченных множества.*

Тогда имеется лишь одна из следующих возможностей:

1. *$A \cong B$;*
2. *$A \cong$ некоторому начальному отрезку B;*
3. *$B \cong$ некоторому начальному отрезку A.*

Факт равномощности множеств A и B обозначают $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$, а неравномощности — $\overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{B}}$.

Под $\overline{\overline{X}}$ понимается новый объект, связанный с множеством X, называемый *кардинальным числом* X или кардиналом.

Теорема 3.15 (о сравнении множеств — закон трихотомии). *Для любых множеств A и B имеется лишь одна из следующих возможностей:*

1. *$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ (A эквивалентно B);*
2. *$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B'}}$ для некоторого $B' \subseteq B$,*
   но $\forall\, A' \subseteq A : \overline{\overline{A'}} \neq \overline{\overline{B}}$;

3. $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A'}}$ *для некоторого* $A' \subseteq A$,
но $\forall\, B' \subseteq B : \overline{\overline{B'}} \neq \overline{\overline{A}}$.

Доказательство. По аксиоме о полном упорядочении для A и B справедлива предыдущая теорема (о сравнении в.у.м.).

Тогда либо справедливы утверждения (2) –(3) , либо выполняются условия теоремы Кантора-Шрёдера-Бернштейна (если каждое из множеств равномощно подмножеству другого, то множества равномощны), что влечёт выполнение условия (1) . □

Закон трихотомии — лежит в основе учения о мощности множеств, позволяя ввести порядок на множестве кардинальных чисел: считать, что $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ и $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$ соответственно в случаях (2) и (3) теоремы.

Теорема 3.16 (*Кантор*). $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}}$.

Доказательство. Сопоставив каждому элементу $a \in A$ одноэлементное подмножество $\{a\}$ множества A, получим вложение A в $\mathcal{P}(A)$, и поэтому $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}}$.

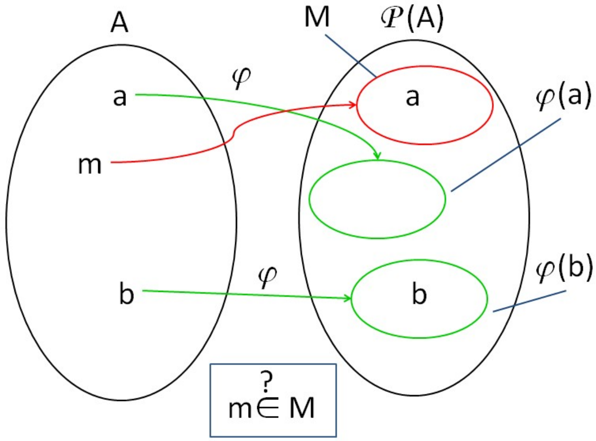
Допустим теперь, что существует взаимнооднозначное отображение φ множества A в $\mathcal{P}(A)$.

Во множестве A определим подмножество M:

$$M = \{a \in A \mid a \notin \varphi(a)\} \in \mathcal{P}(A).$$

По определению φ должен существовать элемент $m \in A$ такой, что $\varphi(m) = M$. Но тогда получаем противоречие:

$$m \in M \Rightarrow m \notin \varphi(m) = M \text{ и } m \notin M \Rightarrow m \in \varphi(m) = M.$$



□

Из теоремы Кантора сразу следует *Парадокс Кантора*: образуем множество всех множеств: $V = \{\, x \mid x = x \,\}$.
Но тогда $\overline{\overline{\mathcal{P}(V)}} \leqslant \overline{\overline{V}}$ — противоречие.

Следовательно множества всех множеств не существует (причина: *не всякое свойство определяет множество*, т.е. дело в аксиоме свёртки).

Показывается, что *множество кардинальных чисел вполне упорядочено*, откуда получают много важных и интересных следствий.

Теорема 3.17 (принцип трансфинитной индукции). *Пусть C — вполне упорядоченное множество с каждым элементом α которого связано утверждение S_α, которые образуют совокупность S.*
Тогда, если из справедливости S_β для всех $\beta \in [o, \alpha)$ следует справедливость S_α, то верны все утверждения из S.

Доказательство. Пусть среди S имеется неверное утверждение и тогда множество E неверных утверждений непусто.

Пусть α — наименьший элемент E, который всегда существует в силу полного порядка на C. Но тогда, поскольку S_β справедливо для всех $\beta \in [o, \alpha)$, справедливо и S_α — противоречие. □

Лемма 3.1. *Пусть $\langle\, A, \simeq \,\rangle$ — пространство толерантности, а $\langle\, C, \leqslant \,\rangle$ — вполне упорядоченное множество, каждому элементу α которого сопоставлен предкласс толерантности $E_\alpha \subseteq A$ так, что из $\alpha_1 < \alpha_2$ следует $E_{\alpha_1} \subseteq E_{\alpha_2}$.*

Тогда объединение $\bigcup E_\alpha = E$ является предклассом толерантности в A.

Лемма 3.2 (о классах толерантности). *Для всякого предкласса существует содержащий его класс.*

Доказательство. Базис индукции может быть начат с любого класса. □

Трансфинитная индукция и LKZ — два альтернативных метода доказательств свойств ч.у. множеств.

3.8 Некоторые применения теории ч.у. множеств

Применение ч.у. множеств в математике

1. Использование частичных порядков в *теории чисел, теории множеств и комбинаторике* (теория разбиений и др.) уже были упомянуты.
2. Рассматривают АС, носители которых частично упорядочены.

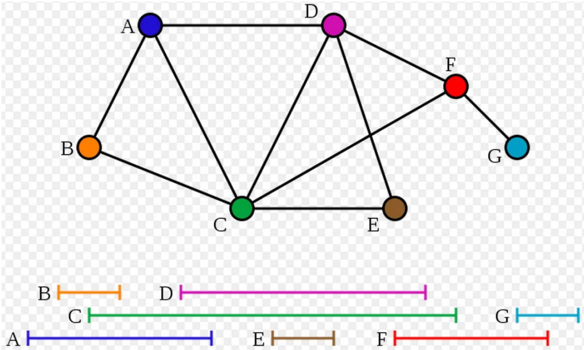
   Наиболее исследованы *частично упорядоченные группы, кольца и полугруппы* (например, системы Туэ).
3. Для представления *групп перестановок* используют т.н. *PQ-деревья*, являющиеся расширением понятия ч.у. множества.
   Их применяют поиска перестановок, ограничения на которые становятся известны постепенно, одно за другим (воссоздание ДНК, проверка планарности графа и др.).

   Планарный граф — граф, который может быть изображён на плоскости без пересечения ребер.

   Интервальный граф — граф пересечений мультимножества интервалов на прямой, имеющий по одной вершине для каждого интервала в множестве и по ребру между каждой парой вершин, если соответствующие интервалы пересекаются:

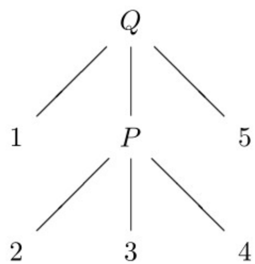
   PQ-деревья — корневые планарные деревья, висячие вершины в которых представляют переставляемые элементы, а остальные вершины имеют пометку либо P, либо Q.

   Вершины с пометкой Q имеют по крайней мере 3 потомка и их порядок разрешается обращать, а



вершины с пометкой P — по крайней мере 2 потомка и их разрешается как угодно переставлять.

Пример: группа перестановок последовательности $(1, 2, 3, 4, 5)$, содержащая, вместе с единичной, перестановку крайних и произвольную перестановку трёх внутренних элементов, описывается PQ-деревом —



Применение параллельно-последовательных ч.у. множеств

- Параллельно-последовательные ч.у. множества используются в качестве *модели событий во временных рядах.*

- Параллельно-последовательные ч.у. множества применяют для *оптимизации пропускной спо-*

собности параллельной вычислительной системы при назначении задач для выполнения на том или ином процессоре.

Применение ч.у. множеств в исследовании операций. Важным разделом исследования операций является теория принятия решений при многих критериях.

Согласно *принципу Эджворта-Парето* наилучшие решения всегда следует выбирать в среди элементов множества Парето.

Пусть $y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x)) \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ — набор критериев эффективности какого-либо решения x из множества допустимых альтернатив X, причём значение каждый из данных критериев желательно *максимизировать*.

В экономике решение $x^* \in X$ называется *оптимальным по Парето (парето-оптимальным)*, если не существует такого возможного решения $x \in X$, для которого $y_i(x^*) \leqslant y_i(x)$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Все парето-оптимальные решения образуют *множество Парето*, которое мы обозначим здесь Π, $\Pi \subseteq X$.

Нахождение множества Парето в простейшем случае, когда множество возможных векторов $Y = \{\, y(x) \mid x \in X \,\}$ состоит из конечного числа N элементов, т.е. имеет вид $\{y^1, \ldots, y^m\}$ (мы опускаем указание на на зависимость y от x), сводится к их попарным сравнениям и исключением из Y и из дальнейшего сравнения векторов, заведомо не входящих в Π — со значениями всех координат, меньших, чем у другого (доминируемых).

Пример: Задача о выборе наилучшего проектного решения

Для участия в конкурсе представлено 5 вариантов строительства на территории, непосредственно прилегающей к жилому району предприятий различного типа (например, x^1 — машиностроительный завод, x^2 — текстильная фабрика, x^3 — молочный завод и т.п.).

Оценивание качества проекта производится по четырем критериям:

y_1 — стоимость реализации проекта,

y_2 — величина прибыли проектируемого предприятия,

y_3 — величина экологического ущерба от строительства,

y_4 — заинтересованность жителей района в строительстве данного предприятия.

Пусть в результате экспертизы проектов были получены оценки всех критериев по пятибалльной шкале, которые представленны в нижеследующей таблице.

	y_1	y_2	y_3	y_4
x^1	1	3	1	3
x^2	0	3	2	3
x^3	3	4	3	4
x^4	0	3	3	3
x^5	2	4	2	4

Поскольку 1 и 3-й критерии желательно минимизировать, а не максимизировать как остальные, то заменив в столбцах y_1 и y_3 таблицы значения z на $5-z$

на противоположные, произведём попарное сравнение полученных векторов.

В результате удаления доминируемых элементов, получим множество Парето $\Pi = \{x^1, x^2, x^5\}$, т.е. осуществлять окончательный выбор следует из 1, 2 и 5-го проектов.

Применение ч.у. множеств в математической логик: модели Крипке как общий способ установления истинности формул логических исчислений.

Зафиксируем множества

- $Var = \{x, y, \ldots\}$ *логических переменных* — символов *атомарных высказываний*;
- $\Phi = \{\neg, \&, \vee, \supset\}$ — *логических связок.*

Определение 3.15. *Формулой* над множеством Φ логических связок называется либо некоторая логическая переменная (*атомарная формула*), либо одно из знакосочетаний вида $(\neg A)$, $(A \,\&\, B)$, $(A \vee B)$ или $(A \supset B)$ (молекулярная формула), где A и B — формулы.

$\mathcal{A}$ — множество всех логических формул.

Для сокращения записи формул принимают соглашения — правила экономии скобок и приоритета связок: внешние скобки у формул опускаются и сила связок убывает в порядке, указанном при их введении выше ($>$ — «сильнее»)

$$\neg > \& > \vee > \supset$$

Каждая логическая переменная может принимать, вообще говоря, счётное множество *истинностных значений* $\{\,\mathbf{0},\, 1,\, \ldots,\,\}$. Первое значение $\mathbf{0}$ назовём *выделенным.*

Неформально выделенное значение символизирует «истину» (**И**), а остальные — различные ситуации отсутствия истинности: неопределённость высказывания, различные формы его «ложности» (**Л**) и т.д. В классической логике множество истинностных значений сужается до двух: $\{$ **И**, **Л** $\}$ и выделенное — **И**.

Схемы аксиом ИИВ:

1. $A \supset (B \supset A)$;
2. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$;
3. $A \,\&\, B \supset A$;
4. $A \,\&\, B \supset B$;
5. $A \supset (B \supset (A \,\&\, B))$;
6. $A \supset A \vee B$;
7. $B \supset A \vee B$;
8. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$;
9. $\neg A \supset (A \supset B)$;
10. $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$.

Аксиомы ИВВ получаются при подстановке в схемы конкретных формул вместо *метасимволов* A, B и C.

В ИИВ имеется единственное правило вывода, обозначаемое MP (лат. *modus ponens*), позволяющее из формул A и $A \supset B$ получить формулу B:

$$A,\, A \supset B \vdash B$$

Формула A называется *выводимой*, если найдётся конечная последовательность формул $A_1, \ldots, A_l$ такая, что $A_l = A$ и каждый элемент последовательности

- либо является аксиомой,
- либо получен по правилу MP из каких-то двух предыдущих формул.

Выводимость формулы A записывается как $\vdash A$, в случае отсутствия вывода пишут $\nvdash A$.

Пример 3.17 (вывод формулы в ИИВ). Покажем

$$\vdash x \vee y \supset y \vee x.$$

(1) $x \supset y \vee x$ — подстановка в схему 7

(2) $y \supset y \vee x$ — подстановка в аксиому 6

(3) $(x \supset y \vee x) \supset ((y \supset y \vee x) \supset (x \vee y \supset y \vee x))$ — подстановка в аксиому 8: $A \mapsto x$, $B \mapsto y$, $C \mapsto y \vee x$

(4) $(y \supset y \vee x) \supset (x \vee y \supset y \vee x)$ — по MP из (1) и (3)

(5) $x \vee y \supset y \vee x$ — по MP из (2) и (4)

Напоминание:
(6) $A \supset A \vee B$;
(7) $B \supset A \vee B$;
(8) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$.

Пусть Γ — конечное множество формул.

Формула B называется *выводимой из множества формул* Γ (символически $\Gamma \vdash B$), если найдётся конечная последовательность формул $B_1, \ldots, B_l$ такая, что $B_l = B$ и каждый элемент этой последовательности

- либо является аксиомой,
- либо принадлежит Γ,
- либо получен по правилу MP из каких-то двух предыдущих формул.

Факт выводимости $\Gamma \vdash B$ не изменится, если вместо множества Γ взять одну формулу — конъюнкцию формул из Γ, так что можно рассматривать только одноэлементные множества Γ и опуская фигурные скобки, писать $A \vdash B$.

Знак $\vdash$ является символом *отношения предпорядка* на множестве $\mathcal{A}$.

Проблема выводимости — одна из важнейших проблем любого логического исчисления L: «*выводима ли в* L *данная формула?*» —

$\vdash A$ — можно либо предъявить соответствующий вывод, либо доказать его существование;

$\nvdash A$ — возможно лишь дать доказательство несуществования вывода A.

Метатеория — теория, изучающая язык, структуру и свойства некоторой другой (*объектной*) теории:

- корректность,
- непротиворечивость,
- различные виды полноты,
- проблема разрешимости,
- независимость систем аксиом и правил вывода,
- ...

Если к схемам аксиом добавить ещё одну:

11. $A \vee \neg A$ — логический закон TND (лат. *tertium non datur*, «третьего не дано»),

то получим *классическое исчисление высказываний КИВ.*

Тогда каждой логической переменной можно приписать одно из двух истинностных значений $\mathbf{1}$ или $\mathbf{0}$, понимаемых как «истина» и «ложь» соответственно, и по правилам

$$|\neg A| = \mathbf{1} \ \Leftrightarrow\ |A| = \mathbf{0};$$

$$|A \,\&\, B| = \mathbf{1} \ \Leftrightarrow\ |A| = |B| = \mathbf{1};$$

$$|A \vee B| = \mathbf{0} \ \Leftrightarrow\ |A| = |B| = \mathbf{0};$$

$$|A \supset B| = \mathbf{1} \ \Leftrightarrow\ |B| = \mathbf{1} \text{ или } |A| = \mathbf{0}.$$

получить оценку $|F| \in \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ любой формулы F.

Формулы, истинные при любых *интерпретациях* — возможных вариантах приписываний логическим переменным значений ($\mathbf{1}$ или $\mathbf{0}$) — называются *тавтологиями.*

Примеры тавтологий: все аксиомы 1–11, $\neg\neg x \supset x$, $\neg(x \vee y) \supset \neg x \,\&\, \neg y$, ...

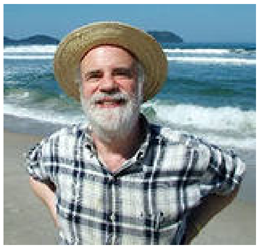
<u>В КИВ</u> выводимыми оказываются все тавтологии и только они $\Rightarrow$ проблема выводимости сводится к проверке формулы на тавтологичность.

<u>В ИИВ</u> задача радикально усложняется: это исчисление не имеет конечнозначной интерпретации, т.е. если в любом конечном наборе $Tr = \{\, \mathbf{0},\, 1,\, \ldots,\, k-1\}$ объявив значение $\mathbf{0}$ выделенным и задав правила оценки

формул так, чтобы при всех интерпретациях переменным из Var значений из Tr все аксиомы всегда принимали бы только значение $\mathbf{0}$, найдётся такая формула F, что $|F| = \mathbf{0}$, но $\nvdash F$.

- Любая выводимая в ИИВ формула выводима и в КИВ.
- Обратное неверно: например, формулы, получаемые из схемы TND и $\neg\neg x \supset x$, $\neg(x \vee y) \supset \neg x \mathbin{\&} \neg y$, ... невыводимы в ИИВ.

Для разрешения проблемы выводимости в ИИВ применим метод, основанный на построении *шкал Крипке*.



Сол Крипке (Saul Aaron Kripke, 1940) — американский философ и логик, один из десяти выдающихся философов последних 200 лет. Ещё юношей внёс значительный вклад в математическую логику, философию математики и теорию множеств.

Шкалы Крипке: построение Чтобы задать такую шкалу нужно:

- указать ч.у. множество $\langle W, \leqslant \rangle$, элементы носителя которого называют *мирами*;
- для каждого мира указать, какие из логических переменных в нём являются истинными (остальные переменные в этом мире ложны).

Факт истинности переменной x в мире w будем записывать символически $w \Vdash x$, ложности — $w \nVdash x$. При формировании шкалы Крипке требуется, чтобы

$$u \leqslant v,\, u \Vdash x \;\Rightarrow\; v \Vdash x$$

— т.е. говорят, что *область истинности переменной наследуется вверх* (*сохраняется в бо́льших мирах*) — *условие наследования истинности.*

Неформально порядок $u \leqslant v$ между мирами интерпретируется как то, что мир v есть состояние мира u в следующий момент времени, понимая время не в физическом, а в логическом смысле: каждый мир описывается состоянием знаний в данный момент и однажды установленная истинность или доказанный факт остаётся таковым и впоследствии.

Логическое время не обязательно обладает линейным порядком.

Определение 3.16. *Шкала Крипке* есть тройка

$$\langle\, W, \leqslant, \Vdash \,\rangle,$$

где: редукт $\langle\, W, \leqslant \,\rangle$ — ч.у. множество,

$\Vdash\ \subseteq\ W \times Var$ — соответствие «один ко многим», ставящее каждому миру совокупность истинных в нём логических переменных и удовлетворяющее условию наследования истинности.

Для построенной шкалы Крипке определим истинность данной формулы A в любом мире w:

$w \Vdash A \,\&\, B \;\Leftrightarrow\; w \Vdash A$ и $w \Vdash B$;

$w \Vdash A \vee B \;\Leftrightarrow\; w \Vdash A$ или $w \Vdash B$;

$w \Vdash A \supset B \;\Leftrightarrow\; \forall(u \geqslant w)\; u \Vdash B$ или $u \nVdash A$;

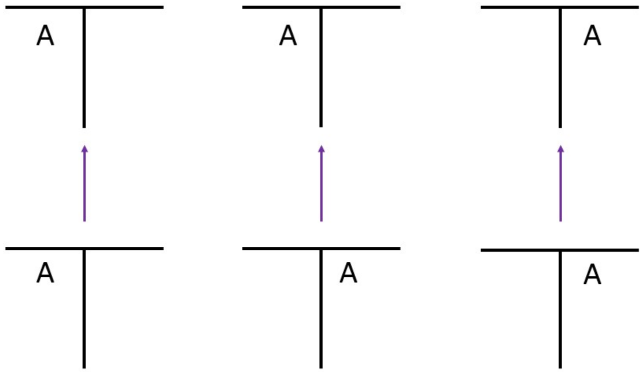
$w \Vdash \neg A \;\Leftrightarrow\; \forall(u \geqslant w)\; u \nVdash A$ (т.е. если $\Vdash \neg A$, то ни в этом, ни в каком-либо большем мире невозможно $\Vdash A$).

Введённые шкалы Крипке задают *семантику* ИИВ, придавая смысл формулам — разделяя их на истинные и ложные *в данном мире*.

Шкалы Крипке: истинность формулы в мирах:

- Истинная в данном мире формула остаётся истинной и в старших (бóльших) мирах.
- Ложная в данном мире формула была ложной и во всех младших (меньших) мирах.
- Если формула содержит только связки $\&$ и $\vee$, то её истинность в данном мире не зависит от её истинности в других мирах.
- Истинности импликации и отрицания используют порядок на множестве миров.
- Следствием предыдущего является факт независимости импликации от других связок: в ИИВ, например, формулы $A \supset B$ и $\neg A \vee B$ логически не эквивалентны.

Шкалы Крипке: три варианта истинности формулы в шкале из двух связанных миров. Каждому миру соответствует таблица из 2 столбцов. Если $w \Vdash A$, то помещаем формулу A в левый столбец мира w, если $w \nVdash A$, то в правый.



Теорема 3.18 (корректности ИИВ относительно шкал Крипке). *Формула, выводимая в ИИВ, истина во всех мирах всех шкал Крипке.*

Доказательство. Покажем, что (1) все аксиомы истины во всех мирах и (2) правило MP сохраняет истинность.

Второе очевидно: если и A, и $A \supset B$ истины во всех мирах, то B будет также истина во всех мирах.

Замечание: чтобы в мире w проверить оценку

- истинность импликации $A \supset B$ надо удостовериться, что $w \Vdash A \Rightarrow w \Vdash B$ ($w \nVdash A$ эта импликация подавно истина);

- ложность импликации $A \supset B$ надо удостовериться, что $w \Vdash A \Rightarrow w \nVdash B$.

Первое: проверяем истинность всех аксиом ИИВ.

1-я аксиома $A \supset (B \supset A)$.

Если в некотором мире u имеет место $u \Vdash A$, то во всех мирах $v \geqslant u$ (в том числе и в u) справедливо $v \Vdash B \supset A$.

2-я аксиома $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$. Пусть существует мир u, где она ложна $\Rightarrow$ в нём должны быть истины формулы $A \supset (B \supset C)$, $A \supset B$ и A, а C — ложна.

Но из $u \Vdash A$ и $u \Vdash A \supset B$ следует $v \vDash B$ во всех мирах $v \geqslant u$.

При $u \vDash A \supset (B \supset C)$ это означает справедливость $w \vDash C$ во всех мирах $w \geqslant v$. Отсюда следует справедливость $u \vDash C$ — противоречие.

<u>Остальные аксиомы</u> проверяются аналогично и ещё проще. $\square$

Следствие. *Для доказательства невыводимости формулы в ИИВ достаточно указать шкалу Крипке, в одном из миров которой она ложна.*

Такая шкала называется *контрмоделью* для данной формулы.

Существует контрмодель, являющаяся корневым деревом, в которой мир с ложной формулой — его корень.

Пример 3.18. 1. Постоим шкалу Крипке, содержащую мир, в котором формула $\underline{x \vee \neg x}$ ложна.

Возьмём два мира u и v такие, что $u \leqslant v$, $u \nVdash x$ и $v \Vdash x$.

Тогда $v \nVdash \neg x$, откуда $u \nVdash \neg x$, что, в свою очередь даёт $u \nVdash x \vee \neg x$ (но $v \Vdash x \vee \neg x$).

2. Та же шкала будет контрмоделью для формулы $\underline{\neg\neg\, x \supset x}$:
положив $u \nVdash x$ и $v \Vdash x$, по вышеприведённым правилам получим, что $u \nVdash \neg\, x$, $u \Vdash \neg\neg\, x$ и $u \nVdash \neg\neg\, x \supset x$.

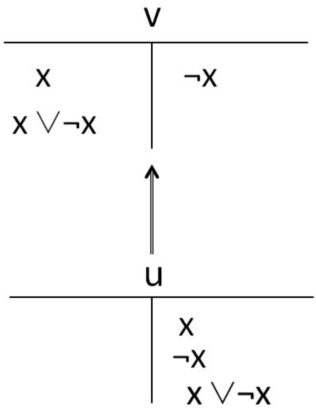


Рис. 3.22. Контрмодель для $u \nVdash x \vee \neg x$

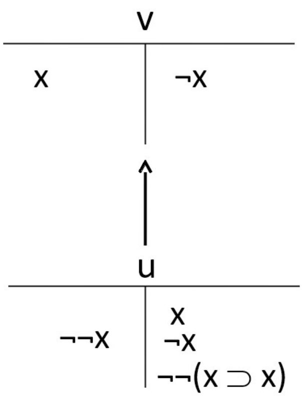


Рис. 3.23. Контрмодель для $\neg\neg x \supset x$

3. Постоим контрмодель для формулы $\underline{\neg x \vee \neg\neg x}$.

Пусть в мире u она ложна: $u \nVdash \neg x \vee \neg\neg x$. Тогда в это мире ложны оба члена дизъюнкции: $u \nVdash \neg x$, $u \nVdash \neg\neg x$.

В соответствии с правилами истинности и ложности формул в шкалах, пусть в $v \nVdash \neg x$ и $v \Vdash \neg\neg x$ в мире v, бо́льшим u, а в бо́льшим u мире w — $w \nVdash \neg\neg x$

$w \Vdash \neg\neg x$. При этом миры v и w несравнимы: $u \leqslant v$, $u \leqslant w$, $u \nsim w$.

Искомая контрмодель построена. В ней формула x будет истинна только в мире v.

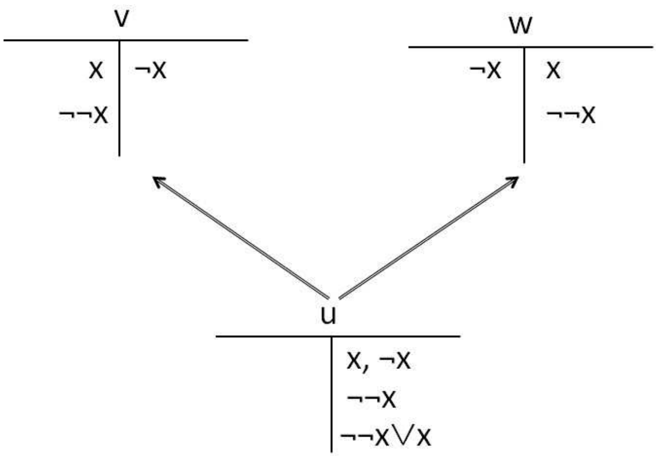


Рис. 3.24. Контрмодель для формулы $\neg x \vee \neg\neg x$

Шкалы Крипке: применение

1. Метод автоматической верификации параллельных вычислительных систем (англ. model checking), позволяет проверить, удовлетворяет ли заданная модель системы формальным спецификациям.

   В качестве модели обычно используют шкалы Крипке, а для спецификации аппаратного и программного обеспечения — *темпоральную* (временную) логику.

2. *Модальные логики* формализуют *сильные* и *слабые модальные* выражения вида «необходимо/возможно», «всегда/иногда», «здесь/где-то» и т.д.

   Заменив в определении шкалы Крипке частичный порядок на

   - отношение толерантности — получим семантику для брауэровой логики B;
   - аморфное отношение — семантику для логики S5;
   - диагональное — модель для модальной логики M.

3.9 Задачи и упражнения

Устные вопросы

Задача 3.1. *Являются ли порядками/предпорядками:*

1. *Отношение делимости* $|$ *на множестве чисел* $\mathbb{Z} \smallsetminus 0$*?*

   Это предпорядок, не порядок: из $m \,|\, n$ *и* $n \,|\, m$ *не следует, что* $m = n$*, а лишь* $|m| = |n|$*.*

2. *Отношение равенства.*

   Это порядок. Эквивалентность (тождество) — рефлексивное, транзитивное и симметричное отношение.

Задача 3.2. *Пусть* M *— множество людей,* $h(x)$ *— рост, а* $w(x)$ *— вес человека* x*. Определим на отношение* ρ *на* M*:*

$$x\rho y \;\Rightarrow\; (h(x) \leqslant h(y))\,\&\,(w(x) \leqslant w(y))$$

для любых $x, y \in M$*.*

Является ли ρ *отношением частичного порядка на* M*?*

Решение.
Нет. ρ — рефлексивно и транзитивно, и, следовательно, *предпорядок.*
С другой стороны, ρ не является антисимметричным отношением: из $x\rho y \& y\rho x$ не следует, что $x = y$ (могут найтись два человека с одинаковым ростом и весом).

Задача 3.3. *Для* $\langle \mathcal{P}(U), \subseteq \rangle$ *и* $A \subseteq \mathcal{P}(U)$ *чем являются точные верхняя и нижняя грани множества* A *случае:*

1. $A \neq \varnothing$*?*
2. $A = \varnothing$*?*

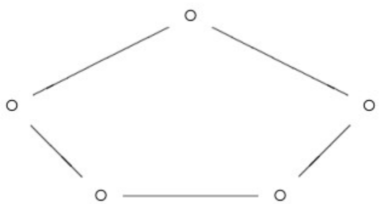
Решение.

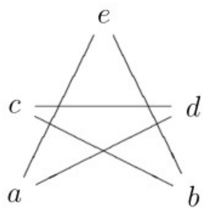
1. пересечением и объединением всех над- и подподмножеств соответственно:

$$\sup A = \bigcap_{A \subseteq X} X, \ \inf A = \bigcup_{X \subseteq A} X.$$

2. $\sup\{\varnothing\} = \varnothing, \ \inf\{\varnothing\} = U$ (по монотонности).

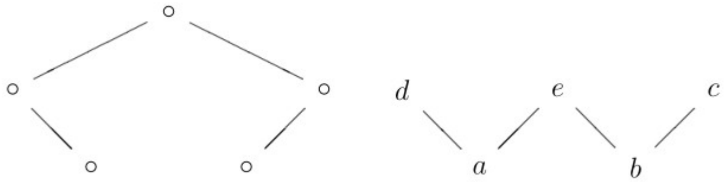
Задача 3.4. *Какая ошибка допущена в следующих диаграммах Хассе:*





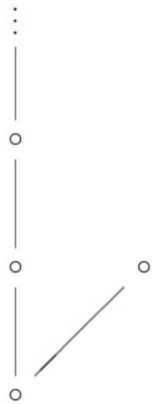
Какую из них можно, после исправления, упростить?

Решение.



Задача 3.5. *Приведите пример ч.у.м., имеющего в точности один максимальный элемент и не имеющего наибольшего.*

Решение.



Задача 3.6. *Покажите на примере, что если φ — изотонная биекция одного ч.у. множества на другое, то φ^{-1} может и не быть изотонным.*

Решение. Два первых примера из лекции.

1. Тождественное отображение $id_{\mathbb{N}}$ ч.у. множесттва $\langle\, \mathbb{N}, \mid \,\rangle$ в $\langle\, \mathbb{N}, \leqslant \,\rangle$:

$$m \mid n \;\Rightarrow\; m \leqslant n$$

2. Тождественное отображение неодноэлементного множества с тривиальным порядком $\triangle$ на то же самое множество с нетривиальным порядком $\sqsubseteq$:
$$a \triangle b \;\Rightarrow\; a \sqsubseteq b$$

3. Пусть P — казуальное ч.у. множество с конечным числом непосредственно следующих и непосредственно предшествующих элементов, с минимальными элементами и не являющееся цепью. Занумеруем минимальные элементы P (пусть их m_1) числами $1, \ldots, m_1$ в любом порядке. Исключив занумерованные элементы из P получим множество P^1. Пусть в нём имеется m_2 минимальных элементов. Занумеруем их числами $m_1 + 1, \ldots, m_1 + m_2$ и т.д. Естественное отображение $P \to \mathbb{N}$ изотонно, но не обратно изотонно.

Все рассмотренные отображения изотонны, но не обратно изотонны (и, следовательно, не изоморфизм).

Задача 3.7. *Для каких множеств A ч.у. множество $\langle \mathcal{P}(A), \subseteq \rangle$ является цепью?*

Решение. Для пустых и одноэлементных.

Задача 3.8. *Описать множество $\mathbf{2^n}$. Чему оно изоморфно?*

Решение. Имеем $\mathbf{2} \cong [0, 1]$ и $\mathbf{n} \cong [x_1, \ldots, x_n]$.
$\mathbf{2^n} = F = \left\{ \mathbf{n} \xrightarrow{f} \mathbf{2} \mid f \text{ — монотонная ф-я} \right\}$.

Функции будем задавать вектором своих значений для $(x_1 x_2 \dots x_n)$:

$$\begin{aligned} f_1 &= (00\dots000),\\ f_2 &= (00\dots001),\\ f_3 &= (00\dots011),\\ &\dots\dots\\ f_{n+1} &= (11\dots111), \end{aligned}$$

т.е. $F \cong (\mathbf{n+1})$.

Задача 3.9. *Пусть* $\alpha, \beta \in \mathcal{R}(\mathbb{N})$, *определяемые как*

1. $(a,\, b)\alpha(c,\, d) \;\Leftrightarrow\; a \leqslant c \,\&\, b \leqslant d$;
2. $(a,\, b)\beta(c,\, d) \;\Leftrightarrow\; a \leqslant c \,\&\, b \geqslant d$.

Какими свойствами (R, S, AS, T) они обладают?

Решение. (1) $\underline{(a,\, b)\alpha(c,\, d) \;\Leftrightarrow\; a \leqslant c \,\&\, b \leqslant d}$;

R: очевидна;

S/AS: $\left\{\begin{array}{l}(a,\, b)\alpha(c,\, d)\\ (c,\, d)\alpha(a,\, b)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a \leqslant c \,\&\, b \leqslant d\\ c \leqslant a \,\&\, d \leqslant b\end{array}\right. \Rightarrow$

$$\Rightarrow\; (a = c) \,\&\, (b = d) \;\Leftrightarrow\; AS$$

T: $\left\{\begin{array}{l}(a,\, b)\alpha(c,\, d)\\ (c,\, d)\alpha(e,\, f)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(a \leqslant c) \,\&\, (b \leqslant d)\\ (c \leqslant e) \,\&\, (d \leqslant f)\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\; (a \leqslant e) \,\&\, (b \leqslant f) \;\Leftrightarrow\; (a,\, b)\alpha(e,\, f) \;\Rightarrow\; T$$

(2) $\underline{(a,\,b)\beta(c,\,d) \;\Leftrightarrow\; a \leqslant c \,\&\, b \geqslant d.}$

R: очевидна;

S/AS: $\left\{\begin{array}{l}(a,\,b)\beta(c,\,d)\\(c,\,d)\beta(a,\,b)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}a \leqslant c \,\&\, b \geqslant d\\c \leqslant a \,\&\, d \geqslant b\end{array}\right. \Rightarrow$

$$\Rightarrow\; (a = c) \,\&\, (b = d) \;\Leftrightarrow\; AS$$

T: $\left\{\begin{array}{l}(a,\,b)\beta(c,\,d)\\(c,\,d)\beta(e,\,f)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(a \leqslant c) \,\&\, (b \geqslant d)\\(c \leqslant e) \,\&\, (d \geqslant f)\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\; (a \leqslant e) \,\&\, (b \geqslant f) \;\Leftrightarrow\; (a,\,b)\beta(e,\,f) \;\Rightarrow\; T$$

Таким образом, α и β суть отношения порядка.

Задача 3.10. *Если a и b — максимальные элементы, то точная верхняя грань множества $\{\,a,\,b\,\}$ существует если и только если $a = b$.*

Решение.
Если a и b — максимальные элементы, то $a^{\triangle} = \{a\}$ и $b^{\triangle} = \{b\}$. С другой стороны,

$$\sup\{\,a,\,b\,\} \;=\; \inf\{\{a,\,b\}^{\triangle}\} \;=\; \inf\,\{\,a^{\triangle} \cap b^{\triangle}\,\} \;=$$

$$= \;\inf\,\{\,\{a\} \cap \{b\}\,\} \;=\; \left\{\begin{array}{ll}a, & a = b\\ \varnothing, & \text{иначе}\end{array}\right. .$$

Задача 3.11. *Доказать, что*

$$\sup_i \left\{ \inf_j \{ x_{i,j} \} \right\} \sqsubseteq \inf_j \left\{ \sup_i \{ x_{i,j} \} \right\}$$

(предполагается, что обе части этого выражения существуют).

Решение. Пусть $\{ x_{i,j} \}$, $i \in I$, $j \in J$ — совокупность элементов ч.у. множества.

Для любого $x_{i,j}$ справедливо

$$\inf_j \{ x_{i,j} \} \sqsubseteq x_{i,j} \sqsubseteq \sup_i \{ x_{i,j} \},$$

откуда

$$\inf_j \{ x_{i,j} \} \sqsubseteq \sup_i \{ x_{i,j} \} .$$

Левая часть данного следования зависит от i, а правая — нет, откуда

$$\sup_i \left\{ \inf_j \{ x_{i,j} \} \right\} \sqsubseteq \sup_i \{ x_{i,j} \} .$$

Здесь правая часть зависит от j, а левая — нет, следовательно

$$\sup_i \left\{ \inf_j \{ x_{i,j} \} \right\} \sqsubseteq \inf_j \left\{ \sup_i \{ x_{i,j} \} \right\} .$$

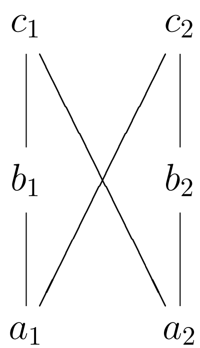
Задача 3.12. *В ч.у. множестве* $\langle \mathbb{N}, | \rangle$ *для подмножества* $A = \{12, 18\}$ *найти*

$$1)\ \sup A, \quad 2)\ \inf A, \quad 3)\ A^{\triangle}, \quad 4)\ A^{\nabla}.$$

Решение.

1. $\sup A = \text{НОК}(12, 18) = 36;$
2. $\inf A = \text{НОД}(12, 18) = 6;$
3. $A^{\triangle} = \{\, 36n \mid n = 1,\, 2,\, \ldots \};$
4. $A^{\triangledown} = \{\, 1,\, 2,\, 3,\, 6 \,\}.$

Задача 3.13. *Разложить в пересечение минимального количества цепей ч.у. множество*



Решение. Известно, что размерность всех 6-элементных множеств, кроме Sh, $Sh^{\sharp}$ и S_3, равна 2.

Разложение представленного ч.у. множества в пересечение 2 цепей:

$$P = [\, a_1,\, b_1,\, a_2,\, c_1,\, b_2,\, c_2 \,] \cap [\, a_2,\, b_2,\, a_1,\, c_2,\, b_1,\, c_1 \,]\,.$$

Задача 3.14. *Пусть $\mathcal{A}$ — алфавит (непустое конечное множество) и $\mathcal{A}^*$ — множество слов над $\mathcal{A}$, включая пустое слово λ. Введём на $\mathcal{A}^*$ бинарное отношение ρ по правилу*

$$A\rho B \ \Leftrightarrow \ B = AU \text{ для некоторого слова } U \in A^* \,.$$

1. *Показать, что ρ есть частичный порядок.*
2. *Проверить существование точных верхних и нижних граней для произвольной пары слов.*
3. *Нарисовать нижнюю часть (включающую пустое слово) диаграммы Хассе рассматриваемого ч.у. множества для $\mathcal{A} = \{\, a,\, b\,\}$.*

Решение. (1). Слова A и B находятся в отношении $A\rho B$, когда слово A есть начало слова B (множество «начал» слова включает и его само). Легко проверяется, что ρ рефлексивно, антисимметрично и транзитивно и, таким образом, является частичным порядком.

(2). Если слова A и B сравнимы (слово A есть начало слова B), то $\inf\{\, A,\, B\,\} = A$, $\sup\{\, A,\, B\,\} = B$.

Если слова A и B несравнимы, то $\inf\{\, A,\, B\,\} = \lambda$, а $\sup\{\, A,\, B\,\}$ не существует, т.к. не существует слова, имеющего началом одновременно и A и B.

Полученное ч.у. множество при неодноэлементном алфавите решёткой при не является. Это — нижняя полурешётка.

В случае одноэлементного алфавита, имеем решётку — цепь с нулём (пустым словом).

(3). Очевидно, граф диаграммы Хассе рассматриваемого ч.у. множества при алфавите мощности n

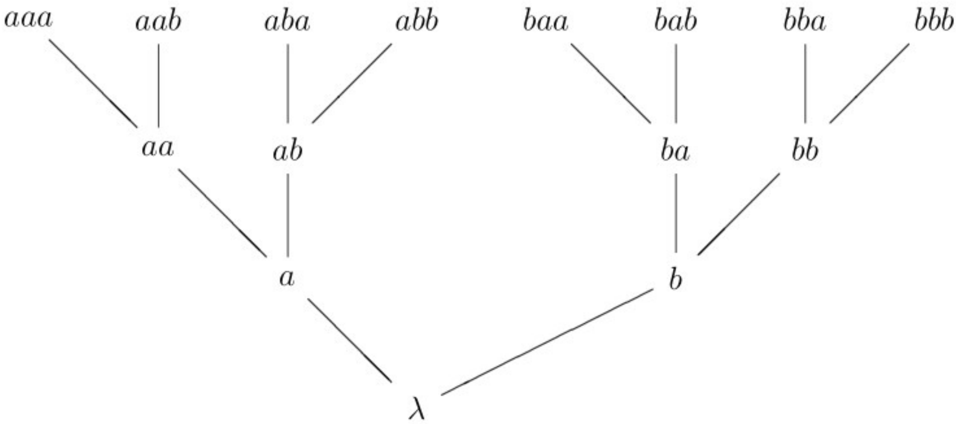
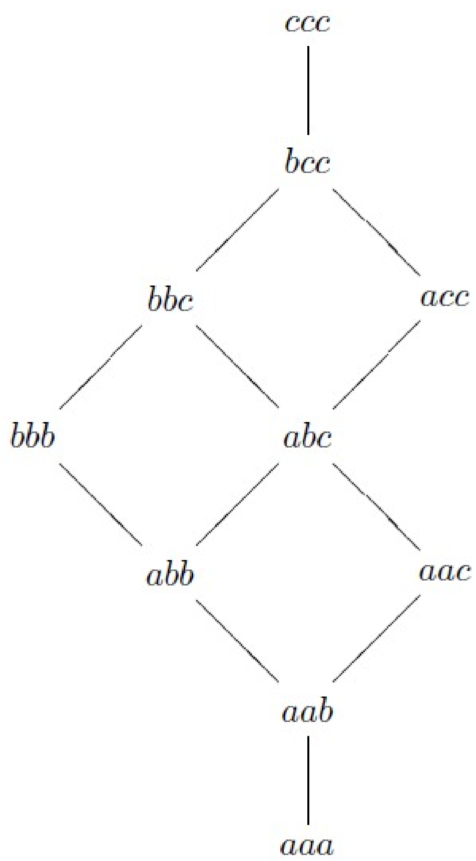


Рис. 3.25. “Нижняя часть” диаграммы Хассе рассматриваемого ч.у. множества для $A = \{\, a,\, b\,\}$.

Задача 3.15. *Пусть* $\mathbf{3} \cong A = \langle\, a < b < c\,\rangle$ *и* $\mathbf{3} \cong B = \langle\, 1 < 2 < 3\,\rangle$ *— две цепи. Построить ч.у. множество* A^B.

Решение. $A^B = \{f \in Fun(B, A) \mid f$ — изотонно$\}$.
Элементы A^B обозначем тремя буквами $f(1)f(2)f(3)$.


ccc
bcc
bbc
acc
bbb
abc
abb
aac
aab
aaa

Задача 3.16. *Покажите, что* u *— максимальный элемент ч.у. множества* $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ *iff ни для какого* $x \in P$ *не верно* $u \sqsubset x$.

Решение. Нам нужно показать, что для всех $x \in P$ имеет место
$$(u \sqsubseteq x \ \Rightarrow \ u = x) \Leftrightarrow (u \not\sqsubset x). \qquad (*)$$

Рассмотрим всевозможные случаи для рассматриваемого u и произвольного x из P, указывая истинность левой и правой частей соотношения $(*)$:

$x \sqsubset u$: $1 \Leftrightarrow 1$,

$x = u$: $1 \Leftrightarrow 1$,

$x \sqsupset u$: $0 \Leftrightarrow 0$,

x и u несравнимы: $1 \Leftrightarrow 1$,

т.е. соотношение всегда справедливо.

Задача 3.17. *Пусть* P *— конечное ч.у. множество и* $f : P \to P$ *— изотонная биекция.*

Покажите, что f *— автоморфизм.*

Решение. Надо показать, что f обратно изотонно, т.е. f^{-1} сохраняет порядок. Поскольку f — биекция, то f — перестановка на P. Это означает, что $f^n = f$ для некоторого n и все f^k, $k = 1, 2, \ldots$ сохраняют порядок. Тогда $f^{-1} = f^{n-1}$ и f^{-1} сохраняет порядок.

Пример: $P = \{a, b, c\} \cong Z_3$, $f(a) = c$, $f(b) = b$, $f(c) = a$:

Задача 3.18. *Пусть n — фиксированное натуральное число, $\mathcal{F}_n$ — система всех конечных подмножеств множества $\mathbb{N}$, имеющих не более n элементов, а $\mathcal{F}$ — совокупность всех конечных подмножеств множества $\mathbb{N}$.*

Докажите, что относительно включения

1. *каждый элемент множества $\mathcal{F}_n$, имеющий n элементов максимален;*
2. *$\mathcal{F}$ не имеет максимальных элементов.*

Решение.
(1). Пусть множество $F \in \mathcal{F}_n$ имеет n элементов и для некоторого $F' \in \mathcal{F}_n$ имеем $F \subseteq F'$.
Тогда либо $F = F'$, либо $F \subset F'$ и F' содержит более, чем n элементов. Последнее невозможно, и имеем $F = F'$, откуда следует, что элемент F множества $\mathcal{F}_n$ максимален.

(2). Пусть произвольный F — максимальный элемент в $\mathcal{F}$. Тогда, в силу конечности F, всегда найдётся элемент $a \in \mathbb{N}$, не принадлежащий F.
Образуем множество $F' = F \cup \{a\}$. Для него имеем $F' \in \mathcal{F}$ и $F' \subset F$.
Это означает, что F — не есть максимальный элемент $\mathcal{F}$. Противоречие.

Задача 3.19. *Докажите, что максимальный (минимальный) элемент цепи является и её наибольшим (наименьшим) элементом.*

Решение. Для максимального элемента u, цепи C надо показать, что для любого $x \in C$

$$(u \sqsubseteq x \Rightarrow u = x) \Leftrightarrow (x \sqsubseteq u) \qquad (*).$$

Рассмотрим всевозможные случаи для u произвольного x из P, указывая истинность левой и правой частей $(*)$:

$x \sqsubset u$: $1 \Leftrightarrow 1$,
$x = u$: $1 \Leftrightarrow 1$,
$x \sqsupset u$: $0 \Leftrightarrow 0$,
x и u несравнимы: $1 \Leftrightarrow 1$,

т.е. соотношение всегда справедливо.

Для минимального элемента — по двойственности.

Задача 3.20. *Пусть A — множество и $f : A^2 \to A$ — двуместная операция на нём, обладающая свойствами*

коммутативности (C): $f(x, y) = f(y, x)$;
ассоциативности (A): $f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z)$;
идемпотентности (I): $f(x, x) = x$.

Введём на A однородное отношение $\leqslant$ по правилу

$$x \leqslant y \Leftrightarrow f(x, y) = x$$

Доказать, что

1. *$\leqslant$ частично упорядочивает A;*
2. *если A имеет наименьший элемент 0, то $f(0, x) = 0$.*

Решение. (1)

(R): $x \leqslant x \Leftrightarrow f(x, x) \overset{(I)}{=} x$.

$$\text{(AS)}:\ \ (\,x \leqslant y \,\&\, y \leqslant x \ \Rightarrow\ x = y\,) \ \Leftrightarrow$$
$$(\,f(x,\,y) = x \,\&\, f(y,\,x) = y \ \overset{(C)}{\Rightarrow}\ x = y\,).$$

$$\text{(T)}:\ \ (\,x \leqslant y \,\&\, y \leqslant z \ \Rightarrow\ x \leqslant z\,) \ \Leftrightarrow$$
$$(\,f(x,\,y) = x \,\&\, f(y,\,z) = y \ \overset{(A)}{\Rightarrow}\ f(x,\,z) = x\,),$$
$$\text{т.к.}\ \ f(x,\,y) = f(x,\,f(y,\,z)) = x \ \overset{(A)}{=}$$
$$=\ f(f(x,\,y),\,z) = f(x,\,z)\,.$$

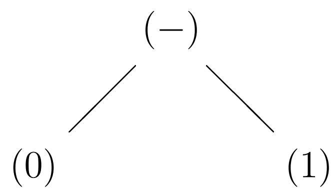
(2) Непосредственно следует из определения отношения $\leqslant$.

Задача 3.21. *Постройте ч.у. множества* $I(1)$ *и* $I(2)$ *всех интервалов булевых единичных кубов размерностей* 1 *и* 2.

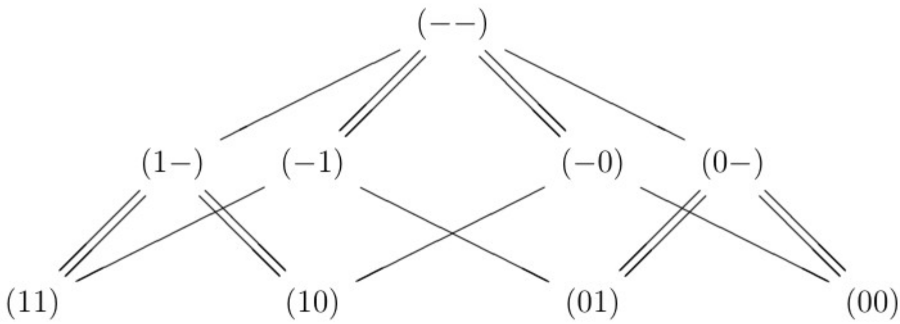
Решение. Булев единичный кубов размерности n содержит 3^n различных интервалов, при этом имеется $C_n^k 2^k$ интервалов размерности k, $k = 0,\,1,\,\ldots,\,n$.

Диаграммы Хассе соответствующих ч.у. множеств.

$I(1)$:



$I(2) = I(1) \times I(1)$
(двойными линиями показаны экземпляры $I(1)$):



Решение.
Необходимость. Пусть L — цепь.
Тогда $a \sqcup b = \max\{a, b\}$, $a \sqcap b = \min\{a, b\}$ и соотношение $(*)$ проверяется непосредственно.

Достаточность. Пусть выполняется соотношение $(*)$, но решётка L не является цепью. Тогда в L найдутся два таких элемента a и b, что $a \not\sim b$, т.е.

$$a \sqcap b \sqsubset a\,, \quad a \sqcap b \sqsubset b\,, \quad a \sqsubset a \sqcup b,\ b \sqsubset a \sqcup b$$

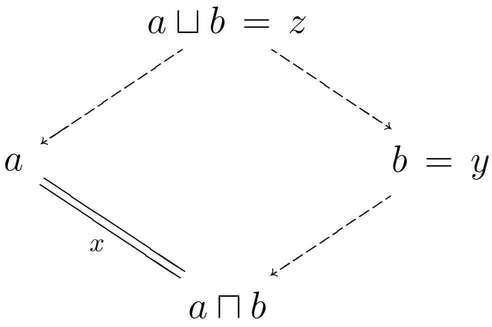
(равенства здесь всюду исключаются).

Возьмём

$$x = [a \sqcap b, a]\,; \quad y = [b, b]\,; \quad z = [a \sqcup b, a \sqcup b]\,,$$

и тогда для них $(*)$ не выполняется:

$$x \sqcup y = x \sqcup z = [a \sqcap b, a \sqcup b]\,; \quad y \sqcap z = \varnothing\,;$$
$$x \sqcup (y \sqcap z) = [\varnothing, a]\,.$$



Задача 3.22. *Обозначим через $K_{u,d}$ полный двудольный граф с числом вершин в долях u и d.*

Подсчитать число $O_2(K_{u,d})$ изотонных отображений $K_{u,d}$ в двухэлементную цепь.

Решение.
$O_2(K_{u,d}) = 2^u + 2^d - 1.$

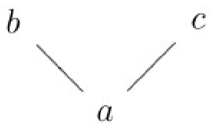
Задача 3.23. *Обозначим через $O_m(P)$ число порядковых гомоморфизмов из данного n-элементного ч.у. множества P в m-элементную цепь.*

Проверить равенство

$$\lim_{m\to\infty} \frac{O_m(P)}{m^n} = \frac{e(P)}{n!}$$

для $P = Z_3^\sharp = V$.

Решение.



Полезные формулы:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Подсчитаем $O_m(V) = |Hom(V, \mathbf{m})|$.

Число гомоморфизмов φ из $Hom(V, \mathbf{m})$ таких, что $\varphi(a) = j$, $j \in \{1, m\}$ равно $(m - j + 1)^2$ (число «мест» для $\varphi(b)$ и $\varphi(c)$). Тогда

$$O_m(V) = \sum_{j=1}^{m} [(m+1) - j]^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} [(m+1)^2 - 2(m+1) + j^2] =$$

$$= m(m+1)^2 - 2(m+1)\frac{m(m+1)}{2} + \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} =$$

$$= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} = \frac{2m^3 + 3m^2 + m}{6}.$$

Имеем

$$\lim_{m\to\infty} \frac{O_m(P)}{m^3} = \lim_{m\to\infty} \frac{2m^3 + 3m^2 + m}{6m^3} = \frac{1}{3}.$$

Тогда $\dfrac{e(V)}{3!} = \dfrac{1}{3}$ и $e(V) = 2$: $[a, b, c]$ и $[a, c, b]$.

Задача 3.24. *Пусть отношение α определено на положительных элементах $\mathbb{Q}$ следующим образом:*

$$\left(\frac{a}{b}\right)\alpha(c,\,d) \;\Leftrightarrow\; ad \leqslant bc\,.$$

Показать, что ч.у. множество $\langle\,\mathbb{Q}^2\times\mathbb{Q}^2,\,\leqslant\,\rangle$ является цепью.

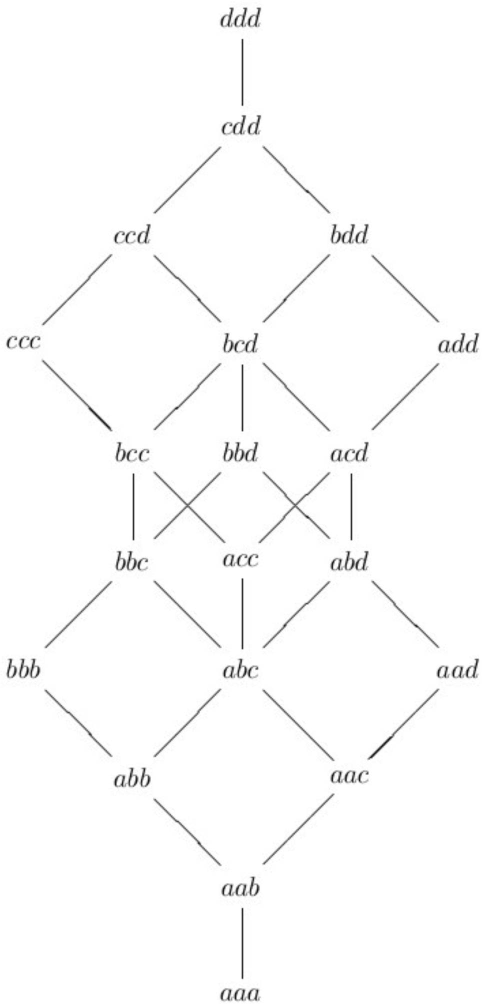
Решение. Отношение α является отношением нестрого порядка на множестве ненулевых рациональных чисел:

$$\left(\frac{a}{b}\right)\alpha(c,\,d) \;\Leftrightarrow\; \frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d}\,,$$

откуда легко следует требуемое утверждение.

Задача 3.25. *Пусть* $\mathbf{4} \cong A = \langle\, a < b < c < d\,\rangle$ *и* $\mathbf{3} \cong B = \langle\, 1 < 2 < 3\,\rangle$ *— две цепи.*
Построить ч.у. множество $A^B \cong \mathbf{4}^{\mathbf{3}}$.

Решение. $A^B = \{\, f \in Fun(B,\,A) \mid f$ — изотонно$\}$.
Элементы A^B будем обозначать тремя буквами $y_1y_2y_3$, где $y_1 = f(1)$, $y_2 = f(2)$, $y_3 = f(3)$.


ddd
cdd
ccd
bdd
ccc
bcd
add
bcc
bbd
acd
bbc
acc
abd
bbb
abc
aad
abb
aac
aab
aaa

Задача 3.26. *Для действительных непрерывных функций f и g принимающих положительные значения запись $f = O(g)$ означает существование таких положительных констант M и N, что $f(x) \leqslant Mg(x)$ для всех $x > N$.*
Показать, что определённое таким образом отношение является предпорядком, и найти отношение эквивалентности, превращающее его в порядок на соответствующих классах эквивалентности.

Решение. Обозначим рассматриваемое отношение через $\leq$: $f \leq g$ означает, что $\frac{f}{g}$ (асимптотически) ограничено сверху.

Очевидно, отношение $\leq$ рефлексивно.
Легко показывается, что оно и транзитивно.
Т.о. $\leq$ является предпорядком, т.к. не симметрично и не антисимметрично: $f = O(g)\ \&\ g = O(f) \not\Rightarrow f = g$.

Искомое отношение эквивалентности $\asymp$ определяется условием

$$f \asymp g \Leftrightarrow \text{ существуют положительные константы } M_1,\ M_2,\ N \text{ такие, что } f(x) \leqslant M_1 g(x)\ \&\ g(x) \leqslant M_2 f(x) \text{ для всех } x > N\,.$$

Или иначе,

$$f \asymp g \Leftrightarrow \frac{1}{M_2} \leqslant \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant M_1$$

при $x > N$ для некоторых положительны констант M_1, M_2 и N.
Т.е. отношение $\frac{f}{g}$ асимптотически ограничено сверху и снизу.

Задача 3.27. *Пусть* $\langle\, P, \sqsubseteq \,\rangle$ *— ч.у. множество.*

При $a \sqsubseteq b$ *множество* $\{\, x \mid a \sqsubseteq x \,\&\, x \sqsubseteq b \,\}$ *называют интервалом и обозначают* $[a,\, b]$. *Множество всех интервалов из* P, *упорядоченных по включению обозначим* $\langle\, Sg(P),\, \subseteq \,\rangle$.

Рассмотрим теперь дуальное к P *ч.у. множество* $P' = \langle\, P, \sqsupseteq \,\rangle$. *Образуем прямое произведение* $\langle\, P^2,\, \leq \,\rangle$

Покажите существование вложения

$$\langle\, Sg(P),\, \subseteq \,\rangle \overset{\varphi}{\hookrightarrow} \langle\, P^2,\, \leq \,\rangle\,.$$

Решение.
Рассмотрим отображение $\varphi : Sg(P) \to P^2$ ставящее в соответствие интервалу $[a,\, b]$ упорядоченную пару $(a,\, b)$, $(a,\, b \in P)$.
Ясно, что φ является вложением множества $Sg(P)$ во множество P^2. Задача ЧУМ-29 Пусть далее $[a,\, b] \subseteq [a',\, b']$.
Это означает, что $a \sqsubseteq a'$ и $b \sqsubseteq b']$. Поскольку

$$(x_1,\, y_1) \leq (x_2,\, y_2) \Leftrightarrow (x_1 \sqsubseteq x_2) \,\&\, (y_1 \sqsupseteq y_2)\,,$$

имеем $(a,\, b) \leq (a',\, b')$, т.е. φ изотонно.

Обратно, $(a,\, b) \leq (a',\, b')$ влечёт $a \sqsubseteq a'$ и $b \sqsubseteq b']$ и, следовательно, φ — обратно изотонно.

Таким образом φ есть искомый мономорфизм.

Задача 3.28. *Пусть $\mathcal{A}$ — алфавит (непустое конечное множество) и $\mathcal{A}^*$ — множество слов над $\mathcal{A}$, включая пустое слово λ. Введём на $\mathcal{A}^*$ бинарное отношение ρ по правилу*

$$A\rho B \Leftrightarrow B = UAV \text{ для некоторых слов } U, V \in \mathcal{A}^*.$$

1. *Показать, что ρ есть частичный порядок.*
2. *Проверить существование точных верхних и нижних граней для произвольной пары слов.*
3. *Нарисовать "нижнюю часть" (включающую пустое слово) диаграммы Хассе рассматриваемого ч.у. множества для $\mathcal{A} = \{a, b\}$.*

Решение. (1). Слова A и B находятся в отношении $A\rho B$, когда слово A есть подслово слова B. Легко проверяется, что ρ рефлексивно, антисимметрично и транзитивно и, таким образом, является частичным порядком.

(2). По определению точной верхней грани, $\sup\{A, B\} = \inf\{A^\triangle \cap B^\triangle\}$.

Если $A\rho B$ сравнимы, то
$\inf\{A, B\} = A$, $\sup\{A, B\} = B$.

Слова A и B будут всегда сравнимы, если алфавит одноэлементен.

Если слова A и B несравнимы, множество $\{A^\triangle \cap B^\triangle\}$ не имеет точной нижней грани: пусть, например, A и B — две различные буквы алфавита, тогда $\{A^\triangle \cap B^\triangle\}$ содержит слова A и B, и $\inf\{AB, BA\}$ отсутствует.

Однако всегда существует для слов вида X и Y вида $X = YB$ или $X = BY$, где B — буква.

(3).

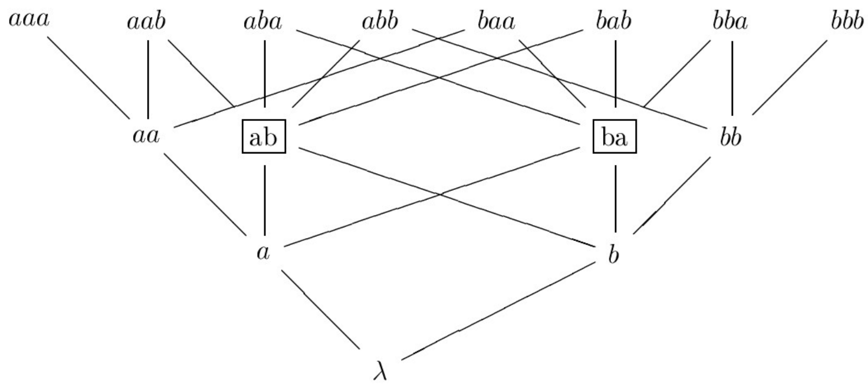


Рис. 3.26. «Нижняя часть» диаграммы Хассе рассматриваемого ч.у. множества для $A = \{\, a,\, b\,\}$.

Задача 3.29. *Доказать, что множества точек отрезка и квадрата равномощны.*

Решение. Все натуральные и рациональные действительные числа будем записывать в виде десятичных дробей с бесконечным периодом 9, что даёт однозначность представления.

Пример: $0{,}25 = 0,24999\ldots$.

$(x,\, y) \in [0,\, 1] \times [0,\, 1]$

$x = 0, x_1 x_2 \ldots,$ $y = 0, y_1 y_2 \ldots,$ $(x,\, y) \leftrightarrow z$: $z = 0, x_1 y_1 x_2 y_2 \ldots \in [0,\, 1]$.

Задача 3.30. *Найдите ошибку в следующем рассуждении.*

Докажем индукцией по количеству n лошадей в некотором множестве, что все они одного цвета.

$n = 1$. *Все лошади, принадлежащие одноэлементному множеству лошадей — одного цвета.*

$n \to n+1$. *Рассмотрим произвольное множество* H *из* $n+1$ *лошади. Удалим из него одну лошадь* h. *По предположению индукции, все лошади во множестве* $H_1 = H \setminus h$ *— одного цвета. Удалим теперь из* H_1 *ещё одну лошадь и вернём в него лошадь* h. *Полученное множество состоит из* n *лошадей и, по предположению индукции, все они одного цвета. Поэтому и лошадь* h *того же цвета, что и остальные в* H_1, *т.е. множество* H *состоит из лошадей одного цвета. Q.E.D.*

Решение.

Базис индукции должен быть $n = 2$, иначе нельзя провести шаг индукции. При $n = 2$ утверждение неверно.

Отношение эквивалентности «быть одного цвета» бинарное, и, следовательно, приведённый базис индукции некорректен, а при $n = 2$ неверен.

«Одного» цвета, но не «одного и того же».

Глава 4

Решётки

4.1 Решётки: определение, основные свойства

<u>*Определение*</u> 4.1. Ч.у. множество, в котором для любых элементов a и b существуют $\inf\{a, b\}$ и $\sup\{a, b\}$ называют *решёточно упорядоченным* (р.у. множеством).

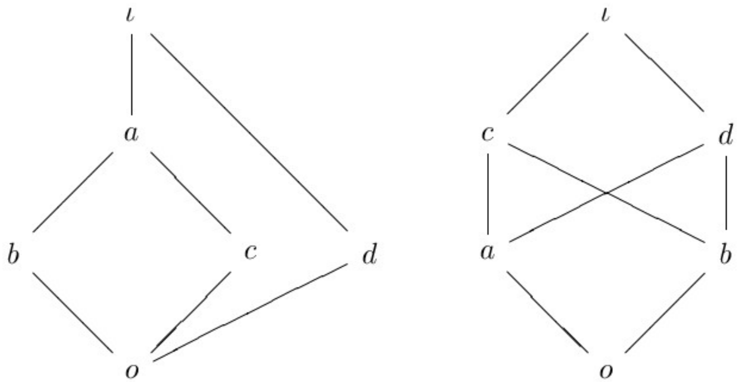


Рис. 4.1. Р.у.м. Не-р.у.м.

<u>*Определение*</u> 4.2. *Алгебраическая решётка* — это тройка $\mathfrak{L} = \langle L, \sqcup, \sqcap \rangle$, где L — непустое множество, а $\sqcup$ (*объединение*), $\sqcap$ (*пересечение*) — бинарные операции на нём, подчиняющимися законам

$$Com\sqcup: \quad x \sqcup y = y \sqcup x,$$
$$Com\sqcap: \quad x \sqcap y = y \sqcap x,$$

$$
\begin{aligned}
Ass\sqcup:&\quad x\sqcup(y\sqcup z) \;=\; (x\sqcup y)\sqcup z,\\
Ass\sqcap:&\quad x\sqcap(y\sqcap z) \;=\; (x\sqcap y)\sqcap z,\\
Id\sqcup:&\quad x\sqcup x \;=\; x,\\
Id\sqcap:&\quad x\sqcap x \;=\; x,\\
Abs1:&\quad x\sqcap(x\sqcup y) \;=\; x,\\
Abs2:&\quad x\sqcup(x\sqcap y) \;=\; x.
\end{aligned}
$$

Решётка называется *полной*, если любое подмножество её элементов имеет точные верхнюю и нижнюю грани.

Принцип двойственности для решёток: любое утверждение, истинное для любых произвольных элементов решётки, остаётся таковым при замене $\sqcap \leftrightarrow \sqcup$.

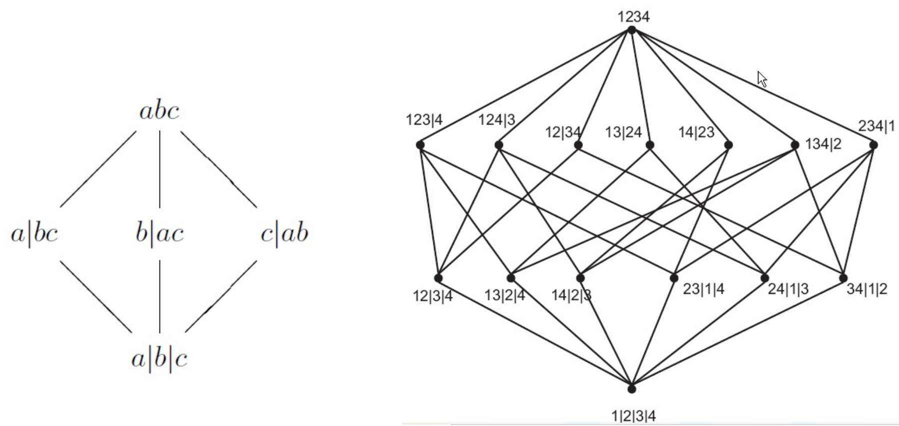


Рис. 4.2. Примеры алгебраических решёток: беллианы Π_3 и Π_4 множеств $\{\,a,b,c\,\}$ и $\{\,1,2,3,4\,\}$

$\big|\Pi_n\big| \;=\; B(n)$ — количество всевозможных эквивалентностей n-элементном множестве, число Белла.

$B(3)=5;\ B(4)=15;\ \ldots,\ B(20)=51724158235372,\ \ldots.$

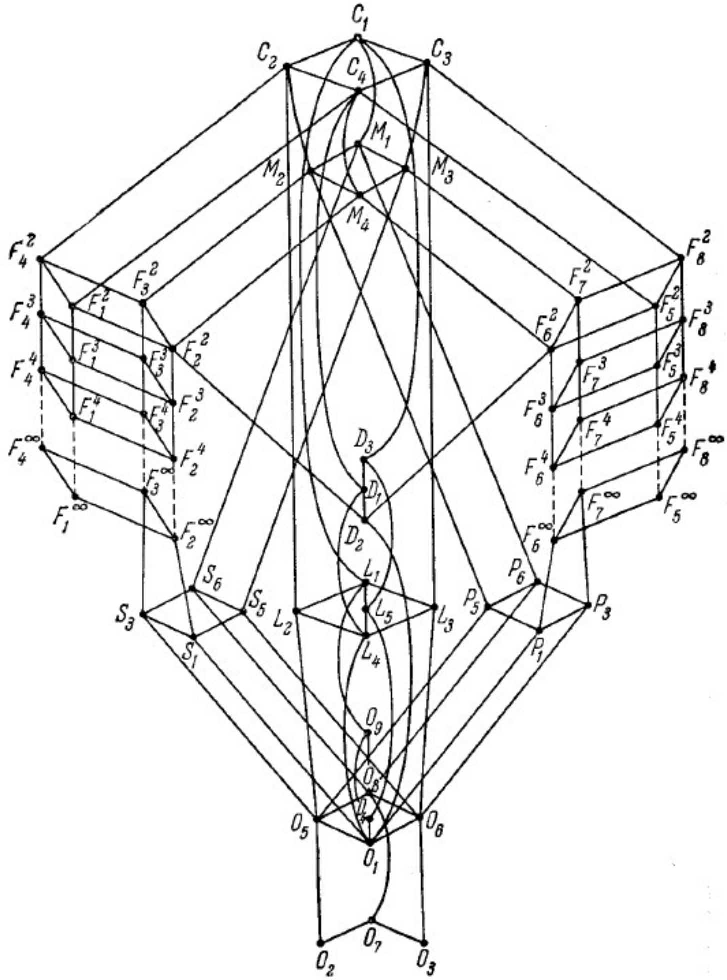


Рис. 4.3. Пример алгебраической решётки: структура замкнутых классов Поста

Теорема 4.1 (эквивалентность р.у. множеств и решёток).

1. *Пусть* $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ *— решёточно упорядоченное множество. Если для любых элементов* x *и* y *из* P *положить*

$$x \sqcup y \;=\; \sup\{x, y\}\,, \qquad x \sqcap y \;=\; \inf\{x, y\},$$

то структура $\langle\, P, \sqcup, \sqcap \,\rangle$ *будет решёткой.*

2. *Пусть* $\langle\, L, \sqcup, \sqcap \,\rangle$ *— решётка. Если для любых элементов* x *и* y *из* L *положить*

$$x \sqsubseteq y \;=\; x \sqcap y = x \quad (\textit{или}\;\; x \sqsubseteq y \;=\; x \sqcup y = y),$$

то структура $\langle\, L, \sqsubseteq \,\rangle$ *будет решёточно упорядоченным множеством.*

Теорема устанавливает взаимно-однозначное соответствие между решёточно упорядоченными множествами и решётками: *из одной АС всегда можно получить другую.*

Поэтому термин «решётка» применяют для обоих понятий: любую решётку можно представить либо как упорядоченное множество, либо как алгебру.

р.у. множества	решётки
$\langle\, \mathbb{R}, \leqslant \,\rangle$	$\langle\, \mathbb{R}, \max, \min \,\rangle$
$\langle\, \mathbb{N}, \mid \,\rangle$	$\langle\, \mathbb{N}$, НОК, НОД $\rangle$
$\langle\, \mathcal{P}(A), \subseteq \,\rangle$	$\langle\, \mathcal{P}(A), \cup, \cap \,\rangle$

Возможность такого рассмотрения решёток позволяет вводить в них как порядковые, так и алгебраические операции, что приводит к богатой и многообразной в приложениях теории.

Наименьший элемент решётки (как р.у.м.) — её ноль (o), наибольший — единица (ι) — это её *универсальные грани*. Решётка может и не иметь универсальных граней: $\mathbb{Z}$, у $\langle\, \mathbb{N}, \mid \,\rangle$ — только $o = 1$. Все конечные решётки содержат o и ι.

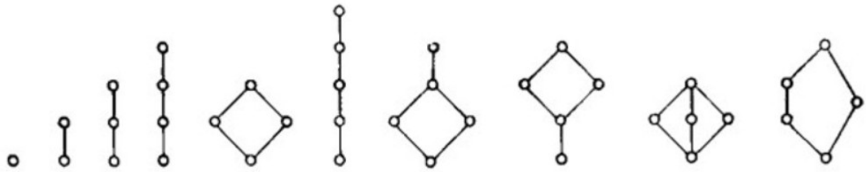


Рис. 4.4. Все решётки, содержащие не более 5 элементов

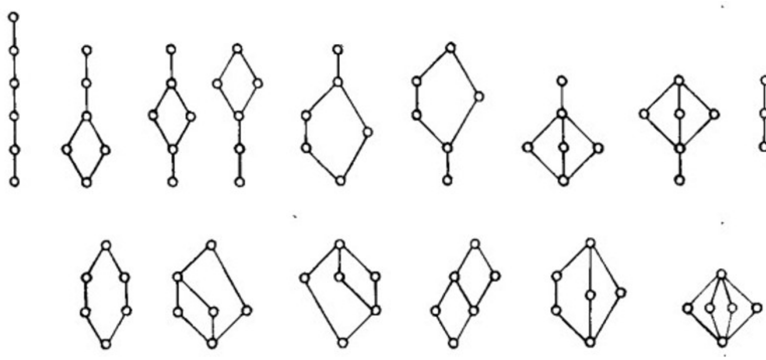


Рис. 4.5. Все 15 решёток, содержащих 6 элементов

Определение 4.3. Если L — решётка с нулём o, то элемент $a \neq o$ называется её *атомом*, если для любого элемента x этой решётки пересечение $a \sqcap x$ равно либо o, либо a.

В последнем случае говорят, что *элемент x содержит атом a.*

Теорема 4.2. *Ч.у. множество является полной решёткой, если и только если*

1) *оно имеет наибольший элемент ι и*

2) *для любого его непустого подмножества A существует точная нижняя грань* $\inf A$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ — полная решётка.

Тогда каждое непустое подмножество $A \subseteq P$ имеет и точную нижнюю грань $\inf A$, и точную верхнюю грань $\sup A$. В частности, существует $\sup P = \iota$.

Достаточность. Покажем, что в условиях теоремы каждое непустое подмножество $A \subseteq P$ имеет точную верхнюю грань.

Рассмотрим $A^{\vartriangle}$ — совокупность всех верхних граней A. Очевидно, $\iota \in A^{\vartriangle}$, так что $A^{\vartriangle} \neq \varnothing$.

По условию теоремы существует элемент $b = \inf A^{\vartriangle}$, но по определению, $b = \sup A$, откуда следует, что P — полная решётка. □

Следствия. *Конечное ч.у. множество P является решёткой iff*

1) *оно имеет наибольший элемент и*
2) *для любых двух его элементов существует точная нижняя грань.*

Обычно на практике проверка наличия у подмножеств ч.у. множества *точных нижних граней* — не вызывает затруднений, а *верхних граней* — требует значительных усилий.

Данная теорема является *эффективным критерием решёточности порядков*, например:

Утверждение 4.1. *Решётка всех разбиений множества является полной.*

Доказательство. Точной нижней гранью любой совокупности эквивалентностей является их пересечение (всегда эквивалентность), а единицей решётки всех эквивалентностей (разбиений) множества служит универсальная эквивалентность ∇, называемая также *аморфной*. Далее применяем предыдущую теорему. □

4.2 Решётки: основные свойства, гомоморфизмы, идеалы, фильтры

Утверждение 4.2. *Для любых элементов x, y, u, v решётки $\langle L, \sqcup, \sqcap \rangle$ справедливо*

$$\begin{cases} x \sqsubseteq y \\ u \sqsubseteq v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \sqcup u \sqsubseteq y \sqcup v \\ x \sqcap u \sqsubseteq y \sqcap v \end{cases}.$$

Доказательство.

$$\begin{cases} x \sqsubseteq y \\ u \sqsubseteq v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \sqcap y = x \\ u \sqcap v = u \end{cases} \Rightarrow x \sqcap y \sqcap u \sqcap v = x \sqcap u \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y \sqcap v) \sqcap (x \sqcap u) = x \sqcap u \Leftrightarrow x \sqcap u \sqsubseteq y \sqcap v.$$

Справедливость $x \sqcup y \sqsubseteq u \sqcup v$ следует по двойственности. □

Теорема 4.3. *Элементы x, y и z любой решётки удовлетворяют следующим неравенствам полудистрибутивности*

$$Dtr1 \sqsupseteq: \quad (x \sqcup y) \sqcap z \sqsupseteq (x \sqcap z) \sqcup (y \sqcap z);$$
$$Dtr2 \sqsubseteq: \quad (x \sqcap y) \sqcup z \sqsubseteq (x \sqcup z) \sqcap (y \sqcup z)$$

и полумодулярности

$$\begin{array}{ll} Mod \sqsubseteq: & x \sqsubseteq y \ \Rightarrow \ x \sqcup (y \sqcap z) \ \sqsubseteq \ y \sqcap (x \sqcup z); \\ Mod \sqsupseteq: & x \sqsupseteq y \ \Rightarrow \ x \sqcap (y \sqcup z) \ \sqsupseteq \ y \sqcup (x \sqcap z). \end{array}$$

Лемма 4.1 (о четырёх элементах). *Для любых элементов x, y, u, v решётки $\langle\, L, \sqcup, \sqcap \,\rangle$ справедливо соотношение*

$$x, y \ \sqsubseteq \ u, v \ \Rightarrow \ x \sqcup y \ \sqsubseteq \ u \sqcap v.$$

Доказательство. По $Dtr2 \sqsubseteq$ — $(u \sqcap v) \sqcup x \ \sqsubseteq \ (u \sqcup x) \sqcap (v \sqcup x)$, а поскольку $u \sqcup x = u$, $v \sqcup x = v$ и $y \sqsubseteq u \sqcap v$, то получаем требуемое. □

Гомоморфизмы решёток

Определение 4.4. Отображение φ решётки L в решётку L' называется *алгебраическим* или *решёточным гомоморфизмом*, если для любых $x, y \in L$ справедливы равенства

$$\varphi(x \sqcup y) \ = \ \varphi(x) \sqcup \varphi(y) \quad \text{и} \quad \varphi(x \sqcap y) \ = \ \varphi(x) \sqcap \varphi(y).$$

Биективный решёточный гомоморфизм есть *решёточный изоморфизм*, символически $L \cong L'$.

Изоморфизм решётки в себя называется *автоморфизмом.*

Инъективные и сюръективные решёточные гомоморфизмы называют *решёточными* (или *алгебраическими*) *мономорфизмами* (вложениями) и *эпиморфизмами* соответственно.

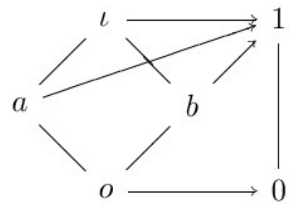


Рис. 4.6. Связь порядкового и решёточного гомоморфизмов решёток

1. Порядковые гомоморфизмы решёток как ч.у. множеств, вообще говоря, не являются алгебраическими.

2. Напротив, любое отображение одной решётки на другую, сохраняющее *хотя бы одну из решёточных операций*, является порядковым гомоморфизмом: если φ сохраняет пересечение, то для любых $x, y \in L$ справедливо

$$x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x = x \sqcap y \overset{(*)}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow \varphi(x) = \varphi(x \sqcap y) \overset{Hom}{\Rightarrow} \varphi(x) \sqcap \varphi(y) \Leftrightarrow \varphi(x) \sqsubseteq \varphi(y),$$

и, значит, φ изотонно (аналогично изотонность φ следует и из сохранения объединения).

В случае изоморфизма проблемы снимаются.

Теорема 4.4 (об эквивалентности двух видов изоморфизма решёток). *Две решётки алгебраически изоморфны, iff они изоморфны как ч.у. множества.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть φ — *алгебраический изоморфизм* решётки L на некоторую другую решётку. Так как отображение φ взаимно-однозначно и изотонно, остаётся убедится в его обратной изотонности.

Это устанавливается обращением следования $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ в предыдущем выражении, что можно сделать в силу взаимно-однозначности φ.

Достаточность. Пусть L_1 и L_2 — две решётки, *изоморфные как порядки.* Докажем согласованность операции $\sqcap$ относительно порядкового изоморфизма φ, то есть что

$$\varphi(x \sqcap y) = \varphi(x) \sqcap \varphi(y),$$

при условии $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow \varphi(x) \sqsubseteq \varphi(y)$ и биективности φ.

Для произвольных x, $y \in L_1$ в силу изотонности φ

$$\left\{ \begin{array}{l} x \sqcap y \sqsubseteq x \\ x \sqcap y \sqsubseteq y \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x \sqcap y) \sqsubseteq \varphi(x) \\ \varphi(x \sqcap y) \sqsubseteq \varphi(y) \end{array} \right.$$

Пусть b — есть нижняя грань $\{\,\varphi(x),\, \varphi(y)\,\}$ в L_2. Тогда в силу сюръективности φ, в L_1 найдется $a = \varphi^{-1}(b)$ и

$$\left\{ \begin{array}{l} b \;=\; \varphi(a) \sqsubseteq \varphi(x) \\ b \;=\; \varphi(a) \sqsubseteq \varphi(y) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \sqsubseteq x \\ a \sqsubseteq y \end{array} \right. .$$

Отсюда далее имеем

$$a \sqsubseteq x \sqcap y \;\Leftrightarrow\; b = \varphi(a) \sqsubseteq \varphi(x \sqcap y).$$

Таким образом, $\varphi(x \sqcap y)$ будет наибольшей нижней гранью для $\{\,\varphi(x),\, \varphi(y)\,\}$, или, что то же, $\varphi(x \sqcap y) = \varphi(x) \sqcap \varphi(y)$.

Согласованность операции $\sqcup$ относительно φ справедлива по двойственности. $\square$

Теорема 4.5 (замыкание Макнила). *Всякое ч.у. множество можно вложить в подходящую полную решётку с сохранением всех точных граней.*

Доказательство. Через $\widehat{R}$ обозначим ч.у. множество R, пополненное o и/или ι, если оно не имеет таковых.

Пусть P — ч.у. множество и $\varnothing \neq X \subseteq \widehat{P}$. Обозначим
$$G(X) = \widehat{X^{\vartriangle}} \text{ и } L(X) = \widehat{X^{\triangledown}}.$$
Множество $Q = \left\{ L(G(X)) \,\middle|\, X \in \mathcal{P}^*(\widehat{P}) \right\}$ с порядком по включению есть искомая решётка. □

Говорят, что P пополняется сечениями Макнила, а Q является *замыканием (Макнила)* ч.у. множества P (символически $Q = \mathrm{comp}(P)$).

Понятно, что $P \overset{f}{\hookrightarrow} \mathrm{comp}(P)$, где $f(x) = L\left(G\left(\{x\}\right)\right)$.

Теорема показывает, что знаменитое построение Р. Дедекиндом действительных чисел *«сечениями»* на самом деле применимо для любого ч.у. множества.

Доказано, что $\dim(P) = \dim(\mathrm{comp}(P))$.

Подрешётки

Определение 4.5. Непустое подмножество L' решётки $\langle L, \sqcup, \sqcap \rangle$ называется её *подрешёткой* (символически $L' \leqslant L$), если L' устойчиво относительно сужений $\sqcup$ и $\sqcap$.

Из определения следует, что подмножество элементов решётки L может быть решёткой относительно наследуемого частичного порядка, но не подрешёткой L.

Подрешётки: некоторые свойства

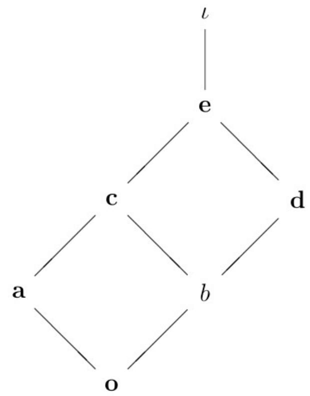


Рис. 4.7. Ч.у. подмножество (выделено жирным) — решётка, но не подрешётка исходной

1. Каждое подмножество решётки L является подрешёткой, если и только если L — цепь.

2. Если L — решётка, то совокупность её подрешёток $\mathrm{Sub}\, L$ — ч.у. множество, упорядоченное по включению.

3. Любой интервал решётки есть её подрешётка.

4. Пересечение подрешёток либо пусто, либо является подрешёткой. В силу этого, удобно считать подрешёткой и пустое множество: тогда пересечение любой совокупности — подрешётка.

5. Пусть $\langle\, L, \sqcup, \sqcap\, \rangle$ — решётка. Тогда совокупность её интервалов $Si(L)$ — также решётка относительно операций (a, b, c, $d \in L$):
$$[a,\, b] \cup [c,\, d] = [a \sqcap c,\, b \sqcup d] \quad \text{и}$$
$$[a,\, b] \cap [c,\, d] = [a \sqcup c,\, b \sqcap d].$$

Очевидно, $Si(L)$ — решётка с универсальными гранями: её единицей служит L, а нулём — пустой интервал, который может быть записан $[a,\, b]$ при $a > b$.

6. Если φ — гомоморфизм решётки L в решётку L', то $\operatorname{Im}\varphi \leqslant L'$.

7. Обозначим через $\mathbb{N}^\circ$ множество натуральных чисел, свободных от квадратов, включая в него и 1.

   Тогда $\langle\, \mathbb{N}^\circ,\, \vee,\, \wedge\,\rangle \leqslant \langle\, \mathbb{N},\, \vee,\, \wedge\,\rangle$.

8. С помощью теоремы об эквивалентности двух видов изоморфизма решёток устанавливается, что решётка $\mathbb{N}^\circ$ изоморфна решётке $\mathcal{P}_0(A)$ всех конечных подмножеств счётного множества A.

   Положив $\varphi(1) = \varnothing$, построим биекцию φ между множеством простых чисел и A: пронумеруем элементы A в произвольном порядке — $A = \{\, a_1,\, a_2,\, \ldots\}$, и положим $\varphi(p_i) = a_i$, где p_i — i-е простое число.

   Таким образом определено инъективное отображение простых чисел из $\mathbb{N}^\circ$ в A.
   Для остальных элементов $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$ из $\mathbb{N}^\circ$, положим

$$\varphi(n) = \{\varphi(p_1),\, \ldots,\, \varphi(p_k)\}\,.$$

   Понятно, что $\mathbb{N}^\circ \overset{\varphi}{\cong} \mathcal{P}_0(A)$, если A — счётно.

Идеалы решёток

<u>Определение</u> 4.6. Пусть $\langle L, \sqcup, \sqcap \rangle$ — решётка. Непустое подмножество I элементов L называется её *(решёточным) идеалом*, если

$$(x \in I) \,\&\, (y \sqsubseteq x) \;\Rightarrow\; y \in I \;\text{ и }\; x, y \in I \;\Rightarrow\; x \sqcup y \in I\,.$$

Двойственно, непустое подмножество F элементов L называется её *решёточным фильтром*, если

$$(x \in F) \,\&\, (x \sqsubseteq y) \;\Rightarrow\; y \in F \;\text{ и }\; x, y \in F \;\Rightarrow\; x \sqcap y \in F\,.$$

Непустое подмножество I оказывается решёточным идеалом, iff справедлива эквивалентность

$$x, y \in I \;\Leftrightarrow\; x \sqcup y \in I$$

и аналогично для фильтров —

$$x, y \in F \;\Leftrightarrow\; x \sqcap y \in F.$$

Идеалы решёток: свойства

- Если a — элемент решётки, то главные порядковые идеал $J(a) = a^{\triangledown}$ и фильтр $a^{\vartriangle}$ являются, также и главными решёточными идеалом и фильтром.
- Если решётка имеет наименьший [наибольший] элемент, то он будет её (главным) идеалом [фильтром].
- В конечной решётке все идеалы и фильтры — главные: если I — идеал конечной решётки, то

рассмотрим элемент $x = \bigsqcup\limits_{a \in I} a$, для которого будем иметь $x \in I$ и $I = x^{\nabla}$ (аналогично для фильтров).

В бесконечных решётках могут существовать и неглавные решёточные идеалы и фильтры.

Идеалы решёток: примеры

1. Если A — бесконечное множество, то совокупность $\mathcal{P}_0(A)$ всех его конечных подмножеств будет неглавным идеалом решётки $\mathcal{P}(A)$.
2. В цепи $\left[0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, 1\right]$ неглавный идеал — $[\,0, 1\,)$.
3. Сама решётка L всегда будет своим (*несобственным*) идеалом и фильтром. Все другие идеалы и фильтры L называют *собственными.*

$J_*(L)$ — множество всех *собственных* решёточных идеалов L; это ч.у. множество, упорядоченное по включению.

Максимальные элементы $J_*(L)$ называют *максимальными идеалами* решётки L (т.е. максимальный идеал решётки не содержится ни в каком другом её собственном идеале).

Существование максимальных решёточных идеалов

Теорема 4.6 (о собственных идеалах решётки с единицей). *Всякий собственный идеал решётки с единицей содержится в некотором её максимальном идеале.*

Доказательство. Пусть $\langle L, \sqsubseteq \rangle$ — решётка с единицей ι, и $C = [J_1, J_2, \ldots]$ — некоторая (конечная или бесконечная) цепь собственных идеалов L. Обозначим $J = \bigcup_{J_k \in C} J_k$.

Если $x \in J$, то $x \in J_k \in C$ для некоторого k и для любого $y \sqsubseteq x$ имеем $y \in J_k \subseteq J$. Пусть $x, y \in J$, тогда $x \in J_k \in C$ и $y \in J_l \in C$ для некоторых k, l.

Поскольку C — цепь, то J_k и J_l сравнимы в $J_*(L)$.

Без ограничения общности считаем, что $J_k \subseteq J_l$.

Тогда $x, y \in J_l$ и, поскольку J_l — идеал, то $x \sqcup y \in J_l \subseteq J$.

Таким образом, J — идеал решётки L.

Более того, он собственный, поскольку $\iota \notin J_k \in C \Rightarrow \iota \notin J$.

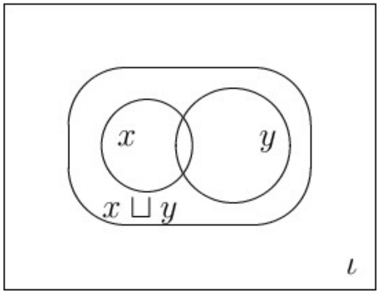
С другой стороны, поскольку $J_k \subseteq J$ для всех $J_k \in C$, то J будет верхней гранью цепи C.

Отсюда по лемме Куратовского-Цорна вытекает утверждение теоремы. □

Диаграммы Хассе остаются удобным способом описания решёток, однако если решётка устроена слишком сложно, такие диаграммы становятся мало наглядными.

Теорема 4.7 (о представлении решёток). *Всякая решётка может быть вложена в булеан подходящего множества с сохранением всех точных нижних граней.*

Теорема 4.8 (*Макнил*). *Всякую решётку можно вложить в подходящую полную решётку с сохранением всех точных граней.*



Теорема 4.9. *Всякую конечную решётку можно вложить в конечную решётку разбиений множества.*

4.3 Модулярные и дистрибутивные решётки

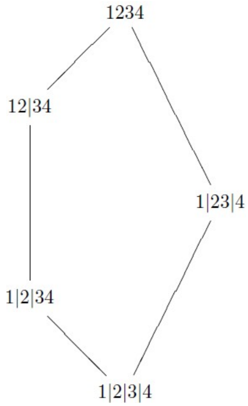
Модулярные решётки

Определение 4.7. Решётка $\langle L, \sqcup, \sqcap \rangle$ называется *модулярной*, если для любых x, y, $z \in L$ в ней выполняется следующий *модулярный закон*

$$Mod: x \sqsubseteq y \Rightarrow x \sqcup (y \sqcap z) = y \sqcap (x \sqcup z).$$

Пример 4.1.

1. Модулярными являются все цепи, решётка $\langle \mathbb{N}, | \rangle$, булевы алгебры.
2. Решётка $NSub\,G$ всех *нормальных* подгрупп группы G образует модулярна (пересечение групп всегда группа, а объединение нормальных подгрупп — их произведение).
3. Решётка всех эквивалентностей на данном множестве в общем случае не модулярна.

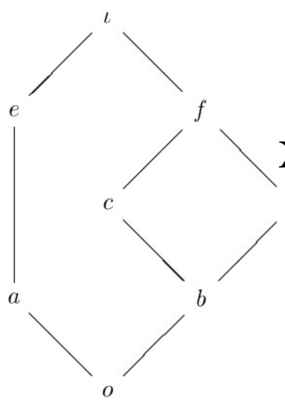


$$\alpha = (1|2|34),\ \beta = (1|23|4),\ \gamma = (12|34),$$
$$\alpha \sqsubseteq \gamma$$
$$\alpha \sqcup (\gamma \sqcap \beta) = \alpha \sqcup o = \alpha \neq$$
$$\neq \gamma \sqcap (\alpha \sqcup \beta) = \gamma \sqcap \iota = \gamma.$$

Немодулярность N_5 оказывается ключевой:

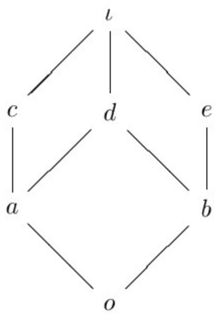
Теорема 4.10 (критерий модулярности решётки). *Решётка модулярна, iff никакая её подрешётка не изоморфна пятиугольнику N_5.*

Цепное условие Жордана–Дедекинда: Все максимальные цепи между двумя данными элементами локально конечного ч.у. множества имеют одинаковую длину.



Невыполнение условия Жордана–Дедекинда для решётки $\Rightarrow$ существование подрешётки, изоморфной N_5 $\Rightarrow$ немодулярность.

Выполнение условие Жордана–Дедекинда ещё не означает модулярности решётки.



Для этой решётки цепное условие Жордана–Дедекинда выполняется, однако она немодулярна, т.к. содержит подрешётку $L = \{o, a, c, e, \iota\} \cong N_5$.

Правило сокращения в решётках

$$Abbr(x, y) : \ \forall\, z \begin{cases} x \sqcup z = y \sqcup z \\ x \sqcap z = y \sqcap z \end{cases} \Rightarrow \ x = y.$$

Теорема 4.11 (правило сокращения в модулярных решётках). *Решётка модулярна, iff* $x \sim y \Rightarrow Abrr(x, y)$.

Доказательство. *Достаточность.* Пусть для элементов x, y, z модулярной решётки справедливо

$$x \sqsubseteq y \ \text{ и } \ (x \sqcup z = y \sqcup z) \& (x \sqcap z = y \sqcap z).$$

Тогда

$$x \overset{Abs}{=} x \sqcup (x \sqcap z) \overset{Abbr}{=} x \sqcup (y \sqcap z) \overset{Mod}{=} y \sqcap (x \sqcup z) \overset{Abbr}{=}$$
$$= y \sqcap (y \sqcup z) \overset{Abs}{=} y.$$

Необходимость — опустим. □

Также для модулярных решёток модулярны: (1) гомоморфный образ, (2) любая подрешётка, (3) прямое произведение.

Дистрибутивные решётки

Определение 4.8. Решётка $\langle L, \sqcup, \sqcap \rangle$ называется *дистрибутивной*, если в ней выполняются дистрибутивные законы

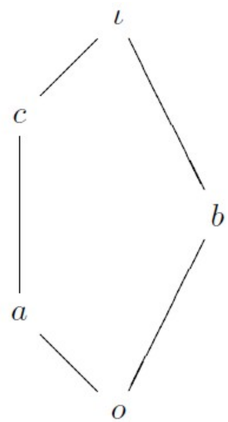
$$\begin{aligned}(x \sqcup y) \sqcap z &= (x \sqcap z) \sqcup (y \sqcap z);\\ (x \sqcap y) \sqcup z &= (x \sqcup z) \sqcap (y \sqcup z).\end{aligned}$$

Пример 4.2.

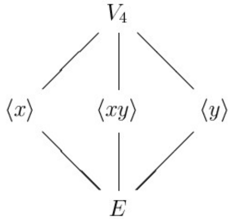
1. Дистрибутивны цепи, булевы алгебры и их подрешётки.
2. Решётка всех подпространств векторного пространства (упомянутая ранее в качестве примера модулярной решётки) не дистрибутивна.
3. Решётка $\mathrm{Sub}\, C$ всех подгрупп *циклической* группы C дистрибутивна.

Всякая дистрибутивная решётка модулярна

Модулярный закон — ослабленная форма второго дистрибутивного закона.



$$\begin{aligned}(a \sqcup b) \sqcap c = \iota \sqcap c = c \neq\\ \neq (a \sqcap c) \sqcup (b \sqcap c) = a \sqcup o = a\end{aligned}$$



$V_4 = \langle\, e, x, y, xy \,\rangle$, все подгруппы V_4 модулярны

Решётка $Sub\, V_4 \;\cong\; M_3$ модулярна, но не дистрибутивна:

$$(\langle x\rangle \sqcup \langle y\rangle) \sqcap \langle xy\rangle \;=\; V_4 \sqcap \langle xy\rangle \;=\; \langle xy\rangle \;\neq$$
$$\neq\; (\langle x\rangle \sqcap \langle xy\rangle) \sqcup (\langle y\rangle \sqcap \langle xy\rangle) \;=\; E \sqcup E \;=\; E.$$

Недистрибутивность M_3, оказывается ключевой: справедлива

Теорема 4.12. *Модулярная решётка является дистрибутивной, iff никакая её подрешётка не изоморфна ромбу M_3.*

Следствие (критерий дистрибутивности решётки). *Решётка дистрибутивна, iff никакая её подрешётка не изоморфна ни пятиугольнику N_5, ни ромбу M_3.*

Теорема 4.13 (правило сокращения в дистрибутивных решётках). *Решётка дистрибутивна iff для любых её элементов справедливо правило сокращения.*

Доказательство. Достаточность — аналогично доказательству в *Теореме* 4.11.

Необходимость — опустим. □

Лемма 4.2. $J(P) \leqslant \langle \mathcal{P}(P), \cup, \cap \rangle \;\Rightarrow\;$ *решётка* $J(P)$ *дистрибутивна.*

Доказательство. Достаточно показать, что совокупность $J(P)$ устойчива относительно теоретико-множественных операций $\cup$ и $\cap$.

Пусть $I_1, I_2 \in J(P)$. Тогда для всех элементов $a, x \in P$:

$$(x \sqsubseteq a) \mathbin{\&} (a \in I_1 \cup I_2) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (x \sqsubseteq a) \mathbin{\&} (a \in I_1) \\ (x \sqsubseteq a) \mathbin{\&} (a \in I_2) \end{array}\right. \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in I_1 \\ x \in I_2 \end{array}\right. ,$$

т.е. $x \in \{I_1 \cup I_2\}$ и аналогично $x \in \{I_1 \cap I_2\}$. Следовательно и $I_1 \cup I_2$, и $I_1 \cap I_2$ являются порядковыми идеалами. □

Дистрибутивность решётки $J(P)$*: пример*

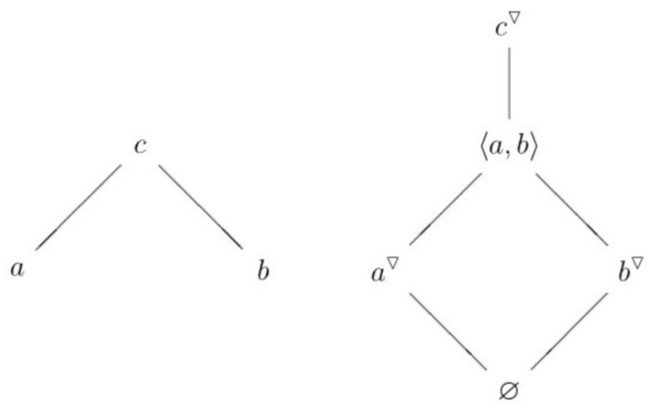


Рис. 4.8. Z_3 и $J(Z_3)$

В конечных дистрибутивных решётках важную роль играют не атомы (например, в конечной цепи всего один атом), а *неразложимые в объединение элементы.*

<u>*Определение*</u> 4.9. Элемент $z \neq o$ решётки с нулём o называют *неразложимым в объединение*, если из $z = x \sqcup y$ следует либо $z = x$, либо $z = y$.

Пример 4.3.

1. Атомы любой решётки неразложимы, и в атомной булевой алгебре нет других неразложимых элементов.
2. В решётке $\langle \mathbb{N}, | \rangle$ неразложимы только *степени простых чисел.*
3. В цепи ни один элемент не является разложимым.

Лемма 4.3. *В конечной решётке каждый ненулевой элемент может быть представлен в виде объединения неразложимых элементов.*

Доказательство. Пусть $b = b_1 \sqcup b_2$ и $b_1 \neq b \neq b_2$.

Если и b_1, и b_2 неразложимы, то лемма доказана. Иначе представляем b_1 и/или b_2 в виде объединения строго содержащихся в них элементов, и т.д.; в силу конечности решётки указанный процесс закончится. □

Следствие. *Всякий ненулевой элемент атомной булевой алгебры представим в виде объединения содержащихся в нём атомов.*

Действительно, (1) булева алгебра — решётка; (2) её атомы — неразложимы и (3) неразложимы только атомы.

Обозначения для подмножеств элементов (дистрибутивной) решётки L:

- $\mathrm{Irr}\ L$ — множество неразложимых в объединение элементов L;
- $\mathrm{Irr}(x) = \{\, y \in \mathrm{Irr}\ L \mid y \sqsubseteq x \,\}$ — множество неразложимых элементов L, содержащихся в x.

Доказанная лемма утверждает, что в конечной решётке каждый ненулевой элемент x допускает представление:

$$x = \bigsqcup_{a \in \mathrm{Irr}(x)} a.$$

Построение решётки $J(P)$ казуального ч.у. множества P

1. Построим диаграмму булевой алгебры $\mathcal{P}(M) = J(M)$ для множества M минимальных элементов P.

2. Выберем некоторый минимальный элемент x множества $P \smallsetminus M$ и пусть S_x — множество непосредственно предшествующих ему элементов.

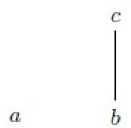
   Присоединим к $J(M)$ такой элемент $\langle x \rangle$, который неразложим в объединение и непосредственно следовать за порядковым идеалом, порождённым S_x.

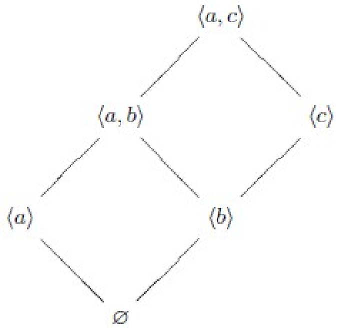
3. Добавим все объединения имеющихся и вновь построенных элементов с $\langle x \rangle$ так, чтобы они образовали булеву алгебру.

4. Выберем новый минимальный элемент y множества $\{P \setminus M\} \setminus \{x\}$ и достроим диаграмму аналогичным способом.

5. Продолжаем так, пока не получим диаграмму $J(P)$.

Пример 4.4. 1. Решётка порядковых идеалов ч.у. множества $\mathbf{1} + \mathbf{2}$





2. Решётка порядковых идеалов ч.у. множества Z_5

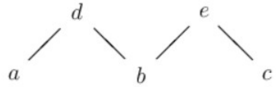


Рис. 4.9. Z_5

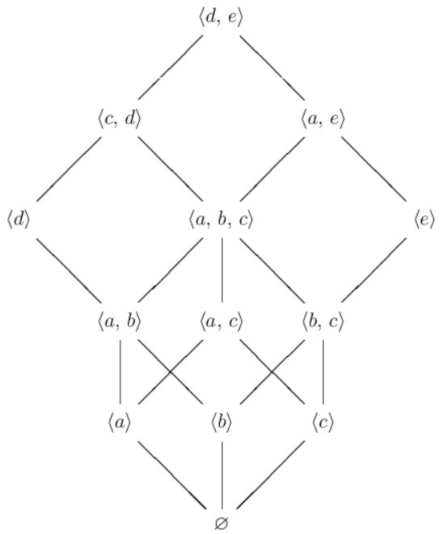


Рис. 4.10. $J(Z_5)$

Продемонстрируем на построенной решётке вычисление некоторых характеристических чисел исходного ч.у. множества Z_5.

$|J(\mathcal{P})|$ — Известно, что зигзаг $\mathbb{Z}_n$ имеет F_{n+2} ($(n+2)$-е число Фибоначчи) порядковых идеалов.

Например, в нашем случае $|J(Z_5)| = F_7 = 13$.

$e(\mathcal{P})$ — Доказано, что $e(P)$ равно числу максимальных восходящих от наименьшего элемента $\varnothing$ к наибольшему P^∇ цепей в решётке $J(\mathcal{P})$.

Подсчитываем, что таких путей 16.

С другой стороны, $e(Z_5)$ есть 5! умноженное на пятое число тангенса — коэффициент при

x^5 в разложении $\operatorname{tg} x$ в ряд Маклорена, т.е. $e(Z_5) = 5!\frac{2}{15} = 16$.

Теорема 4.14. $$\sum_{n\geqslant 2} \frac{e(\mathbf{s}_n)}{n!} x^n = x \cdot \sec^2 x.$$

Числа $e(\mathbf{s}_n)$ и, для сравнения, числа секанса $e(Z_{2n})$ для первых значений n приведены в таблице.

n	2	3	4	5	6	7
$e(\mathbf{s}_n)$	4	48	1 088	39 680	2 122 752	156 577 855
$e(Z_{2n})$	5	61	1 385	50 521	2 702 765	199 360 981

Значения $|J(B^n)|$:

n	1	2	3	4	5	6
$\|J(B^n)\|$	3	6	20	168	7581	7828354

Лемма 4.4. $\operatorname{Irr} J(P) \cong P$.

Доказательство. Пусть P — ч.у. множество и $J(P)$ — (дистрибутивная) решётка его порядковых идеалов. Порядковый идеал решётки неразложим, iff он является главным, откуда:
$$\operatorname{Irr} J(P) \cong J_0(P) = \{\, x^{\triangledown} \mid x \in P \,\}.$$

Ранее был установлен изоморфизм между ч.у. множеством и совокупностью его главных идеалов:
$$\varphi : P \to J(P), \quad \varphi(x) = x^{\triangledown},$$
поэтому $P \cong J_0(P) = \operatorname{Irr} J(P)$. □

$\mathrm{Irr}\ J(P) \cong P$: *пример*

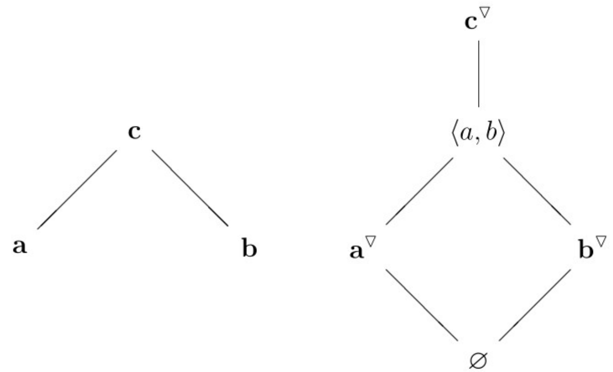


Рис. 4.11. Z_3, множество $Irr\,J(Z_3)$ выделено

Фундаментальная теорема о конечных дистрибутивных решётках

Вопрос: Пусть L — дистрибутивная решётка. Можно ли подобрать такое ч.у. множество P, чтобы $L \cong J(P)$?

Теорема 4.15 (ФТКДР, *Г. Биркгоф*). *Всякая конечная дистрибутивная решётка L изоморфна решётке $J(Irr\,L)$ порядковых идеалов ч.у. множества её неразложимых элементов: $L \cong J(Irr\,L)$.*

Доказательство. Набросок: Рассмотрим отображение

$$\psi : L \to J(\mathrm{Irr}\ L)\,, \quad \psi(x) = \mathrm{Irr}(x).$$

- ψ есть биекция (при доказательстве сюръективности существенна конечность L);
- $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow \mathrm{Irr}(x) \subseteq \mathrm{Irr}(y) \Leftrightarrow \psi(x) \subseteq \psi(y)$.

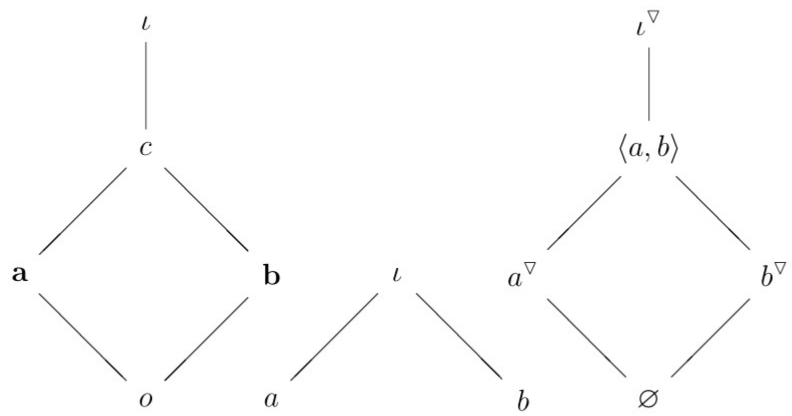


Рис. 4.12. Иллюстрация ФТКДР: L, $Irr\,L$ и $J(Irr\,L)$

$\therefore\ \psi$ — порядковый изоморфизм между L и $J(\mathrm{Irr}\ L)$. $\square$

Теорема Биркгофа позволяет представлять элементы любой дистрибутивной решётки подмножествами некоторого множества и пользоваться диаграммами Эйлера-Венна.

Из неё также вытекает интересное

Следствие. Всякая конечная дистрибутивная решётка вложима в упорядоченную делимостью решётку натуральных чисел:

$$L \hookrightarrow \langle\, \mathbb{N}^\circ, \vee, \wedge\,\rangle \leqslant \langle\, \mathbb{N}, \mid\,\rangle,$$

где $\mathbb{N}^\circ$ — множество натуральных чисел, свободных от квадратов.

Вложение $L \hookrightarrow \langle\, \mathbb{N}, \mid\,\rangle$: алгоритм

1. Наименьшему элементу o решётки L сопоставляется число 1, а $n \geqslant 1$ её атомам — первые n простых чисел $p_1, \ldots, p_n$.

2. Пусть состоялось приписывание всем элементам множества $x^{\nabla} \setminus \{x\}$ элемента x решётки L. Если элементу x непосредственно предшествует

   - единственный элемент, которому сопоставлено число k, то сопоставляем x число kp, где p — первое из ещё не использованных простых чисел;
   - несколько элементов, то сопоставляем x наименьшее общее кратное всех чисел, им соответствующих.

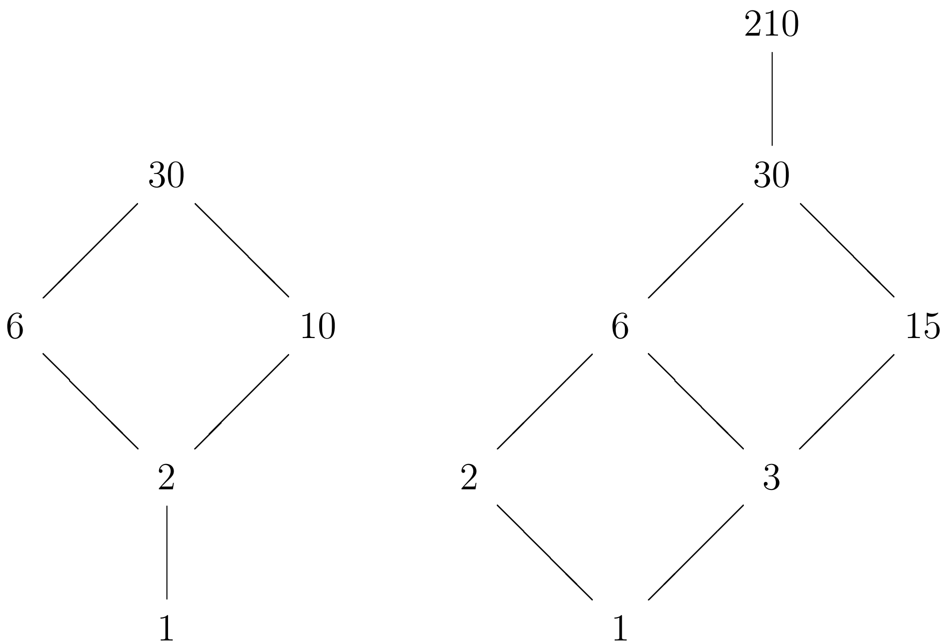


Рис. 4.13. Вложение $L \hookrightarrow \langle \mathbb{N}, | \rangle$

4.4 Факторрешётки. Решётки с дополнениями

Конгруэнции: определение Пусть L — решётка, $\sim\in \mathcal{E}(L)$ и $\sim$ стабильно относительно объединения и пересечения (сохраняет их):

$$\begin{cases} a \sim c \\ b \sim d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a \sqcup b) \sim (c \sqcup d) \\ (a \sqcap b) \sim (c \sqcap d) \end{cases}.$$

Такая эквивалентность называется *конгруэнцией.*

Приведённые условия позволяют рассматривать фактормножество $L/\sim$ с операциями $\sqcup$ и $\sqcap$, применяемым к его элементам (классам эквивалентности), т.е. факторрешётку L по конгруэнции $\sim$:

$$\langle\, L/\sim, \sqcup, \sqcap\,\rangle.$$

Конгруэнции: пример

Для гомоморфизма решёток $\varphi\colon L \to L'$ определяется ядерная эквивалентность $\operatorname{Ker}\varphi$:

$$a(\operatorname{Ker}\varphi)b \;\Leftrightarrow\; \varphi(a) \;=\; \varphi(b).$$

Без труда проверяется, что $\operatorname{Ker}\varphi$ — эквивалентность; эту эквивалентность называют *ядерной.*

Далее имеем

$$\begin{cases} a(\operatorname{Ker}\varphi)c \\ b(\operatorname{Ker}\varphi)d \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(a \sqcup b) = \varphi(a) \sqcup \varphi(b) = \varphi(c) \sqcup \varphi(d) = \varphi(c \sqcup d) \\ \varphi(a \sqcap b) = \varphi(a) \sqcap \varphi(b) = \varphi(c) \sqcap \varphi(d) = \varphi(c \sqcap d) \end{cases}$$

Следовательно, $(a\sqcup b)\,(\operatorname{Ker}\varphi)\,(c\sqcup d)$ и $(a\sqcap b)\,(\operatorname{Ker}\varphi)\,(c\sqcap d)$, т.е. $\operatorname{Ker}\varphi$ оказывается конгруэнцией.

Эта конгруэнция называется *ядром гомоморфизма* φ.

Эквивалентность по идеалу дистрибутивной решётки. Пусть I — идеал дистрибутивной решётки L.
Введём на L бинарное отношение $\sim_I$:

$$a \sim_I b \;\Leftrightarrow\; \underset{I}{\exists} x \; (a \sqcup x \;=\; b \sqcup x).$$

Покажем, что $\sim_I$ есть эквивалентность.
Рефлексивность и симметричность очевидны; покажем транзитивность.

Пусть $a \sim_I b$ и $b \sim_I c$. Это означает существование $x, y \in I$ таких, что $a \sqcup x \;=\; b \sqcup x$ и $b \sqcup y \;=\; c \sqcup y$. Далее (объединяя левые и правые части первого равенства с y, а второго — с x), получим

$$\begin{cases} a \sqcup x \;=\; b \sqcup x \\ b \sqcup y \;=\; c \sqcup y \end{cases} \;\Rightarrow\; a \sqcup (x \sqcup y) \;=\; c \sqcup (x \sqcup y)$$

и $a \sim_I c$, поскольку $x \sqcup y \in I$.

Эквивалентность $\sim_I$ *является конгруэнцией*
Обозначения:
- смежные классы по $\sim_I$ — $[\cdot]_I$ (очевидно $[a]_I \;=\; a \sqcup I$);
- фактормножество по эквивалентности $\sim_I$ — L/I.

Покажем, что $\sim_I$ — конгруэнция. Имеем

$$\begin{cases} a \sim_I c \\ b \sim_I d \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \exists\, x \in I \;(a \sqcup x \;=\; c \sqcup x) \\ \exists\, y \in I \;(b \sqcup y \;=\; d \sqcup y) \end{cases} \qquad (*)$$

1. Для объединения, применяя $\sqcup$ к обеим частям:

$$\exists\, x, y \in I : \; (a \sqcup b) \sqcup (x \sqcup y) \;=\; (c \sqcup d) \sqcup (x \sqcup y),$$

и, поскольку $x \sqcup y \in I$, то $(a \sqcup b) \sim_I (c \sqcup d)$.

2. Для пересечения —

$$\exists\, x, y \in I:\ (a \sqcup x) \sqcap (b \sqcup y) = (c \sqcup x) \sqcap (d \sqcup y).$$

Раскрывая левую часть по дистрибутивности —

$$(a \sqcap b) \sqcup \underline{(a \sqcap y) \sqcup (x \sqcap b) \sqcup (x \sqcap y)} = \\ = (c \sqcap d) \sqcup \underline{(c \sqcap y) \sqcup (x \sqcap d) \sqcup (x \sqcap y)}$$

Покажем теперь, что

$$(a \sqcap y) \sqcup (x \sqcap b) \sqcup (x \sqcap y) = (c \sqcap y) \sqcup (x \sqcap d) \sqcup (x \sqcap y).$$

Для этого берём пересечения с y первого и с x — второго равенства из правой части соотношения $(*)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a \sqcup x) \sqcap y = (c \sqcup x) \sqcap y \\ (b \sqcup y) \sqcap x = (d \sqcup y) \sqcap x \end{array} \right. \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (a \sqcap y) \sqcup (x \sqcap y) = (c \sqcap y) \sqcup (x \sqcap y) \\ (b \sqcap x) \sqcup (x \sqcap y) = (d \sqcap x) \sqcup (x \sqcap y) \end{array} \right. ,$$

и, производя объединение соответствующих левых и правых частей, — требуемое равенство.

Получено: если I — идеал дистрибутивной решётки L, то

- $\sim_I$ является конгруэнцией и операции $\sqcup$ и $\sqcap$ на L/I определяются корректно (результат не зависит от выбранных элементов в классах);
- L/I есть факторрешётка; её нуль и ядро гомоморфизма $\varphi\colon L \to L/I$, $\varphi(x) = [x]_I$ — идеал I.

При этом $e \sim_I d$, поскольку для $c \in I$ получим $e \sqcup c = d \sqcup c$, т.е. элементы e и d находятся в одном классе эквивалентности по I.

Гомоморфизм $\varphi\colon L \to L/I$ есть отображение $\varphi(x) = [x]_I$ и идеал I есть нуль решётки L/I.

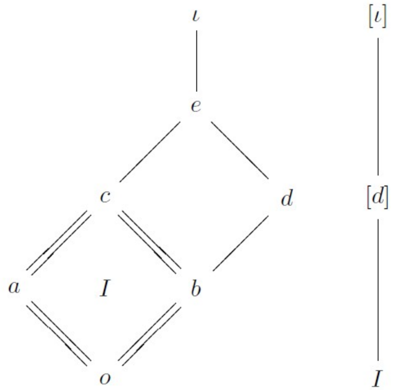


Рис. 4.14. Множество $I = \{o, a, b, c\}$ — идеал решётки

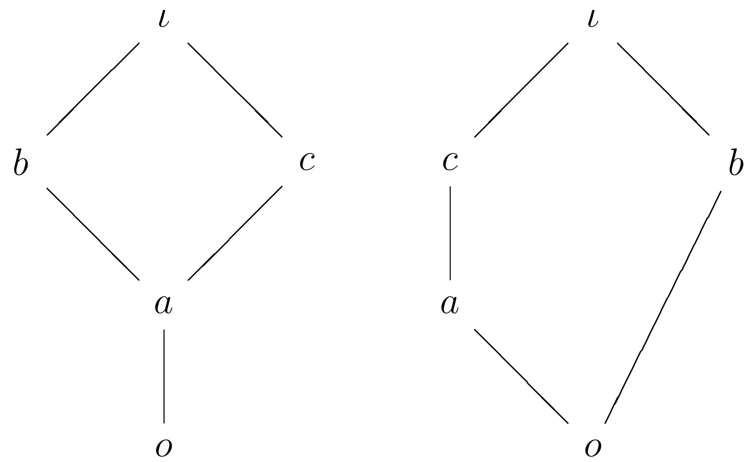
Определение 4.10. Если в решётке $\langle L, \sqcup, \sqcap \rangle$ с универсальными гранями для элемента x существует элемент y такой, что $x \sqcap y = o$ и $x \sqcup y = \iota$, то последний называется *дополнением элемента* x.

Решётка называется *решёткой с дополнениями*, если в ней каждый элемент имеет хотя бы одно дополнение.

Если каждый элемент решётки обладает в точности одним дополнением, то её называют *решёткой с единственными дополнениями.*

Классический пример решётки с единственными дополнениями: в решётке алгебры подмножеств множества A каждый элемент $X \subseteq A$ имеет единственное дополнение $\overline{X} = A \setminus \{X\}$.

Дополнения в решётках: примеры



а) элементы **a** первой решётки не имеет дополнения; элемент **a** первой решётки не имеет дополнения;

б) N_5 — решётка с дополнениями, **a** и **c** — дополнения **b**

Теорема 4.16 (Биркгоф-Уорд). *Атомная решётка с единственными дополнениями дистрибутивна.*

Утверждение 4.3. *Если ограниченная решётка дистрибутивна, то каждый её элемент имеет не более одного дополнения.*

Доказательство. Пусть элемент x дистрибутивной решётки имеет два дополнения — y_1 и y_2. Тогда

$$\begin{cases} x \sqcup y_1 = x \sqcup y_2 = \iota \\ x \sqcap y_1 = x \sqcap y_2 = o \end{cases} \overset{Abbr}{\Rightarrow} y_1 = y_2 \,.$$

□

Теорема 4.17 (*Маклафлин*, упрощение критерия модулярности). *Если атомная решётка с дополнениями не содержит в качестве подрешётки пятиугольник N_5, наименьший и наибольший элементы которого совпадают с нулём и единицей решётки, то она модулярна.*

Определение 4.11. Если $[a, b]$ — интервал решётки L, $x \in [a, b]$ и элемент y решётки L таков, что $x \sqcap y = a$ и $x \sqcup y = b$, то y называется *относительным дополнением элемента x в интервале $[a, b]$*.

Если в некоторой решётке все интервалы суть решётки с дополнениями, то она называется *решёткой с относительными дополнениями*.

Если y — относительное дополнение элемента x в интервале $[a, b]$, то $y \in [a, b]$, и x, в свою очередь, также будет относительным дополнением элемента y в интервале $[a, b]$.

Дистрибутивная решетка с нулем и относительными дополнениями называется *алгеброй Ершова*.

Относительные дополнения: пример

Элемент e дополнения не имеет.

Дополнениями b в интервале $[e, \iota]$ являются элементы c и d.

Элементы a и e — единственные дополнения друг друга в интервале $[o, b]$.

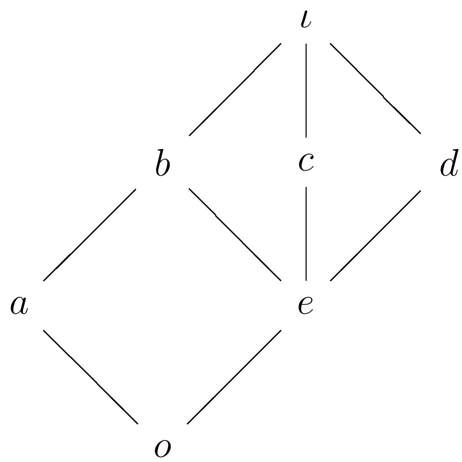


Рис. 4.15. Решётка с относительными дополнениями

4.5 Применение теории решёток к задаче классификации

Классификация по прецедентам: постановка задачи

1. Множество *объектов* $\mathcal{X}$ разделено на несколько подмножеств (*классов*).

2. *Информация о таком разбиении содержится только в указании о принадлежности к данным классам элементов конечной обучающей последовательности* (*выборки*) из $\mathcal{X}$, элементы которой называют *прецедентами*.

3. Объекты имеют описание на некотором формальном языке, указывающем степень обладания объ-

ектами конечным числом признаков из множества $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Классификация: подходы к решению задачи

- метрические методы (NN, ...);
- разделяющие поверхности (SVM, ...);
- потенциальные функции;
- логические методы;
- коллективные решающие правила (области компетенции, голосование, алгебраический подход);
- структурные методы;
- реляционный подход (АФП (FCA)[1], ...)

Соответствия Галуа. Далее запись отображений: $f(a)$ записывается как af, а $f(A)$ записывается как Af.

Определение 4.12. Пусть $\langle P, \sqsubseteq_P \rangle$ и $\langle Q, \sqsubseteq_Q \rangle$ — ч.у. множества.

Пара отображений (φ, ψ), $\varphi : P \to Q$, $\psi : Q \to P$, удовлетворяющая свойствам

1) φ и ψ антиизотонны;

2) $p\varphi\psi \sqsupseteq p$ и $q\psi\varphi \sqsupseteq q$, $p \in P, q \in Q$ (т.е. $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$ — операторы замыкания на P и Q соответственно)

называется *соответствием Галуа* между P и Q.

Справедливы и более сильные соотношения

$$p \sqsubseteq q\psi \;\Leftrightarrow\; q \sqsubseteq p\varphi \quad \text{и} \quad \varphi = \varphi\psi\varphi,\ \psi = \psi\varphi\psi.$$

[1] *Wille R., Ganter B.* Formal concept analysis. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1999.

Понятие: философское отступление
Понятие — целостная совокупность суждений об отличительных признаках вещей и отношений между ними

Примеры: искусство, наука, ...

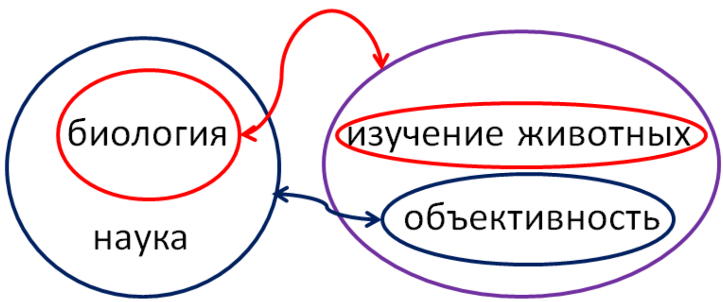
Объём понятия — совокупность всех вещей, обладающих зафиксированными в данном понятии признаками

Примеры: искусство: литература, живопись, архитектура,...; наука: биология, физика, химия...

Содержание понятия — совокупность свойств, присущих всем объектам данного понятия

Примеры: искусство: результат отражения действительности в форме чувственных образов, создание выразительных форм, ...
наука: познавательная деятельность, объективность, систематичность, ...

Закон обратного отношения между содержанием и объёмом понятия: бо́льшее по объёму понятие имеет меньшее содержание



Антимонотонность соответствий Галуа отражает этот закон

Классификация: положительные и отрицательные примеры.

Рассматриваются задачи, в которых множество $\mathcal{X}$ разбито на два непересекающихся класса: $\mathcal{X}^+$ (*положительный*) и $\mathcal{X}^-$ (*отрицательный*) относительно обладания/необладания их объектами некоторым *целевым признаком* $z \notin M$.

Прецеденты из данных классов называются, соответственно, *положительными* и *отрицательными примерами.*

Имеем 2 класса и $z =$ "$x \in \mathcal{X}^+$"

Пусть

G — *множество объектов*;

M — *множество признаков*;

I — соответствие между G и M называемое *отношением инцидентности*, т.е. gIm означает, что объект $g \in G$ обладает признаком $m \in M$.

Определение 4.13. Тройка $K = (G, M, I)$ называется *формальным контекстом.*

В конечном случае контекст может быть задан в виде *объектно-признаковой* $(0,1)$-*матрицы.*

Утверждение 4.4. *Если для произвольных* $A \subseteq G$ *и* $B \subseteq M$ *ввести отображения*

$$\varphi : 2^G \to 2^M \quad \text{и} \quad \psi : 2^M \to 2^G$$

такие, что

$$A\varphi = \{ m \in M \mid \forall g \in A\,(gIm) \} = \varphi(A) = A',$$
$$B\psi = \{ g \in G \mid \forall m \in B\,(gIm) \} = \psi(B) = B',$$

то пара отображений (φ, ψ) *будет соответствием Галуа между ч.у. множествами* 2^G *и* 2^M*, упорядоченными по включению.*

Определение 4.14. Пусть дан контекст $K = (G, M, I)$. Пара подмножеств (A, B), где $A \subseteq G$, $B \subseteq M$, и таких, что $A' = B$ и $B' = A$, называется *формальным понятием* данного контекста с *формальным объёмом* A и *формальным содержанием* B.

Если контекст представлен в виде объектно-признаковой $(0,1)$-матрицы, то формальному понятию соответствует максимальная её подматрица, заполненная единицами.

Формальные объём и содержание — замкнутые, соответственно, относительно $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$ множества.

Теорема 4.18 (основная АФП). *Множество всех формальных понятий данного контекста* K *образует полную решётку, обозначаемую* $\mathfrak{B}(K)$*, относительно операций* $\vee$ *(объединение) и* $\wedge$ *(пересечение):*

$$(A_1, B_1) \vee (A_2, B_2) = \left((B_1 \cap B_2)', B_1 \cap B_2 \right),$$
$$(A_1, B_1) \wedge (A_2, B_2) = \left(A_1 \cap A_2, (A_1 \cap A_2)' \right)$$

и называемую решёткой формальных понятий.

В решётке $\mathfrak{B}(K)$ формального контекста $K = (G, M, I)$:

- $(A_1,\, B_1) \sqsubseteq (A_2,\, B_2) \Rightarrow (A_1 \subseteq A_2) \,\&\, (B_1 \supseteq B_2)$;
- единица ι — формальное понятие $(G,\, G')$;
- атомы — формальные понятия вида $(g,\, g')$;
- нуль o — формальное понятие $(\varnothing,\, M)$ с пустым объёмом.

Данные для обучения классификации описываются *положительным* $K_+ = (G_+, M, I_+)$ и *отрицательным* $K_- = (G_-, M, I_-)$ *контекстами.*

Операторы Галуа в этих контекстах обозначаются соответствующими *верхними индексами*: A^+, A^-, B^+ и т.д.

Определение 4.15. Формальное понятие $(A_+,\, B_+) \in K_+$ называется *положительным.*

A_+ — положительный формальный объём,
B_+ — положительное формальное содержание.

Аналогично определяются *отрицательные* формальные объём и содержание для контекста K_-.

Определение 4.16. Положительное формальное содержание B_+ положительного понятия $(A_+,\, B_+)$ называется:

- *положительной $\oplus$—предгипотезой*, если $\forall (A_-,\, B_-) \in K_-$ $(B_+ \neq B_-)$, т. е. оно не является формальным содержанием ни одного отрицательного понятия;

- *положительной* $\oplus$*−гипотезой*, если $\forall(g,\, g^-) \in K_-\ (B_+ \nsubseteq g^-)$, т. е. оно не является подмножеством содержания понятия какого-либо отрицательного примера g;
- фальсифицированной положительной $\oplus$−гипотезой, если $\exists(g,\, g^-) \in K_-\ (B_+ \subseteq g^-)$.

Отрицательные ($\ominus$−предгипотезы, ...) определяются аналогично.

Гипотеза является также и предгипотезой.

Гипотезы используются для классификации новых объектов

Простейшее решающее правило

Пусть $g \notin \{G_+ \cup G_-\}$ — новый (неопределённый) объект.

Если его формальное содержание g' содержит хотя бы одну

- $\oplus$−гипотезу и не содержит ни одной отрицательной гипотезы, то он относится к положительному классу;
- $\ominus$−гипотезу и не содержит ни одной положительной гипотезы, то он относится к отрицательному классу.

Отказ от классификации происходит, если g':

- либо не содержит никаких гипотез (недостаток данных);
- либо содержит как положительные, так и отрицательные гипотезы (противоречие в данных).

Многозначные контексты.
Для получения бинарной информации о признаках из количественных и качественных признаков используется процедура шкалирования.

Многозначный контекст — это четвёрка (G, M, Z, I), где

- G, M, Z — множества объектов, признаков и значений признаков соответственно,
- I — тернарное отношение $I \subseteq G \times M \times Z$, задающее значение $z \in Z$ признака $m \in M$ объекта $g \in G$,

причем отображение $G \times M \to Z$ функционально.

Шкалирование — это представление многозначных контекстов двузначными.

Пример «Фрукты». *Задача:* построить классификатор по целевому свойству
z = «*являться фруктом*» и следующей объектно-признаковой таблице положительных и отрицательных примеров:

№	G \ M	**цвет**	**жёсткий**	**гладкий**	**форма**	**z**
1	**яблоко**	жёлтое	нет	да	круглое	+
2	**грейпфрут**	жёлтый	нет	нет	круглый	+
3	**киви**	зелёное	нет	нет	овальное	+
4	**слива**	синяя	нет	да	овальная	+
5	**кубик**	зелёный	да	да	кубический	−
6	**яйцо**	белое	да	да	овальное	−
7	**теннисный мяч**	белый	нет	нет	круглый	−

Результат шкалирования

G \ M	w	y	g	b	f	$\overline{\mathbf{f}}$	s	$\overline{\mathbf{s}}$	r	$\overline{\mathbf{r}}$	z
1		×				×	×		×		+
2		×				×		×	×		+
3			×			×		×		×	+
4				×		×	×			×	+
5			×		×		×			×	−
6	×				×		×			×	−
7	×					×		×	×		−

$G_+ = \{1,2,3,4\}$, $G_- = \{5,6,7\}$ $\Rightarrow$ отношение I_+ представлено верхней частью таблицы, а отношение I_- — нижней. *Признаки означают*: w — *белый*, y — *жёлтый*, g — *зелёный*, b — *синий*; f — *твёрдый*, $\overline{f}$ — *мягкий*, s — *гладкий*, $\overline{s}$ — *шероховатый*; r — *круглый*, $\overline{r}$ — *некруглый*.

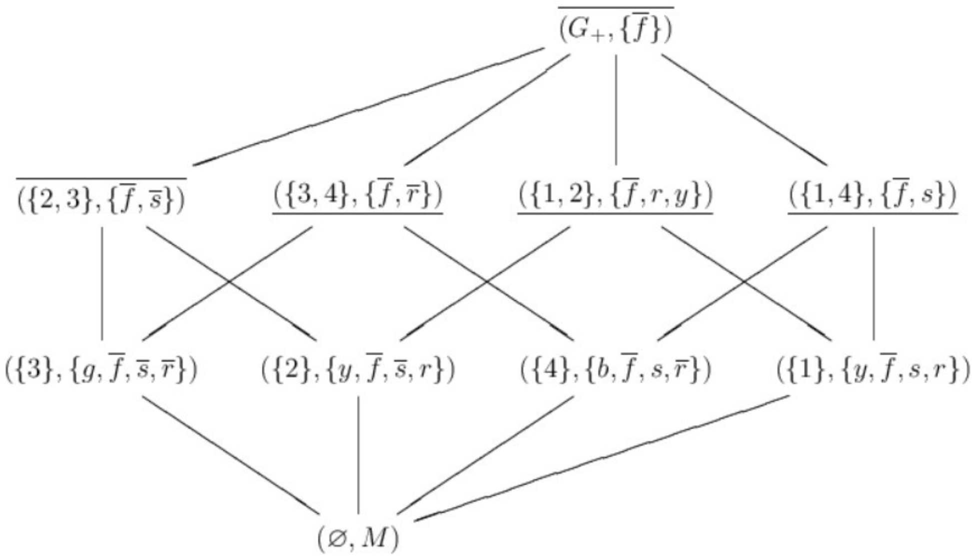


Рис. 4.16. Решётка $\mathfrak{B}(K_+)$

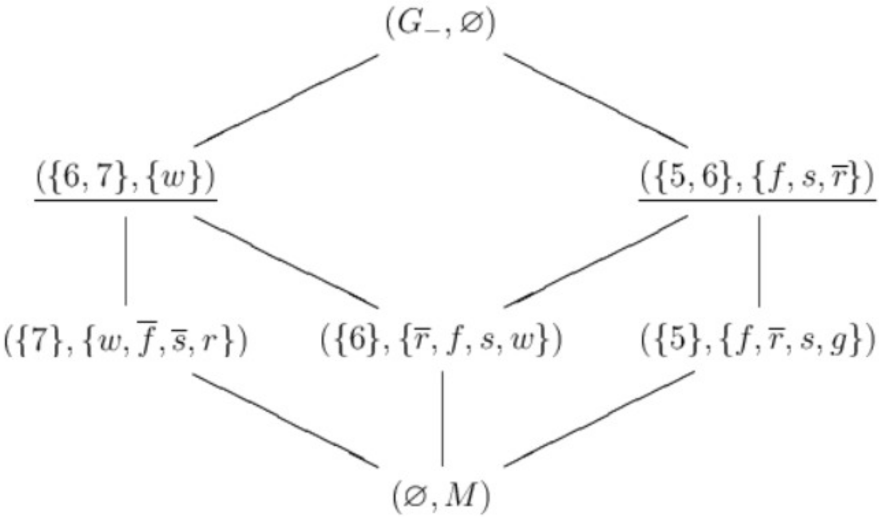


Рис. 4.17. Решётка $\mathfrak{B}(K_-)$

Формирование гипотез.
Формальные содержания

- $\{\overline{f},\overline{r}\}$ (*мягкий, некруглый*),
  $\{\overline{f},r,y\}$ (*мягкий, круглый, жёлтый*) и
  $\{\overline{f},s\}$ (*мягкий, гладкий*)
  — являются $\oplus$−гипотезами;

- $\{\overline{f},\overline{s}\}$ (*мягкий, шероховатый*)
  — является фальсифицированной $\oplus$−гипотезой, т.к. она — часть содержания $\{w,\overline{f},\overline{s},r\}$ отрицательного примера 7 (теннисный мяч);

- $\{w\}$ (*белый*) и
  $\{f,s,\overline{r}\}$ (*твёрдый, гладкий, некруглый*)
  — являются $\ominus$−гипотезами.

Классификация
Неопределённый объект g

- *мирабель* будет классифицирован как *фрукт*, т.к. его формальное содержание *жёлтый*, *мягкий*, *гладкий* $\{\, y, \overline{f}, s \,\}$ содержит $\oplus$−гипотезу $\{\, \overline{f}, s \,\}$ и не содержит ни одной из $\ominus$−гипотез);

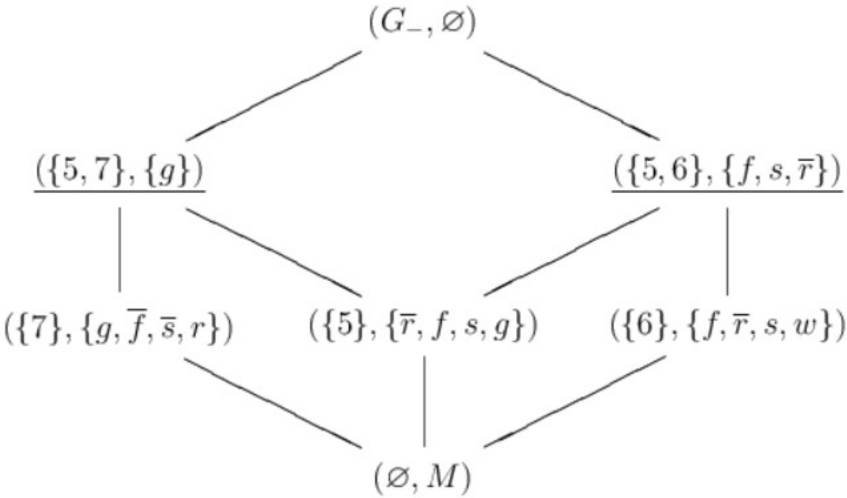
- *кусок сахара* со свойствам *белый*, некруглый, твёрдый будет классифицирован как *не-фрукт*;

- *брикет пломбира* со свойствами *белый*, *мягкий*, *некруглый* вызовет отказ от классификации, поскольку $g' = \{\, w, \overline{f}, \overline{r} \,\}$ содержит как положительную $\{\, \overline{f}, \overline{r} \,\}$, так и отрицательную $\{w\}$ гипотезы.

Дополнение

Если считать, что теннисный мяч — зелёный, то при таком изменении свойств объекта № 7 изменятся только отрицательный контекст.

Теперь $\mathfrak{B}(K_{-})$ —



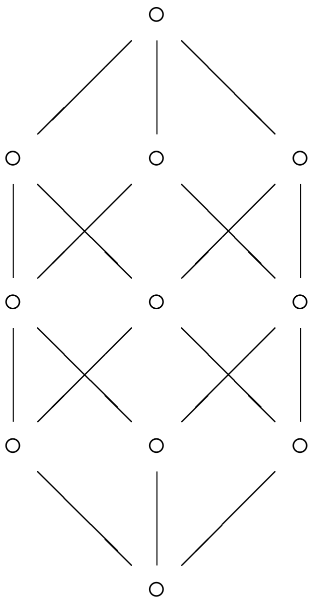
- $\{g\} = \{5,7\}'$ является фальсифицированной $\ominus$−гипотезой, поскольку она содержится в формальном содержании $\{g,\overline{f},\overline{s},\overline{r}\}$ положительного понятия $\{3\}$.
- $\{f,s,\overline{r}\} = \{5,6\}'$ является $\ominus$−гипотезой.

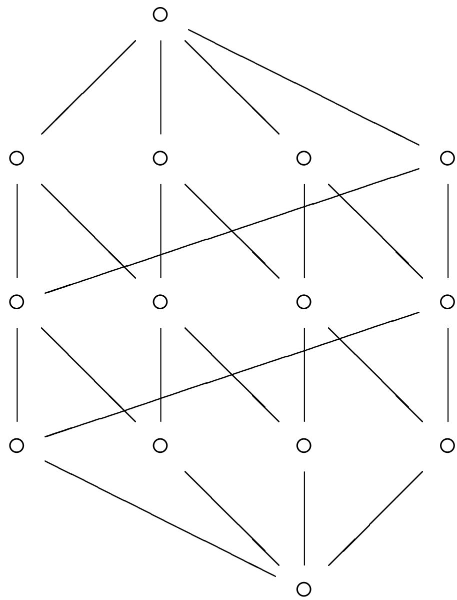
Поэтому

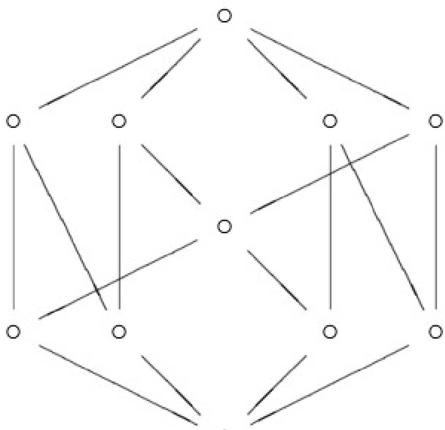
- объекты со свойствами *жёлтый*, *мягкий*, *гладкий* и *белый*, *мягкий*, *некруглый* будет классифицированы как *фрукт*;
- на объекте с единственным свойством *белый* произойдёт отказ от классификации.

4.6 Задачи и упражнения

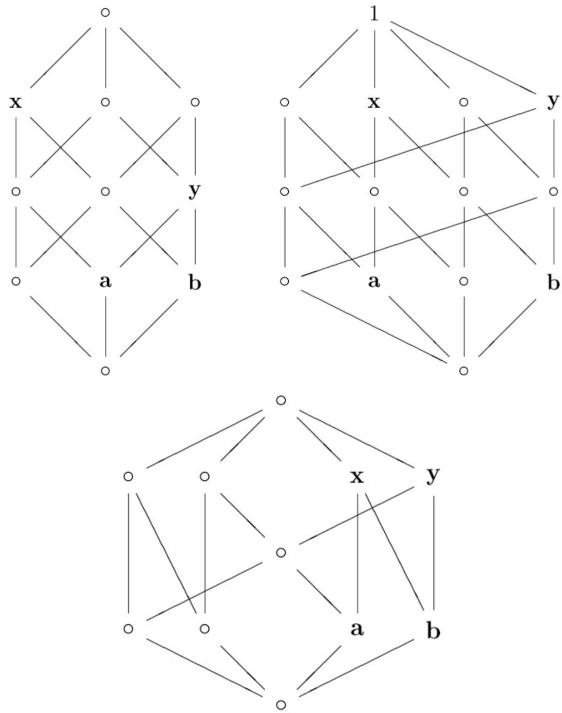
Задача 4.1. *Какие из следующих ч.у. множеств являются решётками?*







Решение. Ни одно: во всех случаях, например $\{a,b\}^{\triangle}$ имеет 2 минимальных элемента — x и y $(\{\,a,b,x,y\,\} \cong K_{2,2} = B)$.



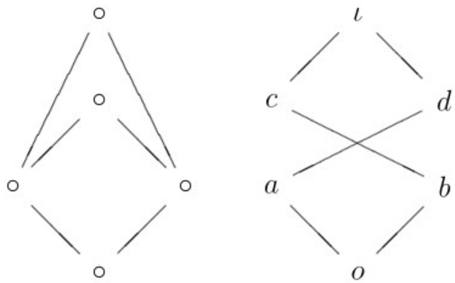
Задача 4.2. *Показать, что если к тривиально упорядоченному множеству присоединить наибольший и наименьший элементы, то возникает полная решётка.*

Решение.
Пусть o и ι — добавленные наименьший и наибольший элементы соответственно.

Тогда $\iota\,(o)$ будет точной верхней (нижней) гранью произвольной совокупности элементов исходного множества.

Задача 4.3. *1. Какое из ч.у. множеств с представленными ниже диаграммами Хассе является решёткой?*

2. Какие из элементов этой решётки имеют дополнения?

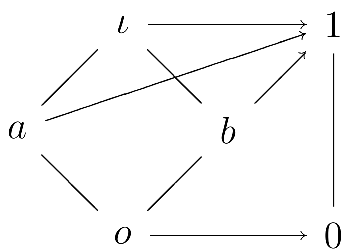


Решение. (1) Только второе.

(2) Все, причём элементы a, b, c и d — по 2 дополнения, например $a' = \{b, c\}$.

Задача 4.4. *Приведите пример порядкового гомоморфизма между решётками, не являющимся решётчатым.*

Решение. Рассмотрим решётки B^2 и B^1:



Тогда $\varphi(a \sqcap b) = \varphi(o) = 0 \neq 1 = \varphi(a) \sqcap \varphi(b)$.

Задача 4.5. *Решётка называется полной, если любое подмножество её элементов имеет точные верхнюю и нижнюю грани.*

Будет ли полной решёткой множество всех целых чисел с обычным порядком?

Решение.
Все полные решётки, очевидно, должны иметь универсальные грани, и поэтому множество всех целых чисел с обычным порядком полной решёткой не является.

Задача 4.6. *Доказать, что в каждой решётке*

1. $(a \sqsubseteq b) \,\&\, (c \sqsubseteq d) \;\Rightarrow\; (a \sqcup c) \;\sqsubseteq\; (b \sqcup d)\,;$
2. $(a \sqsubseteq b) \,\&\, (c \sqsubseteq b) \;\Rightarrow\; (a \sqcup c) \;\sqsubseteq\; b\,;$
3. $(a \sqsubseteq b) \;\Rightarrow\; \forall c : \,(a \sqcup c) \;\sqsubseteq\; (b \sqcup c)\,.$

Решение.

1. $\underline{(a \sqsubseteq b) \,\&\, (c \sqsubseteq d) \;\Rightarrow\; a \sqcup c \;\sqsubseteq\; b \sqcup d}$

$$\begin{cases} a \sqsubseteq b \\ c \sqsubseteq d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \sqcup b \,=\, b \\ c \sqcup d \,=\, d \end{cases} \Leftrightarrow\; a \sqcup b \sqcup c \sqcup d = \\ = b \sqcup d \;\Leftrightarrow\; (a \sqcup c) \sqcup (b \sqcup d) = \\ = b \sqcup d \;\Leftrightarrow\; a \sqcup c \;\sqsubseteq\; b \sqcup d.$$

2. $\underline{(a \sqsubseteq b) \,\&\, (c \sqsubseteq b) \;\Rightarrow\; a \sqcup c \;\sqsubseteq\; b}$
Следует из предыдущего при $d = b$.

3. $\underline{(a \sqsubseteq b) \;\Rightarrow\; \forall c\,((a \sqcup c) \;\sqsubseteq\; (b \sqcup c))}$
Следует из (1) при $d = c$.

Задача 4.7. *Совокупность* $Si(L) = \{ [x,y] \in L \times L \}$ *всех интервалов решётки* $\langle L, \sqcap, \sqcup \rangle$ *также является решёткой.*
Относительно каких операций $\vee$ *и* $\wedge$*?*

Решение.

$$[a,b] \vee [c,d] = [a \sqcap c,\, b \sqcup d]\,,$$

$$[a,b] \wedge [c,d] = \begin{cases} [a \sqcap c,\, b \sqcup d], & \text{если } a \sqcup c \sqsubseteq b \sqcap d, \\ \varnothing, & \text{иначе} \end{cases} .$$

Таким образом, для существования результата пересечения необходимо ввести новый объект — пустой интервал.

Задача 4.8. *Доказать равносильность следующих свойств решётки* L*:*

a) L *— цепь;*

b) *все непустые подмножества* L *являются подрешётками;*

c) $a = b \sqcap c \;\Rightarrow\; (a = b) \vee (a = c)$.

Решение.

a) ⇒ b) Имеем $\underset{L}{\forall}\; a, b\; (a \sqsubseteq b \vee b \sqsubseteq a)$.
Это свойство будет наследоваться любым подмножеством L' множества L. $\therefore L'$ — цепь.

b) ⇒ c) Для 1-, 2- и 3-трехэлементной цепи следование очевидно.

Возьмём $L' = \{a, b, c\} \subseteq L$.
По определению $b \sqcap c = \inf\{b, c\}$.
Отсюда $b \sqcap c = a \Leftrightarrow (b = a) \vee (c = a)$.

c) $\Rightarrow$ a) Имеем

$$a = b \sqcap c \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} a \sqsubseteq b & (1) \\ a \sqsubseteq c & (2) \end{array}\right.$$

Но и $b \sqcap c = a \Leftrightarrow (b = a) \vee (c = a)$.

Тогда

в случае $a = b$ имеем $b = b \sqcap c \Leftrightarrow b \sqsubseteq c$, что вместе с (1) получим $a \sqsubseteq b \sqsubseteq c$;

в случае $a = c$ имеем $c = b \sqcap c \Leftrightarrow c \sqsubseteq b$, что вместе с (2) получим $a \sqsubseteq c \sqsubseteq b$;

т.е. в любом случае поучаем цепь.

Задача 4.9. *Показать, что ч.у. множество с универсальными границами, имеющее в качестве диаграммы Хассе планарный граф с прямыми рёбрами, является решёткой.*

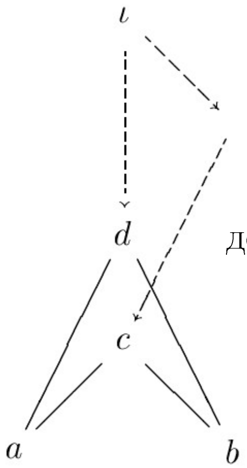
Решение.

Пусть такое ч.у. множество не является решёткой, т.е. для найдутся такие два его элемента a и b, что

1) множество $\{a, b\}^{\vartriangle}$ не имеет наименьшего элемента,
2) множество $\{a, b\}^{\triangledown}$ не имеет наибольшего элемента,

3) оба случая одновременно.

Без ограничения общности рассматриваем первый случай, второй рассматривается аналогично.



Поскольку диаграмма Хассе — планарный граф, то на ней минимальные элементы множества $\{a, b\}^{\triangle}$ (их $\geqslant 2$) должны располагаться один под другим. Пусть ниже всех располагается элемент $c \in \{a, b\}^{\triangle}$. Но диаграмма Хассе содержит элемент $\iota \neq c$, больший любого другого элемента из $\{a, b\}^{\triangle}$.

Значит элемент c должен быть соединён с каким-либо элементом, больше его, т.е. диаграмма Хассе не есть планарный граф. Противоречие.

Задача 4.10. *Построить диаграмму Хассе подгрупп*
(1) $\langle \mathbb{Z}_{30}, + \rangle$, *(2)* $\langle \mathbb{Z}_{36}, + \rangle$.

Решение. Все делители порядка n циклической группы $\langle\, \mathbb{Z}_n, + \,\rangle$ образуют циклические подгруппы.

(1) $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \;\Rightarrow$

$$Sub(\mathbb{Z}_{30}) = \left\{ \underbrace{\langle 1 \rangle}_{\mathbb{Z}_{30}}, \langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle, \langle 5 \rangle, \langle 6 \rangle, \langle 10 \rangle, \langle 15 \rangle, \underbrace{\langle 30 \rangle}_{E} \right\}.$$

Например: $\langle 6 \rangle = \{\, 0, 6, 12, 18, 24 \,\}$,

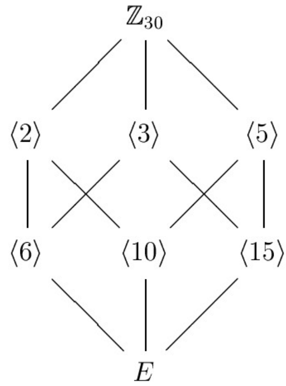
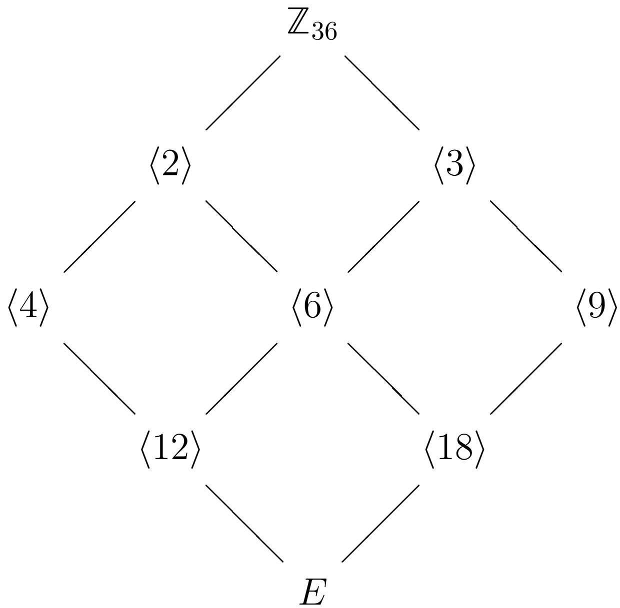


Рис. 4.18. Диаграмма Хассе подгрупп $\mathbb{Z}_{30}$

$$\langle 3\rangle = \{\,0,\,3,\,6,\,9,\,12,\,15,\,18,\,21,\,24\,\}.$$

(2) $\quad 36 = 2^2\cdot 3^2 \;\Rightarrow$

$$\mathrm{Sub}(\mathbb{Z}_{36}) = \left\{ \underbrace{\langle 1\rangle}_{\mathbb{Z}_{36}}, \underbrace{\langle 2\rangle}_{\mathbb{Z}_{18}}, \underbrace{\langle 3\rangle}_{\mathbb{Z}_{12}}, \underbrace{\langle 4\rangle}_{\mathbb{Z}_{9}}, \underbrace{\langle 6\rangle}_{\mathbb{Z}_{6}}, \underbrace{\langle 9\rangle}_{\mathbb{Z}_{4}}, \underbrace{\langle 12\rangle}_{\mathbb{Z}_{3}}, \underbrace{\langle 18\rangle}_{\mathbb{Z}_{2}}, \underbrace{\langle 36\rangle}_{E} \right\}.$$


$\mathbb{Z}_{36}$
$\langle 2\rangle$
$\langle 3\rangle$
$\langle 4\rangle$
$\langle 6\rangle$
$\langle 9\rangle$
$\langle 12\rangle$
$\langle 18\rangle$
E

Задача 4.11. *Пусть* $H = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ *— группа кватернионов, т.е. закон умножения в ней задается равенствами*

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1\,, \quad ij = k\,, \quad ji = -k\,,$$
$$jk = i\,, \quad kj = -i\,, \quad ki = j\,, \quad ik = -j$$

и умножением на ± 1 *по обычным формулам.*

Является ли решётка $Sub(H)$ *дистрибутивной? модулярной?*

Решение. Подгруппы H суть
$E = \{+1\}$, $\{\pm 1\}$, $\{\pm 1, \pm i\}$, $\{\pm 1, \pm j\}$, $\{\pm 1, \pm k\}$, H.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & H \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\{\pm 1, \pm i\} \arrow[dr, dash] & \{\pm 1, \pm j\} \arrow[d, dash] & \{\pm 1, \pm k\} \arrow[dl, dash] \\
 & \{\pm 1\} \arrow[d, dash] & \\
 & E &
\end{tikzcd}$$

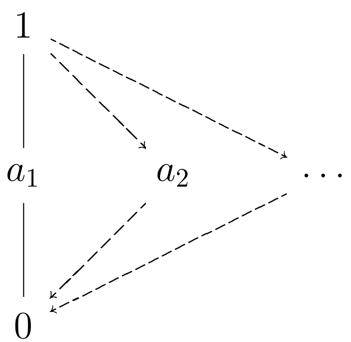
Как любая решётка нормальных подгрупп, $Sub(H)$ модулярна. Однако $Sub(H)$ не дистрибутивна, т.к. содержит ромб.

Задача 4.12. *Пусть P — ч.у. множество с универсальными гранями, и в нём нет цепей, длины больше 2. Показать, что*

(1) P — решётка и

(2) P при $|P| > 3$ либо является цепью $\boldsymbol{3}$, либо обладает нетождественным автоморфизмом.

Решение. Либо $P = \mathbf{1}$, либо $P = \mathbf{2}$, либо $P = \{\,1,\, 0,\, a_1,\, \ldots\,\}$ и



$-\ M_k$

Множество $\{\,a_1,\, \ldots\,\}$ непусто.

Ясно, что (1) P — в любом случае решётка и (2) при $|P| > 3$ любая перестановка элементов P, сохраняющая 1 и 0, есть нетождественный автоморфизм.

Задача 4.13. *Пусть $L = \langle\, L, \sqcup, \sqcap\,\rangle$ — решётка. Тогда совокупность её интервалов $Si(L)$ — также решётка относительно операций*

$$[a,\, b] \cup [c,\, d] = [a \sqcap c,\, b \sqcup d] \ \text{ и}$$

$$[a,\, b] \cap [c,\, d] = [a \sqcup c,\, b \sqcap d]\,, \quad a,\, b,\, c,\, d \in L\,.$$

Доказать, что решётка L является цепью если и только если для любых элементов x, y и z решётки $Si(L)$ выполняется соотношение

$$x \cup y = x \cup z \Rightarrow x \cup y = x \cup (y \cap z). \qquad (*)$$

Задача 4.14. *Пусть $E(n) = \langle \mathcal{E}(A), \subseteq \rangle$ — решётка всех разбиений n-элементного множества.*
Показать, что:

1) *высота $h(\alpha)$ элемента α в $E(n)$ может быть вычислена по формуле $h(\alpha) = n - |\alpha|$, где $|\alpha|$ — число блоков разбиения эквивалентности α;*

2) *$E(n)$ имеет высоту $n - 1$.*

Решение.

(1) Применим метод математической индукции. Для $n = 1, 2, 3$ (базис индукции) утверждение очевидно.

Пусть доказываемое утверждение справедливо при $n = k$. Рассмотрим решётку $E(k+1)$ разбиений множества $\{1, \ldots, k, k+1\}$. Каждое её разбиение $\mathcal{D}_{k+1}$ получается из некоторого разбиения $\mathcal{D}_k$ решётки $E(k)$ либо (1) присоединением одноэлементного блока $\{k+1\}$, либо (2) добавлением в один из блоков $\mathcal{D}_k$ элемента $k+1$.

Пусть разбиение $\mathcal{D}_{k+1}$ соответствует эквивалентности $\alpha \in E(k+1)$, а $\mathcal{D}_k$ — эквивалентности $\beta \in E(k)$. В первом случае будем иметь $h(\alpha) = h(\beta)$, а во втором — $h(\alpha) = h(\beta) + 1$ (высоты вычисляются в соответствующих решётках).

Т.о. в обеих ситуациях $h(\alpha) = (k+1) - |\alpha|$.

(2) Наибольшим элементом решётки $E(n)$ является аморфная эквивалентность ∇.

Она имеет один блок, поэтому по доказанной теореме $h(\nabla) = n{-}1$. Это число и будет высотой решётки $E(n)$.

Задача 4.15. *Показать, что если a, b, c — элементы решётки, то*

$$(a \sqcup b \sqcup c = a \sqcap b \sqcap c) \;\Rightarrow\; a = b = c.$$

Решение.
Легко видеть, что

$$a \sqcup b \sqcup c \;=\; \sup\{\, a,\, b,\, c \,\} \;\text{ и }\; a \sqcap b \sqcap c \;=\; \inf\{\, a,\, b,\, c \,\}.$$

Обозначим $z \overset{\text{def}}{=} \sup\{\, a,\, b,\, c \,\} \;=\; \inf\{\, a,\, b,\, c \,\}$. Имеем

$$\begin{aligned} z \sqsubseteq a \sqsubseteq z\,, \\ z \sqsubseteq b \sqsubseteq z\,, \\ z \sqsubseteq c \sqsubseteq z\,, \end{aligned}$$

Отсюда $z = a = b = c$.

Задача 4.16. *Рассмотрим отрезок $[a,\, b] \subset \mathbb{R}$. Пусть $\langle\, C[a,\, b],\, \min,\, \max \,\rangle$ — решётка вещественнозначных непрерывных на $[a,\, b]$ функций, а $D(a,\, b)$ — подмножество всех функций, дифференцируемых на $(a,\, b)$. Является ли $D(a,\, b)$ подрешёткой $C[a,\, b]$?*

Решение.
Нет: из-за неустойчивости операций $\max$ и $\min$ на $D(a,\, b)$.

Например, $|x| = \max\{\, x,\, -x \,\} \notin D(-1,\, +1)$.

Задача 4.17. *Является ли интервал решётки её подрешёткой?*

Решение. Да (проверка аксиом).

Задача 4.18. *Рассмотрим совокупность S всевозможных промежутков $(x,\, y)$ (открытых, полуоткрытых и замкнутых) отрезка $[a,\, b]$, $a \leqslant x < y \leqslant b$ числовой прямой. Определить на S операции $\sqcap$ и $\sqcup$ так, чтобы АС $\langle\, S, \sqcup, \sqcap\,\rangle$ оказалась решёткой. Будет ли она содержать универсальные грани? дистрибутивной? модулярной?*

Решение.

- Операция $\sqcap$ совпадает с теоретико-множественным пересечением.
- Операция $\sqcup$ есть наименьший промежуток, содержащий свои операнды.

Ассоциативность, коммутативность и идемпотентность введённых операций очевидны.

Докажем закон поглощения $\quad x \sqcup (x \sqcap y) = x \qquad (*)$.

- Если отрезки x и y не пересекаются, то $x \sqcap y = \varnothing$ и выражение слева и справа $(*)$ есть x.
- Если отрезки $x \sqcap y = w \neq \varnothing$, то $w \subseteq x$, $x \sqcup w$ и снова слева и справа в $(*)$ находится x.

Полученная решётка имеет универсальные грани:

$$\iota = [a,\, b], \qquad o = \varnothing = (x,\, x).$$

Полученная решётка не дистрибутивна:

(1) Пусть $a = 0, b = 5$ и $x = [0, 2]$, $y = [4, 5]$, $z = [1, 3]$.

Тогда $x \sqcup y = \iota = [0, 5]$, $(x \sqcup y) \sqcap z = z$.

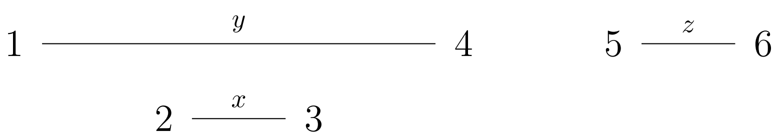
(2) С другой стороны, $x \sqcap z = [1, 2]$, $y \sqcap z = \varnothing$, а $(x \sqcap z) \sqcup (y \sqcap z) = [1, 3]$ и первый дистрибутивный закон

$$Dtr1: \ (x \sqcup y) \sqcap z = (x \sqcap z) \sqcup (y \sqcap z)$$

не выполняется.

$$(x \sqcup y) = [0, 5], \quad (x \sqcup y) \sqcap z = z = [1, 3],$$
$$(x \sqcap z) = [1, 2], \quad (y \sqcap z) = \varnothing,$$
$$(x \sqcap z) \sqcup (y \sqcap z) = x \sqcap z = [1, 2].$$

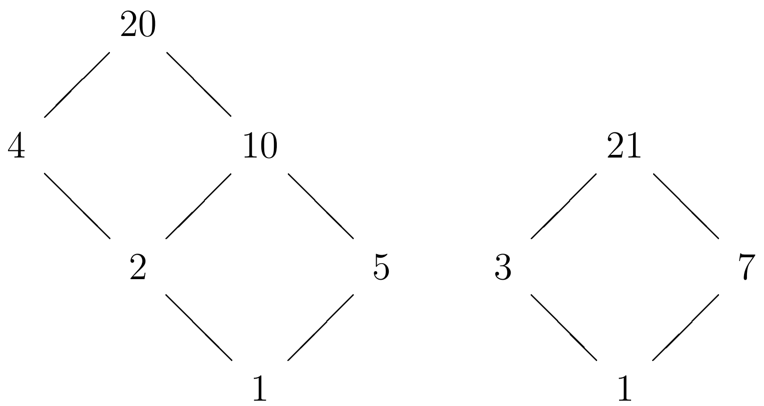
Модулярна ли полученная решётка? Пример:



$$Mod: \ x \sqsubseteq y \Rightarrow x \sqcup (y \sqcap z) = y \sqcap (x \sqcup z)$$
$$x \sqcup \varnothing = x = y \sqcap (x \sqcup z) \text{ — ДА}$$

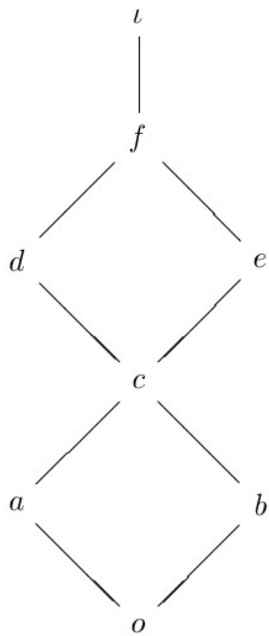
Задача 4.19. *Пусть* $D(n)$ — *решётка всех делителей натурального числа* n, *упорядоченных отношением делимости. Постройте диаграммы Хассе решёток* $D(20)$ *и* $D(21)$ *и покажите, что решётка* $D(20) \times D(21)$ *изоморфна решётке* $D(420)$.

Решение. $D(20) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$, $D(21) = \{1, 3, 7, 21\}$.

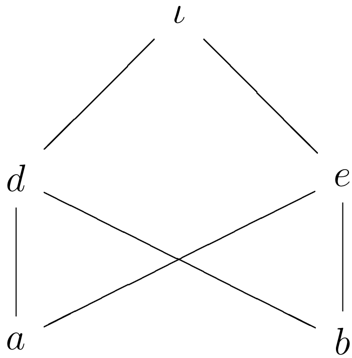


$420 = 20 \times 21$, $D(420) = D(20) \cup D(21)$, $D(20) \cap D(21) = \{1\}$.

Задача 4.20. *Для указанной решётки L построить $\overline{\mathrm{Irr}(L)}$ и $J(\mathrm{Irr}(L))$.*



Решение. $\mathrm{Irr}(L)$:



$J(\mathrm{Irr}(L)){=}?$

<u>Задача</u> 4.21. *Построить диаграммы Хассе ч.у. множества* Z_3 *и решётки* $J(Z_3)$.

На $J(Z_3)$ *выделить* $J_0(Z_3)$ *и показать вложение* $J(Z_3)$ *в булеан подходящего множества (теорема Биркгофа).*

Решение.

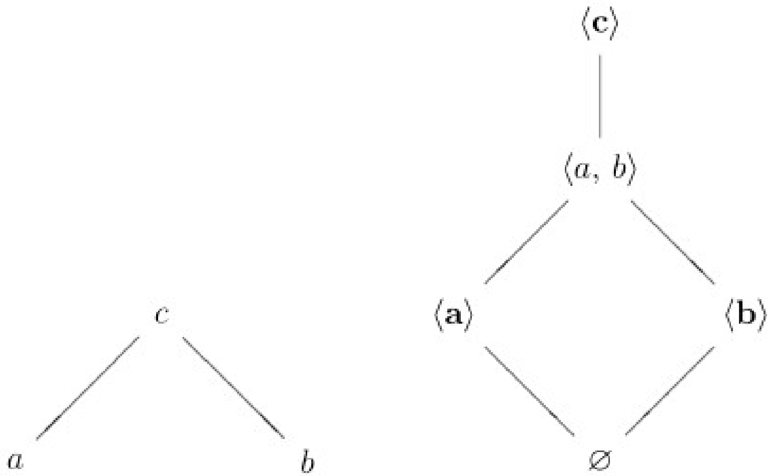


Рис. 4.19. Ч.у. множество Z_3 и решётка $J(Z_3)$

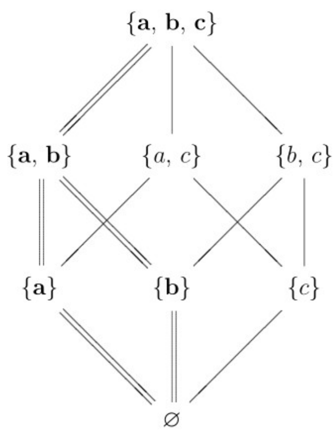
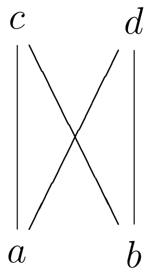
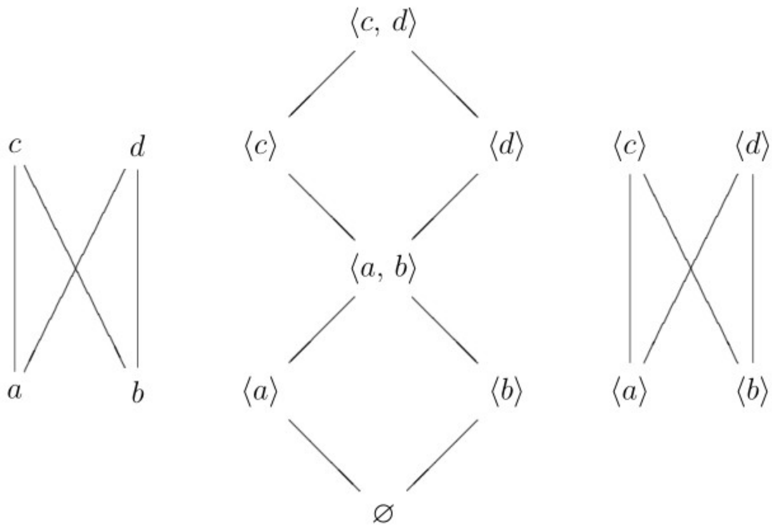


Рис. 4.20. Вложение $J(Z_3)$ в $\mathcal{P}(\mathbf{3})$

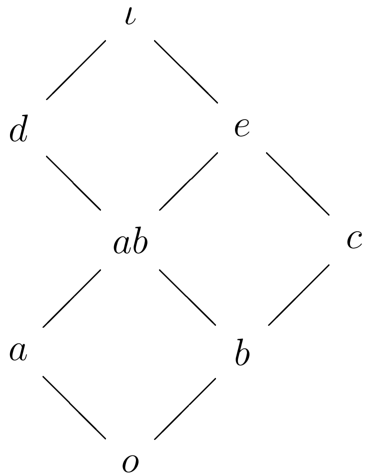
Задача 4.22. *Построить диаграммы Хассе ч.у. множества B, решётки $J(B)$ и ч.у. множества $Irr\,J(B)$.*



Решение.



Задача 4.23. *Построить диаграммы Хассе ч.у. множества* $Irr\,J(L)$ *и решётки* $J(Irr\,J(L))$ *для решётки* L



Решение.

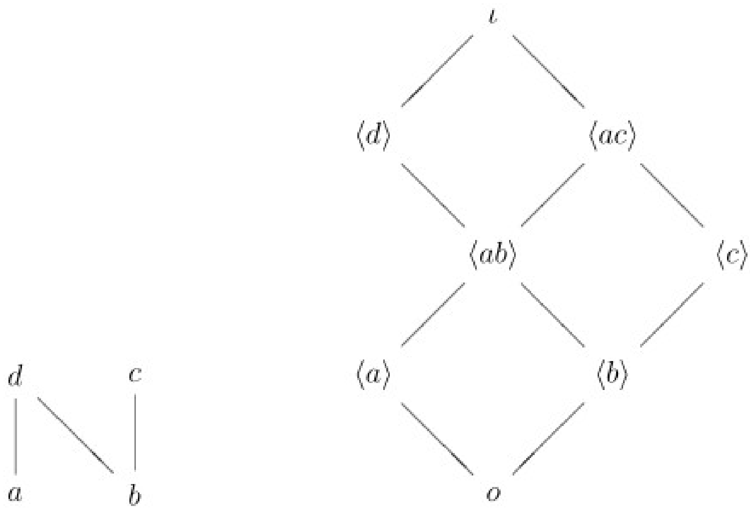
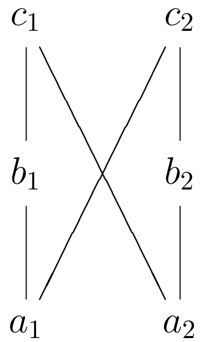
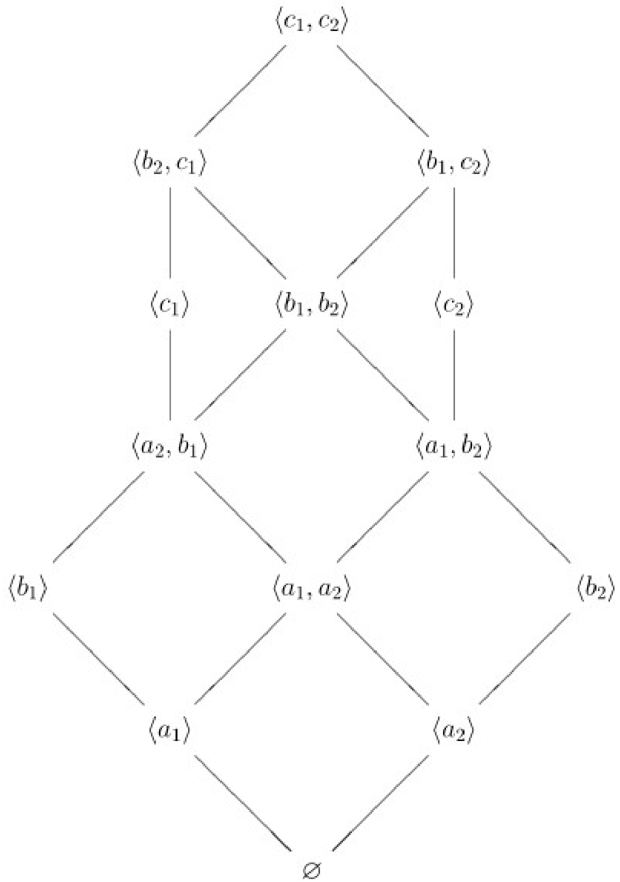


Рис. 4.21. Ч.у. множество $Irr\,J(L)$ и решётка $J(Irr\,J(L))$.

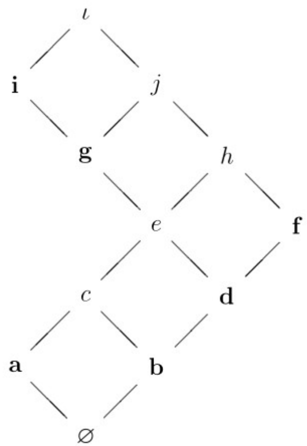
<u>Задача</u> 4.24. *Построить решётку порядковых идеалов ч.у. множества*



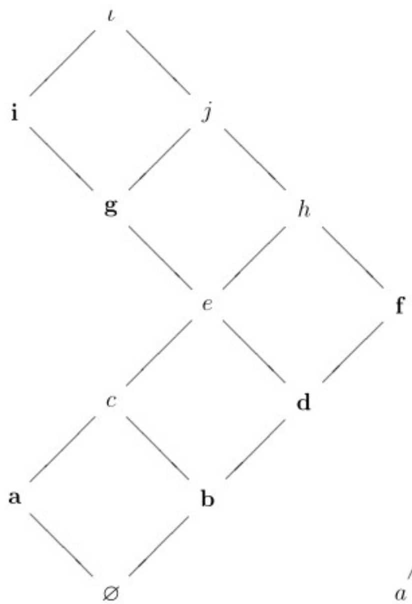
Решение.

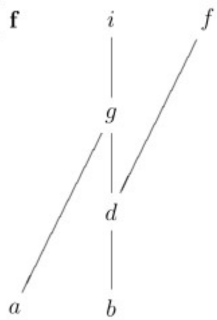


Задача 4.25. *Постройте ч.у. множество* $Irr\,L$ *для решётки* L.

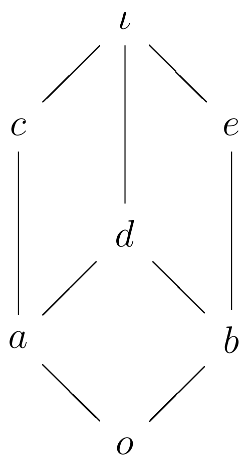


Решение.





Задача 4.26. *Найдите обратные элементы (если таковые существуют) для всех элементов решётки*



Она модулярна? дистрибутивна?

Решение.
Обратные элементы:

x	o	a	b	c	d	e	ι
x'	ι	e		b, e	$\varnothing$	a, c	o

Решётка не модулярна, т.к. содержит подрешётку, изоморфную N_5, хотя для неё выполняется цепное условие Жордана–Дедекинда.

Ясно, что решётка недистрибутивна.

<u>Задача</u> 4.27. *Решётка L называется метрической, если существует такая функция $v : L \to \mathbb{R}$, что для любых x и y из L*

$$v(x) + v(y) = v(x \sqcup y) + v(x \sqcap y)\,,$$
$$x \sqsubset y \Leftrightarrow v(x) < v(y)\,.$$

1. *Докажите, что метрическая решётка модулярна.*

2. *Определим в метрической решётке L функцию $d : L^1 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto v(x \sqcup y) - v(x \sqcap y)$. Докажите, что (L, d) является метрическим пространством.*

Решение. (1) Пусть $x \sqsubseteq y$. Тогда для любого z:
$$x \sqcup y \sqcup z = y \sqcup z\,, \quad x \sqcap y \sqcap x = x \sqcap z\,.$$
Если L — метрическая решётка, то
$$v(x \sqcup y) = v(x) + v(y) - v(x \sqcap y)\,,$$
$$v(x \sqcap y) = v(x) + v(y) - v(x \sqcup y)\,.$$

Модулярный закон —
$$Mod: \quad x \sqsubseteq y \Rightarrow x \sqcup (y \sqcap z) = y \sqcap (x \sqcup z)\,.$$

Имеем:

$$v(x \sqcup (y \sqcap z)) = v(x) + v(y \sqcap z) - v(x \sqcap y \sqcap x) =$$
$$= v(x) + v(y) + v(z) - v(y \sqcup z) - v(x \sqcap y \sqcap x) =$$
$$= v(x) + v(y) + v(z) - v(x \sqcup y \sqcup z) - v(x \sqcap y \sqcap x)\,.$$

Аналогично —
$$v((x \sqcup y) \sqcap z) = v(x \sqcup y) + v(z) - v(x \sqcup y \sqcup x) =$$

$$= v(x) + v(y) - v(x \sqcap y) + v(z) - v(x \sqcup y \sqcup x) =$$
$$= v(x) + v(y) + v(z) - v(x \sqcap y \sqcap z) - v(x \sqcup y \sqcup x)\,.$$

Следовательно, $v(x \sqcup (y \sqcap z)) = v((x \sqcup y) \sqcap z)$.

Предположим, что L немодулярна.
Тогда в L выполняется 1-е неравенство полумодулярности

$$Mod \sqsubseteq\colon\ x \sqsubseteq y \;\Rightarrow\; x \sqcup (y \sqcap z) \sqsubseteq$$
$$\sqsubseteq y \sqcap (x \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)\,;$$

но не выполняется обратное следование (модулярный закон) и, следовательно, найдутся такие x, y, z, что

$$x \sqsubseteq z \quad \text{и} \quad x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap z\,,$$

(замена $y \leftrightarrow z$ в $Mod \sqsubseteq$) откуда

$$v(x \sqcup (y \sqcap z)) = v((x \sqcup y) \sqcap z) \quad \text{— противоречие.}$$

Следовательно, L модулярна.

(2)

- $d(x,\, y) \geqslant 0$ — очевидно.
- Поскольку $x \sqsubset y \Leftrightarrow v(x) < v(y)$, то

$$d(x,\, y) = 0 \Leftrightarrow v(x \sqcup y) = v(x \sqcap y) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \sqcup y = x \sqcap y \Leftrightarrow x = y\,.$$

- Надо показать неравенство треугольника $d(x,\, y) \leqslant d(x,\, z) + d(y,\, z)$.

Задача 4.28. *Нарисуйте диаграмму Хассе решётки всех подгрупп знакопеременной группы A_4. Модулярна ли эта решётка?*

Решение.

$$A_4 = \{ E, (12)(34), (13)(24), (14)(23), \\ (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243) \} .$$

$$Sub(A_4) = \{ E, \langle(12)(34)\rangle, \langle(13)(24)\rangle, \langle(14)(23)\rangle, V_4, \\ \langle(123)\rangle, \langle(124)\rangle, \langle(134)\rangle, \langle(234)\rangle, A_4\} .$$

Нарисуйте сами...

Задача 4.29. *Вывести $Dtr1$ из $Dtr2$.*

Решение.
Законы поглощения также обеспечивают эквивалентность дистрибутивных законов.
Действительно, для любых элементов x, y, z решётки имеем

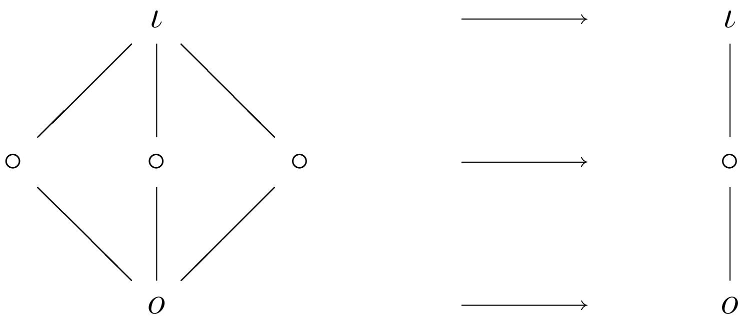
$$(x \sqcap z) \sqcup (y \sqcap z) \overset{Dtr2}{=} (x \sqcup (y \sqcap z)) \sqcap (z \sqcup (y \sqcap z)) \overset{Abs2, Dtr2}{=} \\ = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z) \sqcap z \overset{Abs1}{=} (x \sqcup y) \sqcap z.$$

т.е. $Dtr2 \Rightarrow Dtr1$.
Следование $Dtr1 \Rightarrow Dtr2$ показано на первой лекции.

Задача 4.30. *1. Построить изотонный эпиморфизм из ромба M_3 на **3**.*

*2. Показать, что любой образ эпиморфного гомоморфизма ромба M_3 изоморфен либо ей самой, либо одноэлементной решётке **1**.*

Решение. (1) Изотонный эпиморфизм ромба M_3 на $\mathbf{3}$:



(2) Изотонный эпиморфный образ M_3 может иметь от $n=1$ до $n=5$ элементов. Имеем для образа:

$n=1$: Одноэлементная цепь $\mathbf{1}$. Это образ эпиморфного гомоморфизма.

$n=2$: Двухэлементная цепь $\mathbf{2}$. Это изотонный эпиморфный образ, но не образ (решётчатого) гомоморфизма.

$n=3$: Трёхэлементная цепь $\mathbf{3}$. Это образ эпиморфного гомоморфизма.

$n=4$: Существует две четырёхэлементные решётки: цепь $\mathbf{4}$ и «квадрат $M_{4},$»: $\{1, 0, a, b\}$, a и b

несравнимы. Все изотонные эпиморфные отображения M_3 на эти решётки не есть (решётчатые) гомоморфизмы.

$n = 5$**:** Из всех пятиэлементных решёток образом эпиморфного гомоморфизма M_3 может быть только решётка, изоморфная M_3.

<u>Задача</u> 4.31. *Докажите обобщённое неравенство полудистрибутивности для решёток:*

$$y \sqcap \left(\bigsqcup_{i=1}^{n} x_i \right) \sqsupseteq \bigsqcup_{i=1}^{n} (y \sqcap x_i)\,.$$

Решение. Проведём доказательства по индукции.

(1) Базис индукции. $y \sqcap x_1 \sqsupseteq y \sqcap x_1$.

(2) Шаг индукции. Пусть справедливо

$$y \sqcap \bigsqcup_{i=1}^{k} x_i \sqsupseteq \bigsqcup_{i=1}^{k} (y \sqcap x_i)\,.$$

Тогда

$$y \sqcap \bigsqcup_{i=1}^{k+1} x_i = y \sqcap \left(\bigsqcup_{i=1}^{k} x_i \sqcup x_{k+1} \right) \sqsupseteq$$

$$\sqsupseteq \left(y \sqcap \bigsqcup_{i=1}^{k} x_i \right) \sqcup (y \sqcap x_{k+1}) \sqsupseteq \bigsqcup_{i=1}^{k+1} (y \sqcap x_i)\,.$$

Первое следование имеет место по неравенству полудистрибутивности, а второе — по предположению индукции.

Задача 4.32. *Покажите, что решётка всех подпространств векторного пространства модулярна.*

Решение. Под объединением ($+$) подпространств понимается наименьшее подпространство, их содержащее. Пересечение ($\cap$) подпространств — их общая часть — всегда подпространство. Ассоциативность, коммутативность, идемпотентность и закон поглощения для этих операций проверяются элементарно.

Если A, B, C — подпространства векторного пространства V над произвольным полем и $A \subseteq B$, то, очевидно, $A + (B \cap C) \subseteq B \cap (A + C)$ — модулярный закон.

Обратно, если $b \in B \cap (A + C)$, то $b = a + c$ для некоторых $a \in A$ и $c \in C$. Отсюда $c = b - a \in B \cap C$, т.е. $b \in A+(B\cap C)$ и, следовательно, $(A+C)\cap B \subseteq A+(B \cap C)$.

(Доказательство полностью аналогично доказательству модулярности решётки $NSub\,(G)$.)

Задача 4.33. *Пусть L — дистрибутивная решётка с универсальными гранями. Покажите, что если a' — дополнение элемента a, то*

$$a \sqcup (a' \sqcap b) = a \sqcup b\,.$$

Решение.

$$a\sqcup(a'\sqcap b) \overset{Dtr2}{=} (a\sqcup a')\sqcap(a\sqcup b) \overset{Cmp'}{=} \iota\sqcap(a\sqcup b) \overset{\sqcap\iota}{=} (a\sqcup b)\,.$$

Задача 4.34. *Покажите, что в дистрибутивной решётке справедливо тождество*

$$(x \sqcap y) \sqcup (y \sqcap z) \sqcup (z \sqcap x) \;=\; (x \sqcup y) \sqcap (y \sqcup z) \sqcap (z \sqcup x)$$

(этот элемент называют медианой элементов x, y и z).

Решение.
Пользуясь законами дистрибутивности, коммутативности и поглощения, для правой части (так удобнее), имеем и заменяя $\sqcup \mapsto +$, $\sqcap \mapsto \cdot$ (опускаем):

$$\begin{aligned}
&(x \sqcup y) \sqcap (y \sqcup z) \sqcap (z \sqcup x) \;= \\
&\quad = \; ((x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z) \sqcup y \sqcup (y \sqcap z)) \sqcap (z \sqcup x) \;= \\
&\quad = \; ((x \sqcap z) \sqcup y) \sqcap (z \sqcup x) \;= \\
&\quad = \; ((x \sqcap z) \sqcup (x \sqcap z) \sqcup (y \sqcap z) \sqcup (y \sqcap x)) \;= \\
&\quad = \; (x \sqcap y) \sqcup (y \sqcap z) \sqcup (z \sqcap x)\,.
\end{aligned}$$

Глава 5

Булевы алгебры (продолжение)

5.1 Булевы алгебры как решётки. Булевы гомоморфизмы и подалгебры

Определение 5.1. Дистрибутивная решётка с дополнениями называется *булевой алгеброй.*

Оба (вышеприведённое и данное в на первой лекции) определения эквивалентны: согласно 1-му определению

- в булевой алгебре выполняются законы дистрибутивной решётки с дополнениями,
- а в такой решётке дополнения единственны и справедливы аксиомы Dtr и Abs вместе с Cmp' и Isl'.

Теорема 5.1. *Для любых элементов x и y булевой алгебры с нулевым и единичным элементами o и ι соответственно справедливо*

1. $x \sqsubseteq y \;\Leftrightarrow\; x \sqcap y' = o \;\Leftrightarrow\; x' \sqcup y = \iota \;\Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow\; x \sqcap y = x \;\Leftrightarrow\; x \sqcup y = y$;
2. $x \sqsubseteq y \;\Leftrightarrow\; x' \sqsupseteq y'$ — *закон антиизотонности дополнения.*

Доказательство.

1. Следует из определение отношения $\sqsubseteq$ в решётках —

$$x \sqsubseteq y \overset{\text{def}}{=} x \sqcap y = x \,(\text{или } x \sqsubseteq y \overset{\text{def}}{=} x \sqcup y = y)$$

— и леммы об основных соотношениях в булевой алгебре.

2. $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x \sqcap y = x \Leftrightarrow (x \sqcap y)' = x' \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x' \sqcup y' = x' \Leftrightarrow y' \sqsubseteq x' \Leftrightarrow x' \sqsupseteq y'.$$

$\square$

Теорема 5.2. *Пусть $\langle\, B, \sqcup, \sqcap, ', o, \iota \,\rangle$ — булева алгебра и A — непустое множество. Тогда множество B^A также будет булевой алгеброй относительно «поточечных» операций $\dot\sqcup$, $\dot\sqcap$ и $\grave{}$ —*

$$(f \mathbin{\dot\sqcup} g)(x) = f(x) \sqcup g(x), \quad (f \mathbin{\dot\sqcap} g)(x) = f(x) \sqcap g(x),$$
$$(f\,\grave{})(x) = (f\,(x))'$$

для любых $f, g \in B^A$. Нулём и единицей B^A будут постоянные отображения $f_0(x) \equiv o$ и $f_1(x) \equiv \iota$ соответственно; $x \in A$.

Доказательство — проверка аксиом булевой алгебры. $\square$

При $A = B^n$ получим булеву алгебру B^{B^n} всех функций из B^n в B, и если $B = \mathbf{2}$ — булеву алгебру $\mathbf{2}^{\mathbf{2}^n}$ всех булевых функций от n переменных.

<u>Определение</u> 5.2. *Булевым гомоморфизмом* называют решёточный гомоморфизм φ из булевой алгебры B_1 в булеву алгебру B_2, обеспечивающий равенство $\varphi(x') = \varphi(x)'$ для всех $x \in B_1$.

Инъективные булевы гомоморфизмы называют *булевыми мономорфизмами*.

Т.е. булев гомоморфизм — это отображение одной булевой алгебры в другую, согласованное со всеми пятью ($\sqcup$, $\sqcap$, $'$, o, ι) булевыми операциями.

Булев гомоморфизм будет булевым изоморфизмом при биективности соответствующего отображения.

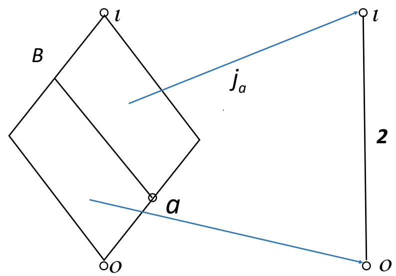
Произвольный решёточный гомоморфизм одной булевой алгебры в другую может и не быть булевым гомоморфизмом.
Пример: если $A \subset B$, то естественное вложение $\mathcal{P}(A)$ в $\mathcal{P}(B)$ является решёточным мономорфизмом, но не булевым гомоморфизмом (и подавно, не булевым мономорфизмом), т.к. для произвольного подмножества A его дополнения в A и B различны.

Прообраз нуля $\varphi^{\sharp}(o)$ булева гомоморфизма φ — его ядро.

Пусть B — атомная булева алгебра и a — её атом. Тогда отображение $j_a : B \to \mathbf{2} = \{\iota, o\}$ такое, что

$$j_a(x) = \begin{cases} \iota, & \text{если } x \text{ содержит } a\,, \\ o, & \text{иначе}\,, \end{cases}$$

есть гомоморфизм. Такие гомоморфизмы булевой алгебры называют *двузначными* или характерами.



<u>Определение</u> 5.3. Булева алгебра B' называется *подалгеброй булевой алгебры* B, символически $B' \leqslant B$, если $B' \subseteq B$ и на B' устойчивы сужения всех операций B.

Булева алгебра и её подалгебры имеют общие o и ι.

Пример 5.1. 1. Булева алгебра $P_{\mathbf{2}}^{n}$ логических функций от n переменных является подалгеброй алгебры $P_{\mathbf{2}}$ всех логических функций.

2. Пусть $A \subset B$. Тогда $\mathcal{P}(A) \not\leqslant \mathcal{P}(B)$, поскольку эти булевы алгебры имеют, например, разные единичные элементы (что повлечёт и несовпадение дополнений в них).

5.2 Булевы кольца и структуры

Кольца: определение, основные свойства

<u>Определение</u> 5.4. Абелева группа $\langle R, +, 0 \rangle$ называется *кольцом*, символически $\langle R, +, \cdot, 0 \rangle$, если на ней определено умножение $\cdot$, связанное со сложением *дистрибутивными законами*

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \text{ и } (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x.$$

Если умножение обладает свойством ассоциативности и/или коммутативности то и кольцо называют *соответствующе*.

Если в кольце имеется единичный элемент 1 по умножению ($x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$), то кольцо называется *кольцом с единицей* или *унитальным*, символически $\langle R, +, \cdot, 0, 1 \rangle$.

Элемент a унитального кольца называется *обратимым*, если существует элемент b такой, что

$$a \cdot b = b \cdot a = 1.$$

Определение 5.5. Ассоциативное кольцо, обладающие свойством $x^2 = x$ для любого своего элемента называется *булевым кольцом*.

Теорема 5.3. *Булево кольцо* $\langle R, +, \cdot, 0 \rangle$ *коммутативно и* $-x = x$.

Доказательство. Докажем сначала второе утверждение:

$$x + x = (x + x)^2 = x^2 + x^2 + x^2 + x^2 = \\ = (x + x) + (x + x) \Rightarrow x + x = 0$$

Отсюда

$$x + y = (x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = \\ = x + xy + yx + y \Rightarrow xy + yx = 0$$

и далее получаем

$$xy = xy + 0 = xy + (xy + yx) = \\ = (xy + xy) + yx = 0 + yx = yx$$

□

Теорема 5.4. *Пусть* $\mathfrak{B} = \langle\, B, \sqcup, \sqcap, {}', o, \iota \,\rangle$ *— булева алгебра. Для любых* $x, y \in B$ *положим*

$$x + y = (x \sqcap y') \sqcup (x' \sqcap y)\,, \quad x \cdot y = x \sqcap y.$$

Тогда АС $\mathfrak{B}^* = \langle\, B, +, \cdot, o, \iota \,\rangle$ *— булево кольцо с единицей* ι.

Доказательство. Коммутативность введённых операций сложения $(+)$ и умножения $(\cdot)$, ассоциативность умножения, справедливость равенства $x^2 = x$ и наличие единицы ι с её свойством $x \cdot \iota = x$ для всех x — очевидны.

Можно не различать операции умножения и пересечения. С учётом этого — $x + y = xy' \sqcup x'y = x \oplus y$.

Используя законы булевой алгебры, получим

$$\begin{aligned}
(x + y) + z &= (xy' \sqcup x'y)z' \sqcup (xy' \sqcup x'y)'z = \\
&= xy'z' \sqcup x'yz' \sqcup (x' \sqcup y)(x \sqcup y')z = \\
&= xy'z' \sqcup x'yz' \sqcup x'y'z \sqcup xyz\,, \\
x + (y + z) &= x(yz' \sqcup y'z)' \sqcup x'(yz' \sqcup y'z) = \\
&= x(y' \sqcup z)(y \sqcup z') \sqcup x'yz' \sqcup x''y = \\
&= xy'z' \sqcup xyz \sqcup x'yz' \sqcup x'y'z\,,
\end{aligned}$$

и ассоциативность операции $+$ показана.

Далее: $x + o = xo' \sqcup x'o = x\iota = x$, т.е. $\mathfrak{B}^*$ оказывается абелевой группой по сложению.

И, наконец, выкладки

$$\begin{aligned}
(x + y)z &= (xy' \sqcup x'y)z = xy'z \sqcup x'yz\,, \\
xz + yz &= xz(yz)' \sqcup (xz)'(yz) = \\
&= xz(y' \sqcup z') \sqcup (x' \sqcup z')yz = xy'z \sqcup x'yz
\end{aligned}$$

доказывают дистрибутивный закон умножения относительно сложения. □

Основным примером булева кольца и является как раз кольцо $\langle\, \mathcal{P}(A),\, \oplus,\, \cap,\, \varnothing,\, A\,\rangle$, получаемое указанным способом из тотальной алгебры множеств.

Теорема 5.5. *Пусть $\mathfrak{R} = \langle\, R,\, +,\, \cdot,\, 0,\, 1\,\rangle$ — булево унитальное кольцо. Для любых $x,\, y \in R$ положим*

$$x \sqcup y = x + y + x \cdot y, \quad x \sqcap y = x \cdot y\,, \quad x' = x + 1.$$

Тогда АС $\mathfrak{R}^* = \langle\, R,\, \sqcup,\, \sqcap,\, ',\, 0,\, 1\,\rangle$ — булева алгебра.

Доказательство. Ассоциативность введённых операций $\sqcup$, $\sqcap$ и закон $Id\sqcup$ (с учётом $x + x = 0$) проверяются непосредственно, а $Id\sqcap$ наследуется из $\mathfrak{R}$.

Коммутативность булева кольца обеспечивает коммутативность $\sqcup$ и $\sqcap$.

Далее в выкладках без пояснений используются свойства булева кольца.

Установим справедливость законов поглощения:

$$(x \sqcup y) \sqcap x = (x + y + xy)x = x + xy + xy = x\,.$$
$$x \sqcup (x \sqcap y) = x \sqcup (xy) = x + xy + xy = x\,.$$

Таким образом, $\mathfrak{B}^*$ — решётка.

Непосредственно проверяется выполнение пар законов $\sqcup o$, $\sqcap\iota$ и $\sqcup\iota$, $\sqcap o$. В силу этого 0 и 1 — универсальные грани решётки $\mathfrak{B}^*$.

Из следующего вытекает, что $\mathfrak{B}^*$ — решётка с дополнениями: $x \sqcap x' = x(1 + x) = x + x = 0$ и

$$x \sqcup x' = x \sqcup (1+x) = x+1+x+x(1+x) = \\ = 1+x+x = 1.$$

Равенства

$$(x \sqcup y) \sqcap z = (x+y+xy)z = \\ = xz+yz+xyz = (x \sqcap z) \sqcup (x \sqcap z)$$

доказывают справедливость в $\mathfrak{B}^*$ первого дистрибутивного закона, а второй доказывается двойственно. □

Т.о. любое булево кольцо с единицей может быть задано с помощью булевой алгебры и наоборот.

Следствие $\mathfrak{B}^{**} = \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{R}^{**} = \mathfrak{R}$ устанавливает *стоуновскую двойственность* между булевыми алгебрами и булевыми кольцами.

Определение 5.6. АС $\langle B, \sqcup, \sqcap, ', \sqsubseteq, o, \iota \rangle$ такая, что $\langle B, \sqcup, \sqcap, ', o, \iota \rangle$ — булева алгебра, а отношение $\sqsubseteq$ задаются по правилу

$$x \sqsubseteq y \stackrel{\text{def}}{=} x \sqcap y = x \ (\text{или } x \sqsubseteq y \stackrel{\text{def}}{=} x \sqcup y = y)$$

называется *булевой структурой.*

Утверждение 5.1. *Элемент a булевой алгебры B является атомом, iff $o \lessdot a$.*

Доказательство. Пусть a и b — ненулевые элементы булевой алгебры B. Тогда

- $o \lessdot a \Rightarrow (a \sqsubseteq b) \vee (a \not\sim b) \Rightarrow$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \sqcap b = a, \\ a \sqcap b = o, \quad \text{поскльку } (a \sqcap b) \sqsubseteq a. \end{array} \right.$$
- если $a \in At(B)$ и $a \sqsubseteq b$, то $a \sqcap b = a \neq b$ и $b \notin At(B)$.

□

5.3 Идеалы, фильтры и конгруэнции в булевой алгебре

Определение 5.7. *Идеалом* [фильтром] булевой алгебры называют её решёточные идеалы [фильтры].
Если I — идеал булевой алгебры B, то пишут $I \trianglelefteq B$. Если $I \trianglelefteq B$ и $I \neq B$ (собственный идеал), то пишут $I \triangleleft B$.

Каждый булев идеал I и фильтр F булевой алгебры B обладает всеми свойствами решёточных, и, кроме этих, ещё и

$$(x \in I) \,\&\, (x' \in I) \;\Rightarrow\; I = B \text{ и }$$
$$(x \in F) \,\&\, (x' \in F) \;\Rightarrow\; F = B$$

Действительно, по определению идеала $\iota = x \sqcup x' \in I$, откуда $I = B$ и аналогично для фильтров.

На идеалы и фильтры булевой алгебры переносятся понятия, собственных, несобственных и главных идеалов и фильтров. Поскольку булева алгебра есть решётка, то в конечной булевой алгебре все идеалы и фильтры — главные.

Пример 5.2.

1. Пусть $B \subseteq A$. Тогда совокупность всех подмножеств множества A, содержащихся в B есть идеал булевой алгебры $\mathcal{P}(A)$, а содержащих B — фильтр $\mathcal{P}(A)$.

   Это — *главные идеалы и фильтры в бесконечной булевой алгебре.*

2. Приведём пример неглавных идеалов и фильтров.

Пусть A — бесконечное множество. Совокупность $\mathcal{P}_0(A)$ всех конечных подмножеств A есть неглавный идеал, а неглавный фильтр булевой алгебры $\mathcal{P}(A)$ — совокупность подмножеств, имеющих конечное дополнение до A.

Фильтр указанного вида называют *фильтром Фреше.*

Определение 5.8. Идеал [фильтр] булевой алгебры называется *максимальным*, если он не содержится ни в каком другом собственном идеале [фильтре].

Фильтр булевой алгебры B называется *ультрафильтром* если для любого $b \in B$ ему принадлежит в точности один из элементов b и b'.

Понятно, что если x — атом [коатом] конечной булевой алгебры, то $x^{\triangle}$ [$x^{\triangledown}$] — её максимальный фильтр [идеал].

В конечных булевых алгебрах ультрафильтры других видов, очевидно (как в решётках), отсутствуют.

Теорема 5.6 (свойства максимальных булевых идеалов и фильтров).

1. *Каждый собственный идеал булевой алгебры содержится в некотором максимальном идеале. Аналогично для фильтров.*
2. *Идеал [фильтр] булевой алгебры B является максимальным, iff для любого $x \in B$ в нём содержится в точности один из элементов x и x'.*

3. *Собственный идеал I булевой алгебры B будет максимальным, iff для любых $x, y \in B$ из условия $(x \sqcap y) \in I$ следует, что либо x, либо y принадлежит I.*

   Собственный фильтр F булевой алгебры B будет максимальным, iff для любых $x, y \in B$ из условия $(x \sqcup y) \in F$ следует, что либо x, либо y принадлежит F.

Замечания.

К п. 1. Данное утверждение для фильтров часто называют *теоремой об ультрафильтрах* булевой алгебры.

К п. 2. Данное утверждение доказывает эквивалентность понятий «максимальный фильтр» и «ультрафильтр» для булевых алгебр.

К п. 3. *Простой* — собственный фильтр F булевой алгебры B, удовлетворяющий условию

$$(x \sqcup y) \in F \;\Rightarrow\; (x \in F) \vee (y \in F)$$

Т.о. данное утверждение доказывает эквивалентность понятий «ультрафильтр» и «простой фильтр» булевой алгебры.

В булевой алгебре — фильтр:
«максимальный» = «простой» = «ультрафильтр»

Пусть B — булева алгебра, а $\sim$ — конгруэнция на ней, как на решётке. Если при этом ещё и

$$x \sim y \;\Rightarrow\; x' \sim y',$$

то $\sim$ — конгруэнция на данной булевой алгебре.

Конгруэнции булевой алгебры B образуют полную дистрибутивную решётку $\mathrm{Con}\, B$.

Её наименьшим элементом является тождественная конгруэнция $\triangle_B$, а наибольшим — аморфная конгруэнция ∇_B.

Булевы идеалы (в отличии от решёточных) находятся во взаимно-однозначном соответствии с конгруэнциями:

1) если $\sim = \sim_I$ — конгруэнция на булевой алгебре B, у которой $I = [\,o\,]$ — класс эквивалентности, содержащий элемент o, то I — идеал B, причём справедливо

$$a \sim_I b \;\Leftrightarrow\; \underset{I}{\exists} x : a \sqcup x \;=\; b \sqcup x;$$

2) если $I \trianglelefteq B$, то отношение $\sim_I$ на B, определённое этим условием, будет конгруэнцией на B, причём $[\,o\,] \;=\; I$.

Более того, справедливо

Утверждение 5.2. *Пусть* a *и* b *— элементы булевой алгебры* B *и* $I \trianglelefteq B$, *тогда*

$$a \sim_I b \;\Leftrightarrow\; (a \sqcap b') \sqcup (a' \sqcap b) \;\in I.$$

Если $\sim$ — конгруэнция на булевой алгебре B, а I — идеал, ей соответствующий, то факторалгебру $B/\sim$ обозначают B/I.

Отображение $\varphi : B \to B/\sim$, $\varphi(x) = [x]_\sim$, ставящее в соответствие элементу B его смежный класс по конгруэнции $\sim \in \mathrm{Con}(B)$, является, очевидно, гомоморфизмом.

Такой гомоморфизм, в соответствии с общим подходом, называется *естественным*.
С другой стороны, если φ — гомоморфизм булевой алгебры B, то $Im(\varphi) \cong B/Ker\,\varphi$ и $Ker\,\varphi \in \mathrm{Con}(B)$.

Теорема 5.7 (*Тарский*). *Идеал I булевой алгебры B максимален, iff $B/I \cong \mathbf{2}$.*

Справедлив изоморфизм $B/x^\nabla \cong [\,o,\, x'\,]$.

Пример 5.3. 1. Было: пусть B — атомная булева алгебра и a — её атом.

Тогда отображение $j_a : B \to \mathbf{2}$ такое, что

$$j_a(x) = \begin{cases} \iota\,, & \text{если } x \text{ содержит } a\,, \\ o\,, & \text{иначе}\,, \end{cases}$$

есть гомоморфизм.

Идеалом приведённого в этого двузначного гомоморфизма j_a будет главный идеал $(a')^\nabla$, порождённый коатомом a'.

2. Проиллюстрируем изоморфизм $B/x^\nabla \cong [\,o,\, x'\,]$ для булевой алгебры B^3, атомы которой обозначим a, b и c, а остальные элементы — указанием содержащихся в них атомов.

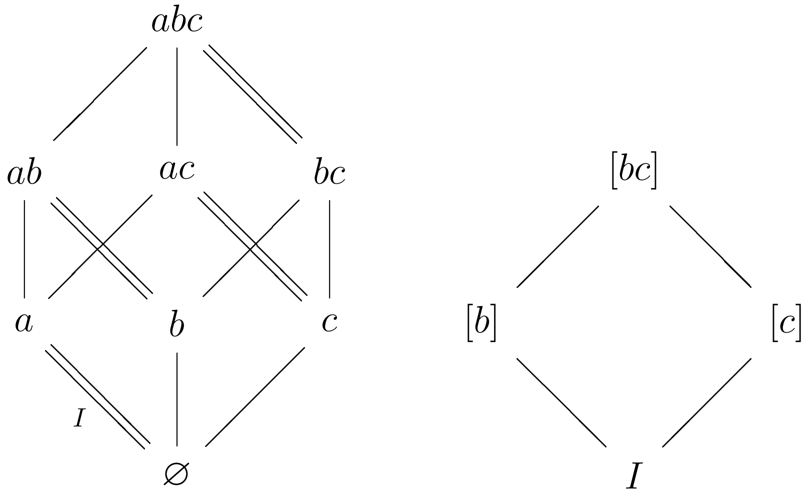
Если в качестве идеала I взять a^∇, то классами эквивалентности по $\sim_{a^\nabla}$ будут

$$[a] = a^{\triangledown} = I = \{\, a,\, \varnothing \,\}, \qquad [b] = \{\, ab,\, b \,\},$$
$$[c] = \{\, ac,\, c \,\}, \qquad [bc] = \{\, abc,\, bc \,\}.$$

Факторалгеброй булевой алгебры B^3 по выбранному идеалу будет изоморфная B^2 алгебра из указанных выше классов с нулём I, атомами $[b]$ и $[c]$ и единицей $[bc]$.

Поскольку $bc = a'$ и $\varnothing \in I$, то $B/a^{\triangledown} \cong [\,\varnothing,\, a'\,]$.

Булева алгебра B^3 (классы эквивалентности по $\sim_{a^{\triangledown}}$ выделены двойными линиями) и факторалгебра $B^3/a^{\triangledown}$:



С помощью факторизации могут быть построены безатомные булевы алгебры.

1. Рассмотрим тотальную алгебру $\langle\, \mathcal{P}(\mathbb{Z}),\, \cup,\, \cap,\, ^{-},\, \varnothing,\, \mathbb{Z} \,\rangle$ над множеством целых чисел.

2. Определим отношение $\simeq$ над элементами $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$:

$A \simeq B \;\Leftrightarrow\;$ *симметрическая разность* A *и* B *конечна.*

$\simeq$ — отношение эквивалентности $\Rightarrow$ можно образовать фактормножество $\mathcal{P}(\mathbb{Z})/{\simeq}$.
Все конечные (включая пустое) подмножества $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ будут, очевидно, эквивалентными; обозначим этот класс эквивалентности $[\varnothing]$.

Также будут эквивалентными все подмножества целых чисел, имеющих конечные дополнения до $\mathbb{Z}$, включая само $\mathbb{Z}$;
этот класс эквивалентности обозначим $[\mathbb{Z}]$.

3. Эквивалентность $\simeq$ оказывается стабильным относительно теоретико-множественных операций, т.е. является конгруэнцией: $\forall A, B, A_1, B_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ из $A \simeq A_1$ и $B \simeq B_1$ следует $A \cup B \simeq A_1 \cup B_1$, $A \cap B \simeq A_1 \cap B_1$ и $\overline{A} \simeq \overline{A_1}$.

Это означает, что АС $\langle\, \mathcal{P}(\mathbb{Z})/\simeq, \cup, \cap, ^{-}, [\varnothing], [\mathbb{Z}]\,\rangle$ будет булевой алгеброй.

4. Убедимся, что данная булева алгебра не имеет атомов.

- любой отличный от $[\varnothing]$ элемент $\mathcal{P}(\mathbb{Z})/\simeq$ есть класс бесконечных множеств;

- атом — элемент, непосредственно следующий за $[\varnothing]$, а таковые отсутствуют в $\mathcal{P}(\mathbb{Z})/\simeq$: в любом бесконечном множестве X можно (с помощью АС!) указать подмножество Y такое, что и оно, его дополнение бесконечны, и поэтому $[Y]$ строго содержится в $[X]$.

Говорят, что главные ультрафильтры алгебры множеств, поскольку все они имеют вид $a^{\triangle}$, фиксированы в точке a множества и их называют *тривиальными*.

Совместно с фильтрами Фреше они играют важную роль при исследовании сходимости в анализе (топологическая система окрестностей данной точки является фиксированным в ней тривиальным ультрафильтром).

Главные ультрафильтры также используют, например, при исследованиях полноты логических систем в алгебрах Линденбаума–Тарского, порождённых соответствующей логической теорией.

Пусть $\mathcal{A} = \{ A, B, \ldots \}$ — множество формул над высказываниями в КИВ.

Если $A \equiv B$ — тавтология, то говорят, что формулы A и B логически эквивалентны или равносильны, что записывают как $A \sim B$. Ясно, что $\sim$ есть отношение эквивалентности на $\mathcal{A}$. Класс эквивалентности, порождаемый формулой A обозначают $[A]$, классы тождественно истинных формул — $\mathbf{T}$, а тождественно ложных формул — $\mathbf{F}$.

На фактормножестве $\mathcal{A}/\sim$ классов эквивалентности формул алгебры логики можно задать теоретико множественные операции дополнения $(^{-})$, объединения $(\cup)$ и пересечения $(\cap)$, причём

$$\overline{[A]} = [\neg A], \quad [A] \cup [B] = [A \vee B],\ [A] \cap [B] = [A \& B].$$

Легко установить, что введённые операции над классами эквивалентностей имеют следующие свойства:

- операции $\cup$ и $\cap$ коммутативны и взаимно дистрибутивны;
- выполняются соотношения $[A] \cup \mathbf{F} = [A]$ и $[A] \cap \mathbf{T} = [A]$;

- справедливы законы $[A] \cup \overline{[A]} = \mathbf{T}$ и $[A] \cap \overline{[A]} = \mathbf{F}$.

Это означает, что АС $\langle\, \mathcal{A}/\!\sim, \cup, \cap, \bar{\ }, \mathbf{T}, \mathbf{F}\,\rangle$ — булева алгебра, называемая *факторалгеброй логических формул*; для КИВ она совпадает с соответствующей алгеброй Линденбаума–Тарского (в последней факторизация проводится по отношению $\simeq$ такому, что $A \simeq B \Leftrightarrow A \vdash B$ и $B \vdash A$).

С каждым элементом $\mathcal{A}/\!\sim$ связана соответствующая функция алгебры логики.

Обозначим через A_n множество формул алгебры логики над n элементарными высказываниями. Тогда A_n бесконечно, а фактормножество $\mathcal{A}_n/\!\sim$ — конечно (содержит 2^{2^n} элементов).

Рассмотрим уравнение

$$A(\tilde{x}) \,\&\, X(\tilde{x}) \sim \mathbf{F},$$

где $A(\tilde{x})$ и $X(\tilde{x})$ — формулы, реализующие соответственно известную и искомую булевы функции (для простоты указывают именно формулы, а не порождённые ими классы).

Решением данного уравнения будет любая функция, реализуемая формулами из главного идеала, порождённого формулой $\overline{A(\tilde{x})}$ в соответствующей алгебре Линденбаума–Тарского.

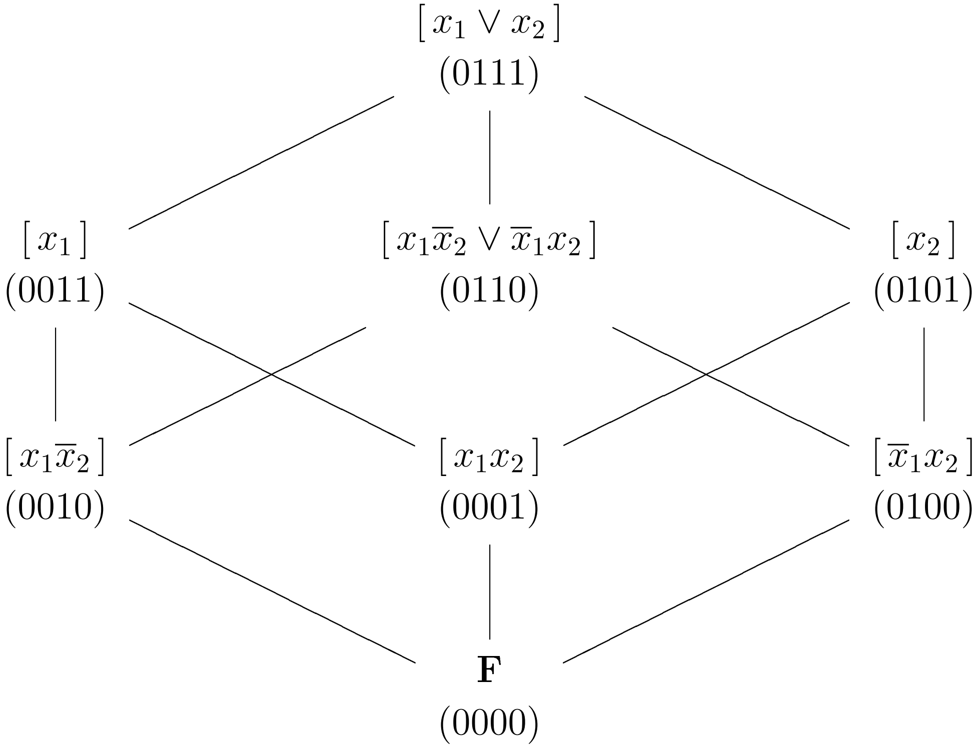
Далее знак конъюнкции $\&$ будем для простоты опускать.

Например, пусть $A(\tilde{x}) = \overline{x}_1\overline{x}_2$, т.е. дано уравнение

$$\overline{x}_1\overline{x}_2 X(x_1, x_2) \sim \mathbf{F}. \qquad (*).$$

Имеем $\overline{\overline{x}_1\overline{x}_2} = x_1 \vee x_2$, и главный идеал $[\,x_1 \vee x_2\,]^{\nabla}$ алгебры Линденбаума–Тарского составляют классы $[\,x_1 \vee x_2\,]$, $[\,x_1\,]$, $[\,x_2\,]$, $[\,x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 x_2\,]$, $[\,x_1\overline{x}_2\,]$, $[\,x_1 x_2\,]$, $[\,\overline{x}_1 x_2\,]$ и $\mathbf{F}$.

На рисунке следующего слайда показан данный идеал. Для каждого класса указан вектор значений соответствующей функции (упорядочение наборов значений переменных сначала по x, затем по y).



Решением уравнения $(*)$ будет любая булева функция, реализующаяся формулами из приведённых классов.

В бесконечных булевых алгебрах, могут существовать и неглавные (нетривиальные) ультрафильтры. Их также называют *свободными*, поскольку они не фиксированы ни в какой точке исходного множества. Пересечение всех элементов такого фильтра есть единичный элемент.

Пример 5.4. Опишем в самом общем виде, как может быть построен неглавный ультрафильтр F булеана $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

1. Рассмотрим фильтр Фреше, обозначемый F_0.

Он не является максимальным, поскольку, например, ни множество чётных чисел $2\mathbb{N}$, ни его дополнение (множество нечётных чисел) не принадлежат F_0. Поэтому надо принять решение, отнести $2\mathbb{N}$ к конструируемому ультрафильтру F или нет.

2. Пусть принято решение о том, что $2\mathbb{N} \in F$.

Это будет означать, что некоторые другие множества (все множества, содержащие $2\mathbb{N}$) также будут принадлежать F. Полученный фильтр обозначим F_1.

Понятно, что он также не будет являться искомым ультрафильтром, поскольку относительно ряда множеств неопределённость останется: например, ни множество $3\mathbb{N}$, ни его дополнение не принадлежат F_1. Здесь снова нужно принять решение о вхождении одного из указанных множеств в F_1, построить F_2 и т.д.

3. Показано, что в результате выполнения "трансфинитного числа шагов" будет построен искомый ультрафильтр F.

Мы привели чрезвычайно грубый набросок способа построения фильтра F, но в нём роль AC: никакого способа указать, какое множество нужно рассматривать на каждом шаге для включения его или его дополнения в F, нет.

Кроме того, на каждом шаге можно принять любую из указанных альтернатив.

Мы видим, что процесс построения F существенно неоднозначен, и, на самом деле, до сих пор не указано ни одного неглавного ультрафильтра в явном виде, без применения AC.

Нестандартный анализ основан на явном представлении об актуально бесконечных величин.

Множество гипердействительных чисел ${}^*\mathbb{R}$ есть неархимедово упорядоченное поле, являющееся расширением поля $\mathbb{R}$ действительных чисел: ${}^*\mathbb{R}$ — цепь, в которую вложено множество $\mathbb{R}$ (стандартные гипердействительные числа) и содержащее ещё и *нестандартные гипердействительные числа*.

При этом в ${}^*\mathbb{R}$ выполняются все аксиомы поля, однако не выполняется справедливая в $\mathbb{R}$ аксиома Архимеда:
«для любых двух положительных чисел a и b существует натуральное n такое, что $n \cdot a > b$».

Абрахам Робинсон (Abraham Robinson, 1918–1974) — американский математик, создатель «нестандартного анализа».

Согласно принципу наследования свойств при расширении, аксиома Архимеда может нарушаться лишь когда хотя бы одно из чисел a и b нестандартное.

Среди нестандартных чисел выделяют бесконечно большие и бесконечно малые: если числа ε и I суть положительные соответственно бесконечно малое и бесконечно большое гипердействительные, а x — положительное действительное, то неравенства $n \cdot \varepsilon > x$ и $n \cdot x > I$ не будут выполняться ни для какого натурального n.

Поле гипердействительных чисел $^*\mathbb{R}$ можно построить, используя некоторый неглавный ультрафильтр U в $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Рассмотрим всевозможные последовательности обычных действительных чисел.
Будем говорить, что последовательности $a = (a_1, a_2, \ldots)$ и $b = (b_1, b_2, \ldots)$ эквивалентны, если равенство $a_i = b_i$ нарушается на множестве, не принадлежащем U. Построение гипердействительных чисел... Легко проверяется, что, в силу свойств ультрафильтров введённое отношения действительно является отношением эквивалентности и, например, все последовательности, отличающиеся в конечном числе членов, эквивалентны.
Получающиеся классы эквивалентности назовём гипердействительными числами; они и будут являться элементами $^*\mathbb{R}$.

Действительному числу a соответствует класс эквивалентности $[(a, a, \ldots)]$, это — стандартное гипердействительное число.

Четыре арифметических действия производятся над последовательностями почленно.

Будем считать, что $a < b$, если неравенство

$a_i \geqslant b_i$ выполняется на каком-либо множестве, не входящем в U. Построение гипердействительных чисел... Нетрудно проверить, что, поскольку U — ультрафильтр, получено упорядоченное поле.

В этом поле, однако, аксиома Архимеда не выполняется: например —

- $\left[\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)\right]$ — бесконечно малое гипердействительное число;
- $[(1, 2, 3, \ldots)]$ — бесконечно большое гипердействительное число.

При проверке этих свойств и требуется, чтобы U был неглавным ультрафильтром.

Пример доказательства в нестандартном анализе Производная функции в нестандартном анализе определяется как отношение приращения функции к бесконечно малому приращению аргумента.

Вычислим производную функции $y = x^2$. Для величине x этого дадим бесконечно малое приращение ϵ, то есть перейдём к величине $x + \epsilon$. Значение функции y в точке x было x^2, а в точке $x + \epsilon$ будет $(x + \epsilon)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \epsilon + (\epsilon)^2$ и, таким образом, оно изменилось на $dy = 2 \cdot x \cdot \epsilon + (\epsilon)^2$.

Отношение приращения функции к приращению аргумента есть

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \cdot x \cdot \epsilon + (\epsilon)^2}{\epsilon}.$$

Поскольку ϵ — бесконечно малая величина, то членом

ϵ^2 в формуле приращения dy можно пренебречь, и искомая производная равна $2x$.

5.4 Булевы многочлены

Определение 5.9. Пусть $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ — n-элементное множество переменных.

Булевы многочлены над X_n — формулы из переменных и констант 0 и 1 над множеством символов $\{\sqcup, \sqcap, {}'\}$, т.е.

1. $x_1, \dots, x_n$, 0, 1 — булевы многочлены;
2. если p и q — булевы многочлены, то таковыми являются и $(p \sqcup q)$, $(p \sqcap q)$, (p').

Синтаксическое тождество: многочлены p и q равны, символически $p = q$, если p и q совпадают как строки символов.

P_n — множество всех булевых многочленов над X_n. Это не булева алгебра, т.к., например, $x_1 \sqcup x_2 \neq x_2 \sqcup x_1$.

Булевы многочлены: полиномиальная функция
Далее пользуемся известными правилами экономии скобок.

Определение 5.10. Пусть B — булева алгебра и p — булев многочлен из P_n. Обозначим через $\widehat{p}_B(b_1, \dots, b_n)$ элемент из B, который получается из p заменой $x_i \mapsto b_i \in B$, $i = \overline{1, n}$, а отображение

$$\widehat{p}_B : B^n \to B, \quad (b_1, \ldots, b_n) \mapsto \widehat{p}_B(b_1, \ldots, b_n)$$

назовём полиномиальной функцией, индуцированной булевым многочленом p.

$P_B^n = \{\, \widehat{p}_B \mid p \in P_n \,\}$ — множество всех полиномиальных функций, индуцированных многочленами из P_n на B.

Ясно, что $P_B^n \subseteq B^{B^n}$.

Пример 5.5 (везде $n = 2$). 1. Пусть $B = \mathbf{2} = \{\,0, 1\}$, $p = x_1 \sqcup x_2$ и $q = x_2 \sqcup x_1$.

Тогда

- $p \neq q$,
- $\widehat{p}_B = a \vee b$, $\widehat{q}_B = b \vee a$,
- $\widehat{p}_B = \widehat{q}_B$, т.к. при любой замене в этих выражениях букв a и b элементами $\{0, 1\}$ получим один и тот же элемент.

2. Пусть $B = \mathcal{P}(A)$, $p = (x_1 \sqcup x_2)'$ и $q = {x_1}' \sqcap {x_2}'$.

Тогда

- $p \neq q$,
- $\widehat{p}_B = \overline{X \cup Y}$, $\widehat{q}_B = \overline{X} \cap \overline{Y}$, где $X, Y \subseteq A \neq \varnothing$,
- $\widehat{p}_B = \widehat{q}_B$.

P_B^n — *подалгебра* B^{B^n} Ясно, что $\langle\, P_B^n, \sqcup, \sqcap, {}', 0, 1 \,\rangle$ — булева алгебра.

Теорема 5.8. $P_B^n \leqslant B^{B^n}$.

Доказательство. Убедимся в устойчивости помножества $P_B^n \subseteq B^{B^n}$ относительно операций булевой алгебры.

По определению полиномиальных функций, для $\sqcup$ и произвольного $a \in B^n$ имеем

$$(\widehat{p}_B \sqcup \widehat{q}_B)(a) = \widehat{p}_B(a) \sqcup \widehat{q}_B(a) = \widehat{(p \sqcup q)}_B(a) \in P_B^n.$$

Устойчивость операций $\sqcap$ и $'$ доказывается аналогично.

Также P_B^n и B^{B^n} содержат функции $f_0 \equiv 0$ и $f_1 \equiv 1$. □

Определение 5.11. Два булевых многочлена $p, q \in P_n$ называются *эквивалентными* (символически $p \sim q$), если равны их полиномиальные функции на $\mathbf{2}$, т.е. $p \sim q \Leftrightarrow \widehat{p}_{\mathbf{2}} = \widehat{q}_{\mathbf{2}}$.

$\sim$ действительно есть отношение эквивалентности на P_n (свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности наследуются из отношения равенства функций).

С помощью теоремы Стоуна доказывается

Теорема 5.9. *Пусть $p, q \in P_n$ и $p \sim q$.*

Тогда для произвольной булевой алгебры B справедливо $\widehat{p}_B = \widehat{q}_B$.

Теорема 5.10. *$P_n/\sim$ есть булева алгебра, и $P_n/\sim \, \cong P_{\mathbf{2}}^n$.*

Доказательство. Определим отображение $\varphi\colon P_{\mathbf{2}}^n \to P_n/\sim$, которое переводит полиномиальную функцию $P_{\mathbf{2}}^n$, индуцированную многочленом p на $\mathbf{2}$ в класс эквивалентности $[p]_\sim$.

Данное определение корректно, т.к.

$$\widehat{p}_{\mathbf{2}} = \widehat{q}_{\mathbf{2}} \Rightarrow p \sim q \Rightarrow [p]_{\sim} = [q]_{\sim}.$$

Легко проверить, что φ и есть искомый булев изоморфизм. □

Булева алгебра: полиномиальная полнота Если $P_B^n \cong B^{B^n}$, то назовём булеву алгебру B полиномиально полной.
Полиномиальная полнота означает, что каждую функцию можно представить полиномом.

Из единственности представления булевых ($\mathbf{2}^n \to \mathbf{2}$) функций в виде совершенных ДНФ, КНФ или АНФ (полиномов Жегалкина), следует, что $|P_n/\sim| = 2^{2^n}$.

Отсюда:

- поскольку $P_n/\sim \cong P_{\mathbf{2}}^n$, то алгебра $\mathbf{2}$ полиномиально полна.
- если $|B| = m > 2$, то $|P_B^n| = |P_n/\sim| = 2^{2^n} < m^{m^n} = |B^{B^n}|$, т.е. $\mathbf{2}$ — единственная полиномиально полная булева алгебра.

5.5 Булевы уравнения

Определение 5.12. Пару (p, q), где $p, q \in P_n$ назовём булевым уравнением.

Пусть B — произвольная булева алгебра.
Элемент $(b_1, \ldots, b_n) \in B^n$ называется *решением уравнения (p, q) в булевой алгебре B*, если

$$\widehat{p}_B(b_1, \ldots, b_n) = \widehat{q}_B(b_1, \ldots, b_n).$$

Совокупность $\{ (p_i,\, q_i) \mid i = \overline{1, m} \}$ образует систему из m уравнений.

Решением системы называется общее решение всех уравнений системы.

Уравнение $(p,\, q)$ допустимо записывать в виде $p = q$.

Например, $x_1' x_2 \vee x_3 = x_1(x_2 \vee x_3)$ — булево уравнение в $\mathbf{2}$,
а (101) — его решение. Эквивалентное преобразование булева уравнения

Теорема 5.11. *Уравнения*

$$p = q \ \text{ и } \ (p \sqcap q') \sqcup (p' \sqcap q) = 0$$

имеют одни и те же решения.

Доказательство. Пусть B — булева алгебра и $(b_1,\, \ldots,\, b_n) \in B^n$.
Положим $a = \widehat{p}_B(b_1,\, \ldots,\, b_n)$ и $b = \widehat{q}_B(b_1,\, \ldots,\, b_n)$.

Тогда, с одной стороны,

$$a = b \Rightarrow (a \sqcap b') \sqcup (a' \sqcap b) = (a \sqcap a') \sqcup (a' \sqcap a) = 0 \sqcup 0 = 0,$$

а с другой —

$$(a \sqcap b') \sqcup (a' \sqcap b) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \sqcap b' = 0 \\ a' \sqcap b = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \sqcap b' = 0 \\ a \sqcup b' = 1 \end{array} \right. \Rightarrow a = b'' \Leftrightarrow a = b\,.$$

□

Эквивалентное преобразование системы булевых уравнений По данной теореме система уравнений

$$\{\,(p_i,\, q_i) \mid i = 1,\, \ldots,\, m\,\}.$$

эквивалентна единственному уравнению

$$\bigsqcup_{i=1}^{m} ((p_i \sqcap q\,'_i) \sqcup (p\,'_i \sqcap q_i)) \;=\; 0 \qquad (*).$$

Если решение ищется в алгебре $\mathbf{2}$, то выразив левую часть в конъюнктивной форме, получим, что уравнение $(*)$ имеет решение, когда хотя бы один из сомножителей принимает значение 0 и, приравнивая их последовательно к 0, находят все решения системы.

Пример 5.6. Решим в $\mathbf{2}$ систему

$$\left\{\,(x_1x_2,\, x_1x_3 \vee x_2),\, (x_1 \vee x\,'_2,\, x_3)\,\right\}.$$

Перепишем систему в привычном виде

$$\begin{cases} x_1x_2 & = \; x_1x_3 \vee x_2\,, \\ x_1 \vee x\,'_2 & = \; x_3\,. \end{cases}$$

Она эквивалентна единственному уравнению

$$x_1x_2(x_1x_3 \vee x_2)' \;\vee\; (x_1x_2)'(x_1x_3 \vee x_2) \vee \\ \vee\; (x_1 \vee x\,'_2)x\,'_3 \;\vee\; (x_1 \vee x\,'_2)'x_3 \;=\; 0.$$

Преобразуя левую часть в КНФ, получим уравнение

$$(x_1 \vee x_2 \vee x\,'_3)(x\,'_1 \vee x\,'_2 \vee x\,'_3) \;=\; 0.$$

Таким образом, решения рассматриваемой системы — элементы $(b_1,\, b_2,\, b_3) \in \mathbf{2}^3$ удовлетворяющие соотношениям

$$(b_1 \vee b_2 \vee \overline{b}_3)(\overline{b}_1 \vee \overline{b}_2 \vee \overline{b}_3) \;=\; 0,$$

т.е. это (001) и (111).

Системы булевы уравнений в произвольной булевой алгебре В общем случае, когда решение ищется не в простейшей, а в произвольной булевой алгебре $B \neq \mathbf{2}$, то приведение уравнения $(*)$ к конъюнктивной форме приводит к потере решений в силу того, что B не обладает свойством полиномиальной полноты, и в ней

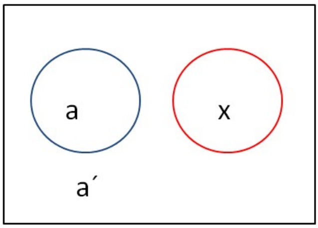
$$a \sqcap b = o \not\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = o \\ b = o \end{array} \right. .$$

Выкладки в булевой структуре $\langle\, B, \sqcup, \sqcap, {}', \sqsubseteq, o, \iota \,\rangle$

1. $a \sqcap x = 0 \Leftrightarrow (a \sqcap x) \sqcup a' =$

$$= a' \Leftrightarrow (a \sqcup a') \sqcap (x \sqcup a') =$$
$$= a' \Leftrightarrow x \sqcup a' = a' \Leftrightarrow x \sqsubseteq a' \,(\Leftrightarrow a \sqsubseteq x').$$

Аналогично $b \sqcap x' = 0 \Leftrightarrow b \sqsubseteq x$.



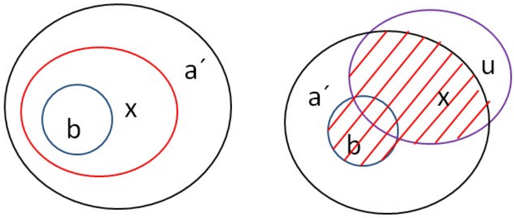
2.

$$\left\{ \begin{array}{l} b \sqsubseteq x \\ x \sqsubseteq a' \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = b \sqcup u \text{ для некоторого } u \in B \\ x \sqcap a' = x \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = (b \sqcup u) \sqcap a' \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = (a' \sqcap u) \sqcup b.$$

Решение булева уравнения с одним неизвестным в произвольной булевой алгебре Пусть в булевой структуре $\langle\, B, \sqcup, \sqcap, {}', \sqsubseteq, o, \iota \,\rangle$ задано уравнение $p = q$, где $p, q \in P_1$.

Метод состоит в выполнении следующих шагов.



1. Приводим данное уравнение к равносильному уравнению с o в правой части.
2. Приводим полученное уравнение к равносильному уравнению вида $(a \sqcap x) \sqcup (b \sqcap x') = o$, где a и b — известные элементы B.
3. Заменяем полученное уравнение на эквивалентную систему
$$a \sqcap x = o, \qquad b \sqcap x' = o.$$
4. Если $b \not\sqsubseteq a'$, то исходное уравнение решения не имеет.
Иначе, искомое решение — x такой, что
$$b \sqsubseteq x \sqsubseteq a' \quad \text{или}$$
$$x = (b \sqcup u) \sqcap a' = (a' \sqcap u) \sqcup b,$$
где u — произвольный элемент B.

Решение булева уравнения $x \sqcup c = d$ Решим булево уравнение
$$x \sqcup c = d$$
в произвольной булевой структуре
$\langle B, \sqcup, \sqcap, ', \sqsubseteq, o, \iota \rangle$.

1. $x \sqcup c = d \;\Leftrightarrow\; ((x \sqcup c)' \sqcap d) \sqcup ((x \sqcup c) \sqcap d') = o.$

2. $((x \sqcup c)' \sqcap d) \sqcup ((x \sqcup c) \sqcap d') =$
$= (x' \sqcap c' \sqcap d) \sqcup (x \sqcap d') \sqcup (c \sqcap d') =$
$= (x' \sqcap c' \sqcap d') \sqcup (x \sqcap d') \sqcup (x \sqcap c \sqcap d') \sqcup (x' \sqcap c \sqcap d') =$
$$= (x \sqcap \underbrace{(d' \sqcup (c \sqcap d'))}_{d'}) \sqcup (x' \sqcap ((c' \sqcap d) \sqcup (c \sqcap d'))) = o.$$

3. Имеем $d' \sqcap x = o$, $((c' \sqcap d) \sqcup (c \sqcap d)') \sqcap x' = o.$

Решение булева уравнения $x \sqcup c = d$...

4. Исходное уравнение имеет решение если и только если
$$(c' \sqcap d) \sqcup (c \sqcap d') \sqsubseteq d.$$
Покажем, что данное условие эквивалентно $c \sqsubseteq d$:
$$((c' \sqcap d) \sqcup (c \sqcap d')) \sqsubseteq d \;\Leftrightarrow\; (c' \sqcap d) \sqcup (c \sqcap d') \sqcup d = d$$
$$\Leftrightarrow\; d \sqcup (c \sqcap d') = d \;\Leftrightarrow\; (d \sqcup (c \sqcap d')) \sqcap c = d \sqcap c \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; (c \sqcap d) \sqcup (c \sqcap d') = d \sqcap c \;\Leftrightarrow\; c = c \sqcap d \;\Leftrightarrow\; c \sqsubseteq d\,.$$

Общее решение исходного уравнения —
$$x = (c' \sqcap d) \sqcup (c \sqcap d') \sqcup u) \sqcap d = (c' \sqcap d) \sqcup (u \sqcap d) = d \sqcap (c' \sqcup u),$$
где u — произвольный элемент булевой структуры B.

Необязательная проверка:
$$(d \sqcap (c' \sqcup u)) \sqcup c \overset{Dtr2}{=} (d \sqcup c) \sqcap \iota = d \sqcup c \overset{c \sqsubseteq d}{=} d.$$