

# Ядерные методы

Виктор Китов  
v.v.kitov@yandex.ru

# Содержание

- 1 Kernel trick
- 2 Ядерные функции
- 3 Ядерное обобщение метода опорных векторов

# Kernel trick

## Kernel trick

Определить не полное признаковое описание  $x$ , а только функцию вычисления скалярного произведения  $K(x, x')$

- $\langle x, x' \rangle$  имеет сложность  $O(D)$ , а сложность вычисления  $K(x, x')$  может быть меньше.

## Комментарии

Kernel trick применим не только к ridge регрессии, но и к:

- методу  $K$  ближайших соседей
- $K$ -средних,  $K$ -medoids (кластеризация)
- nearest medoid
- метод главных компонент (снижение размерности)
- метод опорных векторов
- многие другие

Когда исходное пространство объектов  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^M$ , то всегда можно определить *линейное ядро*:

$$K(x, x') = \langle x, x' \rangle = \sum_{d=1}^D x_d x'_d$$

# Характерные случаи применимости kernel trick

- признаковое пространство высокой размерности
  - все полиномы степени до  $M$
  - Гауссово ядро  $K(x, x') = e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \|x-x'\|^2}$  соответствует признаковому пространству бесконечной размерности.
- сложно представить объекты векторами фиксированной длины
  - строки, множества, картинки, тексты, графы, 3D-структуры и т.д.
- существуют естественные определения скалярного произведения
  - строки: число совместно встречающихся подстрок
  - множества: размер общего подмножества
    - пример: для множеств  $S_1$  и  $S_2$ :  $K(S_1, S_2) = 2^{|S_1 \cap S_2|}$  -ядро.
- скалярное произведение может быть эффективно посчитано

## Преимущества kernel trick

- обобщение линейных методов на нелинейный случай
  - с сохранением вычислительной эффективности линейных методов
  - с сохранением преимуществ линейных методов
    - локальный оптимум является глобальным
    - нет локальных оптимумов=>меньше переобучение
- объекты для которых не существует векторных представлений фиксированной длины
- ускоренное вычисление скалярных произведений для высоких значений  $D$

# Содержание

- 1 Kernel trick
- 2 Ядерные функции**
- 3 Ядерное обобщение метода опорных векторов

## Определение ядра

- $x \in \mathcal{X}$  заменяется признаковым описанием  $\phi(x)$  размерности  $D$ .
  - $\mathcal{X}$  - пространство объектов (первичное представление, не обязательно  $\mathbb{R}^M$ )
  - Пример:  $[x] \rightarrow [x, x^2, x^3]$

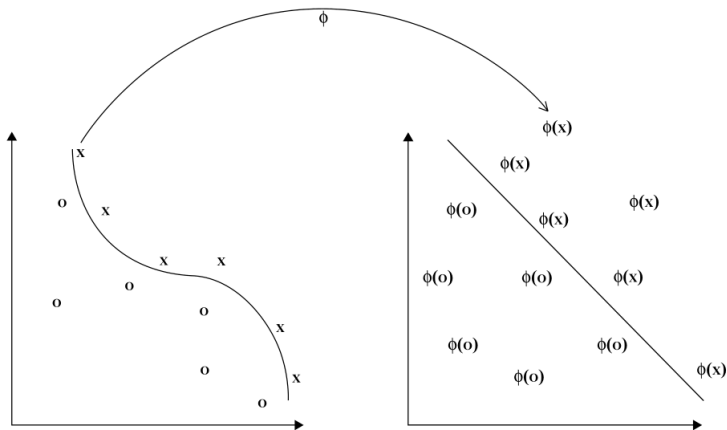
### Ядро (Kernel)

Функция  $K(x, x') : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  является ядром, если найдется такое признаковое описание  $\phi(x) : \mathcal{X} \rightarrow X$  что  $K(x, x') = \langle \phi(x), \phi(x') \rangle$ .

- $\langle x, x' \rangle$  определяется как  $\langle \phi(x), \phi(x') \rangle = K(x, x')$
- Частные разновидности ядер:
  - $K(x, x') = K(x - x')$  - стационарные ядра (инвариантны к параллельным переносам)
  - $K(x, x') = K(\|x - x'\|)$  - радиальные базисные функции



# Иллюстрация



## Полиномиальное ядро

- Пример 1: пусть  $D = 2$ .

$$\begin{aligned} K(x, z) &= (x^T z)^2 = (x_1 z_1 + x_2 z_2)^2 = \\ &= x_1^2 z_1^2 + x_2^2 z_2^2 + 2x_1 z_1 x_2 z_2 \\ &= \phi^T(x) \phi(z) \end{aligned}$$

где  $\phi(x) = (x_1^2, x_2^2, \sqrt{2}x_1 x_2)$

- Пример 2: пусть  $D = 2$ .

$$\begin{aligned} K(x, z) &= (1 + x^T z)^2 = (1 + x_1 z_1 + x_2 z_2)^2 = \\ &= 1 + x_1^2 z_1^2 + x_2^2 z_2^2 + 2x_1 z_1 + 2x_2 z_2 + 2x_1 z_1 x_2 z_2 \\ &= \phi^T(x) \phi(z) \end{aligned}$$

где  $\phi(x) = (1, x_1^2, x_2^2, \sqrt{2}x_1, \sqrt{2}x_2, \sqrt{2}x_1 x_2)$

- В общем, для  $D \geq 1$   $K(x, z) = (x^T z)^M$  соответствует расширению признакового пространства до всех мономов степени  $M$ , а  $(1 + x^T z)^M$  - до всех мономов степени не выше  $M$ .

## Свойства ядер

**Теорема (Мерсер):** Функция  $K(x, x')$  является ядром тогда и только тогда, когда

- она симметрична:  $K(x, x') = K(x', x)$
- она неотрицательно-определена (см. 2 эквивалентных определения ниже).
  - определение 1: для произвольной функции  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_X \int_X K(x, x') g(x) g(x') dx dx' \geq 0$$

- определение 2: для произвольного конечного набора объектов  $x_1, x_2, \dots, x_m$  матрица Грамма  $\{K(x_i, x_j)\}_{i,j=1}^m \succeq 0$  (неотрицательно определена)

## Построение новых ядер

- Обучение ядер (kernel learning) - отдельная область.
- Сложно доказывать неотрицательную определенность  $K(x, x')$  в каждом новом случае.
- Новые ядра обычно строят из известных ядер, применяя преобразования сохраняющие свойство ядра:
- Известные ядра:
  - обычное скалярное определение  $\langle x, x' \rangle$
  - константа  $K(x, x') \equiv 1$
  - $x^T A x$  для любой  $A \succeq 0$

## Преобразования, сохраняющие свойство ядра

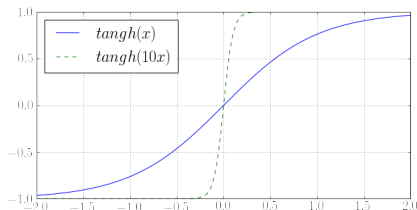
Если  $K_1(x, x')$ ,  $K_2(x, x')$  - произвольные ядра,  $c > 0$  - константа,  $q(\cdot)$  - полином с неотрицательными коэффициентами,  $h(x)$  и  $\varphi(x)$  - произвольные функции, отображающие  $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^M$  соответственно, то ядрами также являются:

- 1  $K(x, x') = cK_1(x, x')$
- 2  $K(x, x') = K_1(x, x')K_2(x, x')$
- 3  $K(x, x') = K_1(x, x') + K_2(x, x')$
- 4  $K(x, x') = K_1(\varphi(x), \varphi(x'))$
- 5  $K(x, x') = h(x)K_1(x, x')h(x')$
- 6  $K(x, x') = e^{K_1(x, x')}$

## Часто используемые функции $K(x, x')$

$K(x, x')$	определение
линейная	$\langle x, x' \rangle$
полиномиальная	$(\gamma \langle x, x' \rangle + r)^d$
RBF	$\exp(-\gamma \ x - x'\ ^2)$
сигмоидальное	$\tanh(\gamma \langle x, y \rangle + r)$

- Линейная, полиномиальная и RBF функция являются ядрами Мерсера, а сигмоидальная - нет.



## Дополнение

- Другие алгоритмы, допускающие обобщение через ядра: K-ближайших соседей, K-средних, K-medoids, nearest medoid, метод главных компонент, метод опорных векторов и многие другие..
- Определение расстояния через ядро:

$$\begin{aligned}\rho(x, x') &= \langle x - x', x - x' \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x', x' \rangle - 2\langle x, x' \rangle \\ &= K(x, x) + K(x', x') - 2K(x, x')\end{aligned}$$

- Скалярное определение нормализованных векторов:

$$\left\langle \frac{\phi(x)}{\|\phi(x)\|}, \frac{\phi(x')}{\|\phi(x')\|} \right\rangle = \frac{\langle \phi(x), \phi(x') \rangle}{\sqrt{\langle \phi(x), \phi(x) \rangle} \sqrt{\langle \phi(x'), \phi(x') \rangle}} = \frac{K(x, x')}{\sqrt{K(x, x)K(x', x')}}$$

# Содержание

- 1 Kernel trick
- 2 Ядерные функции
- 3 Ядерное обобщение метода опорных векторов**



## Линейный метод опорных векторов

- Решение для весовых коэффициентов:

$$w = \sum_{i \in SV} \alpha_i y_i x_i$$

- Дискриминантная функция

$$g(x) = \sum_{i \in SV} \alpha_i y_i \langle x_i, x \rangle + w_0$$

$$w_0 = \frac{1}{n_{\tilde{SV}}} \left( \sum_{j \in \tilde{SV}} y_j - \sum_{j \in \tilde{SV}} \sum_{i \in SV} \alpha_i y_i \langle x_i, x_j \rangle \right)$$

где  $SV = \{i : y_i(x_i^T w + w_0) \leq 1\}$  - индексы всех опорных векторов, а  $\tilde{SV} = \{i : y_i(x_i^T w + w_0) = 1\}$  - индексы граничных опорных векторов.

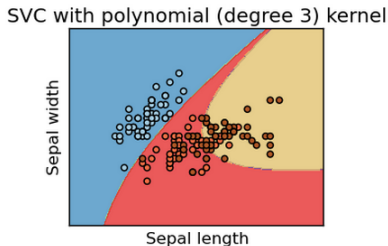
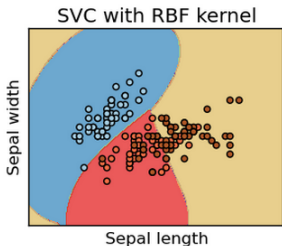
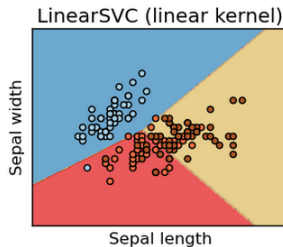
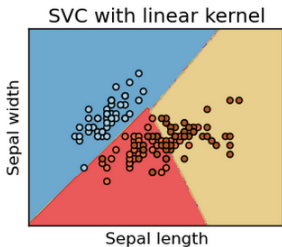
## Ядерное обобщение

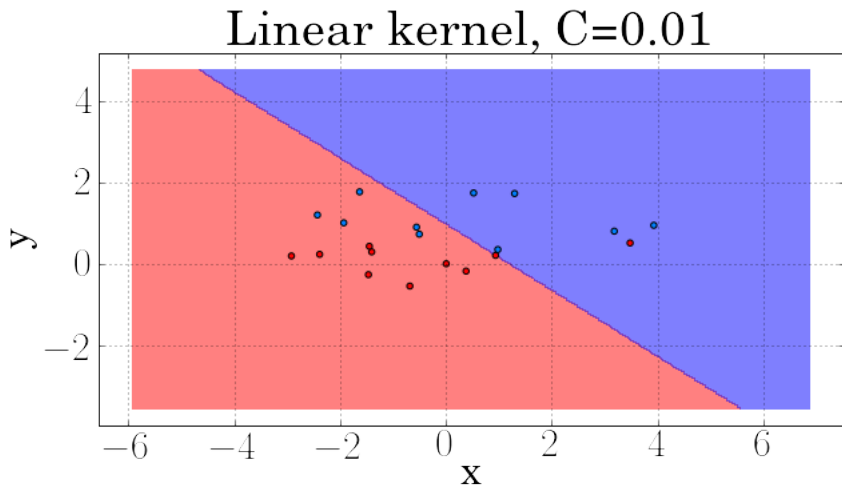
Дискриминантная функция:

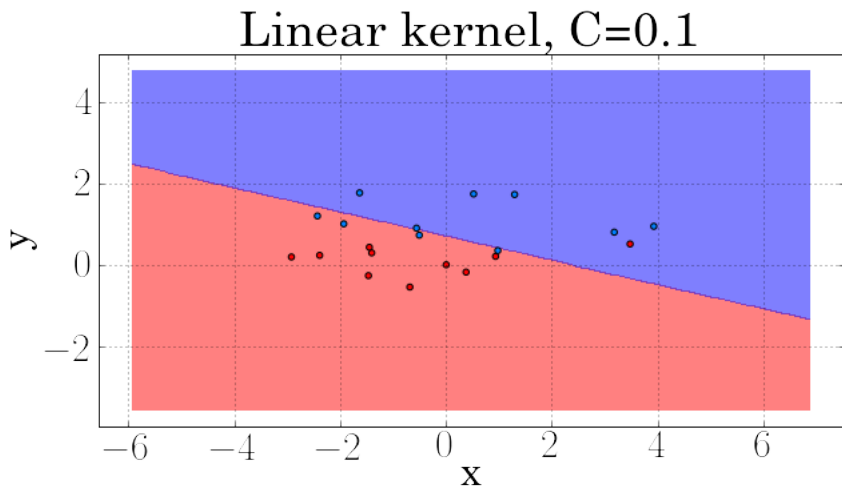
$$g(x) = \sum_{i \in \mathcal{SV}} \alpha_i y_i K(x_i, x) + w_0$$

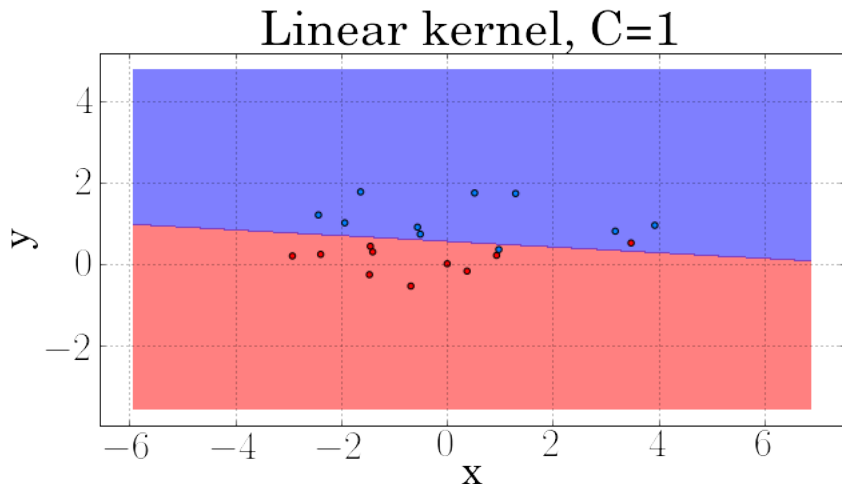
$$w_0 = \frac{1}{n_{\tilde{\mathcal{SV}}}} \left( \sum_{i \in \tilde{\mathcal{SV}}} y_i - \sum_{i \in \tilde{\mathcal{SV}}} \sum_{j \in \mathcal{SV}} \alpha_j y_j K(x_i, x_j) \right)$$

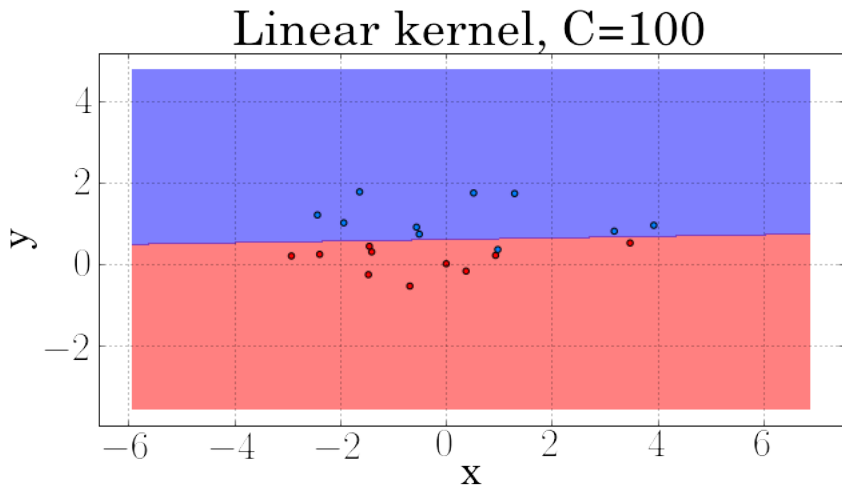
# Области классов для ядерного обобщения

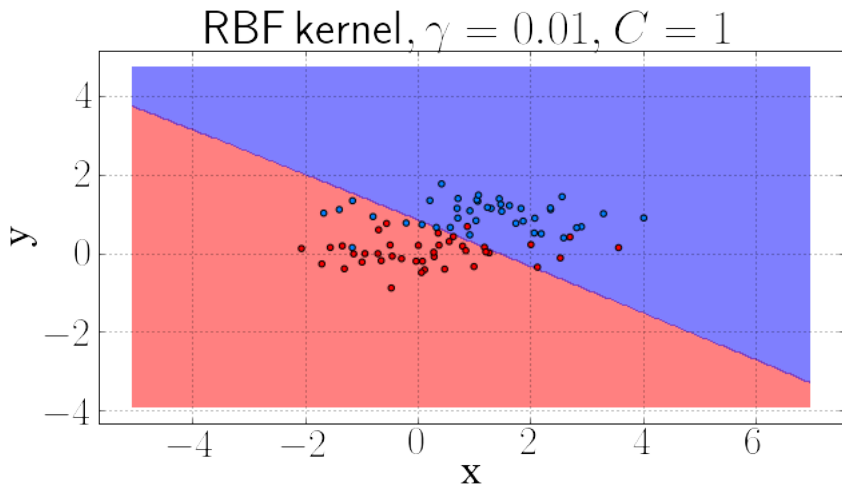


Линейное ядро - изменяемое  $C$ 

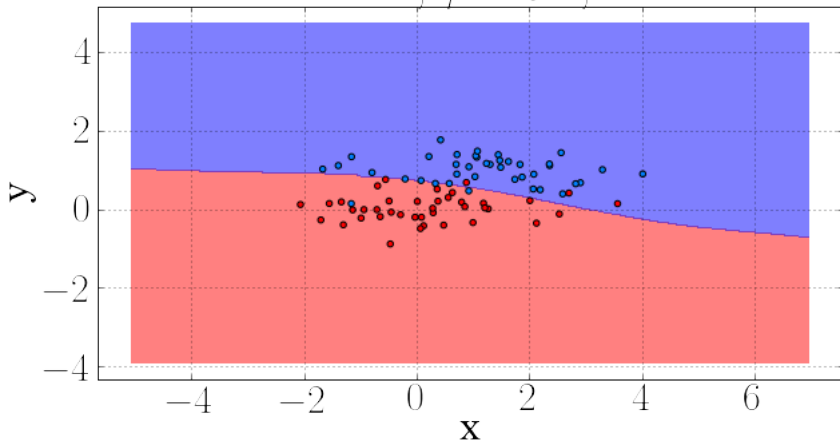
Линейное ядро - изменяемое  $C$ 

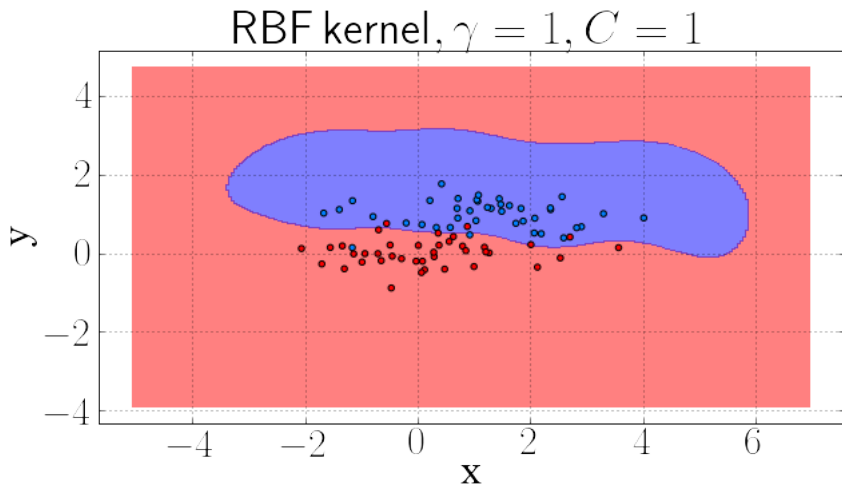
Линейное ядро - изменяемое  $C$ 

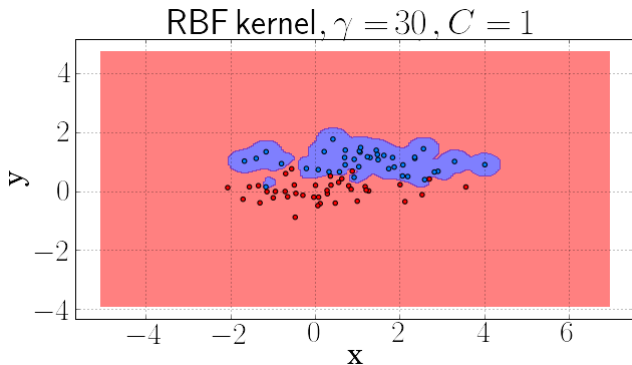
Линейное ядро - изменяемое  $C$ 

RBF ядро - изменяемое  $\gamma$ 

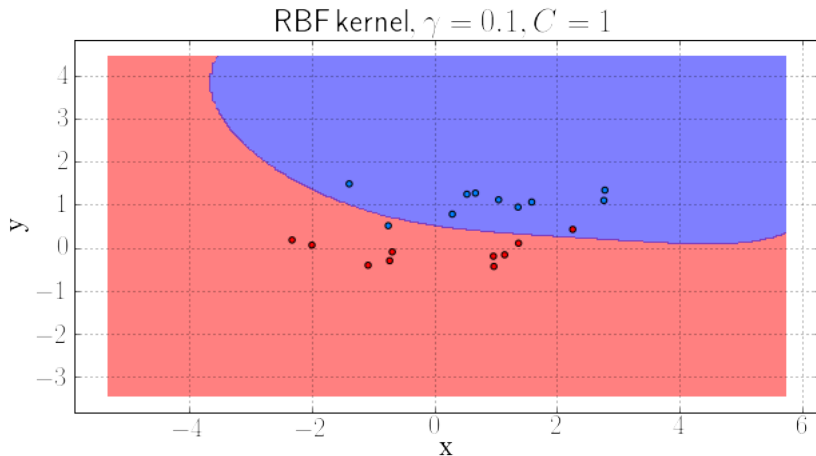


RBF ядро - изменяемое  $\gamma$ RBF kernel,  $\gamma = 0.1, C = 1$ 

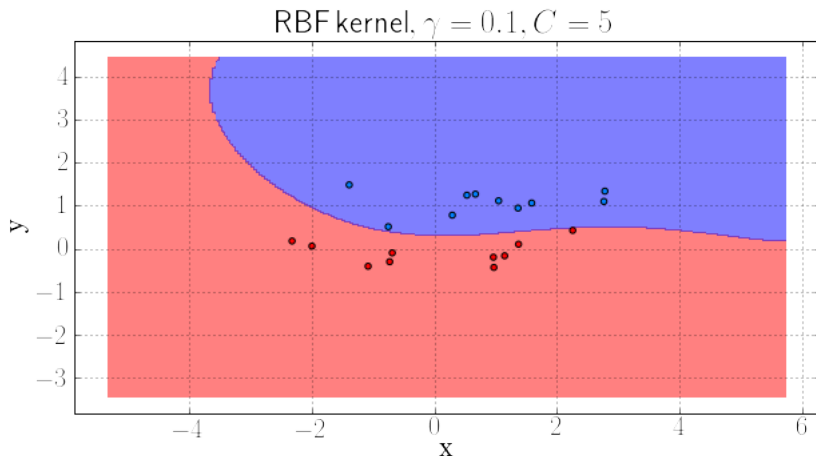
RBF ядро - изменяемое  $\gamma$ 

RBF ядро - изменяемое  $\gamma$ 

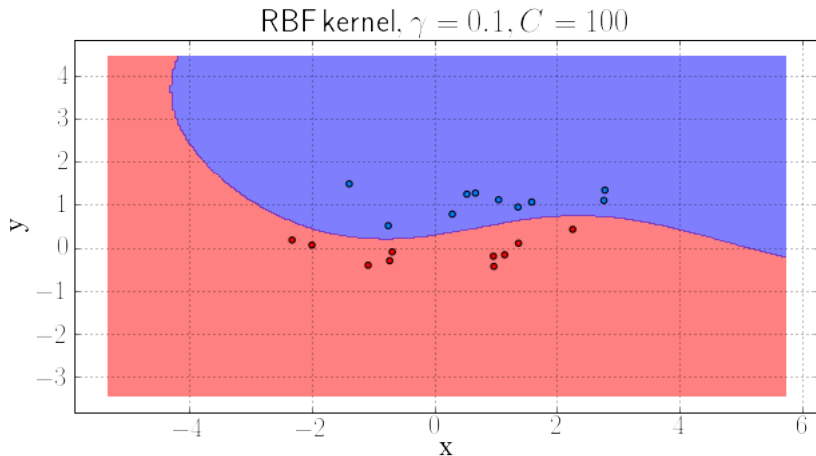
## RBF ядро - изменяемое C



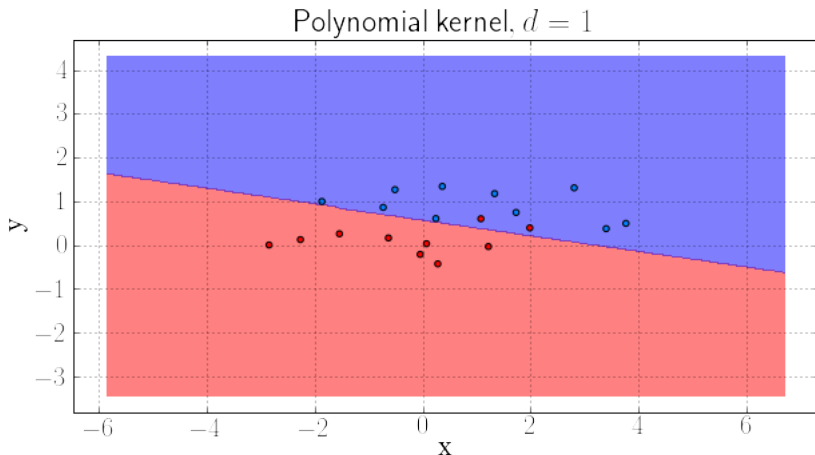
## RBF ядро - изменяемое C



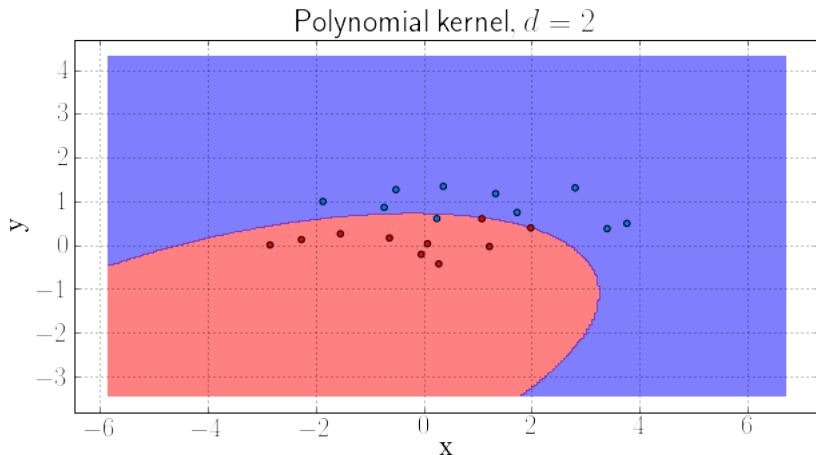
# RBF ядро - изменяемое C



# Полиномиальное ядро - изменяемое $d$

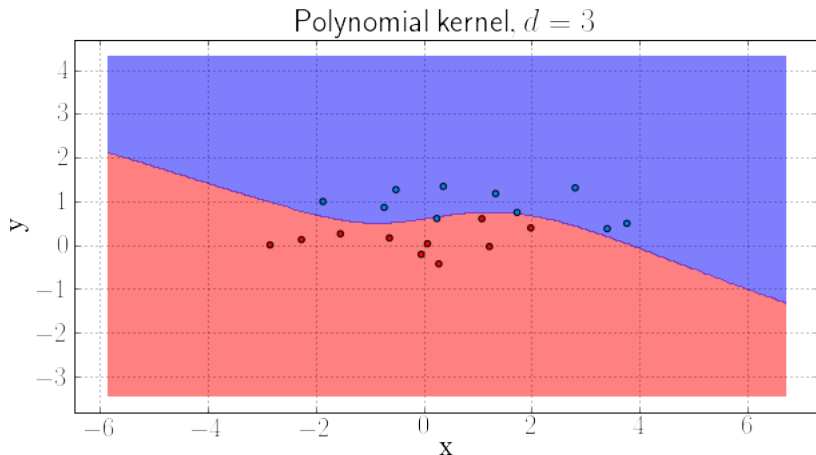


# Полиномиальное ядро - изменяемое $d$

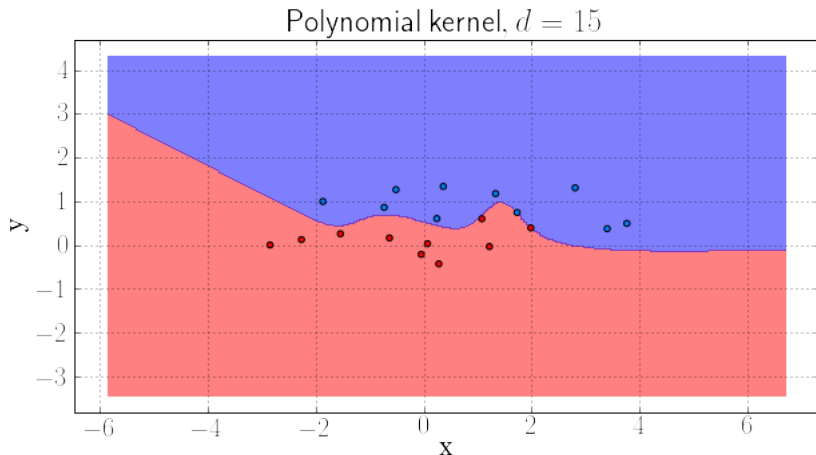


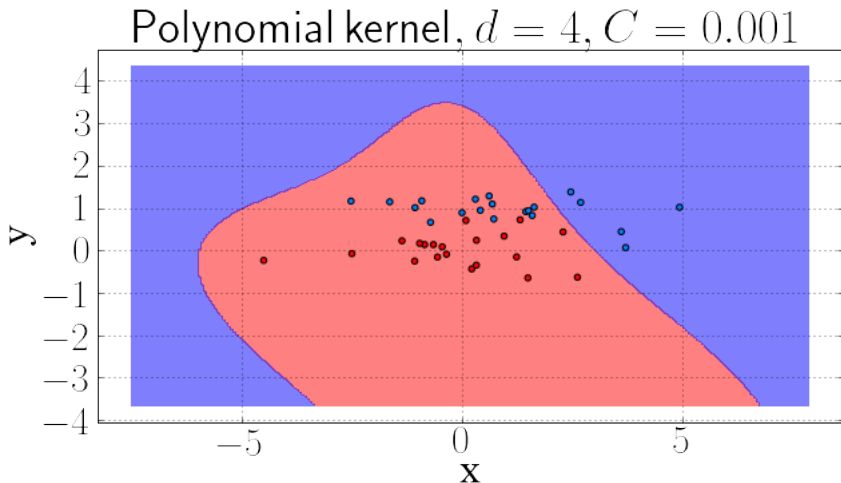


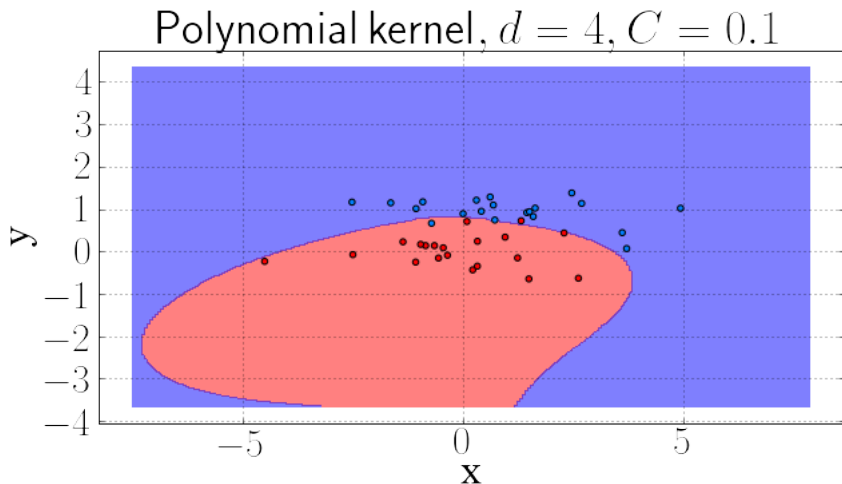
# Полиномиальное ядро - изменяемое $d$



# Полиномиальное ядро - изменяемое $d$



Полиномиальное ядро - изменяемое  $C$ 

Полиномиальное ядро - изменяемое  $C$ 

Полиномиальное ядро - изменяемое  $C$ 