Часть VI

Комбинаторные методы в анализе структур (II)

Разделы

Общая комбинаторная схема

Задачи с решениями

Что ещё почитать

Мультимножества

Мультимножество — обобщение понятия множества, допускающее наличие нескольких экземпляров одного и того же элемента.

Примеры

- Мультимножество простых множителей целого числа. Например, разложение числа 120 на простые множители имеет вид: $120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$, поэтому его мультимножество простых делителей есть $\{\,2,\,2,\,2,\,3,\,5\,\}$ или $\{\,3*2,\,1*3,\,1*5\,\}$.
- Мультимножество корней алгебраического уравнения. Например, уравнение $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$ имеет корни $\{\,1,\,2,\,2\,\}$ или $\{\,1,\,2*2\,\}$.

Если имеется бесконечное число экземпляров:
$\{\,*a,\,*b,\,5*c\,\}$ — n-элементное мультимножество.

Производящая функция выбора

Пусть имеется n-элементное мультимножество, из которого берётся выборка объёма m. Тогда ПФ такого выбора:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{j} \alpha_{ij} x_i^j = \sum_{m_1+\ldots+m_n=m} u_{m_1,\ldots,m_n} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n},$$

где $\alpha_{ij} = 1$, если может быть выбрано j экземпляров i-го объекта и $\alpha_{ij} = 0$, иначе.

Если выбор элемента p эквивалентен r выборам элемента q, то число переменных сокращают, полагая $x_p = x_q^r$. Так все переменные могут быть выражены через одну них и в этом случае будем иметь

$$F(x) = \sum_{m \geqslant 0} u_m x^m.$$

Числа Белла, Стирлинга, Каталана и др. могут быть получены как частные случаи данной производящей функции.

Производящая функция выбора: пример 1

Пример 1. X — обычное (не мульти) множество.
Тогда каждый элемент может быть либо выбран, либо не выбран, т.е. $\alpha_{i0} = \alpha_{i1} = 1$, $\alpha_{i2} = \alpha_{i3} = \ldots = 0$.
Следовательно

$$F(x) = (1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n)\,.$$

Если нас интересует только объём выборки m, то полагаем $x_1 = \ldots = x_n = x$ и

$$F(x) = (1 + x)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m,$$

т.е. таких выборок C_n^m (это мы и так знали).

Производящая функция выбора: пример 2

Пример 2. Дано мультимножество из n элементов, из которого берётся выборка объёма m, причём каждый элемент м/б выбран не более r раз, тогда

$$F(x) = (1 + x + \ldots + x^r)^n = \sum_{m=0}^{nr} u_m x^m.$$

Например, $n = 3$; $A = \{*a, *b, *c\}$, $m = 2$.
Если бы это было обычное множество, то

$$u_m = \binom{n}{m} = \binom{3}{2} = 3: \; (a, b), \, (a, c), \, (b, c).$$

Если рассматривается мультмножество, то добавляются (a, a), (b, b), (c, c):

$$u_m = \left(\!\!\binom{n}{m}\!\!\right) = \overline{C}_n^m \text{ и } \left(\!\!\binom{3}{2}\!\!\right) = 6.$$

Производящая функция выбора: пример 2...

Если число выборов элементов неограничено, то ПФ есть

$$F(x) = \big(1 + x + x^2 + \dots\big)^n = \frac{1}{(1-x)^n}.$$

Разлагаем данную функцию в ряд, формально рассматривая биномиальные коэффициенты при отрицательных параметрах:

$$\frac{1}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n} = \sum_{m\geqslant 0} (-1)^m \binom{-n}{m} x^m = \sum_{m\geqslant 0} u_m x^m.$$

Итого имеем $u_m = (-1)^m \binom{-n}{m} \overset{\text{def}}{=} \left(\!\binom{n}{m}\!\right) =$

$$= (-1)^m \frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-m+1)}{m!} =$$

$$= \frac{(n+m-1)(n+m)\dots n}{m!} = \binom{n+m-1}{m} = C^m_{n+m-1} = \overline{C}^m_n.$$

Производящая функция выбора: пример 2...

В нашем случае $\overline{C}_3^2 = \left(\!\binom{3}{2}\!\right) = \binom{4}{2} = 6$.

$\overline{C}_n^k$ есть также и число решений уравнения

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$$

в целых неотрицательных числах (порядок слагаемых существенен).

Представляем число k в виде набора k одинаковых шариков, лежащих на прямой, и каждому разложению числа k сопоставим расстановку на $n-1$ палочки между шариками. $x_i =$ число шариков между палочками с номерами i и $i-1$. Вместе палочки и шарики составляют $n+k-1$ предмет, а назначить $n-1$ палочек можно $C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^{k}$ способами.

<u>Было</u>: число распределений n неразличимых шаров по k различимым урнам, когда некоторые урны могут остаться пустыми — $w = C_{n+k-1}^{k-1} = C_{n+k-1}^{n}$.

Производящая функция выбора: пример 3

Пример 3. В том же мультимножестве их n элементов берётся выборка объёма m, причём каждый элемент д/б выбран хотя бы 1 раз (т.е. $m \geqslant n \geqslant 1$).

ПФ искомых выборок есть

$$F(x) = \sum_{m \geqslant 0} u_m x^m = (x + x^2 + \dots)^n =$$
$$= \big(x(1 + x + x^2 + \dots) \big)^n = x^n (1 + x + x^2 + \dots)^n =$$
$$= x^n \sum_{m \geqslant 0} \left(\!\!\binom{n}{m}\!\!\right) x^m = \sum_{m \geqslant 0} \left(\!\!\binom{n}{m}\!\!\right) x^{m+n}.$$

Заменяя $m \mapsto m - n$, получаем

$$F(x) = \sum_{m \geqslant n} \left(\!\!\binom{n}{m-n}\!\!\right) x^m = \sum_{m \geqslant n} \binom{m-1}{m-n} x^m.$$

Задача о размене монет

Пример 4. Сколькими способами можно разменять 1 руб. монетами достоинствами 1, 5, 10 и 50 коп.?

Строим ПФ:

$$F(x) = \sum_{k\geqslant 0} u_k x^k = (1 + x_1 + x_1^2 + \ldots) \cdot \ldots \cdot (1 + x_4 + x_4^2 + \ldots).$$

Учитываем достоинства монет: $x_1 = x$, $x_2 = x^5$, $x_3 = x^{10}$, $x_4 = x^{50}$. Поэтому

$$F(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1}{1-x^{10}} \cdot \frac{1}{1-x^{50}}.$$

Разложение в ряд полученного выражения технически очень громоздко. Нам же нужно лишь значение u_{100}.

Задача о размене монет...

Поэтому можно действовать следующим образом. Имеем

$$u_0 = u_1 = u_1 = u_1 = u_4 = 1,$$
$$u_5 = u_6 = u_7 = u_8 = u_9 = 2,\ u_{10} = 4\,.$$

10 коп. $= 10 \cdot 1$ коп. $= 5$ коп.$+5 \cdot 1$ коп. $= 2 \cdot 5$ коп.
— итого 4 способа.

Положим

$$A(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1}{1-x^{10}} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$
$$B(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^5} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots,$$

причём $b_0 = b_1 = \ldots = b_4 = 1$ (представление 0, 1, 2, 3 и 4 копеек) и, кроме того, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 \ldots$.

Задача о размене монет...

Имеем

$$\begin{aligned} A(x) &= (1 - x^{50}) \cdot F(x)\,; \\ B(x) &= (1 - x^{10}) \cdot A(x)\,; \\ \frac{1}{1-x} &= (1 - x^{5}) \cdot B(x). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{cases} a_k \;=\; u_k - u_{k-50}\,, & \text{при } k \geqslant 50\,, \\ b_k \;=\; a_k - a_{k-10}\,, & \text{при } k \geqslant 10\,, \\ 1 \;=\; b_k - b_{k-5}\,, & \text{при } k \geqslant 5\,. \end{cases}$$

Из последнего соотношения — $b_k \;=\; \left\lfloor \dfrac{k}{5} \right\rfloor + 1\,,\ k \geqslant 0$ или

$$B(x) \doteqdot (1,\, 1,\, 1,\, 1,\, 1,\, 2,\, 2,\, 2,\, 2,\, 2,\, 3,\, 3,\, 3,\, 3,\, 3,\, \ldots).$$

Задача о размене монет...

Таким образом,

$$\begin{cases} u_k \;=\; a_k + u_{k-50}\,, & k \geqslant 50\,, \\ a_k \;=\; b_k + a_{k-10}\,, & k \geqslant 10\,. \end{cases}$$

Из первого равенства — $u_{100} \;=\; a_{100} + a_{50} + u_0$ и далее:

$$\begin{aligned} a_{100} &= b_{100} + b_{90} + \ldots + b_{60} + b_{50} + \ldots + b_{10} + a_0 \\ a_{50} &= b_{50} + b_{40} + \ldots + b_{10} + a_0\,. \end{aligned}$$

Поскольку $u_0 = a_0 = 1$, имеем

$$\begin{aligned} u_{100} \;&=\; b_{100}+b_{90}+b_{80}+b_{70}+b_{60}+2\cdot(b_{50}+b_{40}+b_{30}+b_{20}+b_{10}+1)+1 \;= \\ &=\; 21+19+17+15+13+2\cdot(11+9+7+5+3+1)+1 \;= \\ &=\; 85+2\cdot 36+1 \;=\; 86+72 \;=\; 158. \end{aligned}$$

Задача о размене монет: замечания

В общем случае, число представлений суммы в k единиц монетами по $r_1, \ldots, r_m$ единиц равно коэффициенту u_k в разложении по x ПФ

$$F(x) = \frac{1}{1-x^{r_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-x^{r_m}}\,.$$

При $r_i = i$, $i = 1, 2, \ldots$ имеем

$$F(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \ldots\,.$$

Коэффициент $u_n = p(n)$ разложения этой ПФ в ряд по x называется *числом разбиений* n — это число представлений n в виде суммы положительных целых слагаемых без учёта порядка.

Для $p(n)$ неизвестно выражение в замкнутом виде.

Задача о размене монет: замечания

Для первых значений n имеем

$$p(1) = 1\,,\ p(2) = 2\,,\ p(3) = 3\,,\ p(4) = 5\,,\ p(6) = 11\,,\ p(7) = 15\,.$$

Например,

$$4 = \underbrace{4 \cdot 1}_{1} = \underbrace{3+1}_{2} = \underbrace{2+2}_{3} = \underbrace{2+1+1}_{4} = \underbrace{1+1+1+1}_{5}.$$

С. Рамануджан показал, что

$$p(5n+4) \equiv_5 0\,, \quad p(7n+5) \equiv_7 0\,, \quad p(11n+6) \equiv_{11} 0\,.$$

$$p(n) \sim A_n e^{\pi\left(\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}\right)}$$

где $A_n = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{2}}\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{6}\left(n-\frac{1}{24}\right)} - \dfrac{1}{2\left(n-\frac{1}{24}\right)^{3/2}}\right)$

$p(200) = 3\,972\,999\,029\,388$— точное значение

Рамануджан

Сриниваса Рамануджан Айенгор (англ. Srinivasa Ramanujan Iyengar, 1887–1920) — математический гений Индии.

У него тамильское имя без фамилии: Рамануджа́н — имя, Срињива́са — отчество, Айенго́р — каста.

Не имея специального математического образования, доказал справедливость около 120 ранее неизвестных теоретико-числовых формул.

Рамануджан до 27 занимался математикой самостоятельно. Затем, по настоянию Г. Харди переезжает в Кембридж, где становится профессором и членом Лондонского королевского общества.

Его результаты порождены неповторимой математической фантазией и фантастической интуицией.

Доказано Рамануджаном

$$\pi = \frac{9801}{2\sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(4k)!}{(k!)^4}\cdot\frac{1103+26390k}{(4\cdot 99)^{4k}}\right)}.$$

Уже при $k = 100$ достигается огромная точность — 600 верных значащих цифр!

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\ldots}}}} = 3.$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = w^3, \quad \text{где}$$

$$x = 3a^2 + 5ab - 5b^2, \quad z = 4a^2 - 4ab + 6b^2,$$

$$y = 5a^2 - 5ab - 3b^2, \quad w = 6a^2 - 4ab + 4b^2.$$

Сам Рамануджан говорил, что формулы ему во сне внушает богиня Намагири Тхайяр.

Разделы

Задача Comb-1

Показать, что $S(n, n-1) = C_n^2$.

Решение

Из рекуррентного соотношения для чисел Стирлинга II рода:

$$S(n, n-1) = (n-1)\underbrace{S(n-1, n-1)}_{=1} + S(n-1, n-2) = \ldots$$

$$\ldots = (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \frac{n(n-1)}{2} = C_n^2.$$

Задача Comb-2

Показать, что $S(n, n-2) = 3C_n^4 + C_n^3$
(полезна формула суммирования биномиальных коэффициентов по нижнему индексу $\sum_{k=0}^{n} C_k^m = C_{n+1}^{m+1}$).

Решение
Из рекуррентного соотношения для чисел Стирлинга II рода последовательно получаем (подчёркнут итеративный член):

$$S(n, n-2) = (n-2)S(n-1, n-2) + \underline{S(n-1, n-3)} =$$
$$= (n-2)C_{n-1}^2 + (n-3)S(n-2, n-3) + S(n-2, n-4) =$$
$$= (n-2)C_{n-1}^2 + (n-3)C_{n-2}^2 + \underline{S(n-2, n-4)} = \ldots$$
$$= \sum_{i=1}^{n-2} C_{n-i}^2 (n-i-1) = \sum_{i=1}^{n-2} C_{n-i}^2 (n-i-2) + \sum_{i=1}^{n-2} C_{n-i}^2 \,.$$

Задача Comb-2...

Имеем далее

$$C^2_{n-i}(n-i-2) = \frac{(n-i)!(n-i-2)}{2!(n-i-2)!} = \frac{3!}{2!} \cdot \frac{(n-i)!}{3!(n-i-3)!} = 3C^3_{n-i}$$

Затем

$$\sum_{i=1}^{n-2} C^3_{n-i} = \sum_{i=2}^{n-1} C^3_i = \sum_{i=0}^{n-1} C^3_i = C^4_n$$

— второе равенство получено по $C^k_n = 0$ при $n < k$, последнее — по формуле суммирования по нижнему индексу.

Аналогично $\sum_{i=1}^{n-2} C^2_{n-i} = \sum_{i=2}^{n-1} C^2_i = C^3_n$ и получаем требуемое.

Задача Comb-3

Сколькими способами можно разложить n *различимых* объектов в *неразличимые* коробки так, чтобы ни одна из них не оказалась пустой?

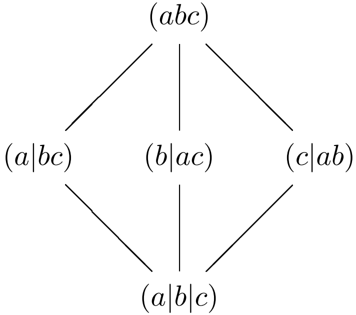
Решение.
При разложении n объектов одновременно задействовано может быть максимум n коробок, а каждому допустимому разложению соответствует некоторое разбиение множества из n объектов.

Количество таких разбиений равно числу Белла $B(n)$.

Задача Comb-4

Построить диаграмму Хассе беллиана 3-элементного множества $\{a, b, c\}$.

Решение



Имеем: $S(3,1) = 1$, $S(3,2) = 3$, $S(3,3) = 1$.

Задача Comb-5

Найти явный вид общего члена последовательности $u_0 = 1,\ u_1,\ u_2,\ \ldots$, удовлетворяющую условиям

$$\sum_{j=0}^{k} u_j u_{k-j} \;=\; 1,\ k \in \mathbb{N}. \qquad (*)$$

Решение. Напоминание:

$$A \;=\; \sum_{i \geqslant 0} a_i\,, \quad B \;=\; \sum_{i \geqslant 0} b_i\,, \quad A \cdot B \;=\; C \;=\sum_{k \geqslant 0} c_k,$$

$$c_k \;=\; \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$ — *свёртка коэффициентов* a_i и b_i.

Теперь ясно, что левая часть $(*)$ есть коэффициент при x в $\left(\sum_{k \geqslant 0} u_k x^k\right)^2$.

Задача Comb-5...

Положим $F(x) = \sum\limits_{k\geqslant 0} u_k x^k$. Тогда по $(*)$

$$F^2(x) = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}\,.$$

Следовательно,

$$F(x) = (1-x)^{-1/2} = \sum_{k\geqslant 0} \binom{-1/2}{k} (-1)^k x^k\,.$$

Находим u_k:

$$u_k = (-1)^k \binom{-1/2}{k} = (-1)^k \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\ldots\left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!} =$$

$$= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2^k k!} = \frac{(2k-1)!!}{2^k k!}\,.$$

Задача Comb-6

Для последовательности $(u_0, u_1, \ldots) = (2, 5, 13, \ldots)$, где $u_k = 2^k + 3^k$ найти обычную и экспоненциальную ПФ.

Решение

- Обычная ПФ:

$$F(x) = \sum_{k \geqslant 0} u_k x^k = \sum_{k \geqslant 0} 2^k x^k + \sum_{k \geqslant 0} 3^k x^k =$$
$$= \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1-3x} = \frac{2-5x}{1-5x+6x^2}.$$

- Экспоненциальная ПФ:

$$F(x) = \sum_{k \geqslant 0} u_k \frac{x^k}{k!} = \sum_{k \geqslant 0} \frac{2^k x^k}{k!} + \sum_{k \geqslant 0} \frac{3^k x^k}{k!} = e^{2x} + e^{3x}.$$

Задача Comb-7

С помощью ПФ доказать тождество

$$C_{2n}^{n} = \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2.$$

Решение.

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{2n} C_{2n}^{i} x^i = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\right)\left(\sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m\right).$$

Сравнивая коэффициенты при x^n, получим

$$C_{2n}^{n} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k C_n^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2.$$

Задача Comb-8

Найти ПФ для последовательности чётных и нечётных номеров чисел Фиббоначи.

Решение. Пусть $F(x)$ — ПФ для $(u_0, u_1, u_2, u_3 \ldots)$.
Тогда $F(-x)$ — ПФ для $(u_0, -u_1, u_2, -u_3 \ldots)$.
Имеем $\dfrac{F(x)+F(-x)}{2}$ — ПФ для $(u_0, 0, u_2, 0 \ldots)$.
Отсюда $\left.\dfrac{F(y)+F(-y)}{2}\right|_{y^2=x}$ — ПФ для $(u_0, u_2, u_4, \ldots)$ и

$\left.\dfrac{F(y)-F(-y)}{2y}\right|_{y^2=x}$ — ПФ для $(u_1, u_3, u_5, \ldots)$.

ПФ для чисел Фиббоначи: $F(x) = \dfrac{1}{1-x-x^2}$.

Задача Comb-8...

Имеем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x-x^2}+\frac{1}{1+x-x^2}\right)=\frac{1-x^2}{1-3x^2+x^4}\,.$$

$$F(x)_{\text{чётн}}=\frac{1-x}{1-3x+x^2}\,.$$

$$\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{1-x-x^2}-\frac{1}{1+x-x^2}\right)=\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\cdot(1-3x^2+x^4)}\,.$$

$$F(x)_{\text{нечётн}}=\frac{1}{1-3x+x^2}\,.$$

Задача Comb-9

Вывести формулу для определителя $\triangle_n$ трёхдиагональной матрицы n-го порядка

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

методами производящих функций и линейных рекуррентных последовательностей; считаем, что $\triangle_0 = 1$.

Задача Comb-9...

Решение *методом производящих функций*

Имеем $\triangle_1 = 3$ и $\triangle_{n+1} = 3\triangle_n - 2\triangle_{n-1}$ для $n \geqslant 1$.

Найдём производящую функцию

$$F(x) = \sum_{n\geqslant 0} u_n x^n = 1 + 3x + \sum_{n\geqslant 2} u_n x^n =$$

$$= 1 + 3x + \sum_{n\geqslant 2} (3u_{n-1} - 2u_{n-2}) x^n =$$

$$= 1 + 3x + 3x \sum_{n\geqslant 2} u_{n-1} x^{n-1} - 2x^2 \sum_{n\geqslant 2} u_{n-2} x^{n-2} =$$

$$= 1 + 3x + 3x(F(x) - 1) - 2x^2 F(x) =$$

$$= 1 + 3xF(x) - 2x^2 F(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x)(1 - 3x + 2x^2) = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{1 - 3x + 2x^2}.$$

Задача Comb-9...

$$1 - 3x + 2x^2 \;=\; (1 - ax)(1 - bx) \;=\; 1 - (a + b)x + abx^2\,.$$

$$\begin{cases} a + b \;=\; 3\,, \\ ab \;=\; 2\,, \end{cases} \quad \Rightarrow \; a \;=\; 1\,,\; b \;=\; 2\,.$$

$$\frac{1}{(1 - x)(1 - 2x)} \;=\; \frac{A}{1 - x} + \frac{B}{1 - 2x} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; A - 2Ax + B - Bx \;=\; 1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B \;=\; 1\,, \\ 2A + B \;=\; 0\,, \end{cases} \quad \Rightarrow A \;=\; -1\,,\; B \;=\; 2\,.$$

$$F(x) \;=\; \sum_{n \geqslant 0} u_n x^n \;=\; \frac{-1}{1 - x} + \frac{2}{1 - 2x} \;=$$

$$= \sum_{n \geqslant 0} (-1)x^n + \sum_{n \geqslant 0} 2(2^n)x^n \;=$$

$$= \sum_{n \geqslant 0} (2^{n+1} - 1)x^n \quad \Rightarrow \quad \triangle_n \;=\; 2^{n+1} - 1\,.$$

Задача Comb-9...

Решение *методом л.р.с.*

Соотношение — $\triangle_{n+2} - 3\triangle_{n+1} + 2\triangle_n = 0.$

Характеристическое уравнение:

$$P(x) = x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, \; x_2 = 2.$$

Общее решение: $u_n = \beta_1 + \beta_2 \cdot 2^n.$

Используя начальные условия —

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 + \beta_2 = 1 \\ \beta_1 + 2\beta_2 = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta_2 = 2 \\ \beta_1 = -1 \end{array} \right. .$$

Решение: $u_n = 2^{n+1} - 1.$

Задача Comb-10

Сколькими способами можно разменять монету 20 коп. монетами по 1, 2, 3 и 5 коп.?

Решение. Строим ПФ по общей комбинаторной схеме.

$$F(x_1, \dots x_5) = (1 + x_1 + x_1^2 + \dots) \cdot (1 + x_2 + x_2^2 + \dots) \cdot$$
$$(1 + x_3 + x_3^2 + \dots) \cdot (1 + x_4 + x_4^2 + \dots) =$$
$$\Big(\text{замена: } x_1 \mapsto x\,, \quad x_2 \mapsto x^2\,, \quad x_3 \mapsto x^3\,, \quad x_4 \mapsto x^5\Big)$$
$$= (1 + x + x^2 + \dots) \cdot (1 + x^2 + x^4 + \dots) \cdot$$
$$(1 + x^3 + x^6 + \dots) \cdot (1 + x^5 + x^{10} + \dots) =$$
$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} = \sum_{k \geqslant 0} u_k x^k\,;$$

u_k — число разменов k копеек.

Задача Comb-10...

Обозначим

$$A(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} = \sum_{k\geqslant 0} a_k x^k\,, \quad a_0 = a_1 = 1;\ a_2 = 2\,;$$

$$B(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} = \sum_{k\geqslant 0} b_k x^k\,, \quad b_0 = b_1 = 1\,;$$

$$C(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots\,.$$

Непосредственно вычисляется

$$u_0 = u_1 = 1;\ u_2 = 2,\ u_3 = 3;\ u_4 = 4,\ u_5 = 6.$$

Имеем

$$A(x) = \sum_{k\geqslant 0} a_k x^k = (1-x^5) = \sum_{k\geqslant 0} u_k x^k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_k - u_{k-5} = a_k\,, \quad k \geqslant 5.$$

Задача Comb-10...

Аналогично

$$\begin{cases} a_k - a_{k-3} = b_k\,, & k \geqslant 3\,, \\ b_k - b_{k-2} = 1\,, & k \geqslant 2\,. \end{cases}$$

Или

$$\begin{cases} u_k = a_k + u_{k-5}\,, & k \geqslant 5\,, \\ a_k = b_k + a_{k-3}\,, & k \geqslant 3\,, \\ b_k = 1 + b_{k-2}\,, & k \geqslant 2\,. \end{cases}$$

Из последнего соотношения

$$B(x) \risingdotseq (1,\, 1,\, 2,\, 2,\, 3,\, 3,\, \ldots)\,, \quad \text{или} \quad b_k = \left[\frac{k}{2}\right] + 1\,.$$

Задача Comb-10...

Раскрываем

$$u_{20} = u_{15} + a_{20} = a_{20} + a_{15} + u_{10} = a_{20} + a_{15} + a_{10} + u_5 \,.$$

Раскрываем коэффициенты a:

$$\begin{aligned} a_{20} &= b_{20} + b_{17} + b_{14} + b_{11} + b_8 + b_5 + a_2 = 44, \\ a_{15} &= b_{15} + b_{12} + b_9 + b_6 + b_3 + a_0 = 27, \\ a_{10} &= b_{10} + b_7 + b_4 + a_1 = 14. \end{aligned}$$

Окончательно, $u_{20} = 44 + 27 + 14 + 6 = 91.$

Задача Comb-11

Найти асимптотику (скорость роста) чисел Каталана t_k при $k \to \infty$.

Решение. Имеем

$$t_k = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k} = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{(2k)!}{k!k!},$$

и используя формулу Стирлинга $n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot (n/e)^n$ —

$$t_k \approx \frac{4^k}{k\sqrt{\pi k}}.$$

Разделы

Литература I

- *Андерсон Дж.* Дискретная математика и комбинаторика. — М.: Издательский дом "Вильямс", 2004.
- *Олдендерфер М. С., Блэшфилд Р. К.* Кластерный анализ / Факторный, дискриминантный и кластерный анализ. — М.: Финансы и статистика, 1989.
- *Баранов В.И., Стечкин Б.С.* Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014.
- *Дюран Б., Оддел П.* Кластерный анализ. — М.: Статистика, 1977.
- *Грекхэм Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. — М.: Мир, 1998.

Литература II

- *Ландо С. К.* Лекции о производящих функциях. — М.: МЦНМО, 2007.
- *Сачков В.Н.* Вероятностные методы в комбинаторном анализе. — М.: Наука, 1978.
- *Сачков В.Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики — М.: Наука, 1982.
- *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика. — М.: Мир, Volume I — 1990, Volume II — 2005.
- *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2001.