On some hard discrete optimization problems associated with clustering, covering and rooting

Edward GIMADI

Sobolev Institute of Mathematics, and
Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

MMRO-2015, Svetlogorsk Russia
Sept 20 – 25, 2015

SUMMARY

Алгоритмы с оценками для решения некоторых труднорешаемых задач дискретной оптимизации, связанных с проблемами кластеризации, покрытия графов и маршрутизации.

Особое внимание уделено результатам, достигнутым в самое последнее время в ходе исследований, проводимых в Новосиб. гос. ун-те и ИМ СО РАН.

SUMMARY

В последнее время пристальное внимание стало уделяться рассмотрению проблем поиска в графе несколькох реберно- и/или вершинно-несмежных структур экстремального суммарного веса.

SUMMARY

В последнее время пристальное внимание стало уделяться рассмотрению проблем поиска в графе нескольких реберно- и/или вершинно-несмежных структур экстремального суммарного веса.

Некот. из этих расширенных задач сохр-т свой полин. статус. Например, задача отыскания в полном взвеш. неориент. графе неск. реберно-несмежных остовных деревьев миним. сум. веса (Roskind, Tarjan - 1985).

В последнее время пристальное внимание стало уделяться рассмотрению проблем поиска в графе нескольких реберно- и/или вершинно-несмежных структур экстремального суммарного веса.

Некот. из этих расширенных задач сохр-т свой полин. статус. Например, задача отыскания в полном взвеш. неориент. графе неск. реберно-несмежных остовных деревьев миним. сум. веса (Roskind, Tarjan - 1985).

Однако, больш-во таких расширений труднорешаемы.

Topics

1. Кластеризация на сетевой модели.
2. m клик с максим. суммарным весом.
3. m вект-в с макс. суммой в евкл. пр-ве
4. Покрытие графа m циклами:
- Euclidean MAX m-CYCLES COVER.
- Random MIN m-CYCLES COVER.
5. m неперес. гам-х циклов (m-PSP).
6. One and Two disjoint BBMST.

Def. прибл. алгоритма с оценками на детермин. входах

Оценкой $\varepsilon_A(n)$ относительной погрешности алгоритма A

решения задачи на детермин. входах размера n называют такую величину $\varepsilon_A(n)$, что на любом входе I верно

$$\frac{|f_A(I) - OPT(I)|}{OPT(I)} \le \varepsilon_A(n),$$

где $OPT(I)$ и $f_A(I)$ — оптимальное и найденное в результате работы алгоритма A значения целевой функции задачи на входе I.

Алгоритм на сл. входах имеет оценки $\varepsilon_A(n)$ и $\delta_A(n)$

в классе задач размера n, если на мн-ве входов $\{I\}$ выполняется вероятн. нер-во:

$$\mathbb{P}\left\{\frac{|f_A(I) - OPT(I)|}{OPT(I)} > \varepsilon_A(n)\right\} \leq \delta_A(n),$$

где $\delta_A(n)$ — верхняя оценка *вероят-ти несрабатывания* алгоритма A.

(Другими словами, $\delta_A(n)$ – доля случаев, когда алгоритм A не гарантирует получение решения с анонсированной погрешностью).

Определение асимптотически точного алгоритма

Алгоритм A на классе рассм-ых задач с детерм. входами называем **асимптотически точным**, если

$$\varepsilon_A(n) \longrightarrow 0$$

при $n \longrightarrow \infty$.

Алгоритм A на классе задач со случ. входами называем **асимптотически точным**, если сущ-ют оценки

$$\varepsilon_A(n) \longrightarrow 0 \text{ и } \delta_A(n) \longrightarrow 0$$

при $n \longrightarrow \infty$.

Clustering

Clustering is the classification of patterns (observations, data items, or feature vectors) into groups (clusters). The clustering problem has been addressed in many contexts and by researchers in many disciplines. However, clustering is a difficult problem combinatorially.

We consider a special case of Euclidean clustering problem, namely the problem of clustering on the real axis.
Given the set $X = \{x_i\}$ of n elements (points) on the real axis and a natural number $m < n$ of clusters.
Each point $x \in X$ has a weight $w(x)$ and a cost $f(x)$ for assigning x as the center of some cluster.
Each cluster C_k has the capacity W_k, $k = 1, \ldots, m$.
And the distance function $\rho(x, y)$ between points x, y on real axis is given.

Clustering

The problem is to find a partition of the set $X = \{x_i\}$ on disjoint subsets (clusters) $C_1, C_2, \dots, C_m$ such that

$$\sum_{k=1}^{m} \min_{y \in C_k} \Big(f(y) + \sum_{x \in C_k} w(x)\rho(x,y) \Big) \to \min_{\{C_k\}}, \qquad (1)$$

subject to constraints

$$\sum_{x \in C_k} w(x) \leq W_k, \;\; k = 1, \dots, m. \qquad (2)$$

Our results:
1) We prove that the problem (1)-(2) is NP-hard, even for the linear or quadratic distance function.
2) We present an example of nonoptimality of the solution obtained for the problem with connected clusters $C_1, C_2, \ldots, C_m$.
3) To solve a special case of the problem with connected clusters an exact algorithm is constructed with running time $O(mn2^m)$ which depends linearly on n, if m is fixed.

m-Weighted Clique Problem (m-WCP).

Problem Formulation

Problem Formulation

Дано: полный неор. взвеш-й граф $G = (V, E, a, c)$, где $a : V \to \mathbb{R}$, $c : E \to \mathbb{R}$, и натур. числа $L_1, \ldots, L_m$, s.t.

$$\sum_{k=1}^{m} L_k \leqslant n.$$

m-Weighted Clique Problem (m-WCP).

Problem Formulation

Дано: полный неор. взвеш-й граф $G = (V, E, a, c)$, где $a : V \to \mathbb{R}$, $c : E \to \mathbb{R}$, и натур. числа $L_1, \ldots, L_m$, s.t.

$$\sum_{k=1}^{m} L_k \leqslant n.$$

Найти: в графе G семейство $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_m\}$ вершинно-непересекающихся клик порядков $L_1, \ldots, L_m$ с миним. сумм. весом вершин и ребер графа, входящих в эти клики.

Результататы

E. Kh. Gimadi, A. V. Kel'manov, A. V. Pyatkin, M. Yu. Khachai. Efficient algorithms with performance guarantees for some problems of finding several cliques in a complete undirected weighted graph // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, July 2015, Volume 289, Issue 1 Supplement, pp 88-101. (WofSc).

Результататы

- Показано, что в общем случае задача NP-трудна в сильном смысле и слабо аппроксимируема.

E. Kh. Gimadi, A. V. Kel'manov, A. V. Pyatkin, M. Yu. Khachai. Efficient algorithms with performance guarantees for some problems of finding several cliques in a complete undirected weighted graph // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, July 2015, Volume 289, Issue 1 Supplement, pp 88-101. (WofSc).

Результататы

- Показано, что в общем случае задача NP-трудна в сильном смысле и слабо аппроксимируема.
- Предложен приближённый алгоритм решения задачи, полиномиальный при фиксированном числе искомых клик.

E. Kh. Gimadi, A. V. Kel'manov, A. V. Pyatkin, M. Yu. Khachai. Efficient algorithms with performance guarantees for some problems of finding several cliques in a complete undirected weighted graph // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, July 2015, Volume 289, Issue 1 Supplement, pp 88-101. (WofSc).

- Показано, что в общем случае задача NP-трудна в сильном смысле и слабо аппроксимируема.
- Предложен приближённый алгоритм решения задачи, полиномиальный при фиксированном числе искомых клик.
- Доказана оценка точности 2 алгоритма на подклассах Metric m-WCP и Quadratic Euclidean m-WCP.

E. Kh. Gimadi, A. V. Kel'manov, A. V. Pyatkin, M. Yu. Khachai. Efficient algorithms with performance guarantees for some problems of finding several cliques in a complete undirected weighted graph // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, July 2015, Volume 289, Issue 1 Supplement, pp 88-101. (WofSc).

Результататы

- Показано, что в общем случае задача NP-трудна в сильном смысле и слабо аппроксимируема.
- Предложен приближённый алгоритм решения задачи, полиномиальный при фиксированном числе искомых клик.
- Доказана оценка точности 2 алгоритма на подклассах Metric m-WCP и Quadratic Euclidean m-WCP.
- Показана достижимость полученной оценки точности на выделенных подклассах задачи.

E. Kh. Gimadi, A. V. Kel'manov, A. V. Pyatkin, M. Yu. Khachai. Efficient algorithms with performance guarantees for some problems of finding several cliques in a complete undirected weighted graph // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, July 2015, Volume 289, Issue 1 Supplement, pp 88-101. (WofSc).

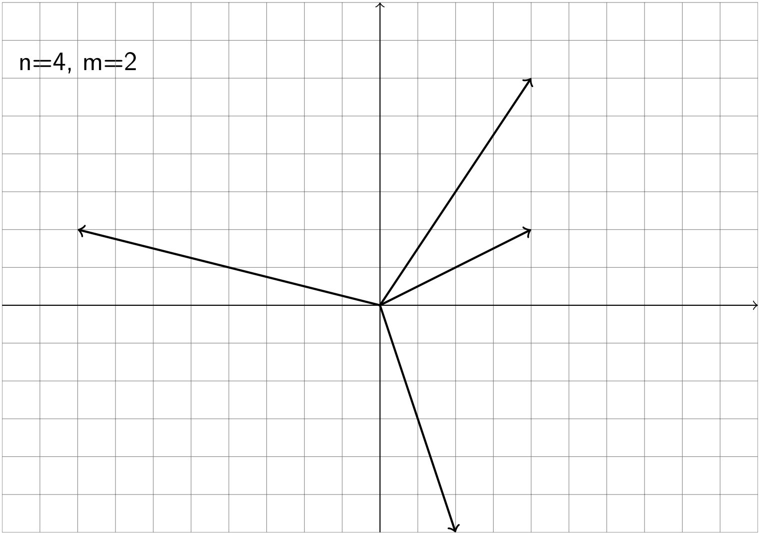
m векторов с максимальной нормой суммы в евклидовом пространстве

ЗАДАЧА ВЫБОРА ПОДМНОЖЕСТВА ВЕКТОРОВ

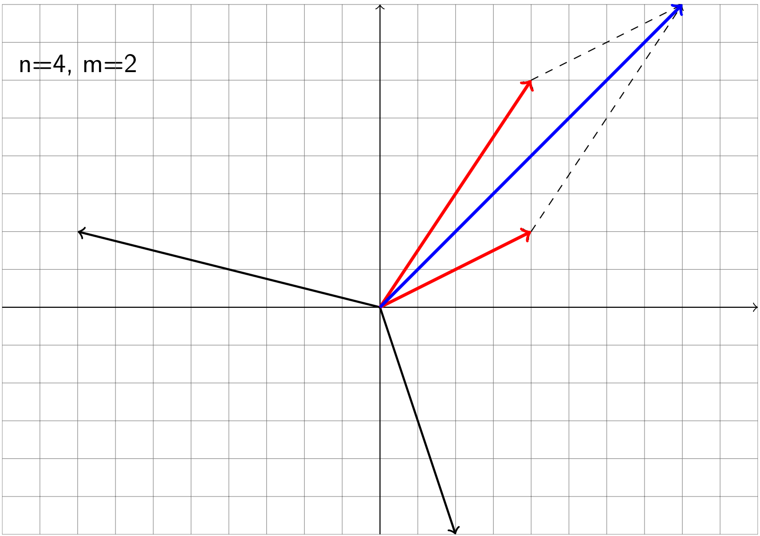
Задача *m*-ПВ («ПОДМНОЖЕСТВО ВЕКТОРОВ»)

- Дано: $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$, $\vec{v}_i \in R^k$; $m < n$.
- Найти подсемейство векторов из V мощности m, максимизирующее эвклидову норму суммы.

ЗАДАЧА m-ПВ



ЗАДАЧА m-ПВ



Рандомизированный алгоритм решения m-ПВ трудоемкости $O(ndL)$ с оценками

$$\varepsilon_{A'} = O(\phi_0^2), \quad \delta_{A'} = \exp\left(-\frac{(\sin\phi_0)^{d-1}}{\pi\sqrt{k}}L\right)$$

Алгоритм $A(L, \phi_0)$

- Независимо и равномерно выбирается L точек на сфере
- Для каждого из соответствующих направлений находится m векторов, дающих максимальные проекции на это направление
- Выбирается лучшее из полученных решений
- Алгоритм с параметрами (L, ϕ_0) считается сработавшим, если угол между оптимальным вектором-суммой и ближайшим из рассмотренных направлений оказался меньше ϕ_0.

Гимади Э.Х., Рыков И.А. Рандомизированный алгоритм отыскания подмножества векторов с максимальной евклидовой нормой их суммы // Дискретный анализ и исследование операций. 2015, Том 22, № 3, С. 5–17. (SCOPUS)

Теорема

Алгоритм A' приближенного решения задачи m-ПВ имеет оценки относительной погрешности

$$\varepsilon_{A'} = O(\phi_0^2),$$

вероятности несрабатывания

$$\delta_{A'} = \exp\left(-\frac{(\sin \phi_0)^{d-1}}{\pi\sqrt{k}} L\right)$$

и временной сложности

$$T_{A'} = O(ndL).$$

Условия асимптотической точности

Теорема

Задача m-ПВ решается асимптотически точным алгоритмом A' с параметрами

$$\phi_0 = \arcsin\left(\frac{1}{\ln n}\right) \text{ и } L = \pi\sqrt{d}(\ln n)^d,$$

за время

$$T_{A'} = O(nd^{3/2}\ln^d n)$$

с оценками относительной погрешности и вероятности несрабатывания

$$\varepsilon_{A'} = O\left(\frac{1}{\ln^2 n}\right);\ \delta_{A'} = \frac{1}{n}.$$

Задача покрытия графа m циклами (m-CYCLES COVER)

Дано:

$G(V, E, w)$ — полный неор. n-вершинный граф,
$w : E \to R$ — весовая функция на мн-ве ребер,
$m \le n/3$ — натуральное число.

Найти:

Остовное сем-во из m верш.-несмежных циклов

$$\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_m\},$$

экстрем. суммарного веса ребер, покрывающее все вершины графа.

Вес подграфа $G' \subset G$ обозначим $W(G') = \sum_{e \in E(G')} w_e$.

Задача *m*-CYCLES COVER на минимум (на максимум)

записывается следующим образом:

$$W(\mathcal{C}) = \sum_{k=1}^{m} W(C_k) \to \min\ (\max),$$

при выполнении условий

$$\bigcup_{k=1}^{m} C_k = V,$$

$$V(C_{k'}) \bigcap V(C_k) = \emptyset \ \text{ для всяких } \ 1 \le k' < k \le m.$$

О покрытиях циклами

Известные факты

- Остовное покрытие циклами— 2-фактор.
- При $m = 1$ имеем задачу коммивояжера (TSP).
- 2-фактор минимального веса, или задача Cycle Cover Problem (CCP), где число циклов m – переменная величина, решается точно за время $O(n^3)$ (Gabow).
- Задача CCP с числом ребер в каждом цикле, не менее k (k-CCP), NP-трудна при $k > 3$ (B. Manthey).

В настоящем докладе

1. Представлен общий так называемый TSP-подход к построению приближенного алгоритма решения задачи с использованием решения задачи коммивояжера (TSP).

2. Проведен анализ модификаций алгоритма для задач Random MIN m-CYCLES COVER на случайных входах $UNI(0,1)$ и Euclidean MAX m-CYCLES COVER на детерминированных входах (весах ребер) в многомерном евклидовом пр-ве.

3. Показано, что оба алгоритма имеют временную сложность $\mathcal{O}(n^3)$ и являются асимптотически точными при числе покрывающих циклов $m \leq \frac{n^{1/3}}{\ln n}$ и $m = o(n)$, соответственно.

TSP-подход к построению приближенного алгоритма $\widetilde{A}$

TSP-подход к приближенному решению задачи m-CYCLES COVER заключается в перестроении одноциклической остовной конфигурации решения задачи TSP (если таковую конфигурацию удалось найти) в остовный подграф задачи m-CYCLES COVER.

Алгоритм $\widetilde{A}$

Приближенный алгоритм $\widetilde{A}$ решения задачи m-CYCLES COVER представим в виде следующих трех этапов:

1. Построение гамильтонова цикла $\widetilde{H} = (1, \dots, n)$.
2. Решение специальной вспомогательной задачи разбиения $\widetilde{H}$ на семейство $\mathcal{S}$ из m несмежных сегментов (цепей).
3. Принятие в качестве решения основной задачи семейства циклов, полученных замыканием m цепей хордами гамильтонова цикла $\widetilde{H}$.

Вспомогательная задача

Назовем *допустимым* такое разбиение $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ цикла $\widetilde{H}$ на семейство $\mathcal{S}$, состоящее из несмежных сегментов (цепей) $S_k = (u_{k-1}, u_k]$, $k = 1, \ldots, m$, что

$$1 \le u_1 < u_2 < \ldots < u_m \le n, \qquad (1)$$

и в каждом S_k не менее дух ребер; $u_0 = u_m$. Множество всех разбиений обозначим через $\hat{U}$.

Формулировка вспомогательной задачи

$$\sum_{k=1}^{m} \Big(w(u_{k-1}+1, u_k) - w(u_k, u_k+1) \Big) \to \min_{u \in \hat{U}} (\max_{u \in \hat{U}}) \qquad (2)$$

по всем допустимым разбиениям (1)

Вспомогательная задача состоит в выборе наилучшего варианта удаления m разделяющих ребер гамильтонова цикла $\widetilde{H}$, поскольку по любому допустимому разбиению $u = (u_1, \ldots u_m)$ цикла $\widetilde{H}$ можно получить допустимое решение задачи m-CYCLES COVER, замкнув получившиеся m цепей в циклы

$$C_k = (u_{k-1} + 1, \ldots, u_k), \;\; k = 1, \ldots, m. \tag{3}$$

Об алгоритме решения вспомогательной задачи (2)

Точное решение вспомогательной задачи (2)

может быть найдено стандартным методом ДП за время $\mathcal{O}(mn^3)$ при требуемой памяти $\mathcal{O}(mn)$.

Однако для рассматриваемых ниже задач

оказалось достаточным использование более быстрых, хотя и приближенных алгоритмов решения этой задачи.

Приближенный алгоритм AR на случайных входах $UNI(0,1)$

Класс входов $UNI(0,1)$

Веса ребер полного n-верш. графа определены на классе входов, состоящих из нез. сл. вел. с один. функцией равном. распределения на отрезке $[0,1]$.

Алгоритм AR

AR – модификация общего алгоритма $\widetilde{A}$ на min

применительно к задаче Random MIN m-CYCLES COVER на сл. входах $UNI(0,1)$.

На этапе 1 находим гамильтонов цикл $\widetilde{H}_1$ прибл. асимпт. точным алгоритмом решения Random MIN SYMMETRIC TSP из работы [A.Frieze,2004].

На этапе 2 вспомог. задача (2) решается посредством спец. процедуры (алгоритм $A_{p,m}$) на сл. графе G'_p.

Алгоритм [A.Frieze,2004]

Рис.: Alan Frieze

Алгоритм [A.Frieze,2004]

В качестве отправной конструкции

Frieze использует 2-фактор минимального веса. Напомним, что 2-фактор это остовный подграф графа K_n, в котором каждая вершина имеет степень 2. Другими словами, это есть семейство вершинно несмежных циклов, покрывающих все вершины графа. Известно, что 2-фактор минимального веса строится за время $\mathcal{O}(n^3)$ [Gabow].

Пусть z_{TSP}, z_{2FAC}, z_{MST} означают минимумы сумм. весов

гамильт. цикла, 2-фактора и остовного дерева, соотв-но, а аббревиатура whp ("с высокой вероятностью") означает, что сл. событие B_n в посл-ти $\{B_n\}$ происходит с вер-ю, стремящейся к 1 при $n \to \infty$.

Главный результат работы [Frieze, 2004]

Теорема

$$z_{TSP} - z_{2FAC} = o(1) \quad \textbf{whp}. \tag{4}$$

Более того, за время $O(n^3)$ whp строится тур (гамильтонов цикл $\widetilde{H}_1$) длиной

$$W(\widetilde{H}_1) = z_{2FAC} + o(1). \tag{5}$$

Frieze (1985) доказал, что **whp** $z_{MST} \geq 1.202$,

откуда с учетом $z_{TSP} \geq z_{2FAC}$, $z_{TSP} \geq z_{MST}$ **и ф-лы (4)**

$$\frac{W(\widetilde{H}_1)}{z_{TSP}} = \frac{z_{2FAC} + o(1)}{z_{TSP}} \leq 1 + \frac{o(1)}{z_{TSP}}$$

$$\leq 1 + \frac{o(1)}{z_{MST}} \leq 1 + \frac{o(1)}{1.202} = 1 + o(1) \ \textbf{whp}, \qquad (6)$$

т.е. алгоритм [Frieze-2004] за время $O(n^3)$ **строит асимптотически точное решение задачи Random MIN TSP.**

Приближенный алгоритм решения вспомогательной задачи (2) на случайном графе

Процедура $A_{p,m}$

Пусть p **— параметр,** $0 \le p \le 1$**. Обозначим** $G'_p = (V, E', w')$ **подграф графа** $G = (V, E, w)$**, где** $E' = \{e \in E \setminus E(\widetilde{H}_1) \mid w'(e) = w(e) \le p\}$**. Ясно, что в случайном графе** G'_p **на входах** $UNI(0, 1)$ **произвольное ребро** e **принадлежит множеству** E' **с вероятностью** p**. Вспомогательную задачу (2) решаем (вообще говоря, приближенно) посредством процедуры** $A_{p,m}$ **с параметрами**

$$p = \frac{1}{n^{1/3}}; \quad m \le \frac{n^{1/3}}{\ln n}. \tag{7}$$

Приближенный алгоритм решения вспомогательной задачи (2) на случайном графе

Процедура $A_{p,m}$

Обозначим $q = \lfloor n/m \rfloor$, $\nu = n - qm$, $\{S_1, \dots, S_m\}$ **— семейство несмежных сегментов (цепей)** $(u_{k-1}, u_k]$ **в гамильтоновом цикле** $\widetilde{H}_1$, **где**

$$u_k = \begin{cases} kq, & \text{если } 1 \le k < m - \nu; \\ (k+1)q, & \text{если } m - \nu \le k \le m \end{cases},$$

$k = 1, \dots, m$.

Приближенный алгоритм решения вспомогательной задачи (2) на случайном графе

Внутреннее ребро $\{i, i+1\}$ в сегменте S_k назовем ***хорошим***, если случайный граф G'_p содержит пару ребер $\{u_{k-1}+1, i+1\}$ и $\{i, u_k\}$.
Процедура $A_{p,m}$ состоит в выборе m хороших ребер (по одному в каждом сегменте). Если такие внутренние ребра не нашлись, то имеет место несрабатывание алгоритма AR. В противном случае использование соответствующих ребер-хорд цикла $\widetilde{H}_1$ дает покрытие графа m циклами

Лемма о хороших ребрах

В каждом из m сегментов S_k, $k = 1, \dots, m$, whp имеется хорошее ребро.

Лемма о малом суммарном весе замыкающих хорд

Суммарный вес добавленных (замыкающих) ребер имеет величину $o(1)$.

Основной результат о качестве работы алгоритма AR

Алгоритм AR с использованием вспомогательной процедуры $A_{p,m}$ с параметрами (7) решает задачу Random MIN m-CYCLES COVER асимптотически точно за время $O(n^3)$.

Асимпт. точный алгоритм A_H решения Euclidean MAX TSP в $\mathcal{R}^d$ за время $\mathcal{O}(n^3)$ [Сер-1987; Гим-2001]

Построение Гамильтонова цикла $\widetilde{H}$ алгоритмом $A_{\widetilde{H}}$

отталкивается от макс. взвеш. паросочетания $\mathcal{M}^*$ (мощности $\mu = [n/2]$) и основ-ся на следующих двух содержательных фактах, верных в любом $\mathcal{R}^d$:

- среди дост. большого кол-ва отрезков найдутся два «почти парал-х»;
- два почти парал-х отрезка можно заменить на пару других отрезков с тем же набором концевых точек («крест накрест»), почти не потеряв в сумм. длине.

Лемма[Ser]

Пусть в евклидовом пространстве R^d с фиксированной размерностью d задано произвольное множество из t прямолинейных отрезков. Тогда наименьший угол между двумя отрезками из этого множества ограничен сверху константой $\alpha(d,t)$ такой, что $\alpha(d,t) \to 0$ при $t \to \infty$. При этом

$$\sin^2 \frac{\alpha(d,t)}{2} \leq \frac{\gamma_d}{t^{2/(d-1)}}, \tag{8}$$

где константа γ_d не зависит от числа отрезков.

Лемма[Gim]

Пусть даны два отрезка (ребра) паросочетания $\mathcal{M}^*$ $I_j = (x_j, y_j)$, $I_i = (x_i, y_i)$ в $\mathbf{R^d}$ и $\alpha \leq \pi/2$ – угол между ними. Тогда справедливо неравенство

$$W(I_j) + W(I_i)$$

$$\geq \max\Big\{W(x_j, x_i) + W(y_j, y_i), W(x_j, y_i) + W(y_j, x_i)\Big\}$$

$$\geq \Big(W(I_j) + W(I_i)\Big)\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Пусть определено спец. число $t = o(n)$.
t ребер паросоч. $\mathcal{M}^*$ с меньшими весами объявляем легкими, остальные – тяжелыми.
Назовем α-сцепкой посл-ть тяж-х ребер с углом между соседними ребрами $\leq \alpha$.
Опираясь на лемму Сер, тяжелые ребра объединяются в t сцепок, таких что внутри сцепки каждые два соседних ребра «почти параллельны».

Лемма о представлении $\mathcal{M}^*$ в виде посл-ти из t α-сцепок

Мн-во $\{l_1, \ldots, l_\mu\}$ ребер паросочетания $\mathcal{M}^*$ можно за время $O(\mu t^2)$ представить в виде совок-ти t α-сцепок, перемежаемых легкими ребрами. (Угол $\alpha = \alpha(d, t)$ определен формулой (8)).

Алгоритм Euclidean TSP

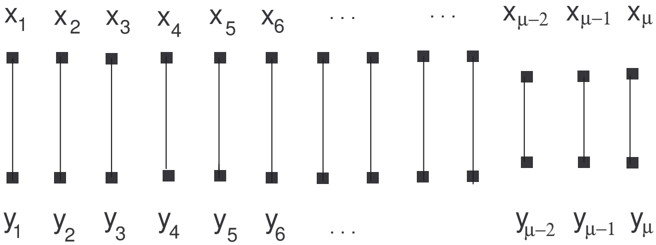


Рис.:

Алгоритм Euclidean TSP

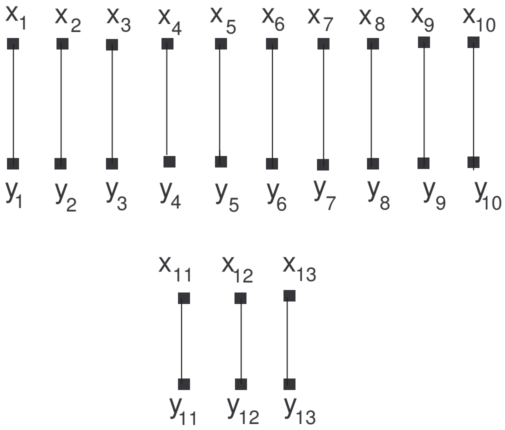


Рис.:

Алгоритм Euclidean TSP

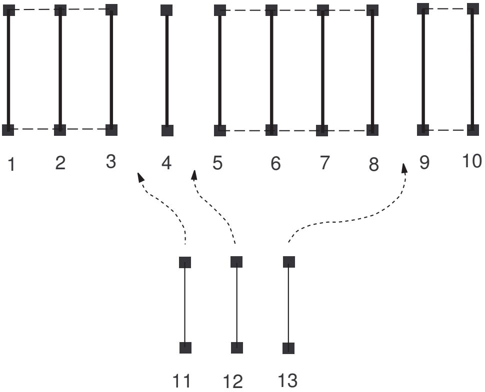


Рис.:

Алгоритм Euclidean TSP

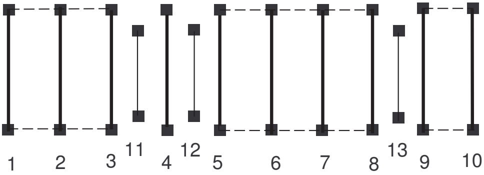


Рис.:

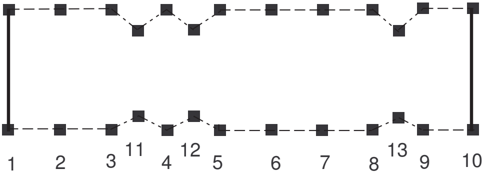


Рис.:

Euclidean MAX m-TSP

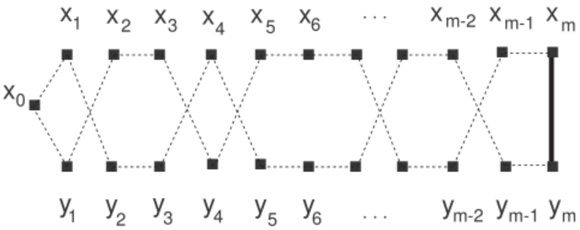


Рис.: Итоговый гамильтонов цикл

Для каждой пары соседних ребер выбираем способ замены на пару ребер с теми же концами, с лучшим суммарным весом. Включаем полученную пару ребер в итоговый цикл $\widetilde{H}$.

В задаче Euclidean MAX m-CYCLES COVER требуется найти остовный подграф, состоящий ровно из m циклов максимального суммарного веса. При этом можно допустить, что размеры L_i циклов (по числу входящих в них вершин) могут быть как заданными, так и переменными.

п. 1. В цикле $\widetilde{H}_2 = (1, 2, \ldots, n)$ из решения Euclidean MAX TSP выбрать произвольные u_k с разностью $L_k = u_k - u_{k-1} \geq 3$. Если заданы некоторые из длин циклов L_k, выбрать $u_k = u_{k-1} + L_k$.

п. 2. Выполнить «процедуру вращения»: для каждого j от 0 до $n-1$ удалить из $\widetilde{H}_2$ ребра $\{u_1 + j, u_1 + 1 + j\}, \{u_2 + j, u_2 + 1 + j\}, \ldots, \{u_m + j, u_m + 1 + j\}$ и замкнуть полученные цепи в циклы, получив m циклов, имеющих длины $L_1, \ldots, L_m$, соответственно. Полученное допустимое решение обозначается $\widetilde{C}_j$.

На рисунке представлены 2 из n различных решений $\widetilde{C}_j$, полученных циклическим сдвигом удаляемых ребер.

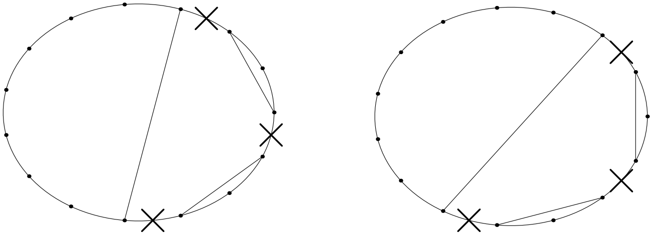


Рис.:

Анализ качества алгоритма

Поскольку в качестве покрытия $\widetilde{C}$ выбирается лучшее из n построенных решений, имеем

$$nW(\widetilde{C}_1) \geq \sum_{j=0}^{n-1} W(\widetilde{C}_j).$$

Т.к. решения $\widetilde{C}_j$ получены циклическим сдвигом оставляемых ребер цикла, соединенных хордами, имеем, что каждое ребро цикла выбрасывается суммарно m раз, и $n-m$ раз входит в решение. Таким образом, игнорируя вес хорд, мы получаем

$$\sum_{j=0}^{n-1} W(\widetilde{C}_j) \geq (n-m)W(\widetilde{H}),$$

а значит

Анализ качества алгоритма

Время работы алгоритма $\widetilde{A}$ предопределено временем $\mathcal{O}(n^3)$ решения задачи отыскания макс. взвеш. паросоч. В результате алгоритм $\widetilde{A}$ находит цикловое покрытие $\widetilde{C}$, для которого с учетом оценок (5) и (9) верно

$$W(\widetilde{C}) \geq 2W(\mathcal{M}^*)\left(1-\frac{m}{n}\right)\left(1-\frac{t-2}{m}\right)\left(1-\frac{\gamma_d}{t^{2/(d-1)}}\right). \quad (10)$$

С др. стороны, для оптим. покрытия C^* графа m циклами верна оценка

$$2W(\mathcal{M}^*) \geq \left(1-\frac{m}{n}\right)W(C^*), \quad (11)$$

которая ранее (при $m=1$) использовалась для оценки точности решения задачи Euclidean MAX TSP.

Идея док-ва оценки (11) основана на спец. m-этапной процедуре преобразования оптим. циклового покрытия C^* в некот. гамильтонов цикл, вес которого не превышает удвоенного веса макс. паросоч. $\mathcal{M}^*$. Процедура начинается с мн-а ребер $C' = C^*$.

Итоговый результат анализа алгоритма решения задачи Euclidean MAX m-CYCLES COVER

Из неравенств (10) и (11) следует оценка точности

$$\frac{W(\widetilde{C})}{W(C^*)} \geq 1 - 2\,\frac{m+t-1}{n} - \frac{\gamma_d}{t^{2/(d-1)}}.$$

Выбрав значение параметра $t = \lceil n^{(d-1)/(d+1)} \rceil$, получим

$$\frac{W(\widetilde{C})}{W(C^*)} \geq 1 - \frac{2m}{n} - \frac{\beta_d}{n^{2/(d+1)}},$$

откуда следует условие асимпт. точности алгоритма:

Теорема. *При фиксированной размерности d евклидова пр-ва и $m = o(n)$ алгоритм $\widetilde{A}$ находит асимптотически точное решение задачи Euclidean MAX m-Cycles Cover за время $\mathcal{O}(n^3)$.*

Рис.: Jack Edmonds

Алгоритм AE для Euclidean MAX m-CYCLES COVER

Рис.: J. Edmonds and I. Rykov after the report on ECCO-2015

Спасибо за внимание!