Анализ формальных понятий в задачах классификации

С. И. Гуров
Факультет Вычислительной математики и кибернетики,
МГУ имени М.В. Ломоносова
Кафедра Математических методов прогнозирования
e-mail: sgur@cs.msu.ru

Просеминар кафедры ММП
5 марта 2012 г. / Москва

Содержание

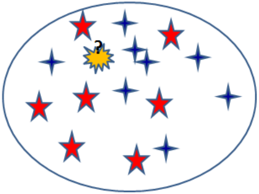
Раздел

Классификация по прецедентам: постановка задачи

1. Множество объектов $\mathcal{X}$ разделено на несколько подмножеств (*классов*).
2. Информация о таком разбиении содержится только в указании о принадлежности к данным классам элементов конечной *обучающей последовательности* (*выборки*) из $\mathcal{X}$, элементы которой называют *прецедентами*.
3. Объекты имеют описание на некотором формальном языке, указывающем степень обладания объектами конечным числом признаков из множества $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Классификация: пространство объектов

Распознавание образов



пространство объектов

- объекты класса A
- объекты класса B
- объект неизвестного класса

прецедент	класс
Объект 1	A
Объект 2	B
…	…
Объект L	A
Объект X	?

- Поиск полезных ископаемых
- Медицинская диагностика
- Прогнозирование
- …

Рис. 1. Информационная модель классификации

Классификация: признаковая матрица

Часто используется описание в виде *объектно-признаковой* $(0,1)$*-матрицы* $\mathcal{M}$, в которой объектам соответствуют строки, признакам — столбцы, а элементы матрицы кодируют наличие/отсутствие признаков у объектов.

Класс K_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
Объект 1	1	0	$\dots$	1
Объект 2	0	1	$\dots$	1
Объект 3	1	1	$\dots$	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
Объект m_i	0	1	$\dots$	0

— для каждого

из классов $K_1, \dots, K_s$, $s \geqslant 2$. Далее $s = 2$.

Классификация: язык описания и решающее правило

Задача обучения

По матрице $\mathcal{M}$ сформулировать *решающее правило*, которое по описанию нового объекта из $\mathcal{X}$ указывало бы имя класса, его содержащего. Решающее правило должно максимизировать некоторой функционал, определяющей *качество классификации*.
Таким функционалом в подавляющем числе случаев является минимум числа ошибок классификации, однако может также учитываться, например, и доля отказов.

Классификация: подходы к решению задачи

- метрические методы (*NN*, ...);
- разделяющие поверхности (*SVM*, ...);
- потенциальные функции;
- логические методы;
- коллективные решающие правила (*области компетенции, голосование, алгебраический подход*);
- структурные методы;
- ...
- реляционный подход (***АФП (FCA)***, ...)

Wille R., Ganter B. Formal concept analysis. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1999.

Классификация: подходы к решению задачи

- метрические методы (*NN*, ...);
- разделяющие поверхности (*SVM*, ...);
- потенциальные функции;
- логические методы;
- коллективные решающие правила (*области компетенции, голосование, алгебраический подход*);
- структурные методы;
- ...
- реляционный подход (***АФП (FCA)***, ...)

Wille R., Ganter B. Formal concept analysis. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1999.

Раздел

Отношения

Пусть A и B — непустые множества; их *декартовым произведением* (символически $A \times B$) называют совокупность всех пар вида (a, b), где $a \in A$, $b \in B$.

Определение

Бинарное отношение или (*соответствие между* A и B) есть подмножество $A \times B$.

Нотация: $(a, b) \in \rho \subseteq A \times B \Leftrightarrow a\rho b$.
Если $A = B$ то отношение $\rho \subseteq A \times A$ называется *однородным*.
Антисимметричность ρ: $(a\rho b)\&(b\rho a) \Rightarrow a = b$.

Отношения

Пусть A и B — непустые множества; их *декартовым произведением* (символически $A \times B$) называют совокупность всех пар вида (a, b), где $a \in A$, $b \in B$.

Определение

Бинарное отношение или (*соответствие между* A и B) есть подмножество $A \times B$.

Нотация: $(a, b) \in \rho \subseteq A \times B \Leftrightarrow a\rho b$.

Если $A = B$ то отношение $\rho \subseteq A \times A$ называется *однородным*.

Антисимметричность ρ: $(a\rho b)\&(b\rho a) \Rightarrow a = b$.

Отношения

Пусть A и B — непустые множества; их *декартовым произведением* (символически $A \times B$) называют совокупность всех пар вида (a, b), где $a \in A$, $b \in B$.

Определение

Бинарное отношение или (*соответствие между* A и B) есть подмножество $A \times B$.

Нотация: $(a, b) \in \rho \subseteq A \times B \Leftrightarrow a\rho b$.
Если $A = B$ то отношение $\rho \subseteq A \times A$ называется *однородным*.

Антисимметричность ρ: $(a\rho b)\&(b\rho a) \Rightarrow a = b$.

Отношения

Пусть A и B — непустые множества; их *декартовым произведением* (символически $A \times B$) называют совокупность всех пар вида (a, b), где $a \in A$, $b \in B$.

Определение

Бинарное отношение или (*соответствие между* A и B) есть подмножество $A \times B$.

Нотация: $(a, b) \in \rho \subseteq A \times B \Leftrightarrow a\rho b$.
Если $A = B$ то отношение $\rho \subseteq A \times A$ называется *однородным*.
Антисимметричность ρ: $(a\rho b)\&(b\rho a) \Rightarrow a = b$.

Частично упорядоченное (ч.у.) множество — это...

пара $\mathbf{P} = \langle P, \leqslant \rangle$, *где* P *— непустое множество, а* $\leqslant$ *— рефлексивное, антисимметричное и транзитивное однородное отношение на нём.*

$a \leqslant b$ — «a *предшествует* b» или «b *содержит* a».

Примеры

- $\langle 2^P, \subseteq \rangle$ — упорядоченость подмножеств множества P *по включению*;
- $\mathbf{N_1} = \langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle$ и $\mathbf{N_2} = \langle \mathbb{N}, | \rangle$ — упорядоченность натуральных чисел естественным (*линейным*) порядком и по делимости. *6 непосредственно предшествует 7* в $\mathbf{N}_1$ и *12, 18, 30, . . .* в $\mathbf{N}_2$.

Частично упорядоченное (ч.у.) множество — это...

пара $\mathbf{P} = \langle P, \leqslant \rangle$, *где* P *— непустое множество, а* $\leqslant$ *— рефлексивное, антисимметричное и транзитивное однородное отношение на нём.*

$a \leqslant b$ — «a *предшествует* b» или «b *содержит* a».

Примеры

- $\langle 2^P, \subseteq \rangle$ — упорядоченость подмножеств множества P *по включению*;
- $\mathbf{N_1} = \langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle$ и $\mathbf{N_2} = \langle \mathbb{N}, | \rangle$ — упорядоченность натуральных чисел естественным (*линейным*) порядком и по делимости. *6 непосредственно предшествует 7* в $\mathbf{N}_1$ и *12, 18, 30, ...* в $\mathbf{N}_2$.

Частично упорядоченное (ч.у.) множество — это...

пара $\mathbf{P} = \langle P, \leqslant \rangle$, *где* P *— непустое множество, а* $\leqslant$ *— рефлексивное, антисимметричное и транзитивное однородное отношение на нём.*
$a \leqslant b$ — «a *предшествует* b» или «b *содержит* a».

Примеры

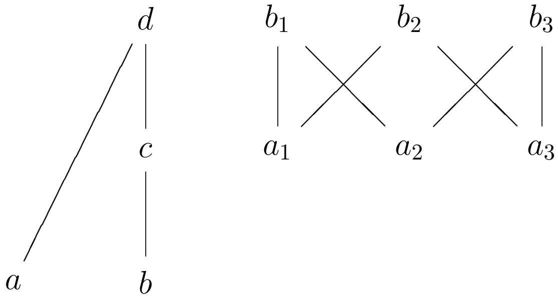
- $\langle 2^P, \subseteq \rangle$ — упорядоченость подмножеств множества P *по включению*;
- $\mathbf{N_1} = \langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle$ и $\mathbf{N_2} = \langle \mathbb{N}, | \rangle$ — упорядоченность натуральных чисел естественным (*линейным*) порядком и по делимости. *6 непосредственно предшествует 7* в $\mathbf{N}_1$ и *12, 18, 30, . . .* в $\mathbf{N}_2$.

Диаграммы Хассе – это...

... способ наглядного представления ч.у. множеств: если элемент a предшествует элементу b, то a рисуют ниже b и соединяют их отрезком, если это предшествование непосредственное.

Диаграммы Хассе – это...

... способ наглядного представления ч.у. множеств: если элемент a предшествует элементу b, то a рисуют ниже b и соединяют их отрезком, если это предшествование непосредственное.



Особые элементы ч.у. множеств: определения

Определение

Элемент $u \in P$ ч.у. множества $\langle P, \leqslant \rangle$ называют:

- *максимальным*, если $u \leqslant x \Rightarrow u = x$,
- *минимальным*, если $u \geqslant x \Rightarrow u = x$,
- *наибольшим*, если $x \leqslant u$,
- *наименьшим*, если $x \geqslant u$

для любых $x \in P$.

Наибольший элемент (если он существует) единственен и является также и максимальным. Аналогично для наименьших и минимальных элементах.

Особые элементы ч.у. множеств: определения

Определение

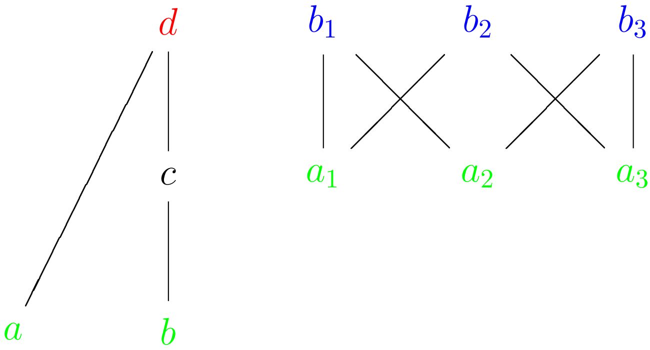
Элемент $u \in P$ ч.у. множества $\langle P, \leqslant \rangle$ называют:

- *максимальным*, если $u \leqslant x \Rightarrow u = x$,
- *минимальным*, если $u \geqslant x \Rightarrow u = x$,
- *наибольшим*, если $x \leqslant u$,
- *наименьшим*, если $x \geqslant u$

для любых $x \in P$.

Наибольший элемент (если он существует) единственен и является также и максимальным. Аналогично для наименьших и минимальных элементах.

Особые элементы ч.у. множеств: примеры



наибольший элемент максимальные элементы
минимальные элементы

Конусы ч.у. множества: определение

Определение

Пусть $\mathbf{P}$ — ч.у. множество и $A \subseteq P$. Множества $A^{\triangle}$ и $A^{\triangledown}$ определяемые условиями

$$A^{\triangle} = \{x \in P \mid \forall (a \in A)\ (a \leqslant x)\};$$
$$A^{\triangledown} = \{x \in P \mid \forall (a \in A)\ (x \leqslant a)\}$$

называются *верхним* и *нижним конусами множества* A, а их элементы — *верхними* и *нижними гранями множества* A соответственно.

Антимонотонность конусов подмножеств по включению: $A \subseteq B \Rightarrow B^{\triangledown} \subseteq A^{\triangledown}$ и $B^{\triangle} \subseteq A^{\triangle}$.

Конусы ч.у. множества: определение

Определение

Пусть $\mathbf{P}$ — ч.у. множество и $A \subseteq P$. Множества $A^{\triangle}$ и $A^{\triangledown}$ определяемые условиями

$$
\begin{aligned}
A^{\triangle} &= \{x \in P \mid \forall (a \in A)\ (a \leqslant x)\}; \\
A^{\triangledown} &= \{x \in P \mid \forall (a \in A)\ (x \leqslant a)\}
\end{aligned}
$$

называются *верхним* и *нижним конусами множества* A, а их элементы — *верхними* и *нижними гранями множества* A соответственно.

Антимонотонность конусов подмножеств по включению: $A \subseteq B \Rightarrow B^{\triangledown} \subseteq A^{\triangledown}$ и $B^{\triangle} \subseteq A^{\triangle}$.

Точные грани ч.у. множества:

Определение

Пусть $\mathbf{P}$ — ч.у. множество и $A \subseteq P$.

- Если в $A^{\triangle}$ существует наименьший элемент, то он называется *точной верхней гранью множества* A (символически $\sup A$).
- Если в $A^{\triangledown}$ существует наибольший элемент, то он называется *точной нижней гранью множества* A (символически $\inf A$).

Точные грани ч.у. множества:

Определение

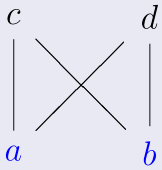
Пусть $\mathbf{P}$ — ч.у. множество и $A \subseteq P$.

- Если в $A^{\triangle}$ существует наименьший элемент, то он называется *точной верхней гранью множества* A (символически $\sup A$).
- Если в $A^{\triangledown}$ существует наибольший элемент, то он называется *точной нижней гранью множества* A (символически $\inf A$).

Точные грани ч.у. множества:

Примеры

1. Пусть $A = \{a, b\}$ в ч.у. множестве



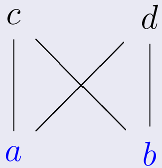
тогда $A^{\triangle} = \{c, d\}$ и $\sup A$ отсутствует.

2. Если S — совокупность подмножеств некоторого множества, то (по включению) $\sup S$ совпадает с объединением, а $\inf S$ — с пересечением всех подмножеств из S.

Точные грани ч.у. множества:

Примеры

1. Пусть $A = \{a, b\}$ в ч.у. множестве



   тогда $A^{\triangle} = \{c, d\}$ и $\sup A$ отсутствует.
2. Если S — совокупность подмножеств некоторого множества, то (по включению) $\sup S$ совпадает с объединением, а $\inf S$ — с пересечением всех подмножеств из S.

Решёточно упорядоченные (р.у.) множества:

Определение

Ч.у. множество, в котором для любых элементов a и b существуют $\inf\{a, b\}$ и $\sup\{a, b\}$ называют *решёточно упорядоченным*.

В конечном р.у. множестве $\mathbf{P}$ точные грани существуют для любого подмножества элементов.

$\left.\begin{array}{l} \sup \mathbf{P} \overset{\text{def}}{=} 1 \text{ — наибольший элемент (единица) } P \\ \inf \mathbf{P} \overset{\text{def}}{=} 0 \text{ — наименьший элемент (нуль) } P \end{array}\right\}$

— *универсальные грани*.

Элементы, непосредственно следующие за нулём — *атомы*.

Решёточно упорядоченные (р.у.) множества:

Определение

Ч.у. множество, в котором для любых элементов a и b существуют $\inf\{a, b\}$ и $\sup\{a, b\}$ называют *решёточно упорядоченным*.

В конечном р.у. множестве $\mathbf{P}$ точные грани существуют для любого подмножества элементов.

$$\left.\begin{array}{l} \sup \mathbf{P} \overset{\text{def}}{=} 1 \text{ — наибольший элемент (единица) } P \\ \inf \mathbf{P} \overset{\text{def}}{=} 0 \text{ — наименьший элемент (нуль) } P \end{array}\right\}$$

— *универсальные грани*.

Элементы, непосредственно следующие за нулём — *атомы*.

Р.у. множество = (алгебраическая) решётка

Определение

Решёткой $\mathbf{L}$ называется множество L с заданными на нём бинарными операциями: $\vee$ (*объединения*) и $\wedge$ (*пересечения*), подчиняющимися законам

$$
\begin{array}{ll}
Com\vee: & x \vee y = y \vee x\,; \\
Com\wedge: & x \wedge y = y \wedge x\,; \\
Ass\vee: & x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z\,; \\
Ass\wedge: & x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z\,; \\
Id\vee: & x \vee x = x\,; \\
Id\wedge: & x \wedge x = x, \\
Abs1: & x \wedge (x \vee y) = x\,; \\
Abs2: & x \vee (x \wedge y) = x,
\end{array}
$$

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = \sup\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}; \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \inf\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$$

Р.у. множество = (алгебраическая) решётка

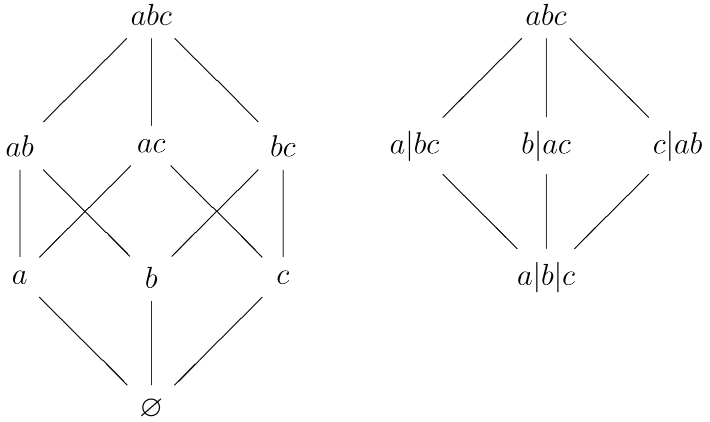
Определение

Решёткой $\mathbf{L}$ называется множество L с заданными на нём бинарными операциями: $\vee$ (*объединения*) и $\wedge$ (*пересечения*), подчиняющимися законам

$$
\begin{array}{lll}
Com\vee: & x \vee y = y \vee x\,; \\
Com\wedge: & x \wedge y = y \wedge x\,; \\
Ass\vee: & x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z\,; \\
Ass\wedge: & x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z\,; \\
Id\vee: & x \vee x = x\,; \\
Id\wedge: & x \wedge x = x, \\
Abs1: & x \wedge (x \vee y) = x\,; \\
Abs2: & x \vee (x \wedge y) = x,
\end{array}
$$

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = \sup\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}; \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \inf\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$$

Решётки: булеан и беллиан множества $\{a, b, c\}$



Отображения между ч.у. множествами

Нотация: φ и ψ — функции; $\varphi(x) = x\varphi$;

$$(\varphi * \psi)(x) = \psi(\varphi(x)) = x\varphi\psi.$$

Определение

Пусть $\mathbf{P_1}$ и $\mathbf{P_2}$ — ч.у. множества и $x, y \in P$. Отображение $\varphi\colon P_1 \to P_2$ называется соответственно

- *изотонным* (*порядковым гомоморфизмом*), если $x \leqslant y \Rightarrow x\varphi \leqslant y\varphi$;
- *обратно изотонным*, если $x\varphi \leqslant y\varphi \Rightarrow x \leqslant y$;
- *антиизотонным*, если $x \leqslant y \Rightarrow x\varphi \geqslant y\varphi$.

Отображения между ч.у. множествами

Нотация: φ и ψ — функции; $\varphi(x) = x\varphi$;

$$(\varphi * \psi)(x) = \psi(\varphi(x)) = x\varphi\psi.$$

Определение

Пусть $\mathbf{P_1}$ и $\mathbf{P_2}$ — ч.у. множества и $x, y \in P$.
Отображение $\varphi\colon P_1 \to P_2$ называется соответственно

- *изотонным* (*порядковым гомоморфизмом*), если $x \leqslant y \;\Rightarrow\; x\varphi \leqslant y\varphi$;
- *обратно изотонным*, если $x\varphi \leqslant y\varphi \;\Rightarrow\; x \leqslant y$;
- *антиизотонным*, если $x \leqslant y \;\Rightarrow\; x\varphi \geqslant y\varphi$.

Оператор замыкания на ч.у. множестве

Определение

Изотонное отображение φ ч.у. множества $\mathbf{P}$ в себя, такое что $x \leqslant x\varphi$ и $x\varphi = x\varphi\varphi$ называется *оператором замыкания* (на $\mathbf{P}$).
Если $x = x\varphi$, то элемент x называется *φ-замкнутым*.

Соответствия Галуа: определение

Определение

Пусть $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ — ч.у. множества. Пара отображений (φ, ψ), где $\varphi : P \to Q$, а $\psi : Q \to P$, удовлетворяющая свойствам

1. φ и ψ антиизотонны;
2. $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$ — операторы замыкания (на $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ соответственно).

называется *соответствием Галуа* между $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$.

Справедливы и более сильные соотношения

$$p \leqslant q\psi \Leftrightarrow q \leqslant p\varphi \quad \text{и} \quad \varphi = \varphi\psi\varphi,\ \psi = \psi\varphi\psi\,.$$

Раздел

Понятие: философское отступление...

Понятие — это ...

... целостная совокупность суждений, утверждающих об отличительных признаках вещи

Примеры:

искусство, наука, ...

Объём понятия — это ...

... *совокупность всех вещей*, обладающих зафиксированными в данном понятии признаками

Примеры:

искусство: *литература, живопись, архитектура,...*
наука: *биология, физика, химия...*

Понятие: философское отступление...

Понятие — это ...

... целостная совокупность суждений, утверждающих об отличительных признаках вещи

Примеры:

искусство, *наука*, ...

Объём понятия — это ...

... *совокупность всех вещей*, обладающих зафиксированными в данном понятии признаками

Примеры:

искусство: *литература*, *живопись*, *архитектура*,...
наука: *биология*, *физика*, *химия*...

Понятие: философское отступление...

Понятие — это ...

... целостная совокупность суждений, утверждающих об отличительных признаках вещи

Примеры:

искусство, наука, ...

Объём понятия — это ...

... *совокупность всех вещей*, обладающих зафиксированными в данном понятии признаками

Примеры:

искусство: *литература, живопись, архитектура,...*

наука: *биология, физика, химия...*

Понятие: философское отступление...

Понятие — это ...

... целостная совокупность суждений, утверждающих об отличительных признаках вещи

Примеры:

искусство, *наука*, ...

Объём понятия — это ...

... *совокупность всех вещей*, обладающих зафиксированными в данном понятии признаками

Примеры:

искусство: *литература*, *живопись*, *архитектура*,...

наука: *биология*, *физика*, *химия*...

Понятие: философское отступление...

Понятие — это ...

... целостная совокупность суждений, утверждающих об отличительных признаках вещи

Примеры:

искусство, наука, ...

Объём понятия — это ...

... *совокупность всех вещей*, обладающих зафиксированными в данном понятии признаками

Примеры:

искусство: *литература, живопись, архитектура,...*

наука: *биология, физика, химия...*

Понятие: философское отступление...

Содержание понятия — это ...

... *совокупность свойств*, присущих всем объектам данного понятия

Примеры:

<u>искусство</u>: *результат отражения действительности в форме чувственных образов, создание выразительных форм, ...*

<u>наука</u>: *познавательная деятельность, объективность, систематичность, ...*

Понятие: философское отступление...

Содержание понятия — это ...

... *совокупность свойств*, присущих всем объектам данного понятия

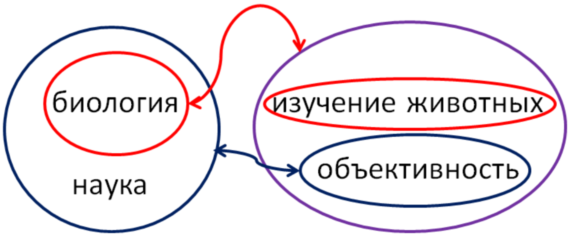
Примеры:

<u>искусство</u>: *результат отражения действительности в форме чувственных образов, создание выразительных форм, ...*

<u>наука</u>: *познавательная деятельность, объективность, систематичность, ...*

Закон обратного отношения между содержанием и объёмом понятия:

Большее по объёму понятие имеет меньшее содержание



Антимонотонность соответствий Галуа отражает этот закон

Классификация: положительные и отрицательные примеры

Рассматриваются задачи, в которых множество $\mathcal{X}$ разбито на два непересекающихся класса $\mathcal{X}^+$ (*положительный*) и $\mathcal{X}^-$ (*отрицательный*) относительно обладания/необладания их объектами некоторым целевым признаком $z \notin M$.

Прецеденты из данных классов называются, соответственно, *положительными* и *отрицательными примерами*.

Имеем 2 класса и $z = "x \in \mathcal{X}^+"$

АФП: формальный контекст

Пусть G и M — множества, называемые соответственно *множествами объектов* и *признаков*, а I — соответствие между G и M *отношением инцидентности*.

gIm означает, что объект $g \in G$ обладает признаком $m \in M$.

Определение

Тройка $K = (G, M, I)$ называется *формальным контекстом*.

В конечном случае контекст может быть задан виде объектно-признаковой $(0, 1)$-матрицы.

Соответствия Галуа в АФП: нотация

Утверждение

Если для произвольных $A \subseteq G$ *и* $B \subseteq M$ *ввести отображения* $\varphi : 2^G \to 2^M$ *и* $\psi : 2^M \to 2^G$ *такие, что*

$$A\varphi = \{ m \subseteq M \mid \forall g \in A\,(gIm) \},$$
$$B\psi = \{ g \subseteq G \mid \forall m \in B\,(gIm) \},$$

то пара отображений (φ, ψ) *является* *соответствием Галуа между ч.у. множествами* 2^G *и* 2^M*, упорядоченными по включению.*

Множества $A\varphi$ и $B\psi$ традиционно записываются как A' и B' соответственно.

Формальные объём и содержание

Определение

Пусть дан контекст $K = (G, M, I)$. Пара подмножеств $(A,\ B)$, где $A \subseteq G$, а $B \subseteq M$, и таких, что $A' = B$ и $B' = A$, называется *формальным понятием* данного контекста с *формальным объёмом* A и *формальным содержанием* B.

Если контекст K представлен в виде объектно-признаковой $(0, 1)$-матрицы, то формальному понятию соответствует максимальная её подматрица, заполненная единицами.

Решётка формальных понятий

Формальные объём и содержание — замкнутые, соответственно, относительно $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$ множества.

Теорема

Множество всех формальных понятий данного контекста K образует решётку, обозначаемую $\mathfrak{B}(K)$, относительно операций $\vee$ (объединение) и $\wedge$ (пересечение):

$$
\begin{aligned}
(A_1, B_1) \vee (A_2, B_2) &= \left((B_1 \cap B_2)', B_1 \cap B_2 \right), \\
(A_1, B_1) \wedge (A_2, B_2) &= \left(A_1 \cap A_2, (A_1 \cap A_2)' \right).
\end{aligned}
$$

$\mathfrak{B}(K)$ называется *решёткой формальных понятий* или *решёткой Галуа*.

Решётка формальных понятий...

У решётки $\mathfrak{B}(K)$ формального контекста $K = (G, M, I)$

1 — формальное понятие $(G,\ G')$ (возможен случай $G' = \varnothing$);

атомы — формальные понятия вида $(g,\ g')$ с одноэлементными объёмами (однако, не все $g \in G$ порождают атомы);

0 — формальное понятие $(\varnothing,\ M)$ с пустым объёмом.

$$(A_1,\ B_1) \leqslant (A_2,\ B_2) \Leftrightarrow A_1 \leqslant A_2 \Leftrightarrow B_1 \geqslant B_2$$

Раздел

Три контекста

Данные для обучения описываются положительным $K_+ = (G_+, M, I_+)$, отрицательным $K_- = (G_-, M, I_-)$ и недоопределённым $K_\tau = (G_\tau, M, I_\tau)$ контекстами.

Операторы Галуа в этих контекстах обозначаются соответствующими верхними индексами: например, A^+, A^-, A^τ и т.д.

Положительные и отрицательные объём и содержание

Определение

Формальное понятие $(A_+, B_+) \in K_+$ называется *положительным*.
A_+ — *положительный формальный объём*,
B_+ — *положительное формальное содержание*.

Аналогично определяются отрицательные и недоопределённые понятия, формальные объём и содержание для контекстов K_- и K_τ.

Гипотезы

Определение

Положительное формальное содержание B_+ положительного понятия (A_+, B_+) называется:

- *положительной предгипотезой*, если $\forall (A_-, B_-) \in K_- \ (B_+ \neq B_-)$, т. е. оно не является формальным содержанием ни одного отрицательного понятия;
- *положительной гипотезой*, если $\forall (g, g^-) \in K_- \ (B_+ \not\subseteq g^-)$, т. е. оно не является подмножеством содержания понятия какого-либо отрицательного примера g;
- *фальсифицированной положительной гипотезой*, если $\exists (g, g^-) \in K_- \ (B_+ \subseteq g^-)$.

Гипотезы

Определение

Положительное формальное содержание B_+ положительного понятия (A_+, B_+) называется:

- *положительной предгипотезой*, если $\forall (A_-, B_-) \in K_- \ (B_+ \neq B_-)$, т. е. оно не является формальным содержанием ни одного отрицательного понятия;
- *положительной гипотезой*, если $\forall (g, g^-) \in K_- \ (B_+ \not\subseteq g^-)$, т. е. оно не является подмножеством содержания понятия какого-либо отрицательного примера g;
- *фальсифицированной положительной гипотезой*, если $\exists (g, g^-) \in K_- \ (B_+ \subseteq g^-)$.

Гипотезы

Определение

Положительное формальное содержание B_+ положительного понятия (A_+, B_+) называется:

- *положительной предгипотезой*, если $\forall (A_-, B_-) \in K_-$ $(B_+ \neq B_-)$, т. е. оно не является формальным содержанием ни одного отрицательного понятия;
- *положительной гипотезой*, если $\forall (g, g^-) \in K_-$ $(B_+ \not\subseteq g^-)$, т. е. оно не является подмножеством содержания понятия какого-либо отрицательного примера g;
- *фальсифицированной положительной гипотезой*, если $\exists (g, g^-) \in K_-$ $(B_+ \subseteq g^-)$.

Гипотезы

Определение

Положительное формальное содержание B_+ положительного понятия (A_+, B_+) называется:

- *положительной предгипотезой*, если $\forall (A_-, B_-) \in K_-\ (B_+ \neq B_-)$, т. е. оно не является формальным содержанием ни одного отрицательного понятия;
- *положительной гипотезой*, если $\forall (g, g^-) \in K_-\ (B_+ \not\subseteq g^-)$, т. е. оно не является подмножеством содержания понятия какого-либо отрицательного примера g;
- *фальсифицированной положительной гипотезой*, если $\exists (g, g^-) \in K_-\ (B_+ \subseteq g^-)$.

Гипотезы...

Отрицательные (или $(-)$-)

- *предгипотезы*, *гипотезы*,
- *фальсифицированные гипотезы*,

определяются аналогично.

- Гипотеза является также и предгипотезой.
- Гипотезы используются для классификации недоопределённых примеров из множества G_τ.

Простейшее решающее правило

Неопределённый объект $g \in G_\tau$ относится к **положительному** классу, если g^τ содержит **хотя бы одну положительную гипотезу и не содержит ни одной из отрицательных гипотез** (к отрицательному классу — аналогично).

Отказ от классификации происходит, если формальное содержание g^τ:

- не включает в себя ни положительных, ни отрицательных гипотез (недостаток обобщений);
- содержит как положительные, так и отрицательные гипотезы (противоречие в гипотезах).

Простейшее решающее правило

Неопределённый объект $g \in G_\tau$ относится к **положительному** классу, если g^τ содержит **хотя бы одну положительную гипотезу и не содержит ни одной из отрицательных гипотез** (к отрицательному классу — аналогично).
Отказ от классификации происходит, если формальное содержание g^τ:

- не включает в себя ни положительных, ни отрицательных гипотез (недостаток обобщений);
- содержит как положительные, так и отрицательные гипотезы (противоречие в гипотезах).

Многозначные контексты

В АФП предполагается двоичной информации о признаках.

Для её получения из количественных и качественных признаков используется процедура шкалирования.

Многозначный контекст — четвёрка (G, M, Z, I), где

- G, M, Z — множества объектов, признаков и значений признаков соответственно,
- I — тернарное отношение $I \subseteq G \times M \times Z$, задающее значение $z \in Z$ признака $m \in M$ объекта $g \in G$,

причем отображение $G \times M \to Z$ функционально.

Шкалирование — это...

... представление многозначных контекстов двузначными

Примеры: шкалы номинальная, порядковая, дихотомичная (булева), ...

Пример «Фрукты»: постановка задачи

Задача:

построить классификатор по целевому свойству z = *«являться фруктом»* и следующей объектно-признаковой таблице примеров:

№	$G \setminus M$	**цвет**	**жёсткий**	**гладкий**	**форма**	**фрукт**
1	**яблоко**	жёлтое	нет	да	круглое	$+$
2	**грейпфрут**	жёлтый	нет	нет	круглый	$+$
3	**киви**	зелёное	нет	нет	овальное	$+$
4	**слива**	синяя	нет	да	овальная	$+$
5	**кубик**	зелёный	да	да	кубический	$-$
6	**яйцо**	белое	да	да	овальное	$-$
7	**теннисный мяч**	белый	нет	нет	круглый	$-$

Пример «Фрукты»: результат шкалирования

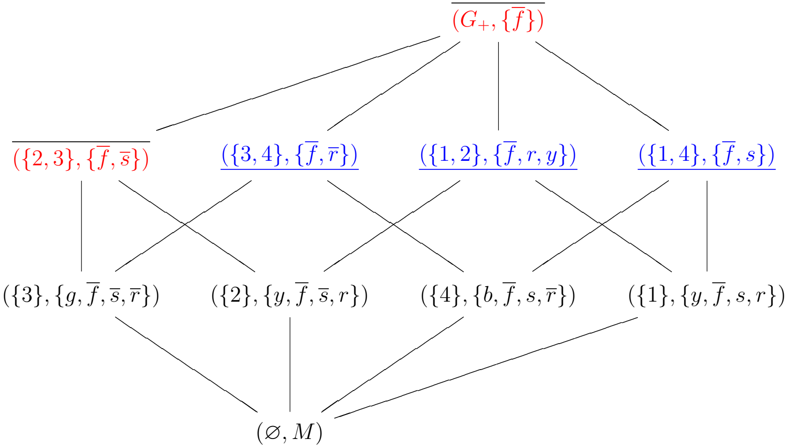
G \ M	w	y	g	b	f	$\bar{f}$	s	$\bar{s}$	r	$\bar{r}$	фрукт
1		×				×	×		×		+
2		×				×		×	×		+
3			×			×		×		×	+
4				×		×	×			×	+
5			×		×		×			×	−
6	×				×		×			×	−
7	×					×		×			−

$G_+ = \{1, 2, 3, 4\}$, $G_- = \{5, 6, 7\}$.

Отношение I_+ $[I_-]$ представлено верхней [нижней] частью таблицы.

Признаки означают: w — *белый*, y — *жёлтый*, g — *зелёный*, b — *синий*, f — *твёрдый*, $\overline{f}$ — *мягкий*, s — *гладкий*, $\overline{s}$ — *шероховатый*, r — *круглый*, $\overline{r}$ — *некруглый*.

Пример «Фрукты»: решётка $\mathfrak{B}(K_+)$ положительного контекста



Пример «Фрукты»: решётка $\mathfrak{B}(K_-)$ отрицательного контекста

$$
\begin{tikzcd}
 & & (G_-, \varnothing) \arrow[dll, dash] \arrow[drr, dash] & & \\
\underline{(\{6,7\},\{w\})} \arrow[d, dash] \arrow[drr, dash] & & & & \underline{(\{5,6\},\{f,s,\overline{r}\})} \arrow[dll, dash] \arrow[d, dash] \\
(\{7\},\{w,\overline{f},\overline{s},r\}) \arrow[drr, dash] & & (\{6\},\{\overline{r},f,s,w\}) \arrow[d, dash] & & (\{5\},\{f,\overline{r},s,g\}) \arrow[dll, dash] \\
 & & (\varnothing, M) & &
\end{tikzcd}
$$

Пример «Фрукты»: формирование гипотез

Формальные содержания

- $\{\overline{f}, \overline{r}\}$ (*мягкий, некруглый*), $\{\overline{f}, r, y\}$ (*мягкий, круглый, жёлтый*) и $\{\overline{f}, s\}$ (*мягкий, гладкий*) являются $+$-гипотезами;
- $\{\overline{f}, \overline{s}\}$ (*мягкий, шероховатый*) является фальсифицированной $+$-гипотезой, т.к. она — часть содержания $\{w, \overline{f}, \overline{s}, r\}$ отрицательного примера 7 (теннисный мяч);
- $\{w\}$ (*белый*) и $\{f, s, \overline{r}\}$ (*твёрдый, гладкий, некруглый*) являются $-$-гипотезами.

Пример «Фрукты»: формирование гипотез

Формальные содержания

- $\{\overline{f}, \overline{r}\}$ (*мягкий, некруглый*), $\{\overline{f}, r, y\}$ (*мягкий, круглый, жёлтый*) и $\{\overline{f}, s\}$ (*мягкий, гладкий*) являются +-гипотезами;
- $\{\overline{f}, \overline{s}\}$ (*мягкий, шероховатый*) является фальсифицированной +-гипотезой, т.к. она — часть содержания $\{w, \overline{f}, \overline{s}, r\}$ отрицательного примера 7 (теннисный мяч);
- $\{w\}$ (*белый*) и $\{f, s, \overline{r}\}$ (*твёрдый, гладкий, некруглый*) являются −-гипотезами.

Пример «Фрукты»: формирование гипотез

Формальные содержания

- $\{\overline{f}, \overline{r}\}$ (*мягкий, некруглый*), $\{\overline{f}, r, y\}$ (*мягкий, круглый, жёлтый*) и $\{\overline{f}, s\}$ (*мягкий, гладкий*) являются $+$-гипотезами;
- $\{\overline{f}, \overline{s}\}$ (*мягкий, шероховатый*) является фальсифицированной $+$-гипотезой, т.к. она — часть содержания $\{w, \overline{f}, \overline{s}, r\}$ отрицательного примера 7 (теннисный мяч);
- $\{w\}$ (*белый*) и $\{f, s, \overline{r}\}$ (*твёрдый, гладкий, некруглый*) являются $-$-гипотезами.

Пример «Фрукты»: формирование гипотез

Формальные содержания

- $\{\overline{f}, \overline{r}\}$ (*мягкий, некруглый*), $\{\overline{f}, r, y\}$ (*мягкий, круглый, жёлтый*) и $\{\overline{f}, s\}$ (*мягкий, гладкий*) являются $+$-гипотезами;
- $\{\overline{f}, \overline{s}\}$ (*мягкий, шероховатый*) является фальсифицированной $+$-гипотезой, т.к. она — часть содержания $\{w, \overline{f}, \overline{s}, r\}$ отрицательного примера 7 (теннисный мяч);
- $\{w\}$ (*белый*) и $\{f, s, \overline{r}\}$ (*твёрдый, гладкий, некруглый*) являются $-$-гипотезами.

Пример «Фрукты»: классификация

Неопределённый объект g

- ***мирабель*** будет классифицирован как *фрукт*, т.к. его формальное содержание *жёлтый, мягкий, гладкий* ($\{y, \overline{f}, s\}$) содержит положительную гипотезу $\{\overline{f}, s\}$ и не содержит ни одной из отрицательных гипотез;
- ***кусок сахара*** со свойствам *белый, некруглый, твёрдый* будет классифицирован как *не-фрукт*;
- ***брикет пломбира*** со свойствами *белый, мягкий, некруглый* вызовет отказ от классификации, поскольку $g^{\tau} = \{w, \overline{f}, \overline{r}\}$ содержит как положительную гипотезу $\{\overline{f}, \overline{r}\}$, так и отрицательную гипотезу $\{w\}$.

Пример «Фрукты»: классификация

Неопределённый объект g

- ***мирабель*** будет классифицирован как *фрукт*, т.к. его формальное содержание *жёлтый, мягкий, гладкий* ($\{y, \overline{f}, s\}$) содержит положительную гипотезу $\{\overline{f}, s\}$ и не содержит ни одной из отрицательных гипотез;
- ***кусок сахара*** со свойствам *белый*, некруглый, твёрдый будет классифицирован как *не-фрукт*;
- ***брикет пломбира*** со свойствами *белый, мягкий, некруглый* вызовет отказ от классификации, поскольку $g^{\prime} = \{w, \overline{f}, \overline{r}\}$ содержит как положительную гипотезу $\{\overline{f}, \overline{r}\}$, так и отрицательную гипотезу $\{w\}$.

Пример «Фрукты»: классификация

Неопределённый объект g

- ***мирабель*** будет классифицирован как *фрукт*, т.к. его формальное содержание *жёлтый, мягкий, гладкий* ($\{y, \overline{f}, s\}$) содержит положительную гипотезу $\{\overline{f}, s\}$ и не содержит ни одной из отрицательных гипотез;
- ***кусок сахара*** со свойствам *белый,* некруглый, твёрдый будет классифицирован как *не-фрукт*;
- ***брикет пломбира*** со свойствами *белый, мягкий, некруглый* вызовет отказ от классификации, поскольку $g^{\tau} = \{w, \overline{f}, \overline{r}\}$ содержит как положительную гипотезу $\{\overline{f}, \overline{r}\}$, так и отрицательную гипотезу $\{w\}$.

Пример «Фрукты»: дополнение

Если считать, что теннисный мяч — зелёный, то $\mathfrak{B}(K_-)$:

$$(G_-, \varnothing)$$

$$\underline{(\{5,7\},\{g\})} \qquad \underline{(\{5,6\},\{f,s,\overline{r}\})}$$

$$(\{7\},\{g,\overline{f},\overline{s},r\}) \qquad (\{5\},\{\overline{r},f,s,g\}) \qquad (\{6\},\{f,\overline{r},s,w\})$$

$$(\varnothing, M)$$

Пример «Фрукты»: дополнение...

При таком изменении свойств объекта № 7 изменятся только **отрицательные гипотезы**; они будут иметь формальные содержания $\{g\} = \{5, 7\}'$ и $\{f, s, \overline{r}\} = \{5, 6\}'$.
В силу этого,

- объекты со свойствами *жёлтый, мягкий, гладкий* и *белый, мягкий, некруглый* будет классифицированы как *фрукт*;
- на объекте с единственным свойством *белый* произойдёт отказ от классификации.

И в заключение:

Следует иметь в виду, что рассмотренный выше весьма простой классифицирующий алгоритм обычно даёт значительную долю отказов от классификации, как правило, неприемлемую на практике.

В то же время в литературе можно найти удачные примеры применения АФП для решения некоторых задач распознавания.

Направления развития АФП:

- методы формирование гипотез;
- бикластеризация;
- ...

И в заключение:

Следует иметь в виду, что рассмотренный выше весьма простой классифицирующий алгоритм обычно даёт значительную долю отказов от классификации, как правило, неприемлемую на практике.
В то же время в литературе можно найти удачные примеры применения АФП для решения некоторых задач распознавания.
Направления развития АФП:

- методы формирование гипотез;
- бикластеризация;
- ...

Что в сухом остатке?

- АФП — эффективный метод решения задач обработки данных, основанный на теории решёток и соответствиях Галуа.
- АФП — направление в реляционном подходе к задаче классификации.
- АФП допускает развитие в разных направлениях.

Спасибо за внимание

Вопросы?