Обобщение алгоритмов α-расширения и αβ-замены

Шальнов Евгений

Постановка задачи

- Рассматривается марковская решетка G = (V, E)
- С каждой вершиной $\boldsymbol{i} \in$ V ассоциирована переменная $\boldsymbol{x_i}$ такая, что $\boldsymbol{x_i} \in \{0, \ldots, K-1\}$
- На марковской решетке введены унарный $E_i(x_i)$ и парный $E_{ij}(x_i, x_j)$ потенциалы
- Необходимо найти значения переменных X таких, что

$$X = \underset{X}{argmin}\left\{\sum_{i \in V} E_i(x_i) + \sum_{(i,j) \in E} E_{ij}(x_i, x_j)\right\}$$

Стандартные методы

- При $K = 2$ существует точный и эффективный (полиномиальной сложности) алгоритм решения задачи
- При $K > 2$ задача поиска точного решения является NP-трудной. Используются алгоритмы поиска приближенного решения:
    - α-расширение
    - αβ-замена

α-расширение

- Начинаем с произвольного начального приближения
- В цикле для каждой метки $\alpha \in \{0, \ldots, K-1\}$ заменяем часть других меток на данную так, чтобы минимизировать энергию
- Если хотя бы для одной метки энергию удалось уменьшить, то переходим в следующему шагу, иначе выход

Y. Boykov, O. Veksler, R. Zabih. *Fast Approximate Energy Minimization via Graph Cuts.* ICCV, 1999

α-расширение

Для каждой вершины ***i*** ∈ V ее метка при применение одного шага алгоритма изменяется следующим образом:

$$y_i \leftarrow \begin{cases} \alpha & \text{если } x_i = \alpha \\ \alpha \text{ или } x_i & \text{иначе} \end{cases}$$

Определение:

<u>Пространство смещений</u> — множество всех значений ***y***. Обозначим через $M_\alpha^E(x)$

α-расширение

- Энергия, оптимизируемая на каждом шаге:

$$\underset{y \in M_\alpha^E(x)}{argmin} \left\{ \sum_{i \in V | x_i \neq \alpha} E_i(y_i | x_\alpha) + \sum_{(i,j) \in E | x_i \neq \alpha, x_j \neq \alpha} E_{ij}(y_i, y_j) \right\}$$

где введено следующее обозначение:

$$E_i(x_i | x_\alpha) = E_i(x_i) + \sum_{j | j \in \alpha, (i,j) \in E} E_{ij}(y_i, x_j) + \sum_{j | j \in \alpha, (j,i) \in V} E_{ij}(x_j, y_i)$$

α-расширение

- Ограничение алгоритма:

  $\forall\ \alpha, \gamma_1, \gamma_2 \in \{0, . . . , K - 1\}$

  $$E_{ij}(\alpha,\alpha)+E_{ij}(\gamma_1,\gamma_2)\leqslant E_{ij}(\gamma_1,\alpha)+E_{ij}(\alpha,\gamma_2)$$

αβ-замена

- Начинаем с произвольного начального приближения
- В цикле для каждой пары меток $\alpha, \beta \in \{0,\ldots, K-1\}$ заменяем часть меток α на β и β на α, так чтобы минимизировать энергию
- Если хотя бы для одной пары меток энергию удалось уменьшить, то переходим в следующему шагу, иначе выход

Y. Boykov, O. Veksler, R. Zabih. *Fast Approximate Energy Minimization via Graph Cuts.* ICCV, 1999

αβ-замена

Для каждой вершины $\boldsymbol{i} \in V$ ее метка при применение одного шага алгоритма изменяется следующим образом:

$$y_i \leftarrow \begin{cases} \alpha \text{ } \textit{или} \text{ } \beta & \textit{если } x_i = \alpha \text{ } \textit{или} \text{ } x_i = \beta \\ x_i & \textit{иначе} \end{cases}$$

Пространство смещений обозначим через $M_{\alpha\beta}^{S}(x)$

αβ-замена

- Энергия, оптимизируемая на каждом шаге:

$$\underset{y \in M^S_{\alpha\beta}(x)}{argmin} \left\{ \sum_{i \in V | x_i \in \{\alpha, \beta\}} E_i(y_i | x_{-\alpha\beta}) + \sum_{(i,j) \in E | x_i, x_j = \{\alpha, \beta\}} E_{ij}(y_i, y_j) \right\}$$

- Ограничение алгоритма:

$\forall\ \alpha, \beta \in \{0, \ldots, K-1\}$

$$E_{ij}(\alpha, \alpha) + E_{ij}(\beta, \beta) \leqslant E_{ij}(\beta, \alpha) + E_{ij}(\alpha, \beta)$$

Проблемы методов

- За один шаг алгоритма меняют метки лишь некоторого подмножества всех вершин:
  - α-расширение: только тех, чьи метки были отличны от α
  - αβ-замена: только тех, чьи метки были равны α или β
- αβ-замена: $K(K-1)/2$ способов выбрать метки для замены.

α-Expansion β-Shrink

- Начинаем с произвольного начального приближения
- В цикле для каждой пары меток $\alpha, \beta \in \{0, \ldots, K-1\}$ заменяем часть меток, отличных от α, на α и часть меток, равных α, на β.
- Если хотя бы для одной пары меток энергию удалось уменьшить, то переходим в следующему шагу, иначе выход

M. Schmidt, K. Alahari. *Generalized Fast Approximate Energy Minimization via Graph Cuts: Alpha-Expansion Beta-Shrink Moves.* UAI, 2011

α-Expansion β-Shrink

Для каждой вершины $\boldsymbol{i} \in \mathrm{V}$ ее метка при применение одного шага алгоритма изменяется следующим образом:

$$y_i \leftarrow \begin{cases} \alpha \; \textit{или} \; \beta & \textit{если} \; x_i = \alpha \\ \alpha \; \textit{или} \; x_i & \textit{иначе} \end{cases}$$

Пространство смещений обозначим через $M_{\alpha\beta}^{G}(x)$

α-Expansion β-Shrink

- Энергия, оптимизируемая на каждом шаге:

$$\underset{y \in M^{G}_{\alpha\beta}(x)}{argmin} \left\{ \sum_{i \in V} E_i(y_i) + \sum_{(i,j) \in E} E_{ij}(y_i, y_j) \right\}$$

- Теперь мы одновременно оптимизируем энергию по всем вершинам за один шаг алгоритма

Ограничение алгоритма

Утверждение 1:

Если $\forall\ \alpha, \gamma_1, \gamma_2 \in \{0, \ldots, K-1\}$ выполнено

$$E_{ij}(\alpha, \alpha) + E_{ij}(\gamma_1, \gamma_2) \leqslant E_{ij}(\gamma_1, \alpha) + E_{ij}(\alpha, \gamma_2)$$

то оптимизируемая энергия субмодулярна.

Ограничение алгоритма

Доказательство:

Рассматриваем две соседние вершины i и j. Их метки соответственно x_i и x_j

Введем бинарную метку s:

$$s=\begin{cases}1 & \text{если } x=\alpha \\ 0 & \text{иначе}\end{cases}$$

- Если метки x_i и x_j отличны от α, то

$$E_{ij}(\alpha,\alpha)+E_{ij}(x_i,x_j)\leqslant E_{ij}(x_i,\alpha)+E_{ij}(\alpha,x_j)$$

Ограничение алгоритма

- Если метки x_i и x_j равны α, то

$$E_{ij}(\alpha,\alpha)+E_{ij}(\beta,\beta)\leqslant E_{ij}(\beta,\alpha)+E_{ij}(\alpha,\beta)$$

- Если метки x_i равна α, но x_j отлична от α, то

$$E_{ij}(\alpha,\alpha)+E_{ij}(\beta,x_j)\leqslant E_{ij}(\beta,\alpha)+E_{ij}(\alpha,x_j)$$

Доказано.

Сравнение алгоритмов

Определение:

Пространство смещений $M^A(x)$ <u>превосходит</u> пространство смещений $M^B(x)$, если:

- $\forall E, \forall x \quad \min\limits_{y \in M^A(x)} E(x) \leqslant \min\limits_{y \in M^B(x)} E(x)$
- $\exists E, \exists x \quad \min\limits_{y \in M^A(x)} E(x) < \min\limits_{y \in M^B(x)} E(x)$

Сравнение алгоритмов

Для удобства сравнения алгоритмов введем обозначения:

$$M^S(x) = \bigcup_{\alpha,\beta} M^S_{\alpha\beta}(x)$$

$$M^E(x) = \bigcup_{\alpha} M^E_{\alpha}(x)$$

$$M^G(x) = \bigcup_{\alpha,\beta} M^G_{\alpha\beta}(x)$$

Суть: введенные множества обозначают пространства смещений по каким-либо меткам.

Сравнение алгоритмов

Утверждение 2:

Пространство смещений $M^G(x)$ алгоритма α-Expansion β-Shrink превосходит пространство смещений $M^E(x)$ алгоритма α-расширения и пространство смещений $M^S(x)$ алгоритма αβ-замены.

Сравнение алгоритмов

Доказательство:

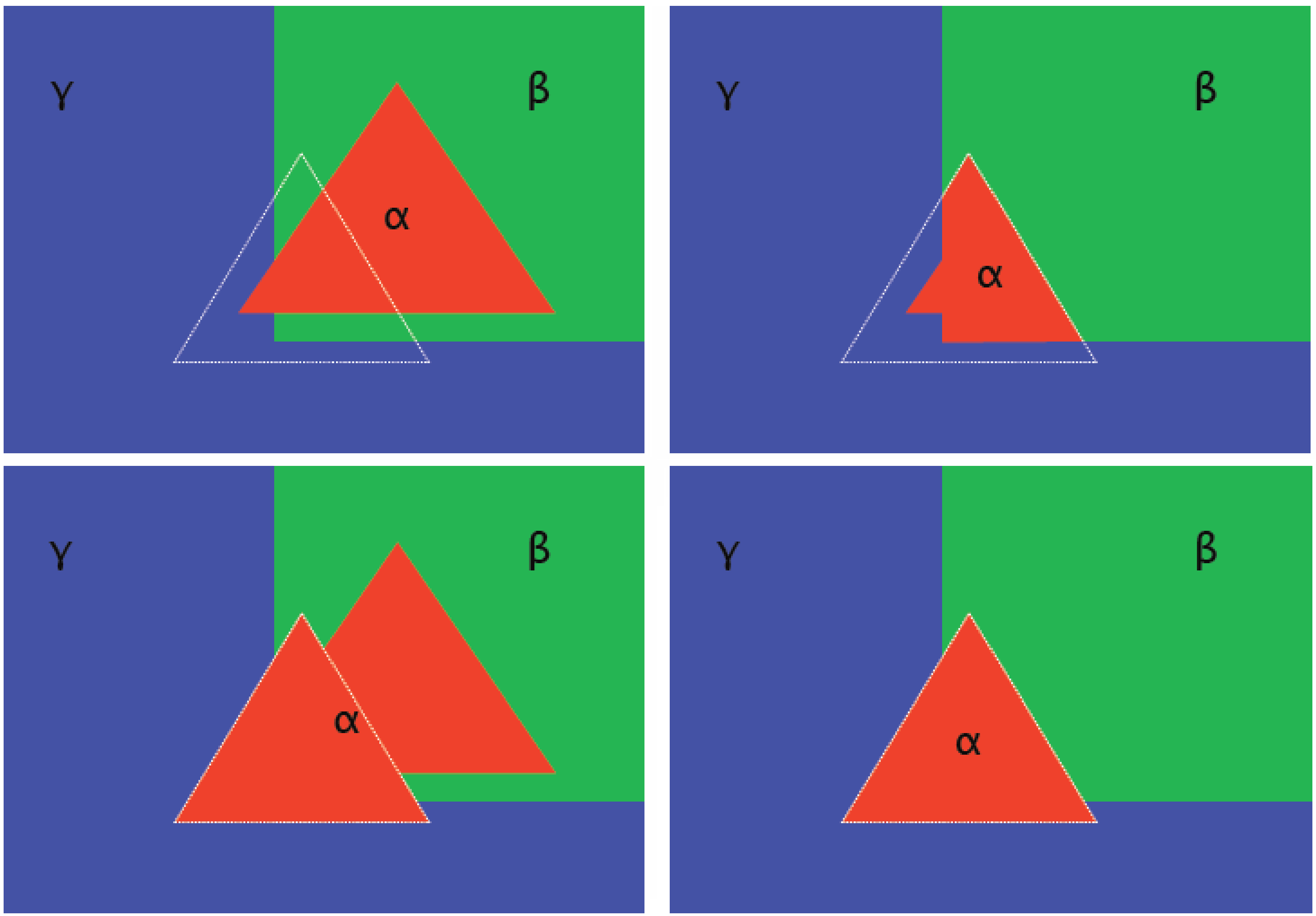
1. Сначала заметим, что $M^G(x)$ содержит $M^E(x)$ и $M^S(x)$ как частные случаи.

   Действительно, мы можем за один шаг:

   1. Изменять метки α на β, β на α
   2. Изменять метки, отличные от α, на α

Сравнение алгоритмов

2.



Выбор меток

Метка α принимает значения $0, 1, \ldots, K-1$

Стратегии выбора метки β:

1. Случайным образом
2. $\beta = \max\{1, \alpha - 1\}$
3. $\beta = \min\{K-1, \alpha + 1\}$
4. β принимает все значения $0, 1, \ldots, K-1$

Выбор меток

Name	$\alpha\beta$-Swap	α-Expansion	Random β	$\beta = \alpha - 1$	$\beta = \alpha + 1$	All β
Family	1.0203	1	0.9998	1	0.9998	0.9998
Pano	1.3182	1	1.0006	1	1	1
Tsukuba	1.0315	1	1.0012	1	1.0000	1.0000
Venus	1.8561	1	1.0015	0.9992	0.9979	0.9968
Teddy	1.0037	1	0.9998	1	1.0007	0.9999
Penguin	1.1283	1	1.0037	0.9936	0.9793	0.9758
House	0.7065	1	0.7841	0.9973	0.7038	0.7032

http://vision.middlebury.edu/MRF/

Выбор меток

Инициализация локальным минимумом алгоритма α-расширения

Name	Random β	$\beta = \alpha - 1$	$\beta = \alpha + 1$
Family	0.9998	1	0.9998
Pano	1	1	1
Tsukuba	1	1	1
Venus	1.0000	0.9992	0.9979
Teddy	1	1	0.9999
Penguin	0.9998	0.9902	0.9775
House	0.8050	0.9971	0.7038

Заключение

- Алгоритм α-Expantion β-Shrink
- является обобщением алгоритмов α-расширения и αβ-замены.
- требует тех же ограничений, что и алгоритм α-расширения
- возможна эффективная реализация
- позволяет получать решения более близкие к оптимальному

Спасибо за внимание!