Тема V

Булевы алгебры (продолжение)

Разделы

Новое определение булевой алгебры

Определение

Дистрибутивная решётка с дополнениями называется *булевой алгеброй*.

Оба (вышеприведённое и данное в на первой лекции) определения — эквивалентны:
согласно первому определению, в булевой алгебре выполняются законы дистрибутивной решётки с дополнениями, а в ней дополнения единственны и справедливы аксиомы Dtr и Abs вместе с Cmp' и Isl'.

Соотношения в булевой алгебре

Теорема

Для любых элементов x и y булевой алгебры с нулевым и единичным элементами o и ι соответственно справедливо

1. $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x \sqcap y' = o \Leftrightarrow x' \sqcup y = \iota \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \sqcap y = x \Leftrightarrow x \sqcup y = y$;
2. $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x' \sqsupseteq y'$ — закон **антиизотонности дополнения**.

Доказательство

1. *Следует из определение отношения $\sqsubseteq$ в решётках —*
$$x \sqsubseteq y \overset{\text{def}}{=} x \sqcap y = x \,(\textit{или}\ x \sqsubseteq y \overset{\text{def}}{=} x \sqcup y = y)$$
— и леммы об основных соотношениях в булевой алгебре.
2. $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x \sqcap y = x \Leftrightarrow (x \sqcap y)' = x' \Leftrightarrow x' \sqcup y' = x' \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y' \sqsubseteq x' \Leftrightarrow x' \sqsupseteq y'$.

Булева алгебра отображений

Теорема

Пусть $\langle B, \sqcup, \sqcap, {}', o, \iota \rangle$ *— булева алгебра и* A *— непустое множество. Тогда множество* B^A *также будет булевой алгеброй относительно «поточечных» операций* $\dot\sqcup$, $\dot\sqcap$ *и* ${}^\backprime$ *—*

$$(f \mathbin{\dot\sqcup} g)(x) = f(x) \sqcup g(x), \quad (f \mathbin{\dot\sqcap} g)(x) = f(x) \sqcap g(x),$$
$$(f^\backprime)(x) = (f(x))'$$

для любых $f, g \in B^A$. *Нулём и единицей* B^A *будут постоянные отображения* $f_0(x) \equiv o$ *и* $f_1(x) \equiv \iota$ *соответственно;* $x \in A$.

Доказательство

Элементарная проверка аксиом булевой алгебры.

При $A = B^n$ получим булеву алгебру B^{B^n} всех функций из B^n в B, и если $B = \mathbf{2}$ — булеву алгебру $\mathbf{2}^{\mathbf{2}^n}$ всех булевых функций от n переменных.

Булев гомоморфизм

Определение

Булевым гомоморфизмом называют решёточный гомоморфизм φ между булевыми алгебрами, обеспечивающий равенство $\varphi(x') = \varphi(x)'$.
Инъективные булевы гомоморфизмы называют *булевыми мономорфизмами*.

Т.е. булев гомоморфизм — это отображение одной булевой алгебры в другую, согласованное со всеми пятью $(\sqcup, \sqcap, ', o, \iota)$ булевыми операциями.

Булев гомоморфизм будет булевым изоморфизмом при биективности соответствующего отображения.

Булев гомоморфизм: пример

Пусть B — атомная булева алгебра и a — её атом. Тогда отображение $j_a : B \to \mathbf{2}$ такое, что

$$j_a(x) = \begin{cases} \iota\,, & \text{если } x \text{ содержит } a\,, \\ o\,, & \text{иначе}\,, \end{cases}$$

есть гомоморфизм. Такие гомоморфизмы булевой алгебры называют *двузначными* или *характерами*.

Произвольный решёточный гомоморфизм одной булевой алгебры в другую может и не быть булевым гомоморфизмом: например, если $A \subset B$, то естественное вложение $\mathcal{P}(A)$ в $\mathcal{P}(B)$ является решёточным мономорфизмом, но не булевым гомоморфизмом (и подавно, не булевым мономорфизмом), т.к. для произвольного подмножества A его дополнения в A и B различны.

Прообраз нуля $\varphi^{\sharp}(o)$ булева гомоморфизма φ — его *ядро*.

Подалгебры булевой алгебры

Определение

Булева алгебра B' называется *подалгеброй булевой алгебры* B, символически $B' \leqslant B$, если $B' \subseteq B$ и на B' устойчивы сужения всех операций B.

Булева алгебра и её подалгебры имеют общие o и ι.

Пример

1. Булева алгебра $P_{\mathbf{2}}^{n}$ логических функций от n переменных является подалгеброй алгебры $P_{\mathbf{2}}$ всех логических функций.
2. Пусть $A \subset B$. Тогда $\mathcal{P}(A) \nleqslant \mathcal{P}(B)$, поскольку эти булевы алгебры имеют, например, разные единичные элементы (что повлечёт и несовпадение дополнений в них).

Разделы

Алгебраические кольца: напоминание

Кольцом называется АС $\langle\, R,\, +,\, \cdot,\, 0 \,\rangle$, где R — множество, содержащее элемент нуль (0), на котором определены две бинарные операции сложение $(+)$ и умножение $(\cdot)$ такие, что для любых $x, y, z \in R$ справедливы соотношения

$$(x + y) + z \;=\; x + (y + z)\,, \quad x + y \;=\; y + x\,,$$
$$x + 0 \;=\; x, \quad \forall\, x\, \exists\, y\colon (\, x + y \;=\; 0\,)$$

(указанное означает, что редукт $\langle\, R,\, +,\, 0 \,\rangle$ кольца есть абелева группа по сложению, или *модуль*) и

$$(x + y) \cdot z \;=\; x \cdot z + y \cdot z\,, \qquad x \cdot (y + z) \;=\; x \cdot y + x \cdot z,$$

(дистрибутивность умножения по отношению к сложению).

Алгебраические кольца: напоминание

Нуль кольца единственен.
Элемент y такой, что $x + y = 0$ называют *обратным к x*, его обозначение — $(-x)$ в силу единственности.

Если умножение обладает свойством ассоциативности

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

и/или коммутативности

$$x \cdot y = x \cdot y,$$

то и кольцо называют соответствующе.

Если кольцо содержит единицу 1 — уникальный элемент, для которого

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x,$$

то говорят о *кольце с единицей (унитальном)*: $\langle R, +, \cdot, 0, 1 \rangle$.

Булевы кольца

Определение

Ассоциативное кольцо, обладающие свойством $x^2 = x$ для любого своего элемента называется *булевым кольцом*.

Теорема

Булево кольцо $\langle R, +, \cdot, 0 \rangle$ *коммутативно* и $-x = x$.

Доказательство

Докажем сначала второе утверждение:

$x + x = (x + x)^2 = x^2 + x^2 + x^2 + x^2 = (x + x) + (x + x) \Rightarrow$
$x + x = 0$. *Отсюда*

$x + y = (x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = x + xy + yx + y \Rightarrow$
$xy + yx = 0$ *и далее получаем*

$xy = xy + 0 = xy + (xy + yx) = (xy + xy) + yx = 0 + yx = yx.$

От булевой алгебры к булеву кольцу

Теорема

Пусть $\mathfrak{B} = \langle B, \sqcup, \sqcap, ', o, \iota \rangle$ *— булева алгебра.*
Для любых $x, y \in B$ *положим*

$$x + y = (x \sqcap y') \sqcup (x' \sqcap y), \quad x \cdot y = x \sqcap y.$$

Тогда АС $\mathfrak{B}^* = \langle B, +, \cdot, o, \iota \rangle$ *— булево кольцо с единицей* ι.

Доказательство

Коммутативность введённых операций *сложения* $(+)$ *и умножения* $(\cdot)$, *ассоциативность умножения, справедливость равенства* $x^2 = x$ *и наличие единицы* ι с её свойством $x \cdot \iota = x$ для всех x — очевидны.
Условия теоремы позволяют не различать операции умножения и пересечения.
С учётом этого — $x + y = xy' \sqcup x'y = x \oplus y$.

От булевой алгебры к булеву кольцу...

Доказательство (продолжение)

Используя законы булевой алгебры, получим

$$\begin{aligned}
(x+y)+z &= (xy' \sqcup x'y)z' \sqcup (xy' \sqcup x'y)'z = \\
&= xy'z' \sqcup x'yz' \sqcup (x' \sqcup y)(x \sqcup y')z = \\
&= xy'z' \sqcup x'yz' \sqcup x'y'z \sqcup xyz\,, \\
x+(y+z) &= x(yz' \sqcup y'z)' \sqcup x'(yz' \sqcup y'z) = \\
&= x(y' \sqcup z)(y \sqcup z') \sqcup x'yz' \sqcup x''y = \\
&= xy'z' \sqcup xyz \sqcup x'yz' \sqcup x'y'z\,.
\end{aligned}$$

Таким образом, $(x+y)+z = (x+y)+z$,
ассоциативность операции $+$ *показана.*

От булевой алгебры к булеву кольцу...

Доказательство (продолжение)

Далее: $x + o = xo' \sqcup x'o = x\iota = x$,
т.е. $\mathfrak{B}^*$ *оказывается абелевой группой по сложению.*

И, наконец, выкладки

$$\begin{aligned} (x+y)z &= (xy' \sqcup x'y)z = xy'z \sqcup x'yz\,, \\ xz + yz &= xz(yz)' \sqcup (xz)'(yz) = \\ &= xz(y' \sqcup z') \sqcup (x' \sqcup z')yz = xy'z \sqcup x'yz \end{aligned}$$

доказывают дистрибутивный закон умножения относительно сложения.

Основным примером булева кольца и является как раз кольцо $\langle \mathcal{P}(A), \oplus, \cap, \varnothing, A \rangle$, получаемое указанным способом из тотальной алгебры множеств.

От булева кольца к булевой алгебре

Теорема

Пусть $\mathfrak{R} = \langle R, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ *— булево кольцо с единицей. Для любых* $x, y \in R$ *положим*

$$x \sqcup y = x + y + x \cdot y, \quad x \sqcap y = x \cdot y, \quad x' = x + 1.$$

Тогда АС $\mathfrak{R}^* = \langle R, \sqcup, \sqcap, ', 0, 1 \rangle$ *— булева алгебра.*

Доказательство

Ассоциативность введённых операций $\sqcup$, $\sqcap$ *и закон* $Id\sqcup$ *(с учётом* $x + x = 0$*) проверяются непосредственно, а* $Id\sqcap$ *наследуется из* $\mathfrak{R}$.

Коммутативность булева кольца, обеспечивает коммутативность $\sqcup$ *и* $\sqcap$.

Далее в выкладках без пояснений используются свойства булева кольца.

От булева кольца к булевой алгебре...

Доказательство (продолжение)

Установим справедливость законов поглощения:

$$(x \sqcup y) \sqcap x = (x + y + xy)x = x + xy + xy = x\,.$$
$$x \sqcup (x \sqcap y) = x \sqcup (xy) = x + xy + xy = x\,.$$

Таким образом, $\mathfrak{B}^*$ *— решётка.*
Непосредственно проверяется выполнение пар законов $\sqcup o$, $\sqcap \iota$ *и* $\sqcup \iota$, $\sqcap o$.
В силу этого 0 *и* 1 *— универсальные грани решётки* $\mathfrak{B}^*$.

Стоуновская двойственность

Доказательство (продолжение)

Из следующего вытекает, что $\mathfrak{B}^*$ *— решётка с дополнениями:*
$x \sqcap x' = x(1+x) = x + x = 0$ *и*
$x \sqcup x' = x \sqcup (1+x) = x + 1 + x + x(1+x) = 1 + x + x = 1$
Равенства
$(x \sqcup y) \sqcap z = (x+y+xy)z = xz+yz+xyz = (x \sqcap z) \sqcup (x \sqcap z)$
доказывают справедливость в $\mathfrak{B}^*$ *первого дистрибутивного закона, а второй доказывается двойственно.*

Т.о. любое булево кольцо с единицей может быть задано с помощью булевой алгебры и наоборот.
Следствие $\mathfrak{B}^{**} = \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{R}^{**} = \mathfrak{R}$ устанавливает *стоуновскую двойственность* между булевыми алгебрами и булевыми кольцами.

Булева структура

Определение

АС $\langle B, \sqcup, \sqcap, ', \sqsubseteq, o, \iota \rangle$ такая, что $\langle B, \sqcup, \sqcap, ', o, \iota \rangle$ — булева алгебра, а отношение $\sqsubseteq$ задаются по правилу

$$x \sqsubseteq y \stackrel{\text{def}}{=} x \sqcap y = x \text{ (или } x \sqsubseteq y \stackrel{\text{def}}{=} x \sqcup y = y)$$

называется *булевой структурой*.

Утверждение

Элемент a булевой алгебры B является атомом, iff $o \lessdot a$.

Доказательство

Пусть a и b — элементы булевой алгебры B. Тогда

- $o \lessdot a \Rightarrow (a \sqsubseteq b) \vee (a \not\sim b) \Rightarrow (a \sqcap b = a) \vee (a \sqcap b = o)$, т.е. $a \in At(B)$;
- если $a \in At(B)$ и $a \sqsubseteq b$, то $a \sqcap b = a \neq b$ и $b \notin At(B)$.

Разделы

Булевы идеалы и фильтры: определение

Определение

Идеалом [*фильтром*] булевой алгебры называют её решёточные идеалы [фильтры].
Если I — идеал булевой алгебры B, то пишут $I \trianglelefteqslant B$.

Каждый булев идеал I и фильтр F булевой алгебры B обладает всеми свойствами решёточных, и, кроме этих, ещё и

$$(x \in I) \,\&\, (x' \in I) \;\Rightarrow\; I = B \;\text{ и }\; (x \in F) \,\&\, (x' \in F) \;\Rightarrow\; F = B.$$

Действительно, по определению идеала $\iota = x \sqcup x' \in I$, откуда $I = B$ и аналогично для фильтров.

На идеалы и фильтры булевой алгебры переносятся понятия, собственных, несобственных и главных идеалов и фильтров.
Поскольку булева алгебра есть решётка, то в конечной булевой алгебре все идеалы и фильтры — главные.

Булевы идеалы и фильтры: примеры

1. Пусть $B \subseteq A$. Тогда совокупность всех подмножеств множества A, содержащихся в B есть идеал булевой алгебры $\mathcal{P}(A)$, а содержащих B — фильтр $\mathcal{P}(A)$.
   Это — главные идеалы и фильтры в бесконечной булевой алгебре.

2. Приведём пример неглавных идеалов и фильтров.
   Пусть A — бесконечное множество. Совокупность $\mathcal{P}_0(A)$ всех конечных подмножеств A есть неглавный идеал

Булевы идеалы и фильтры: примеры

1. Пусть $B \subseteq A$. Тогда совокупность всех подмножеств множества A, содержащихся в B есть идеал булевой алгебры $\mathcal{P}(A)$, а содержащих B — фильтр $\mathcal{P}(A)$.
   Это — главные идеалы и фильтры в бесконечной булевой алгебре.
2. Приведём пример неглавных идеалов и фильтров.
   Пусть A — бесконечное множество. Совокупность $\mathcal{P}_0(A)$ всех конечных подмножеств A есть неглавный идеал, а совокупность подмножеств, имеющих конечное дополнение до A — неглавный фильтр булевой алгебры $\mathcal{P}(A)$.
   Фильтр указанного вида называют *фильтром Фреше*.

То, что I — собственный идеал булевой алгебры B будем записывать $I \lhd B$.

Максимальные идеалы и фильтры. Ультрафильтр

Определение

Идеал [фильтр] булевой алгебры называется *максимальным*, если он не содержится ни в каком другом собственном идеале [фильтре].
Фильтр булевой алгебры B называется *ультрафильтром* если для любого $b \in B$ ему принадлежит в точности один из элементов b и b'.

Понятно, что если x — атом [коатом] конечной булевой алгебры, то $x^{\vartriangle}$ [$x^{\triangledown}$] — её максимальный фильтр [идеал].

В конечных булевых алгебрах ультрафильтры других видов, очевидно (как в решётках), отсутствуют.

Свойства максимальных булевых идеалов и фильтров

Теорема

1. *Каждый собственный идеал булевой алгебры содержится в некотором максимальном идеале.*
   Аналогично для фильтров.

2. *Идеал [фильтр] булевой алгебры B является максимальным, iff для любого $x \in B$ в нём содержится в точности один из элементов x и x'.*

3. *Собственный идеал I булевой алгебры B будет максимальным, iff для любых $x, y \in B$ из условия $(x \sqcap y) \in I$ следует, что либо x, либо y принадлежит I.*
   Собственный фильтр F булевой алгебры B будет максимальным, iff для любых $x, y \in B$ из условия $(x \sqcup y) \in F$ следует, что либо x, либо y принадлежит F.

Свойства максимальных булевых идеалов и фильтров: замечание к теореме

К п. 1. Данное утверждение для фильтров часто называют *теоремой об ультрафильтрах* булевой алгебры.

К п. 2. Данное утверждение доказывает эквивалентность понятий «максимальный фильтр» и «ультрафильтр».

К п. 3. *Простой* — собственный фильтр F булевой алгебры B, удовлетворяющий условию

$$(x \sqcup y) \in F \;\Rightarrow\; (x \in F) \vee (y \in F).$$

Т.о. данное утверждение доказывает эквивалентность понятий «ультрафильтр» и «простой фильтр» булевой алгебры.

В булевой алгебре — фильтр:

«максимальный» = «простой» = «ультрафильтр»

Свойства максимальных булевых идеалов и фильтров: замечание к теореме

Пусть B — булева алгебра, а $\sim$ — конгруэнция на ней, как на решётке.
Если при этом ещё и

$$x \sim y \Rightarrow x' \sim y',$$

то $\sim$ — *конгруэнция на* данной булевой алгебре.

Конгруэнции булевой алгебры B образуют полную дистрибутивную решётку $\mathrm{Con}\ B$.
Её наименьшим элементом является *тождественная конгруэнция* $\triangle_B$, а наибольшим — *аморфная конгруэнция* ∇_B.

Свойства идеалов булевой алгебры

Булевы идеалы (в отличии от решёточных) находятся во взаимно-однозначном соответствии с конгруэнциями:

1. если $\sim = \sim_I$ — конгруэнция на булевой алгебре B, у которой $I = [\,o\,]$ — класс эквивалентности, содержащий элемент o, то I — идеал B, причём справедливо
$$a \sim_I b \;\Leftrightarrow\; \underset{I}{\exists x}\ (a \sqcup x \;=\; b \sqcup x);$$
2. если $I \trianglelefteq B$, то отношение $\sim_I$ на B, определённое этим условием, будет конгруэнцией на B, причём $[\,o\,] = I$.

Более того, справедливо

Утверждение

Пусть a и b — элементы булевой алгебры B и $I \trianglelefteq B$, тогда
$$a \sim_I b \;\Leftrightarrow\; (a \sqcap b') \sqcup (a' \sqcap b) \in I.$$

Факторалгебры

Если $\sim$ — конгруэнция на булевой алгебре B, а I — идеал, ей соответствующий, то факторалгебру $B/\sim$ обозначают B/I.

Отображение $\varphi : B \to B/\sim$, $\varphi(x) = [x]_\sim$, ставящее в соответствие элементу B его смежный класс по конгруэнции $\sim \in \mathrm{Con}(B)$, является, очевидно, гомоморфизмом.

Такой гомоморфизм, в соответствии с общим подходом, называется *естественным*.
С другой стороны, если φ — гомоморфизм булевой алгебры B, то $\varphi(B) \cong_b B/Ker\,\varphi$ и $Ker\,\varphi \in \mathrm{Con}(B)$.

Теорема

Идеал I булевой алгебры B максимален, iff $B/I \cong_b \mathbf{2}$.

Факторалгебры: примеры

Справедлив изоморфизм $B/x^{\nabla} \cong_b [o, x']$.

Пример

1. Было: пусть B — атомная булева алгебра и a — её атом. Тогда отображение $j_a : B \to \mathbf{2}$ такое, что

$$j_a(x) = \begin{cases} \iota\,, & \text{если } x \text{ содержит } a\,, \\ o\,, & \text{иначе}\,, \end{cases}$$

есть гомоморфизм.

Идеалом приведённого в этого двузначного гомоморфизма j_a будет главный идеал $(a')^{\nabla}$, порождённый коатомом a'.

Факторалгебры: примеры...

2. Проиллюстрируем изоморфизм $B/x^{\triangledown} \cong_b [o, x']$ для булевой алгебры B^3, атомы которой обозначим a, b и c, а остальные элементы — указанием содержащихся в них атомов.

Если в качестве идеала I взять $a^{\triangledown}$, то классами эквивалентности по $\sim_{a^{\triangledown}}$ будут

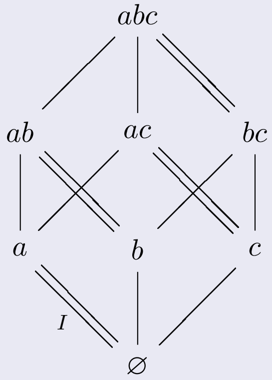
$$[a] = a^{\triangledown} = I = \{a, \varnothing\}, \qquad [b] = \{ab, b\},$$
$$[c] = \{ac, c\}, \qquad [bc] = \{abc, bc\}.$$

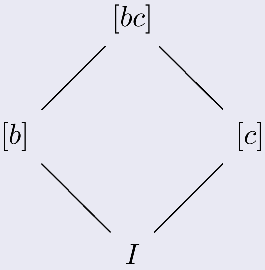
Факторалгеброй булевой алгебры B^3 по выбранному идеалу будет изоморфная B^2 алгебра из указанных выше классов с нулём I, атомами $[b]$ и $[c]$ и единицей $[bc]$.

Поскольку $bc = a'$ и $\varnothing \in I$, то $B/a^{\triangledown} \cong_b [\varnothing, a']$.

Факторалгебры: примеры

Булева алгебра B^3 (классы эквивалентности по $\sim_{a^\triangledown}$ выделены двойными линиями) и факторалгебра $B^3/a^\triangledown$:





Построение безатомной булевой алгебры факторизацией

1. Рассмотрим тотальную алгебру $\langle \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \cup, \cap, ^{-}, \varnothing, \mathbb{Z} \rangle$ над множеством целых чисел.

2. Определим отношение $\simeq$ над элементами $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$:

$A \simeq B \;\Leftrightarrow\;$ *симметрическая разность* A *и* B *конечна*.

$\simeq$ — отношение эквивалентности $\Rightarrow$ можно образовать фактормножество $\mathcal{P}(\mathbb{Z})/\simeq$.
Все конечные (включая пустое) подмножества $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ будут, очевидно, эквивалентными; обозначим этот класс эквивалентности $[\varnothing]$.

Также будут эквивалентными все подмножества целых чисел, имеющих конечные дополнения до $\mathbb{Z}$, включая само $\mathbb{Z}$; этот класс эквивалентности обозначим $[\mathbb{Z}]$.

Построение безатомной булевой алгебры факторизацией...

3. Эквивалентность $\simeq$ оказывается стабильным относительно теоретико-множественных операций $\cup$ и $\cap$, т.е. является конгруэнцией: для любых $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ из $A \simeq A'$ и $B \simeq B'$ следует $A \cup B \simeq A' \cup B'$, $A \cap B \simeq A' \cap B'$ и $\overline{A} \simeq \overline{A'}$.

Это означает, что АС $\langle \mathcal{P}(\mathbb{Z})/\simeq, \cup, \cap, ^{-}, [\varnothing], [\mathbb{Z}] \rangle$ будет булевой алгеброй.

4. Убедимся, что данная булева алгебра не имеет атомов.

- любой отличный от $[\varnothing]$ элемент $\mathcal{P}(\mathbb{Z})/\simeq$ есть класс бесконечных множеств;
- атом — элемент, непосредственно следующий за $[\varnothing]$, а таковые отсутствуют в $\mathcal{P}(\mathbb{Z})/\simeq$: в любом бесконечном множестве X можно (с помощью АС!) указать подмножество Y такое, что и оно, его дополнение бесконечны, и поэтому $[Y]$ строго содержится в $[X]$.

Тривиальные ультрафильтры

Говорят, что главные ультрафильтры алгебры множеств, поскольку все они имеют вид $a^{\triangle}$, фиксированы в точке a множества и их называют *тривиальными*.

Совместно с фильтрами Фреше они играют важную роль при исследовании сходимости в анализе (топологическая система окрестностей данной точки является фиксированным в ней тривиальным ультрафильтром).

Главные ультрафильтры также используют, например, при исследованиях полноты логических систем в *алгебрах Линденбаума–Тарского*, порождённых соответствующей логической теорией.

Общее решение булева уравнения — главный идеал

Пусть $\mathcal{A} = \{ A, B, \dots \}$ — множество формул над высказываниями в КИВ.

Если $A \equiv B$ — тавтология, то говорят, что формулы A и B *логически эквивалентны* или *равносильны*, что записывают как $A \sim B$. Ясно, что $\sim$ есть отношение эквивалентности на $\mathcal{A}$. Класс эквивалентности, порождаемый формулой A обозначают $[A]$, классы тождественно истинных формул — **T**, а тождественно ложных формул — **F**.

На факторможестве $\mathcal{A}/\sim$ классов эквивалентности формул алгебры логики можно задать теоретико множественные операции дополнения $(^-)$, объединения $(\cup)$ и пересечения $(\cap)$, причём

$$\overline{[A]} = [\neg A], \quad [A] \cup [B] = [A \vee B], \ [A] \cap [B] = [A \& B].$$

Общее решение булева уравнения — главный идеал...

Легко установить, что введённые операции над классами эквивалентностей имеют следующие свойства:

- операции $\cup$ и $\cap$ коммутативны и взаимно дистрибутивны;
- выполняются соотношения $[A] \cup \mathbf{F} = [A]$ и $[A] \cap \mathbf{T} = [A]$;
- справедливы законы $[A] \cup \overline{[A]} = \mathbf{T}$ и $[A] \cap \overline{[A]} = \mathbf{F}$.

Это означает, что АС $\langle\, \mathcal{A}/{\sim},\ \cup,\ \cap,\ {}^{-},\ \mathbf{T},\ \mathbf{F} \,\rangle$ — булева алгебра, называемая *факторалгеброй логических формул*; для КИВ она совпадает с соответствующей алгеброй Линденбаума–Тарского (в последней факторизация проводится по отношению $\simeq$ такому, что $A \simeq B \Leftrightarrow A \vdash B$ и $B \vdash A$).

С каждым элементом $\mathcal{A}/\sim$ связана соответствующая функция алгебры логики.

Обозначим через $\mathcal{A}_n$ множество формул алгебры логики над n элементарными высказываниями. Тогда $\mathcal{A}_n$ бесконечно, а фактормножество $\mathcal{A}_n/\sim$ — конечно (содержит 2^{2^n} элементов).

Общее решение булева уравнения — главный идеал...

Рассмотрим уравнение

$$A(\tilde{x}) \mathbin{\&} X(\tilde{x}) \sim \mathbf{F},$$

где $A(\tilde{x})$ и $X(\tilde{x})$ — формулы, реализующие соответственно известную и искомую булевы функции (для простоты указывают именно формулы, а не порождённые ими классы).

Решением данного уравнения будет любая функция, реализуемая формулами из главного идеала, порождённого формулой $\overline{A(\tilde{x})}$ в соответствующей алгебре Линденбаума–Тарского.

Далее знак конъюнкции $\&$ будем для простоты опускать.

Общее решение булева уравнения — главный идеал...

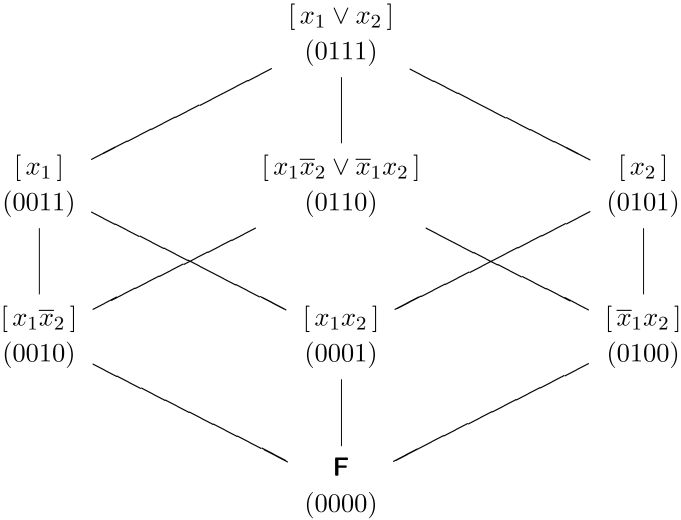
Например, пусть $A(\tilde{x}) = \overline{x}_1\overline{x}_2$, т.е. дано уравнение

$$\overline{x}_1\overline{x}_2 X(x_1, x_2) \sim \mathbf{F}. \qquad (*).$$

Имеем $\overline{\overline{x}_1\overline{x}_2} = x_1 \vee x_2$, и главный идеал $[\,x_1 \vee x_2\,]^{\triangledown}$ алгебры Линденбаума–Тарского составляют классы $[\,x_1 \vee x_2\,]$, $[\,x_1\,]$, $[\,x_2\,]$, $[\,x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 x_2\,]$, $[\,x_1\overline{x}_2\,]$, $[\,x_1 x_2\,]$, $[\,\overline{x}_1 x_2\,]$ и $\mathbf{F}$.

На рисунке следующего слайда данный идеал.
Для каждого класса указан вектор значений соответствующей функции (подразумевается упорядочение наборов значений переменных сначала по x, затем по y).

Общее решение булева уравнения — главный идеал...



Решением уравнения $(*)$ будет любая булева функция, реализующаяся формулами из приведённых классов.

Построение неглавного ультрафильтра

В бесконечных булевых алгебрах, могут существовать и неглавные (нетривиальные) ультрафильтры. Их также называют *свободными*, поскольку они не фиксированы ни в какой точке исходного множества. Пересечение всех элементов такого фильтра есть единичный элемент.

Пример

Опишем в самом общем виде, как может быть построен неглавный ультрафильтр F булеана $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

1. Рассмотрим фильтр Фреше, который обозначим F_0.
Он не является максимальным, поскольку, например, ни множество чётных чисел $2\mathbb{N}$, ни его дополнение (множество нечётных чисел) не принадлежат F_0.
Поэтому надо принять решение, отнести $2\mathbb{N}$ к конструируемому ультрафильтру F или нет.

Построение неглавного ультрафильтра...

2. Пусть принято решение о том, что $2\mathbb{N} \in F$.
Это будет означать, что некоторые другие множества (все множества, содержащие $2\mathbb{N}$) также будут принадлежать F.
Полученный фильтр обозначим F_1.
Понятно, что он также не будет являться искомым ультрафильтром, поскольку относительно ряда множеств неопределённость останется: например, ни множество $3\mathbb{N}$, ни его дополнение не принадлежат F_1.
Здесь снова нужно принять решение о вхождении одного из указанных множеств в F_1, построить F_2 и т.д.

3. Показано, что в результате выполнения "трансфинитного числа шагов" будет построен искомый ультрафильтр F.

Построение неглавного ультрафильтра...

Мы привели чрезвычайно грубый набросок способа построения фильтра F, но в нём роль AC: никакого способа указать, какое множество нужно рассматривать на каждом шаге для включения его или его дополнения в F, нет.

Кроме того, на каждом шаге можно принять любую из указанных альтернатив.

Мы видим, что процесс построения F существенно неоднозначен, и, на самом деле, до сих пор не указано ни одного неглавного ультрафильтра в явном виде, без применения AC.

Построение гипердействительных чисел

Множество гипердействительных чисел ${}^*\mathbb{R}$ представляет собой неархимедово упорядоченное поле, являющееся расширением поля $\mathbb{R}$ действительных чисел.

Это означает, что ${}^*\mathbb{R}$ — цепь, в которую вложено множество $\mathbb{R}$ (стандартные гипердействительные числа) и содержащее, кроме того, множество т.н. *нестандартных гипердействительных чисел*. При этом в ${}^*\mathbb{R}$ выполняются все аксиомы поля, однако не выполняется справедливая в $\mathbb{R}$ *аксиома Архимеда*: «*для любых двух положительных чисел a и b существует натуральное n такое, что $n \cdot a > b$*».

Абрахам Робинсон (Abraham Robinson, 1918–1974) — американский математик, создатель «нестандартного анализа».

Построение гипердействительных чисел...

Согласно принципу наследования свойств при расширении, аксиома Архимеда может нарушаться лишь когда хотя бы одно из чисел a и b нестандартное.

Среди нестандартных чисел выделяют бесконечно большие и бесконечно малые: если числа ε и I суть положительные соответственно бесконечно малое и бесконечно большое гипердействительные, а x — положительное действительное, то неравенства $n \cdot \varepsilon > x$ и $n \cdot x > I$ не будут выполняться ни для какого натурального n.

Поле гипердействительных чисел ${}^*\mathbb{R}$ можно построить, используя некоторый неглавный ультрафильтр U в $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Рассмотрим всевозможные последовательности обычных действительных чисел.
Будем говорить, что последовательности $a = (a_1, a_2, \ldots)$ и $b = (b_1, b_2, \ldots)$ *эквивалентны*, если равенство $a_i = b_i$ нарушается на множестве, не принадлежащем U.

Построение гипердействительных чисел...

Легко проверяется, что, в силу свойств ультрафильтров введённое отношения действительно является отношением эквивалентности и, например, все последовательности, отличающиеся в конечном числе членов, эквивалентны. Получающиеся классы эквивалентности назовём *гипердействительными числами*; они и будут являться элементами $^*\mathbb{R}$.

Действительному числу a соответствует класс эквивалентности $[(a, a, \dots)]$, это — стандартное гипердействительное число.

Четыре арифметических действия производятся над последовательностями почленно.

Будем считать, что $a < b$, если неравенство $a_i \geqslant b_i$ выполняется на каком-либо множестве, не входящем в U.

Построение гипердействительных чисел...

Нетрудно проверить, что, поскольку U — ультрафильтр, получено упорядоченное поле.

В этом поле, однако, аксиома Архимеда не выполняется: например —

- $\left[\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)\right]$ — бесконечно малое гипердействительное число;
- $\left[\left(1, 2, 3, \ldots\right)\right]$ — бесконечно большое гипердействительное число.

При проверке этих свойств и требуется, чтобы U был неглавным ультрафильтром.

Разделы

Булевы многочлены: определение

Определение

Пусть $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — n-элементное множество *переменных*.
Булевы многочлены над X_n — формулы из переменных и констант 0 и 1 над множеством символов $\{\sqcup, \sqcap, '\}$, т.е.

1. $x_1, \ldots, x_n, 0, 1$ — булевы многочлены;
2. если p и q — булевы многочлены, то таковыми являются и $(p \sqcup q)$, $(p \sqcap q)$, (p').

Синтаксическое тождество: многочлены p и q *равны*, символически $p = q$, если p и q совпадают как строки символов.

P_n — множество всех булевых многочленов над X_n.
Это не булева алгебра, т.к., например, $x_1 \sqcup x_2 \neq x_2 \sqcup x_1$.

Булевы многочлены: полиномиальная функция

Далее пользуемся известными правилами экономии скобок.

Определение

Пусть B — булева алгебра и p — булев многочлен из P_n. Обозначим через $\widehat{p}_B(b_1, \ldots, b_n)$ элемент из B, который получается из p заменой $x_i \mapsto b_i \in B$, $i = \overline{1, n}$, а отображение

$$\widehat{p}_B : B^n \to B, \quad (b_1, \ldots, b_n) \mapsto \widehat{p}_B(b_1, \ldots, b_n)$$

назовём *полиномиальной функцией, индуцированной булевым многочленом* p.

$P_B^n = \{\, \widehat{p}_B \mid p \in P_n \,\}$ — множество всех полиномиальных функций, индуцированных многочленами из P_n на B.

Ясно, что $P_B^n \subseteq B^{B^n}$.

Булевы многочлены: полиномиальная функция...

Пример (везде $n = 2$)

1. Пусть $B = \mathbf{2} = \{0, 1\}$, $p = x_1 \sqcup x_2$ и $q = x_2 \sqcup x_1$. Тогда
   - $p \neq q$,
   - $\widehat{p}_B = a \vee b$, $\widehat{q}_B = b \vee a$,
   - $\widehat{p}_B = \widehat{q}_B$, т.к. при любой замене в этих выражениях букв a и b элементами $\{0, 1\}$ получим один и тот же элемент.
2. Пусть $B = \mathcal{P}(A)$, $p = (x_1 \sqcup x_2)'$ и $q = {x_1}' \sqcap {x_2}'$. Тогда
   - $p \neq q$,
   - $\widehat{p}_B = \overline{X \cup Y}$, $\widehat{q}_B = \overline{X} \cap \overline{Y}$, где $X, Y \subseteq A \neq \varnothing$,
   - $\widehat{p}_B = \widehat{q}_B$.

P_B^n — подалгебра B^{B^n}

Ясно, что $\langle\, P_B^n, \sqcup, \sqcap, {}', 0, 1 \,\rangle$ — булева алгебра.

Теорема

$$P_B^n \leqslant B^{B^n}.$$

Доказательство

Убедимся в устойчивости помножества $P_B^n \subseteq B^{B^n}$ *относительно операций булевой алгебры.*

По определению полиномиальных функций, для $\sqcup$ *и произвольного* $a \in B^n$ *имеем*

$$(\widehat{p}_B \sqcup \widehat{q}_B)(a) = \widehat{p}_B(a) \sqcup \widehat{q}_B(a) = \widehat{(p \sqcup q)}_B(a) \in P_B^n.$$

Устойчивость операций $\sqcap$ *и* $'$ *доказывается аналогично.*

Также P_B^n *и* B^{B^n} *содержат функции* $f_0 \equiv 0$ *и* $f_1 \equiv 1$.

Булевы многочлены: эквивалентность

Определение

Два булевых многочлена $p, q \in P_n$ называются *эквивалентными* (символически $p \sim q$), если равны их полиномиальные функции на $\mathbf{2}$, т.е. $p \sim q \Leftrightarrow \widehat{p}_{\mathbf{2}} = \widehat{q}_{\mathbf{2}}$.

$\sim$ действительно есть отношение эквивалентности на P_n (свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности наследуются из отношения равенства функций).

С помощью теоремы Стоуна доказывается

Теорема

Пусть $p, q \in P_n$ *и* $p \sim q$.
Тогда для произвольной булевой алгебры B *справедливо* $\widehat{p}_B = \widehat{q}_B$.

Факторможество P_n по эквивалентности —

Теорема

$P_n/\sim$ есть булева алгебра, и $P_n/\sim \cong_b P_{\mathbf{2}}^n$.

Доказательство

Определим отображение $\varphi\colon P_{\mathbf{2}}^n \to P_n/\sim$, которое переводит полиномиальную функцию $P_{\mathbf{2}}^n$, индуцированную многочленом p на $\mathbf{2}$ в класс эквивалентности $[p]_\sim$.
Данное определение корректно, т.к.

$$\widehat{p}_{\mathbf{2}} = \widehat{q}_{\mathbf{2}} \Rightarrow p \sim q \Rightarrow [p]_\sim = [q]_\sim .$$

Легко проверить, что φ и есть искомый булев изоморфизм.

Булева алгебра: полиномиальная полнота

Если $P_B^n \cong_b B^{B^n}$, то назовём булеву алгебру B *полиномиально полной*.
Полиномиальная полнота означает, что каждую функцию можно представить полиномом.

Из единственности представления булевых $(\mathbf{2}^n \to \mathbf{2})$ функций в виде совершенных ДНФ, КНФ или АНФ (полиномов Жегалкина), следует, что $|P_n/\sim| = 2^{2^n}$.

Отсюда:

- поскольку $P_n/\sim \cong_b P_{\mathbf{2}}^n$, то алгебра $\mathbf{2}$ полиномиально полна.
- если $|B| = m > 2$, то $|P_B^n| = |P_n/\sim| = 2^{2^n} < m^{m^n} = |B^{B^n}|$, т.е. $\mathbf{2}$ — *единственная* полиномиально полная булева алгебра.

Разделы

Булевы уравнения: определение

Определение

Пару (p, q), где $p, q \in P_n$ назовём *булевым уравнением*.
Пусть B — произвольная булева алгебра.
Элемент $(b_1, \ldots, b_n) \in B^n$ называется *решением уравнения (p, q) в булевой алгебре B*, если

$$\widehat{p}_B(b_1, \ldots, b_n) = \widehat{q}_B(b_1, \ldots, b_n).$$

Совокупность $\{ (p_i, q_i) \mid i = \overline{1, m} \}$ образует *систему из m уравнений*.
Решением системы называется общее решение всех уравнений системы.

Уравнение (p, q) допустимо записывать в виде $p = q$.

Например, $x_1' x_2 \vee x_3 = x_1(x_2 \vee x_3)$ — булево уравнение в $\mathbf{2}$, а (101) — его решение.

Эквивалентное преобразование булева уравнения

Теорема

Уравнения $p = q$ *и* $(p \sqcap q') \sqcup (p' \sqcap q) = 0$ *имеют одни и те же решения.*

Доказательство

Пусть B *— булева алгебра и* $(b_1, \ldots, b_n) \in B^n$.
Положим $a = \widehat{p}_B(b_1, \ldots, b_n)$ *и* $b = \widehat{q}_B(b_1, \ldots, b_n)$.
Тогда, с одной стороны,

$$a = b \Rightarrow (a \sqcap b') \sqcup (a' \sqcap b) = (a \sqcap a') \sqcup (a' \sqcap a) = 0 \sqcup 0 = 0,$$

а с другой —

$$(a \sqcap b') \sqcup (a' \sqcap b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a \sqcap b' = 0 \\ a' \sqcap b = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \sqcap b' = 0 \\ a \sqcup b' = 1 \end{cases} \Rightarrow a = b'' \Leftrightarrow a = b.$$

Эквивалентное преобразование системы булевых уравнений

По данной теореме система уравнений

$$\{\,(p_i,\, q_i) \mid i = 1,\, \ldots,\, m\,\}.$$

эквивалентна единственному уравнению

$$\bigsqcup_{i=1}^{m} \big((p_i \sqcap q_i') \sqcup (p_i' \sqcap q_i)\big) \;=\; 0 \qquad (*).$$

Если решение ищется в алгебре $\mathbf{2}$, то выразив левую часть в конъюнктивной форме, получим, что уравнение $(*)$ имеет решение, когда хотя бы один из сомножителей принимает значение 0 и, приравнивая их последовательно к 0, находят все решения системы.

Решение системы булевы уравнений: пример

Решим в $\mathbf{2}$ систему $\{(x_1x_2,\, x_1x_3 \vee x_2),\ (x_1 \vee x'_2,\, x_3)\}$.

Перепишем систему в привычном виде

$$\begin{cases} x_1x_2 & = \; x_1x_3 \vee x_2\,, \\ x_1 \vee x'_2 & = \; x_3\,. \end{cases}$$

Она эквивалентна единственному уравнению

$$x_1x_2(x_1x_3 \vee x_2)' \vee (x_1x_2)'(x_1x_3 \vee x_2) \vee \\ \vee (x_1 \vee x'_2)x'_3 \vee (x_1 \vee x'_2)'x_3 = 0.$$

Преобразуя левую часть в КНФ, получим уравнение

$$(x_1 \vee x_2 \vee x'_3)(x'_1 \vee x'_2 \vee x'_3) = 0.$$

Таким образом, решения рассматриваемой системы — элементы $(b_1,\, b_2,\, b_3) \in \mathbf{2}^3$ удовлетворяющие соотношениям

$$(b_1 \vee b_2 \vee \bar{b}_3)(\bar{b}_1 \vee \bar{b}_2 \vee \bar{b}_3) = 0,$$

т.е. это (001) и (111).

Системы булевы уравнений в произвольной булевой алгебре

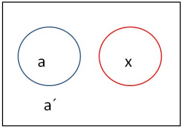
В общем случае, когда решение ищется не в простейшей, а в произвольной булевой алгебре $B \neq \mathbf{2}$, то приведение уравнения $(*)$ к конъюнктивной форме приводит к потере решений в силу того, что B не обладает свойством полиномиальной полноты, и в ней

из $a \sqcap b = o$ не следует, что либо $a = o$, либо $b = o$.

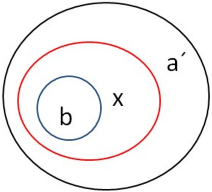
Выкладки в булевой структуре $\langle B, \sqcup, \sqcap, ', \sqsubseteq, o, \iota \rangle$

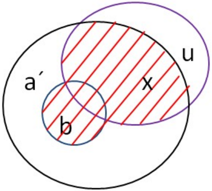
1. $a \sqcap x = 0 \Leftrightarrow (a \sqcap x) \sqcup a' = a' \Leftrightarrow (a \sqcup a') \sqcap (x \sqcup a') = a' \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \sqcup a' = a' \Leftrightarrow x \sqsubseteq a' \, (\Leftrightarrow a \sqsubseteq x').$

Аналогично $b \sqcap x' = 0 \Leftrightarrow b \sqsubseteq x$.



2. $\begin{cases} b \sqsubseteq x \\ x \sqsubseteq a' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = b \sqcup u \text{ для некоторого } u \in B \\ x \sqcap a' = x \end{cases} \Leftrightarrow$





$\Leftrightarrow x = (b \sqcup u) \sqcap a' \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = (a' \sqcap u) \sqcup b.$

Решение булева уравнения с одним неизвестным в произвольной булевой алгебре

Пусть в булевой структуре $\langle B, \sqcup, \sqcap, ', \sqsubseteq, o, \iota \rangle$ задано уравнение $p = q$, где $p, q \in P_1$.

Метод состоит в выполнении следующих шагов.

1. Приводим данное уравнение к равносильному уравнению с o в правой части.
2. Приводим полученное уравнение к равносильному уравнению вида $(a \sqcap x) \sqcup (b \sqcap x') = o$, где a и b — известные элементы B.
3. Заменяем полученное уравнение на эквивалентную систему
$$a \sqcap x = o, \qquad b \sqcap x' = o.$$
4. Если $b \not\sqsubseteq a'$, то исходное уравнение решения не имеет. Иначе, искомое решение — x такой, что
$$b \sqsubseteq x \sqsubseteq a' \quad \text{или} \quad x = (b \sqcup u) \sqcap a' = (a' \sqcap u) \sqcup b,$$
где u — произвольный элемент B.

Решение булева уравнения $x \sqcup c = d$

Решим булево уравнение

$$x \sqcup c = d$$

в произвольной булевой структуре $\langle B, \sqcup, \sqcap, ', \sqsubseteq, o, \iota \rangle$.

1. $x \sqcup c = d \Leftrightarrow ((x \sqcup c)' \sqcap d) \sqcup ((x \sqcup c) \sqcap d') = o$.

2. $((x \sqcup c)' \sqcap d) \sqcup ((x \sqcup c) \sqcap d') = (x' \sqcap c' \sqcap d) \sqcup (x \sqcap d') \sqcup (c \sqcap d') =$
$= (x' \sqcap c' \sqcap d') \sqcup (x \sqcap d') \sqcup (x \sqcap c \sqcap d') \sqcup (x' \sqcap c \sqcap d') =$
$= (x \sqcap \underbrace{(d' \sqcup (c \sqcap d'))}_{d'}) \sqcup (x' \sqcap ((c' \sqcap d) \sqcup (c \sqcap d'))) = o.$

3. Имеем $d' \sqcap x = o$, $\quad ((c' \sqcap d) \sqcup (c \sqcap d)') \sqcap x' = o$.

Решение булева уравнения $x \sqcup c = d$...

4. Исходное уравнение имеет решение если и только если
$$(c' \sqcap d) \sqcup (c \sqcap d') \sqsubseteq d.$$
Покажем, что данное условие эквивалентно $c \sqsubseteq d$:
$$((c' \sqcap d) \sqcup (c \sqcap d')) \sqsubseteq d \Leftrightarrow (c' \sqcap d) \sqcup (c \sqcap d') \sqcup d = d \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow d \sqcup (c \sqcap d') = d \Leftrightarrow (d \sqcup (c \sqcap d')) \sqcap c = d \sqcap c \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (c \sqcap d) \sqcup (c \sqcap d') = d \sqcap c \Leftrightarrow c = c \sqcap d \Leftrightarrow c \sqsubseteq d.$$

Общее решение исходного уравнения —
$$x = (c' \sqcap d) \sqcup (c \sqcap d' \sqcup u) \sqcap d = (c' \sqcap d) \sqcup (u \sqcap d) = d \sqcap (c' \sqcup u),$$
где u — произвольный элемент булевой структуры B.

Необязательная проверка:
$$(d \sqcap (c' \sqcup u)) \sqcup c \stackrel{Dtr2}{=} (d \sqcup c) \sqcap \iota = d \sqcup c \stackrel{c \sqsubseteq d}{\equiv} d.$$

Разделы

- Булева алгебра как решётка. Соотношения в булевой алгебре. Булева алгебра отображений. Булев гомоморфизм.
- Булевы кольца. **Теоремы построения булева кольца из булевой алгебры и булевой алгебры из булева кольца**. Стоуновская двойственность между булевыми алгебрами и булевыми кольцами. Булева структура.
- Булевы идеалы и фильтры: определение. Фильтр Фреше. Максимальные идеалы и фильтры. Ультрафильтр. Свойства максимальных булевых идеалов и фильтров. Факторалгебры.
- Построение безатомной булевой алгебры факторизацией. Тривиальные ультрафильтры. Общее решение булева уравнения — ультрафильтр. Построение неглавного ультрафильтра.

- Булевы многочлены: определение, равенство, полиномиальная функция, эквивалентность. **Теорема:** P_B^n **— подалгебра** B^{B^n}. Полиномиальная полнота булевой алгебры.
- **Теорема об эквивалентном преобразовании булевых уравнений**. Решение булева уравнения в произвольной булевой алгебре.