Оценивание состава инвестиционного портфеля

Основные понятия

m_i – постоянное количество активов i-го вида

$p_{t-1,i}$ – цена единицы активов i-го вида до начала t-го периода

$p_{t,i}$ – постоянная цена единицы активов i-го вида в течение t-го периода владения

Изменение цен происходит скачкообразно между периодами

$x_{t,i} = \dfrac{p_{t,i} - p_{t-1,i}}{p_{t-1,i}}$ – доходность i-го актива за t-й период владения

$p_t = \sum_{i=1}^{n} m_i p_{t,i}$ – общая стоимость портфеля компании на конец t-го периода владения

$\beta_{t,i} = \dfrac{m_i p_{t-1,i}}{\sum_{j=1}^{n} m_j p_{t-1,j}}$ – долевое распределение стоимости портфеля на начало t-го период

$y_t = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i p_{t,i} - \sum_{i=1}^{n} m_i p_{t-1,i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i p_{t-1,i}}$ – доходность портфеля за t-й период владения

Доходность портфеля за t-й период

$$y_t = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i p_{t,i} - \sum_{i=1}^{n} m_i p_{t-1,i}}{\sum_{j=1}^{n} m_j p_{t-1,j}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i (p_{t,i} - p_{t-1,i})}{\sum_{j=1}^{n} m_j p_{t-1,j}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i (p_{t,i} - p_{t-1,i})}{\sum_{j=1}^{n} m_j p_{t-1,j}}$$

Обозначим как $\mu_i = \dfrac{m_i}{\sum_{k=1}^{n} m_k}$ долевое количественное распределение состава портфеля $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$

$$y_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i (p_{t,i} - p_{t-1,i})}{\sum_{j=1}^{n} \mu_j p_{t-1,j}}$$

Критерий определения количественного состава портфеля

Пусть доступны временные ряды цен активов
Error! Reference source not found. $(p_{1,i},...,p_{T,i})$, $i=1,...,n$, и временной ряд наблюденных доходностей портфеля $(y_1,...,y_T)$.

Тогда долевой количественный состав портфеля $(\mu_1,...,\mu_n)$ можно найти по принципу минимизации различия между наблюденными и «чистыми» значениями доходности **Error! Reference source not found.**, приводящему к методу наименьших квадратов:

$$\begin{cases} J(\mu_1,...,\mu_n) = \sum_{t=1}^{T} \left(y_t - \hat{y}_t(\mu_1,...,\mu_n) \right)^2 \to \min \\ \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} J(\mu_1,...,\mu_n) = \sum_{t=1}^{T} \left(y_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i (p_{t,i} - p_{t-1,i})}{\sum_{j=1}^{n} \mu_j p_{t-1,j}} \right)^2 \to \min \\ \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1 \end{cases}$$

Однако для этого должны быть известны цены активов $(p_{1,i},...,p_{T,i})$, $i=1,...,n$.

Общий вид критерия определения долевого стоимостного состава портфеля

$$y_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i (p_{t,i} - p_{t-1,i})}{\sum_{j=1}^{n} m_j p_{t-1,j}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i p_{t-1,i} \left. \left(\frac{p_{t,i} - p_{t-1,i}}{p_{t-1,i}} \right) \right\} x_{t,i}}{\sum_{j=1}^{n} m_j p_{t-1,j}} = \sum_{i=1}^{n} \overbrace{\left(\frac{m_i p_{t-1,i}}{\sum_{j=1}^{n} m_j p_{t-1,j}} \right)}^{\beta_{t,i}} x_{t,i} = \sum_{i=1}^{n} \beta_{t,i} x_{t,i} \quad (1)$$

Теперь «чистая» доходность портфеля выражается через доходности активов $x_{t,i}$, существенно более доступные, чем их цены $p_{t,i}$. Правда, вместо вектора долевого количественного состава портфеля $(\mu_1,...,\mu_n)$ придется искать всю векторную последовательность долевых распределений стоимости портфеля $(\beta_{1,i},...,\beta_{T,i})$, $i=1,...,n$, $\sum_{i=1}^{n} \beta_{1,i} = 1$. Однако ниже мы покажем, что предположение о неизменном количественном составе портфеля выразится в том, что все векторы долевого распределения капитала $\boldsymbol{\beta}_t = (\beta_{t,1} \cdots \beta_{t,n})^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^n$,

$\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_t = 1$, полностью определяются начальным распределением $\boldsymbol{\beta}_1 = (\beta_{1,1},...,\beta_{1,n}) \in \mathrm{R}^n$, $\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_1 = \sum_{i=1}^{n}\beta_{1,i} = 1$, $\beta_{1,i} \geq 0$, $i = 1,...,n$.

$$\begin{cases} J(\beta_{1,1},...,\beta_{1,n}) = \sum\limits_{t=1}^{T}\left(y_t - \hat{y}_t(\beta_{1,1},...,\beta_{1,n})\right)^2 \to \min \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\beta_{1,i} = 1,\ \beta_{1,i} \geq 0,\ i = 1,...,n \end{cases}$$

Рассмотрим динамику долевого распределение стоимости портфеля (β - коэффициентов):

$$\beta_{t,i} = \frac{m_i p_{t-1,i}}{\sum\limits_{j=1}^{n} m_j p_{t-1,j}} = \frac{m_i\left(p_{t-1,i} + p_{t-2,i} - p_{t-2,i}\right)}{\sum\limits_{j=1}^{n} m_j\left(p_{t-1,j} + p_{t-2,j} - p_{t-2,j}\right)} = \frac{m_i\left(p_{t-2,i} + (p_{t-1,i} - p_{t-2,i})\right)}{\sum\limits_{j=1}^{n} m_j\left(p_{t-2,j} + (p_{t-1,j} - p_{t-2,j})\right)} =$$

$$\frac{m_i p_{t-2,i}\left(1 + \overbrace{\left(\frac{p_{t-1,i} - p_{t-2,i}}{p_{t-2,i}}\right)}^{x_{t-1,i}}\right)}{\sum_{j=1}^{n} m_j p_{t-2,j}\left(1 + \underbrace{\left(\frac{p_{t-1,j} - p_{t-2,j}}{p_{t-2,j}}\right)}_{x_{t-1,j}}\right)} = \frac{(1 + x_{t-1,i})m_i p_{t-2,i}}{\sum_{j=1}^{n}(1 + x_{t-1,j})m_j p_{t-2,j}}$$

Зафиксируем промежуточный результат:

$$\beta_{t,i} = \frac{(1 + x_{t-1,i})m_i p_{t-2,i}}{\sum_{j=1}^{n}(1 + x_{t-1,j})m_j p_{t-2,j}}$$

Заметим, что здесь $m_i p_{t-2,i}$ – стоимость активов i-го вида в портфеле на начало $(t-1)$-го периода владения. Если мы разделим каждую из этих величин в числителе и знаменателе на $\sum_{k=1}^{n} m_k p_{t-2,k}$, то получим доли стоимости активов соответствующих видов в портфеле на этот момент времени:

$$\beta_{t-1,i} = \frac{m_i p_{t-2,i}}{\sum_{k=1}^{n} m_k p_{t-2,k}}$$

$$\beta_{t,i} = \frac{(1 + x_{t-1,i})\beta_{t-1,i}}{\sum_{j=1}^{n}(1 + x_{t-1,j})\beta_{t-1,j}} = \frac{1 + x_{t-1,i}}{\underbrace{\sum_{j=1}^{n}\beta_{t-1,j}}_{=1} + \sum_{j=1}^{n} x_{t-1,j}\beta_{t-1,j}}\beta_{t-1,i} = \frac{1 + x_{t-1,i}}{1 + \sum_{j=1}^{n} x_{t-1,j}\beta_{t-1,j}}\beta_{t-1,i}.$$

Мы получили две эквивалентные записи точного соотношения Buy & Hold

$$\boxed{\beta_{t,i} = \frac{(1+x_{t-1,i})\beta_{t-1,i}}{\sum_{j=1}^{n}(1+x_{t-1,j})\beta_{t-1,j}}}$$

$$\boxed{\beta_{t,i} = \frac{1+x_{t-1,i}}{1+\sum_{j=1}^{n}x_{t-1,j}\beta_{t-1,j}}\beta_{t-1,i}}$$

Из видно, что сумма β-коэффициентов в любой момент времени равна единице

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_{t,i} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(1+x_{t-1,i})\beta_{t-1,i}}{\sum_{j=1}^{n}(1+x_{t-1,j})\beta_{t-1,j}} = 1$$ для всех $t=1,...,T$

Из этих же равенств очевидно, что последовательность $\left(\boldsymbol{\beta}_1,...,\boldsymbol{\beta}_T\right) = \left((\beta_{1,1}\cdots\beta_{1,n}),...,(\beta_{T,1}\cdots\beta_{T,n})\right)$ полностью определяется начальным распределением $(\beta_{1,1}\cdots\beta_{1,n})$.

Таким образом, существуют замкнутые выражения для каждого из последовательных распределений капитала $\left[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2(\boldsymbol{\beta}_1),...,\boldsymbol{\beta}_T(\boldsymbol{\beta}_1)\right]$. Критерий оценивания состава портфеля Buy&Hold может быть записан в виде

$$\begin{cases} J(\beta_{1,1},...,\beta_{1,n}) = \sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \sum_{i=1}^{n}\left[\beta_{t,i}(\beta_{1,1},...,\beta_{1,n})\right]x_{t,i}\right)^2 \to \min \\ \sum_{i=1}^{n}\beta_{1,i} = 1,\ \beta_{1,i} \geq 0,\ i=1,...,n \end{cases}$$

Мы рассмотрим здесь два способа детальной записи этого критерия. Точный критерий 1

Общая структура критерия

Будем опираться на точное соотношение Buy & Hold

$$\beta_{t,i} = \frac{(1+x_{t-1,i})\beta_{t-1,i}}{\sum_{j=1}^{n}(1+x_{t-1,j})\beta_{t-1,j}}.$$

Найдем замкнутые выражения для каждого из последовательных распределений капитала $\left(\beta_{t,i}(\beta_{1,1},...,\beta_{1,n}),\ i=1,...,n\right)$.

Примем предположение $\left(\beta_{1,i}, i=1,...,n\right)$, $\sum_{i=1}^{n}\beta_{1,i}=1$, и обозначим компоненты числителя и знаменателя в **Error! Reference source not found.** для $t=2,3,...,T$ символами

$u_{1,i}=\beta_{1,i}$ для $t=1$ и $u_{t,i}=(1+x_{t-1,i})u_{t-1,i}$ для $t=2,3,...,T$.

Тогда

$$\begin{cases} u_{2,i}=(1+x_{1,i})u_{1,i}, \\ u_{3,i}=(1+x_{2,i})u_{2,i}=(1+x_{2,i})(1+x_{1,i})u_{1,i}, \\ u_{4,i}=(1+x_{3,i})u_{3,i}=(1+x_{3,i})(1+x_{2,i})(1+x_{1,i})u_{1,i}, \\ \qquad\qquad ... \\ u_{t,i}=\left(\prod_{s=1}^{t-1}(1+x_{s,i})\right)u_{1,i}=\beta_{1,i}\prod_{s=1}^{t-1}(1+x_{s,i}). \end{cases}$$

Согласно $\beta_{t,i}=\dfrac{u_{t,i}}{\sum_{j=1}^{n}u_{t,j}}$, и, таким образом,

$$\beta_{t,i}=\frac{\beta_{1,i}\prod_{s=1}^{t-1}(1+x_{s,i})}{\sum_{j=1}^{n}\beta_{1,j}\prod_{s=1}^{t-1}(1+x_{s,j})}$$

Последнее равенство полностью выражает зависимость значений всех β-коэффициентов от начального распределения капитала $(\beta_{1,1},...,\beta_{1,n})$.

Задача минимизации остаточной суммы квадратов в форме, более удобной, чем, запишется согласно

$$\begin{cases} J(\beta_{1,i}, i=1,...,n)=\sum_{t=1}^{T}\left(y_t-\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\beta_{1,i}\prod_{s=1}^{t-1}(1+x_{s,i})}{\sum_{j=1}^{n}\beta_{1,j}\prod_{s=1}^{t-1}(1+x_{s,j})}x_{t,i}\right)^2 \to \min \\ \sum_{i=1}^{n}\beta_{1,i}=1 \end{cases}$$

Квазивыпуклость критерия

Квазивыпуклость функции и условия квазивыпуклости

Функция $J(\boldsymbol{\beta}): \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ называется квазивыпуклой, если для любых двух точек $\boldsymbol{\beta}', \boldsymbol{\beta}'' \in \mathrm{R}^n$ и любого числа $0 \le z \le 1$ выполняется неравенство

Теорема. Функция $J(\boldsymbol{\beta}): \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ квазивыпукла тогда и только тогда, когда квазивыпукло всякое его одномерное сечение $f(z)=J\left(z\boldsymbol{\beta}'+(1-z)\boldsymbol{\beta}''\right)$, $\boldsymbol{\beta}', \boldsymbol{\beta}'' \in \mathrm{R}^n$.