Тема III

Теория перечисления Пойа

Разделы I

Действие группы на множестве: два определения

- Группа $\mathbf{G} = \langle G, \circ, e \rangle$, $|G| = n$.
- Множество T, $|T| = N$.
  - $Bij(T)$ — множество всех биекций (перестановок) элементов T.
  - $Symm(T)$ — симметрическая группа множества T:

$$Symm(T) = \langle Bij(T), *, 1_T \rangle,$$

Определение (I)

$$\alpha \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G}, Symm(T)).$$

Действие α группы $\mathbf{G}$ на множестве T: символически — $\mathbf{G} \underset{\alpha}{:} T$.

Действие группы на множестве: два определения...

Определение (II)

$$\alpha = \langle G, T; \circ, \star, e \rangle ,$$

где

$$G \times G \xrightarrow{\circ} G \text{ — групповая операция;}$$
$$G \times T \xrightarrow{\star} T \text{ — новая операция.}$$

Аксиомы для операций:

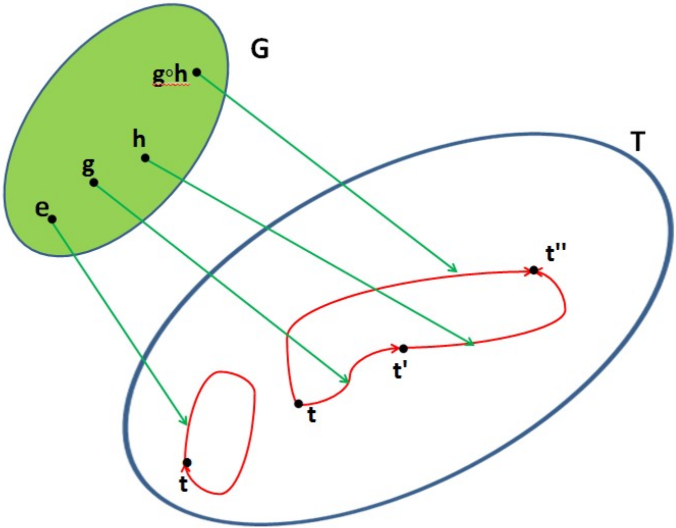
- $e \star t = t$;
- $(g \circ h) \star t = h * (g \star t)$.

Запись операции $\star$: $g(t) = t'$.

Аксиомы: $e(t) = t$ и $(g \circ h)(t) = h(g(t))$.

Т.е. элементы g группы G порождают перестановки на T, обладающие вышеуказанными свойствами.

Действие группы на множестве: схема



Для данной перестановки g:

Введём отношение эквивалентности $\sim_g$ на T —

$$t \sim_g t' \stackrel{\text{def}}{=} \exists k \left(g^k(t) = t' \right)$$

- Смежные классы эквивалентности $\sim_g$ называют *g-циклами*.
- Число всех смежных классов обозначим $C(g)$.
- Количества циклов длины $1, 2, \ldots, N$ обозначают $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N$ или $\nu_1(g), \nu_2(g), \ldots, \nu_N(g)$.
- Упорядоченную совокупность количеств циклов $\langle \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N \rangle$ называют *типом перестановки* g и обозначают $Type(g)$.

Понятно, что $C(g) = \sum\limits_{k=1}^{N} \nu_k(g)$ и $\sum\limits_{k=1}^{N} k \cdot \nu_k(g) = N$.

Тип перестановки: пример

Пусть

$$T = \{ 1, \ldots, 10 \},$$

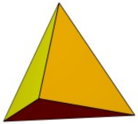
$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 6 & 1 & 8 & 5 & 2 & 7 & 10 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \\ = (1, 9, 3)(2, 6)(4, 8, 10)(5)(7)$$

Тогда

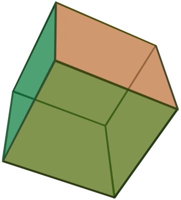
$$Type(g) = \langle 2, 1, 2, 0, \ldots, 0 \rangle,$$

$$C(g) = 2 + 1 + 2 = 5, \qquad |T| = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 10.$$

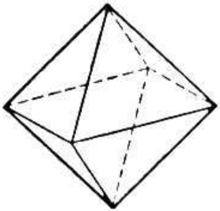
Платоновы тела — правильные 3-мерные многогранники



Это тетраэдр



А это — кубик



Октаэдр двойственен кубу

Платоновы тела — правильные 3-мерные многогранники

Платоновы тела	Группа вращения	Порядок группы
тетраэдр	T (тетраэдра)	$4 \cdot 3 = 12$
куб и октаэдр	O (октаэдра)	$8 \cdot 3 = 24$
икосаэдр и додекаэдр	Y (икосаэдра)	$12 \cdot 5 = 60$

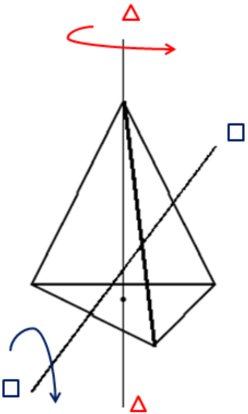
Октаэдр

Икосаэдр

Додекаэдр

T — группа вращения тетраэдра

$$T = \langle t, f \rangle,\ t^3 = f^2 = e, \text{ где:}$$



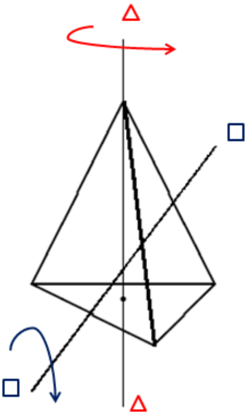
t — вращение на 120° вокруг оси, проходящей через вершину и центр тетраэдра ($\triangle$—$\triangle$); таких осей 4.

f — вращение на 180° вокруг оси, проходящей через центры двух противоположных рёбер ($\square$—$\square$); таких осей 3.

$$|T| = (3-1)\cdot 4 + (2-1)\cdot 3 + 1 = 12.$$

Тетраэдр двойственен самому себе $\Rightarrow$ действие на грани $=$ действие на вершины.

Действие T на грани (или вершины) тетраэдра: типы перестановок



$\square : Type(t) = Type(t^2) = \langle 1, 0, 1, 0 \rangle;$

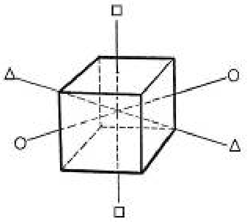
$\triangle: Type(f) = \langle 0, 2, 0, 0 \rangle.$

$$|T| = 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 1 = 12.$$

Тетраэдр двойственен самому себе $\Rightarrow$
действие на грани $=$
действие на вершины.

O — группа вращения куба

$$O = \langle t, f, r \rangle, t^4 = f^2 = r^3 = e, \text{ где}$$



t — вращение на 90° вокруг оси, проходящей через середины двух противоположных граней (□—□),

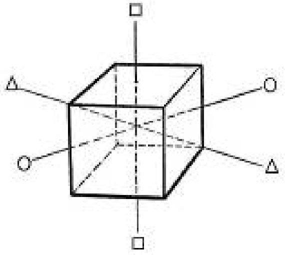
f — вращение на 180° вокруг оси, проходящей через середины двух противоположных рёбер (○—○),

r — вращение на 120° вокруг оси, проходящей через две противоположные вершины (△—△)

Сколько осей каждого типа? 3, 6 и 4 соответственно.

$$|O| = 3 \cdot 3 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 1 = 24.$$

Действие O на вершины куба: типы перестановок



$$\square : Type(t) = Type(t^3) = \\ = \langle 0, 0, 0, 2, 0, \ldots \rangle, \\ Type(t^2) = \langle 0, 4, 0, \ldots \rangle;$$

$$\circ : Type(f) = \langle 0, 4, 0, \ldots \rangle;$$

$$\triangle : Type(r) = Type(r^2) = \langle 2, 0, 2, 0, \ldots \rangle.$$

По всей группе $\mathbf{G}$:

Отношение эквивалентности $\sim_{\mathbf{G}}$ на T —

$$t \sim_{\mathbf{G}} t' \overset{\text{def}}{=} \underset{G}{\exists}\, g : g(t) = t'.$$

Классы этой эквивалентности называют *орбитами*.

Число орбит (классов эквивалентности) — $C(\mathbf{G})$.

Если $C(\mathbf{G}) = 1$ (любой элемент T может быть переведён в любой), то действие $\mathbf{G} \underset{\alpha}{:} T$ называют *транзитивным*.

Класс эквивалентности, в которую попадает элемент t будем обозначать $\mathrm{Orb}\,(t)$.

Фиксатор и стабилизатор. Лемма Бёрнсайда

Будем решать уравнение $g(t) = t$.
При выполнении этого равенства можно фиксировать t или g.

1. Фиксируем g, т.е. находим все элементы множества T, которые перестановка g оставляет на месте (*фиксатор*):
$$\{\, t \in T \mid g(t) = t \,\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Fix}\,(g) \subseteq T.$$
2. Фиксируем t, т.е. находим все перестановки g, которые оставляют данный элемент неподвижным (*стабилизатор*):
$$\{\, g \in G \mid g(t) = t \,\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Stab}\,(t) \subseteq G.$$

Справедливы равенства
$$C(\mathbf{G}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \Big| \mathrm{Fix}\,(g) \Big| = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in T} \Big| \mathrm{Stab}\,(t) \Big|;$$

первое называется *леммой Бёрнсайда* (или Коши-Фробениуса).

У. Бёрнсайд

Уильям Бёрнсайд
(William Burnside, 1852–1927)
— английский математик-алгебраист.
«Написал первый трактат о группах на английском языке и был первым, кто разработал теорию групп с современной абстрактной точки зрения».

Также знаменит формулированием *проблемы Бёрнсайда* (1902):
Будет ли конечнопорождённая группа, в которой каждый элемент имеет конченый порядок, обязательно конечной?

Ответ отрицательный (1992).

Стабилизатор есть подгруппа группы $\mathbf{G}$

1. $\mathrm{Fix}\,(g)$ — *фиксатор* перестановки $g \in \mathbf{G}$ (подмножество T);
2. $\mathrm{Stab}\,(t)$ — *стабилизатор* элемента $t \in T$ (подмножество $\mathbf{G}$).

Лемма (о стационарной подгруппе элемента t)

$$\mathrm{Stab}\,(t) \leqslant \mathbf{G}.$$

Доказательство

Зафиксируем $t \in T$ *и рассмотрим* $g, h \in \mathrm{Stab}\,(t)$. *Тогда* $g(t) = h(t) = t$ *и* $h^{-1}(t) = t$. *Следовательно,*

$$(g \circ h^{-1}) * t = t \Rightarrow g \circ h^{-1} \in \mathrm{Stab}\,(t)\,.$$

$\left|\mathrm{Stab}\,(t)\right| \geqslant 1$, поскольку всегда $e \in \mathrm{Stab}\,(t)$.

Элемент множества: длина орбиты и стабилизатор

Лемма

Длина орбиты $\mathrm{Orb}\,(t)$ *равна индексу* $\mathrm{Stab}\,(t)$ *в группе* $\mathbf{G}$*, т.е.*

$$\left|\mathrm{Orb}\,(t)\right| = \left|G\right| : \left|\mathrm{Stab}\,(t)\right|.$$

Пример

Пусть V — множество вершин куба. Найти стабилизатор вершины v куба при действии группы O на V.

Решение: $\mathrm{Stab}\,(v) \cong Z_3$ — группа вращений на $0°$ и $\pm 120°$ вокруг диагонали куба, проходящей через данную вершину.

Утверждение (следствие леммы)

Число элементов в группе вращения правильного многогранника есть $\left|V\right| \cdot \left|E_0\right|$*, где* $\left|V\right|$ *— число вершин, а* $\left|E_0\right|$ *— число рёбер, выходящих из одной вершины.*

Действие группы на множестве: пример

Действие группы V_4 на множестве $T = \{ t_1, \ldots, t_6 \}$

$\circ$	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

$g * t$	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
e	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
a	t_2	t_1	t_4	t_3	t_6	t_5
b	t_3	t_4	t_1	t_2	t_5	t_6
ab	t_4	t_3	t_2	t_1	t_6	t_5

$a :$
$$\begin{tikzcd} t_1 \arrow[r, leftrightarrow] & t_2 & t_5 \arrow[d, leftrightarrow] \\ t_3 \arrow[r, leftrightarrow] & t_4 & t_6 \end{tikzcd}$$

$b :$
$$\begin{tikzcd} t_1 \arrow[d, leftrightarrow] & t_2 \arrow[d, leftrightarrow] & t_5 \\ t_3 & t_4 & t_6 \end{tikzcd}$$

$ab :$
$$\begin{tikzcd} t_1 \arrow[dr, leftrightarrow] & t_2 \arrow[dl, leftrightarrow] & t_5 \arrow[d, leftrightarrow] \\ t_3 & t_4 & t_6 \end{tikzcd}$$

Действие группы на множестве: пример...

$$Type(e) = \langle 6, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle, \qquad Type(a) = \langle 0, 3, 0, 0, 0, 0 \rangle,$$
$$Type(b) = \langle 2, 2, 0, 0, 0, 0 \rangle, \qquad Type(ab) = \langle 0, 3, 0, 0, 0, 0 \rangle.$$
$$C(e) = 6, \ C(a) = C(ab) = 3, \ C(b) = 4.$$
$$\mathrm{Stab}\,(t_1) = \mathrm{Stab}\,(t_2) = \mathrm{Stab}\,(t_3) = \mathrm{Stab}\,(t_4) = e \leqslant V_4,$$
$$\mathrm{Stab}\,(t_5) = \mathrm{Stab}\,(t_6) = \langle e, b \rangle \leqslant V_4.$$
$$\mathrm{Fix}\,(a) = \mathrm{Fix}\,(ab) = \varnothing, \quad \mathrm{Fix}\,(b) = \{ t_5, t_6 \}, \quad \mathrm{Fix}\,(e) = T.$$
$$\left|\mathrm{Orb}\,(t_1)\right| = \frac{4}{1} = 4, \quad \left|\mathrm{Orb}\,(t_5)\right| = \frac{4}{2} = 2.$$
$$\frac{1}{4}\sum_{g\in G}\left|\mathrm{Fix}\,(g)\right| = \frac{6+2}{4} = 2,$$
$$\frac{1}{4}\sum_{t\in T}\left|\mathrm{Stab}\,(t)\right| = \frac{4\cdot 1 + 2\cdot 2}{4} = 2.$$

Разделы I

Пример применения леммы Бёрнсайда

Задача про слова

Составляются слова длины $l \geqslant 2$ из алфавита $A = \{\, a_1, \, \ldots, \, a_m \,\}$.

Слова считаются эквивалентными, если они получаются одно из другого перестановкой крайних букв.

Определить число S неэквивалентных слов.

Решение.

T — множество слов длины l в алфавите A, $N = |T| = m^l$.

Надо представить эквивалентности как орбиты некоторого действия подходящей группы G на T.

Очевидно, $g^2 = e$ и поэтому подходит $\mathbf{G} \cong Z_2 = \{\, e, \, g \,\}$.

Действие: g переставляет в слове крайние буквы.

Пример применения леммы Бёрнсайда...

Число S неэквивалентных слов есть число классов эквивалентности $C(\mathbf{G})$ действия $Z_2 \underset{\alpha}{:} T$ —

$$\left|\operatorname{Fix}(e)\right| = |T| = m^l, \qquad \left|\operatorname{Fix}(g)\right| = m^{l-2}\cdot m = m^{l-1}.$$

$$S = C(Z_2) = \frac{1}{2}\sum_{g\in G}\left|\operatorname{Fix}(g)\right| = \frac{m^l + m^{l-1}}{2} = \frac{m^{l-1}(m+1)}{2}.$$

Для $l = 3,\ m = 2 \Rightarrow S = \frac{4\cdot 3}{2} = 6$ (из всего 8)

Пусть $A = \{a, b\}$. Показаны слова и классы.

aaa	baa
aab	bab
aba	bba
abb	bbb

Цикловой индекс

Существует универсальный способ вычисления числа $C(\mathbf{G})$ — количества классов эквивалентности (= орбит).

Сопоставим каждой перестановке $g \in \mathbf{G}$ вес $w(g)$ по правилу:

$$Type(g) = \langle \nu_1, \dots, \nu_N \rangle \Rightarrow w(g) = \underbrace{x_1^{\nu_1} \cdot \dots \cdot x_N^{\nu_N}}_{\text{моном}}.$$

Определение

Средний вес подстановок в группе называется *цикловым индексом* действия $\mathbf{G} \underset{\alpha}{:} T$:

$$P(\mathbf{G} \underset{\alpha}{:} T, x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} w(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x_1^{\nu_1} \cdot \dots \cdot x_N^{\nu_N}.$$

Для продвинутых: это производящий полином многих переменных.

Цикловой индекс: обозначения и свойства

Другие обозначения: $P_{\mathbf{G}}(x_1, \ldots, x_N)$ и $P_{\mathbf{G}}$, $P(\mathbf{G})$.

- $\mathbf{G} \cong \mathbf{G}' \overset{?}{\Rightarrow} P_{\mathbf{G}} = P_{\mathbf{G}'}$ — да, если действия определены одинаково (согласовано).
- $P_{\mathbf{G}} = P_{\mathbf{G}'} \overset{?}{\Rightarrow} \mathbf{G} \cong \mathbf{G}'$ — нет, есть контрпример.

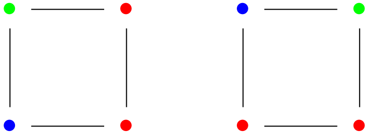
Как применять лемму «не-Бёрнсайда?»

Для применения универсального способа вычисления $C(\mathbf{G})$ надо представить эквивалентные элементы множества как классы эквивалентности действия некоторой группы $\mathbf{G}$ на этом множестве.

Число неэквивалентных раскрасок

Пусть задано действие $\mathbf{G} \underset{\alpha}{:} T$ группы $\mathbf{G}$ на множестве T.

- Припишем каждому элементу T одно из r значений (неформально: покрасим в один из r цветов). Всего, очевидно, имеется r^N раскрасок.
- Не будем различать раскраски, если при преобразовании $g : t \to t'$ t' раскрашен также как и t. Например, поворот на 90° —



не даёт нового раскрашивания вершин квадрата.

Вопрос: Сколько существует неэквивалентных раскрасок = классов эквивалентности $C(\mathbf{G})$?

Вычисление $C(\mathbf{G})$ через цикловой индекс

- Каждый класс эквивалентности это g-цикл; их $C(g) = \nu_1 + \ldots + \nu_N$ штук.
- Каждая перестановка $g \in \mathbf{G}$ с типом $\langle \nu_1, \ldots, \nu_N \rangle$ будет иметь r^{ν_1} неподвижных точек.

Следовательно, по лемме Бёрсайда, число полученных классов эквивалентности, т.е. неэквивалентных раскрасок

Теорема

$$C(\mathbf{G} \underset{\alpha}{:} T) = P(\mathbf{G} \underset{\alpha}{:} T, x_1, \ldots, x_N)\Big|_{x_1 = \ldots = x_N = r} = P_{\mathbf{G}}(r, \ldots, r).$$

Например, $P_{\mathbf{G}}(1, \ldots, 1) = 1$: если все элементы покрасить в один цвет, то таких раскрасок одна.

Задача про слова

Составляются слова длины $l \geqslant 2$ из алфавита $\{a_1, \ldots, a_m\}$. Слова считаются эквивалентными, если они получаются одно из другого перестановкой крайних букв. Определить число S неэквивалентных слов.

Было решение: $S = \dfrac{m^l + m^{l-1}}{2}$.

Другое решение: $\mathbf{G} = \{e, g\} \cong Z_2$; $\quad T: \underbrace{\bigcirc \overbrace{\bigcirc \ldots \bigcirc}^{l-2} \bigcirc}_{l}$.

Элемент g группы $\mathbf{G}$	$Type(g)$	$w(g)$	# мономов
e	$\langle l, 0, \ldots, 0 \rangle$	x_1^l	1
g	$\langle l-2, 1, 0, \ldots, 0 \rangle$	$x_1^{l-2} x_2^1$	1

Цикловой индекс: $P(x_1, \ldots, x_l) = \dfrac{1}{2}\left[x_1^l + x_1^{l-2}x_2^1\right]$.

$S = P(m, \ldots, m)$.

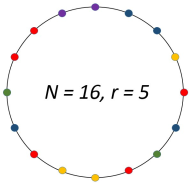
Классическая комбинаторная задача об ожерельях

Ожерелье — окружность, на которой на равных расстояниях по дуге (в вершинах правильного многоугольника) располагаются «бусины».

Задача об ожерельях. *Сколько различных ожерелий можно составить из N бусин r цветов?*

Варианты. Ожерелья неразличимы, если одно получается из другого *самосовмещением*:

1. поворотом в плоскости (бусины плоские, окрашены с одной стороны) — самодействие циклической группы Z_N;
2. поворотом и переворотом в пространстве (бусины круглые) — самодействие группы диэдра (двойной пирамиды) D_N.



Задача об ожерельях: $N = 5$, $r = 3$

Сколько разных ожерелий можно составить из 5 бусин 3 цветов?

T — вершины правильного пятиугольника. $\#Col(3) = ?$

❶ Ожерелья одинаковы, если одно получается из другого поворотом.

Решение. $\mathbf{G} \cong Z_5 = \langle t \rangle,\ t^5 = e,\ n = 5.$

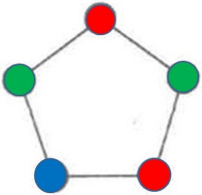
Элемент группы	$Type(g)$	$w(g)$	# мономов
e	$\langle 5, 0, 0, 0, 0 \rangle$	x_1^5	1
t, t^2, t^3, t^4	$\langle 0, 0, 0, 0, 1 \rangle$	x_5	4

Цикловой индекс: $P(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{1}{5}\left[x_1^5 + 4x_5\right]$.

$$\#Col(3) = P(3, \ldots, 3) = \frac{3^5 + 4 \cdot 3}{5} = \frac{3 \cdot 85}{5} = 3 \cdot 17 = 51.$$

Задача Олимпиады «Покори Воробьёвы горы – 2009»

Для 50 детей детского сада закуплены 50 одинаковых тарелок. По краю каждой тарелки равномерно расположено 5 белых кружочков. Воспитатели хотят перекрасить какие-либо из этих кружочков в другой цвет так, чтобы все тарелки стали различными.
Какое наименьшее число дополнительных цветов потребуется им для этого?



Как должны были решать школьники

Решение.

Пусть требуется r цветов.
Отбросим r вариантов раскраски в один цвет.

Число остальных вариантов —

без учёта возможности поворота тарелки: $r^5 - r$;

с учётом поворота: $\dfrac{r^5 - r}{5}$
(каждый вариант повторяется 5 раз).

Итого: $\#Col(r) = \dfrac{r^5 - r}{5} + r = \dfrac{r^5 + 4r}{5}$;

При 2 дополнительных цветах $\#Col(3) = 51$.

Задача об ожерельях: $N = 5, r = 3$, 2-й вариант

❷ Ожерелья одинаковы, если одно получается из другого поворотом и/или переворотом.

G — *группа диэдра* $D_5 = \langle t, f \rangle$, $t^5 = f^2 = e$, $n = |D_5| = 10$.

Элемент группы g	$Type(g)$	$w(g)$	# мономов
e	$\langle 5, 0, 0, 0, 0 \rangle$	x_1^5	1
t, t^2, t^3, t^4	$\langle 0, 0, 0, 0, 1 \rangle$	x_5	4
$f, tf, \ldots, t^4 f$	$\langle 1, 2, 0, 0, 0 \rangle$	$x_1 x_2^2$	5
Всего			10

Цикловой индекс: $P = \dfrac{1}{10}\left[x_1^5 + 4x_5 + 5x_1x_2^2\right]$.

$$\#Col(3) = P(x_1, \ldots, x_5)\big|_{x_1 = \ldots = x_5 = 3} = \frac{3^5 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 3^3}{10} = 39.$$

Запомним этот ответ.

Задача о раскраске сторон квадрата

Задача о раскраске сторон квадрата.
Стороны квадрата раскрашивают в r цветов.
Сколько существует различно окрашенных квадратов?

Решение. Группа самосовмещения квадрата в прострнстве — группа диэдра $D_4 = \langle t, f, s \rangle$, которая порождается тремя образующими:

- t : вращение на 90° вокруг центра симметрии (в выбранном направлении — по или против часовой стрелки);
- f : осевая симметрия относительно оси, проходящей через середины противоположных сторон;
- s : осевая симметрия относительно оси, проходящей через середины противоположных вершин.

$$t^4 = f^2 = s^2 = e, \quad |D_4| = 8 = n.$$

Задача о раскраске сторон квадрата...

При самодействии группы D_4 $(N = 4)$ её элементы будут иметь следующие веса:

- e : единичная перестановка оставит все стороны на месте, т.е. имеются 4 цикла длины 1, вес x_1^4 $(1$ перестановка);
- $t,\ t^3$: стороны циклически переходят друг в друга по и против часовой стрелке, длина цикла 4, вес x_4^1 $(2$ перестановки);
- t^2 : стороны переходят в противоположные, что даёт два цикла длины 2, вес — x_2^2 $(1$ перестановка);
- f : две противоположные стороны на месте, остальные две меняются местами, т.е. имеются два единичных цикла и один длины 2, вес — $x_1^2 x_2^1$ $(2$ оси);
- s : в двух парах смежных сторон элементы меняются местами, что даёт два цикла длины 2, вес — x_2^2 $(2$ оси).

Задача о раскраске сторон квадрата...

Цикловой индекс самодействия D_4:

$$P_{D_4}(x_1, \ldots, x_4) = \frac{1}{8}\left[x_1^4 + 2x_4 + 3x_2^2 + 2x_1^2x_2\right].$$

Число раскрасок квадрата в r цветов:

$$P_{D_4}(r, \ldots, r) = \frac{1}{8}\left[r^4 + 2r + 3r^2 + 2r^3\right].$$

В частности, в два и три цвета:

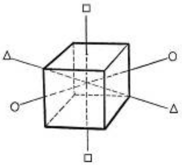
$$\#Col(2) = \frac{2^4 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + 2\cdot 2^3}{8} = \frac{16+4+12+16}{8} = 6.$$

$$\#Col(3) = \frac{3^4 + 2\cdot 3 + 3^4}{8} = \frac{81+6+81}{8} = \frac{168}{8} = 21.$$

Задача о раскраске куба

Задача (*раскраска граней куба в два цвета*).
Грани *куба раскрашивают в* 2 *и* 3 *цвета.*
Сколько существует различно окрашенных кубов?

Решение. Напоминание: $\mathbf{G} = O = \langle t, f, r \rangle$, $|O| = 24$.



t — вращение на 90° вокруг оси, проходящей через середины двух противоположных граней ($\square$—$\square$, 3 оси);

f — вращение на 180° вокруг оси, проходящей через середины двух противоположных рёбер ($\circ$—$\circ$, 6 осей);

r — вращение на 120° вокруг оси, проходящей через две противоположные вершины ($\triangle$—$\triangle$, 4 оси).

Задача о раскраске куба: обозначения элементов

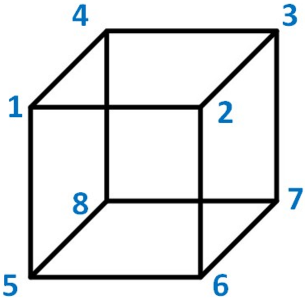
Обозначим через F множество граней куба; $|F| = N = 6$.
Выберем некоторую грань куба (квадрат) и обозначим её ①, а параллельную ей — ②.
Перенумеруем последовательно вершины грани ① числами $1, \ldots, 4$, а вершины грани ② — числами $5, \ldots, 8$ так, что вершина с номером i смежна с вершиной с номером $i+4, \; i = 1, 2, 3, 4.$

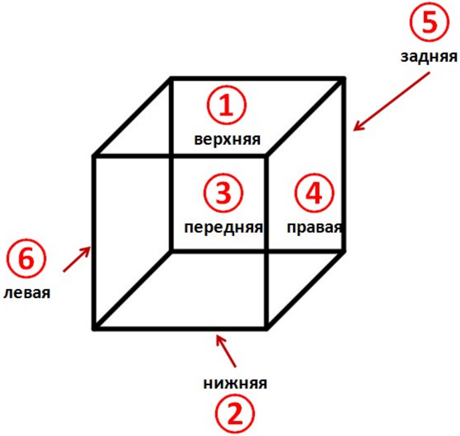
Перестановки далее указаны для случая, когда ось вращения

$\langle t \rangle$ проходит через середины граней ① и ②,
$\langle f \rangle$ проходит через середины рёбер (3-7) и (1-5),
$\langle s \rangle$ проходит через вершины (1) и (7),

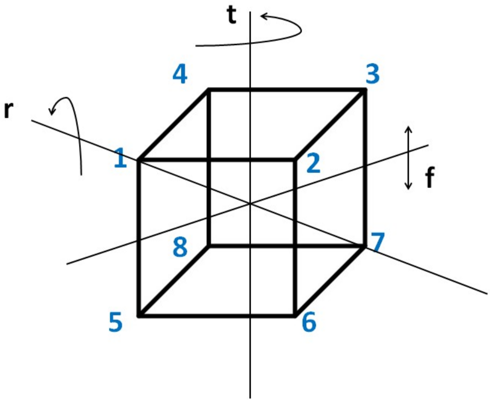
а грани обозначены:
$(1$-2-6-$5)$ через ③, параллельная ей грань — ⑤,
грань $(2$-3-7-$6)$ — через ④, параллельная ей грань — ⑥.

Задача о раскраске куба: обозначения вершин и граней





Задача о раскраске куба: обозначения осей



$$t^4 = f^2 = r^3 = e$$

Задача о раскраске куба: раскраска граней $|F| = N = 6$

$g \in O$	перестановка	$Type(g)$	$w(g)$	$\#w(g)$
e	(1)...(6)	$\langle 6, 0, \ldots \rangle$	x_1^6	1
t, t^3	(1)(2)(3456)	$\langle 2, 0, 0, 1, 0, \rangle$	$x_1^2 x_4$	$3 \cdot 2 = 6$
t^2	(1)(2)(35)(46)	$\langle 2, 2, 0, \ldots \rangle$	$x_1^2 x_2^2$	3
f	(12)(36)(45)	$\langle 0, 3, 0, \ldots \rangle$	x_2^3	6
r, r^2	(136)(245)	$\langle 0, 0, 2, 0, \ldots \rangle$	x_3^2	$4 \cdot 2 = 8$
Всего				24

$$P(x_1, \ldots, x_6) = \frac{1}{24}\left[x_1^6 + 6x_1^2x_4 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_2^3 + 8x_3^2\right].$$

$$\#Col(2) = P(2, \ldots, 2) = \frac{1}{24}\left[2^6 + 12 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 8 \cdot 2^2\right] = 10,$$

$$\#Col(3) = P(3, \ldots, 3) = \frac{1}{24}\left[3^6 + 12 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4 + 8 \cdot 3^2\right] = 48.$$

Цикловой индекс действия группы октаэдра —

— на множество R рёбер куба ($|R| = N = 12$):

$g \in O$	$Type(g)$	$w(g)$	$\#w(g)$
e	$\langle 12, 0, \ldots \rangle$	x_1^{12}	1
t, t^3	$\langle 0, 0, 0, 3, 0, 0 \rangle$	x_4^3	$3 \cdot 2 = 6$
t^2	$\langle 0, 6, 0, \ldots \rangle$	x_2^6	3
f	$\langle 2, 5, 0, \ldots \rangle$	$x_1^2 x_2^5$	6
r, r^2	$\langle 0, 0, 4, 0, \ldots \rangle$	x_3^4	$4 \cdot 2 = 8$
Всего			24

Цикловой индекс:

$$P(O \underset{\alpha}{:} R) = \frac{1}{24} \left[x_1^{12} + 6x_4^3 + 3x_2^6 + 6x_1^2 x_2^5 + 8x_3^4 \right].$$

Цикловой индекс действия группы октаэдра —

— на множество V вершин куба ($|V| = N = 8$):

$g \in O$	$Type(g)$	$w(g)$	$\#w(g)$
e	$\langle 8, 0, \ldots \rangle$	x_1^8	1
t, t^3	$\langle 0, 0, 0, 2, 0, 0 \rangle$	x_4^2	$3 \cdot 2 = 6$
t^2	$\langle 0, 4, 0, \ldots \rangle$	x_2^4	3
f	$\langle 0, 4, 0, \ldots \rangle$	x_2^4	6
r, r^2	$\langle 2, 0, 2, 0, \ldots \rangle$	$x_1^2 x_3^2$	$4 \cdot 2 = 8$
Всего			24

Цикловой индекс:

$$P(O \underset{\alpha}{:} V) = \frac{1}{24}\left[x_1^8 + 6x_4^2 + 9x_2^4 + 8x_1^2 x_3^2\right].$$

Задача (перечисление графов).

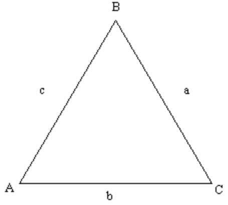
Сколько имеется неориентированных непомеченных графов (без петель и кратных рёбер) с тремя вершинами?

Решение. T — стороны треугольника, $N = 3$.

$\mathbf{G} \cong S_3$ — все перестановки сторон,

$$n = 3! = 6.$$

$\mathbf{G} \underset{\alpha}{:} T$ — самодействие группы S_3



Графы неориентированные —

$r = 2$ — пометки «есть ребро/нет ребра»

$$S_3 = \{\, e,\ (abc),\ (acb),\ ((a)(bc)),\ ((b)(ac)),\ ((c)(ab))\,\}$$

Перечисление графов...

$$S_3 = \{\, e,\ \underbrace{(abc)}_{t},\ \underbrace{(acb)}_{t^2},\ \underbrace{((a)(bc))}_{f},\ \underbrace{((b)(ac))}_{tf},\ \underbrace{((c)(ab))}_{t^2 f} \,\} = \langle\, t,\ f \,\rangle$$

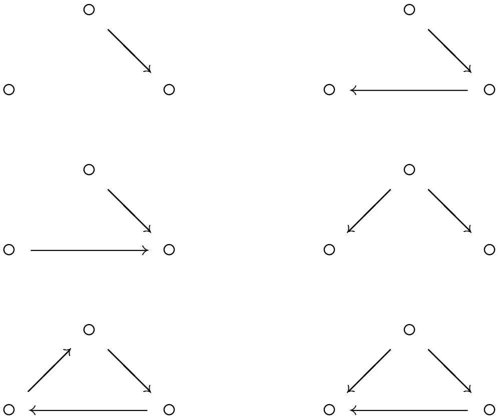
Элемент группы g	$Type(g)$	$w(g)$	$\#w(g)$
$e = (a)(b)(c)$	$\langle\, 3,\ 0,\ 0 \,\rangle$	x_1^3	1
$t,\ t^2$	$\langle\, 0,\ 0,\ 1 \,\rangle$	x_3^1	2
$f,\ tf,\ t^2 f$	$\langle\, 1,\ 1,\ 0 \,\rangle$	$x_1^1 x_2^1$	3
Всего			6

$$P(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{6}\left[\, x_1^3 + 2x_3^1 + 3x_1^1 x_2^1 \,\right],$$

$$P(2,2,2) = \mathbf{4}.$$

Перечисление графов...

Перечислим ориентированные: пустой граф и графы



— всего 7 графов, неориентированных — 4.

Цикловые индексы самодействия S_n, Z_n, D_n и действия O на элементы куба

$$P(S_n) = \sum_{\substack{(j_1,\ldots,j_n)\in\mathbb{N}_0^n \\ 1j_1+2j_2+\ldots+nj_n=n}} \frac{x_1^{j_1}x_2^{j_2}\ldots x_n^{j_n}}{(1^{j_1}j_1!)(2^{j_2}j_2!)\ldots(n^{j_n}j_n!)},$$

$$P(Z_n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)x_d^{n/d}, \quad \varphi \text{ — функция Эйлера},$$

$$P(D_n) = \frac{1}{2}P(Z_n) + \begin{cases} \frac{1}{2}x_1x_2^{(n-1)/2}, & \text{если } n \text{ нечётно}, \\ \frac{1}{4}\left[x_2^{n/2} + x_1^2x_2^{n/2-1}\right], & \text{если } n \text{ чётно}, \end{cases}$$

$$P(O \underset{\alpha}{:} V) = \frac{1}{24}\left[x_1^8 + 9x_2^4 + 6x_4^2 + 6x_4^2 + 8x_1^2x_3^2\right] \text{ (на вершины)},$$

$$P(O \underset{\alpha}{:} E) = \frac{1}{24}\left[x_1^{12} + 3x_2^6 + 8x_3^4 + 6x_4^2 + 8x_1^2x_2^5 + 6x_4^3\right] \text{ (на рёбра)},$$

$$P(O \underset{\alpha}{:} F) = \frac{1}{24}\left[x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4 + 6x_2^3 + 8x_3^2\right] \text{ (на грани)}.$$

Разделы I

Теорема Пойа

К множеству T, $|T| = N$, группе $\mathbf{G}$, $|G| = n$ и действию $\mathbf{G} \underset{\alpha}{:} T$ добавим множество $R = \{c_1, \ldots, c_r\}$, меток («красок»), и совокупность функций $F = R^T$ — приписывания меток (*раскрашиваний*) элементам T.

$\mathbf{G}$, действуя на T, действует и на R^T — $\circ : R^T \times G \stackrel{\circ}{=} R^T$.

Придадим вес элементам R: $w(c_i) = y_i$, $i = \overline{1, r}$.

Теорема (Редфилда-Пойа; 1927, 1937)

Цикловой индекс действия группы $\mathbf{G}$ *на* R^T *есть*

$$P(\mathbf{G} \underset{\alpha}{:} R^T) = P(\mathbf{G} \underset{\alpha}{:} T, x_1, \ldots, x_N)\Big|_{x_k = y_1^k + \ldots + y_r^k,\ k = \overline{1,N}}$$

Теорема Пойа...

Следствие

Если все веса выбраны одинаковыми ($y_1 = \ldots y_r = 1$), *то* $x_1 = \ldots x_N = r$ *и* $W(F)$ *— число классов эквивалентности*

$$C(\mathbf{G} \underset{\alpha}{:} R^T) = C(\mathbf{G} \underset{\alpha}{:} T) = P(\mathbf{G} \underset{\alpha}{:} T, r, \ldots, r)\,.$$

— лемма Бёрнсайда.

Что можно определить (подсчитать) с помощью:

леммы Бёрнсайда — общее число неэквивалентных разметок (раскрасок);

теорема Редфилда-Пойа — число разметок данного типа, т.е. содержащих данное количество элементов конкретного цвета.

Д. Пойа

Дьёрдь Пойа (Pólya György, 1887–1985) — венгерскийматематик. После окончания Будапештского университета работал в Высшей технической школе в Цюрихе, а с 1940 г. — в Стэнфордском университете (США).

Внёс заметный вклад в теорию чисел, функциональный анализ, математическую статистику (*распределение Пойа*) и комбинаторику (*теорема Редфилда–Пойа*).
Пойа много работал со школьными учителями математики и внёс большой вклад в популяризацию науки.

Усложним задачу об ожерельях $N = 5, r = 3$

Задача об ожерельях *(5 бусин 3 цветов).*
Цвета — красный, синий, зелёный. Ожерелья одинаковы, если одно получается из другого поворотом и/или переворотом.
Сколько имеется ожерелий, имеющих ровно 2 красные бусины?

Решение. Было: $\mathbf{G} = D_5$, цикловой индекс
$P = \frac{1}{10}\left[x_1^5 + 4x_5 + 5x_1x_2^2\right]$,
всего ожерелий $P(3,\ldots,3) = 39$ (только поворот — 51).

$$x_1 = y_1 + y_2 + y_3, \quad x_2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \quad \ldots, \quad x_5 = y_1^5 + y_2^5 + y_3^5.$$

$$\begin{cases} w(\text{красный}) & = y_1, \\ w(\text{синий}) & = y_2, \\ w(\text{зелёный}) & = y_3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = y, \\ y_2 = y_3 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 & = y + 2, \\ x_2 & = y^2 + 2, \\ \ldots & \\ x_5 & = y^5 + 2. \end{cases}$$

Задача об ожерельях: 5 бусин 3 цветов...

$$P(x_1, \ldots, x_5) = \frac{1}{10}\left[x_1^5 + 4x_5 + 5x_1x_2^2\right]$$

$$x_k \mapsto y^k + 2,\ k = \overline{1,5}; \quad P(y) = \sum_{i=1}^{5} u_i y^i, \ \boxed{u_2 = ?}$$

$$P(y) = \frac{1}{10}\left[u_0 + u_1 y + u_2 y^2 + \ldots + u_5 y^5\right] =$$

$$= \frac{1}{10}\left[(y+2)^5 + 4(y^5+2) + 5(y+2)(y^2+2)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{10}\left[\ldots + C_5^2 2^3 y^2 + \ldots + 5(y+2)(y^4+4y^2+4)\right] =$$

$$= \frac{1}{10}\left[\ldots + (10\cdot 8 + 5\cdot 2\cdot 4)y^2 + \ldots\right].$$

$$u_2 = \frac{80+40}{10} = 12.$$

Задача о раскраске куба

Вершины куба помечают красными и синим цветами. Сколько существует

1. *разнопомеченных кубов;*
2. *кубов, у которых половина вершины красные;*
3. *кубов, у которых не более 2 красных вершин?*

Решение. Цикловой индекс действия группы O на вершины куба

$$P(O \underset{\alpha}{:} V) = \frac{1}{24}\left[\, x_1^8 + 6x_4^2 + 9x_2^4 + 8x_1^2x_3^2 \,\right].$$

1. Число разнопомеченных кубов —

$$\#Col(3) = P|_{x_1=\ldots=x_8=2} = \frac{552}{24} = 23\,.$$

Задача о раскраске куба... $\left(\frac{1}{24}\left[x_1^8+6x_4^2+9x_2^4+8x_1^2x_3^2\right]\right)$

2. $w(\text{красный}) = y,\ w(\text{синий}) = 1,\ x_k = y^k + 1,\ k = \overline{1,8}$:

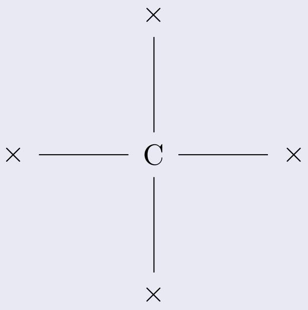
$$\#Col(4,4) = \frac{1}{24}\left[(y+1)^8 + 9\cdot(y^2+1)^4 + 6\cdot(y^4+1)^2 + \right.$$
$$\left. + 8\cdot(y+1)^2(y^3+1)^2\right] =$$
$$= \frac{1}{24}\left[\ldots + 28y^2 + C_8^4 y^4 + \ldots + 9(\ldots 4y^2 + 6y^4 + \ldots) + \right.$$
$$\left. \ldots + 6\cdot 2y^4 \ldots + 8(\ldots + 2y + y^2 + \ldots)(\ldots + 2y^3 + \ldots)\right].$$
$$u_4 = \frac{1}{24}\left[70 + 9\cdot 6 + 6\cdot 2 + 8\cdot 2\cdot 2\right] = \frac{168}{24} = 7.$$

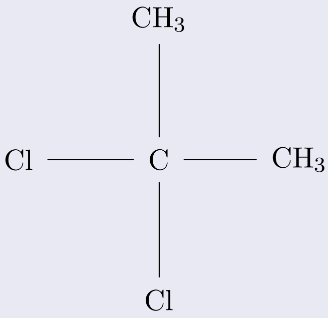
3. $\#Col(\leqslant 2, *) = u_0 + u_1 + u_2. \quad u_0 = u_1 = 1.$

$$u_2 = \frac{1}{24}\left[\ldots + 28y^2 + \ldots + 9(\ldots + 4y^2 \ldots) + 8(\ldots + y^2 + \ldots)\right] =$$
$$= \frac{28+36+8}{24} = \frac{72}{24} = 3.$$
$$\#Col(\leqslant 2, *) = 1 + 1 + 3 = 5.$$

Задача о числе молекул

Задача. *Рассмотрим молекулы* 4*-валентного углерода* C*:*





где на на месте $\times$ *могут находится* $\mathrm{CH_3}$ *(метил),* $\mathrm{C_2H_5}$ *(этил),* H *(водород) или* Cl *(хлор). Например — дихлорбутан.*

Задача о числе молекул...

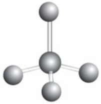
(продолжение)

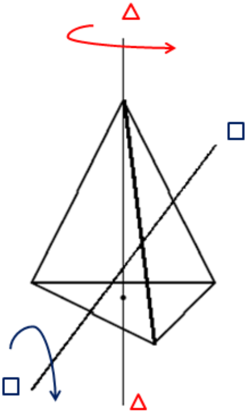
Найти

1. *общее число* M *всех молекул;*
2. *число молекул с* $H = 0, 1, 2, 3, 4$ *атомами водорода.*

Задача о числе молекул...

Решение. Какая группа действует и на каком множестве?
$T = \langle t, f \rangle, t^3 = f^2 = e$, где





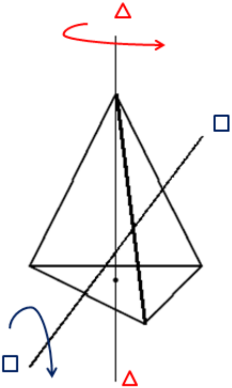
t — вращение на 120° вокруг оси, проходящей через вершину и центр тетраэдра ($\triangle$—$\triangle$);
f — вращение на 180° вокруг оси, проходящей через центры двух противоположных рёбер ($\square$—$\square$).

$$P(T \underset{\alpha}{:} V) = \frac{1}{12}\left[x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2\right].$$

Почему перед x_1x_3 коэффициент 8, ведь осей $\triangle$—$\triangle$ всего 4?

Задача о числе молекул... (группа вращения тетраэдра)

Цикловой индекс действия группы T на вершины тетраэдра —



g	$Type(g)$	$w(g)$	Кол-во
e	$\langle 4,0,0,0 \rangle$	x_1^4	1
$t,\ t^2$	$\langle 1,0,1,0 \rangle$	$x_1 x_3$	$4 \cdot 2 = 8$
f	$\langle 0,2,0,0 \rangle$	x_2^2	3

$$P(x_1, \ldots, x_4) = \frac{1}{12}\left[\, x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 \,\right]$$

Задача о числе молекул... (группа вращения тетраэдра)...

1. Имеем $N = 4$, действие T на вершины тетраэдра:
$$P(x_1, \ldots, x_4) = \frac{1}{12}\left[x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2\right].$$
Всего молекул (4 радикала) —
$$M = P(4, \ldots, 4) = \frac{1}{12}\left[4^4 + 8 \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2\right] = \frac{16 \cdot 27}{12} = 36.$$
2. Веса: $y_1 = \mathrm{H}$, $y_2 = y_3 = y_4 = 1$.
Подстановка в P: $x_k = \mathrm{H}^k + 3$, $k = \overline{1, 4}$.

Задача о числе молекул... (группа вращения тетраэдра)...

$P(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{12}\left[x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2\right].$

Проводим подстаковку — $x_k \mapsto H^k + 3,\ k = 1, 2, 3.$

$$P(H) = \frac{1}{12}\left[(\mathrm{H}+3)^4 + 8\,(\mathrm{H}+3)\left(\mathrm{H}^3+3\right) + 3\left(\mathrm{H}^2+3\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{12}\left[\left(\mathrm{H}^4 + 4\cdot\mathrm{H}^3\cdot 3 + 6\cdot\mathrm{H}^2\cdot 9 + 4\cdot\mathrm{H}\cdot 27 + 81\right) + \right.$$

$$\left. +8\left(\mathrm{H}^4 + 3\mathrm{H}^3 + 3\mathrm{H} + 9\right) + 3\left(\mathrm{H}^4 + 6\mathrm{H}^2 + 9\right)\right] =$$

$$= 1\cdot\mathrm{H}^4 + 3\cdot\mathrm{H}^3 + 6\cdot\mathrm{H}^2 + 11\cdot\mathrm{H} + 15.$$

Итого имеется молекул с числом атома водорода:
с 4-мя — 1 шт., с 3-мя — 3 шт., с 2-мя — 6 шт.,
с 1-м — 11 шт., без атомов водорода — 15 шт.,
всего — $1 + 3 + 6 + 11 + 15 = 36$.

Разделы I

Задача ТП-1

Каждое вращение куба переставляет его грани, т.е. задаёт группу перестановок.
Определить стабилизатор некоторой грани в этой группе.

Решение.

Пусть a — грань куба.

Перестановки, оставляющие неподвижной грань суть e, t, t^2, t^3, где t — вращение на 90° вокруг оси, проходящей через две противоположные грани.

Таким образом, $\mathrm{Stab}\,(a) = \langle\, t \,\rangle \cong Z_4$.

Задача ТП-2

Найти цикловой индекс самодействия группы симметрии правильного треугольника.

Решение. Группа симметрии правильного треугольника = группа диэдра $D_3 \cong S_3$, $|D_3| = 6$.
$D_3 = \langle t, s \rangle$, $t^3 = s^2 = e$, $t^2 s = st$,

t — вращение на $120°$ вокруг центра,

s — отражение относительно оси симметрии.

Элемент группы g	$Type(g)$	$w(g)$	кол-во
$e = (1)(2)(3)$	$\langle 3, 0, 0 \rangle$	x_1^3	1
$t = (123)$, $t^2 = (132)$	$\langle 0, 0, 1 \rangle$	x_3	2
$s = (1)(23)$, st, st^2	$\langle 1, 1, 0 \rangle$	$x_1 x_2$	3

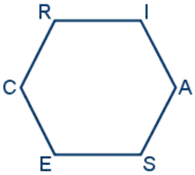
Цикловой индекс $P_{S_3} = \dfrac{1}{6}\left[\, x_1^3 + 2x_3 + 3x_1 x_2 \,\right]$.

Задача ТП-3

Найти цикловой индекс транзитивного самодействия группы Z_6.

Решение. Обозначим последовательно вершины правильного шестиугольника буквами I, A, S, E, C, R.
$Z_6 = \langle t \rangle$, $t^6 = e$, t — поворот на 60°.

Элемент g группы Z_6	$Type(g)$	$w(g)$
$e = (I)(A)\dots(R)$	$\langle 6, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$	x_1^6
$g = (IASECR)$	$\langle 0, 0, 0, 0, 0, 1 \rangle$	x_6
$g^2 = (ISC)(AER)$	$\langle 0, 0, 2, 0, 0, 0 \rangle$	x_3^2
$g^3 = (IE)(AC)(SR)$	$\langle 0, 3, 0, 0, 0, 0 \rangle$	x_2^3
$g^4 = (ICS)(ARE)$	$\langle 0, 0, 2, 0, 0, 0 \rangle$	x_3^2
$g^5 = (IRCESA)$	$\langle 0, 0, 0, 0, 0, 1 \rangle$	x_6



$$P_{Z_6} = \frac{1}{6}\left[x_1^6 + x_2^3 + 2x_3^2 + 2x_6\right] = \frac{1}{6}\sum_{d|6}\varphi(d)x_d^{6/d}.$$

Задача ТП-4 (о компостере)

Компостером назовём квадратную таблицу 4×4, в которой каждая клетка может быть либо пустой, либо содержать в центре символ $\bullet$.
Сколько существует различных компостеров, если не различать те, которые могут быть получены один из другого самосовмещениями в пространстве?

Решение.
Найдём цикловой индекс действия группы диэдра D_4 на 16 клеток компостера.
Группа D_4 содержит 8 перестановок, которым соответствуют следующие мономы циклового индекса указанного действия:

- тождественная перестановка, порождающая 16 единичных циклов, моном — x_1^{16};

Задача ТП-4...

- две перестановки, соответствующие поворотам квадрата на 90° по и против чистовой стрелки, порождающие 4 цикла длины 4 — моном x_4^4;
- одна перестановка, соответствующая повороту квадрата на 180° (центральная симметрия) и порождающая 8 циклов длины 2 — моном x_2^8;
- две перестановки, соответствующие симметрии относительно осей, проходящих через середины противоположных сторон квадрата, порождающие 8 циклов длины 2 — моном x_2^8;
- две перестановки, соответствующие симметрии относительно осей, проходящих через середины противоположных вершин квадрата, порождающие 4 единичных цикла и 6 циклов длины 2 — моном $x_1^4 x_2^6$.

Задача ТП-4...

В итоге цикловой индекс действия группы самосовмещения компостера в пространстве на его элементы есть

$$P(x_1, \ldots, x_4) = \frac{1}{8}\left[x_1^{16} + 2x_4^4 + 3x_2^8 + 2x_1^4x_2^6\right].$$

Наличие/отсутствие в клетке символа $\bullet$ описывается их отображением в двухэлементное множество (раскраске в два цвета), поэтому число N различных компостеров есть

$$N = P(2, 2, \ldots) = \frac{1}{8}\left[2^{16} + 2 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^8 + 2 \cdot 2^4 \cdot 2^6\right] = 8548.$$

К аналогичной задаче сводится задача о числе фотошаблонов рисунков соединений для интегральных схем.

Задача ТП-5

На стеклянных пластинах рисуют одинаковые прямоугольники и раскрашивают их стороны в 2 цвета.
Сколько можно нарисовать таких различных прямоугольников?

Решение. Найдём цикловой индекс P_R действия группы R самосовмещений прямоугольника в пространстве на его стороны. Группа $R = \langle t, f \rangle$ порождается образующими: t — вращение вокруг центра симметрии на $180°$, f — отражение вокруг оси, проходящей через середины противоположных сторон (2 оси).

$g \in R$	$Type(g)$	$w(g)$	$\#$
e	$\langle 4, 0, 0, 0 \rangle$	x_1^4	1
t	$\langle 0, 2, 0, 0 \rangle$	x_2^2	1
f	$\langle 2, 1, 0, 0 \rangle$	$x_1^2 x_2$	2

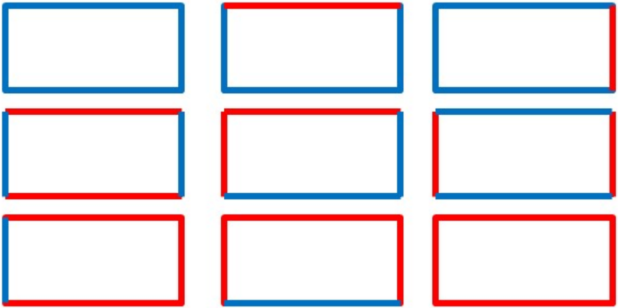
$$P_R(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{4}\left[x_4 + x_2^2 + 2x_1^2 x_2 \right]$$

Задача ТП-5...

Число прямоугольников со сторонами, раскрашенными в 2 цвета:

$$N = P_R(2, \ldots, 2) = \frac{16+4+16}{4} = \frac{36}{4} = 9.$$

Вот они:



Задача ТП-6

Определить число различных раскрасок правильной четырёхугольной пирамиды П в 3 цвета.

Решение. Занумеруем последовательно боковые грани П числами $1, \ldots 4$, а основание — 5.
$\mathbf{G} \cong Z_4 = \langle\, t \,\rangle$, t — вращение на $90°$.

Элемент группы g	$Type(g)$	$w(g)$
$e = (1)(2)(3)(4)(5)$	$\langle\, 5,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0 \,\rangle$	x_1^5
$r = (1234)(5)$	$\langle\, 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0 \,\rangle$	$x_1 x_4$
$r^2 = (12)(34)(5)$	$\langle\, 1,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0 \,\rangle$	$x_1 x_2^2$
$r^3 = (1432)(5)$	$\langle\, 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0 \,\rangle$	$x_1 x_4$

$$P(x_1, \ldots, x_5) = \frac{1}{4}\left[\, x_1^5 + 2x_1x_4 + x_1x_2^2 \,\right],$$

$$P(3, \ldots, 3) = \frac{3^5 + 2 \cdot 3^2 + 3^3}{4} = \frac{9 \cdot (27 + 2 + 3)}{4} = \frac{9 \cdot 32}{4} = 72.$$

Задача ТП-7

Сколькими геометрически различными способами три абсолютно одинаковые мухи могут усесться в вершинах правильного семиугольника, нарисованного на листе бумаги?

Решение. Множество T — вершины семиугольника, на которые действует группа $Z_7 = \langle t \rangle,\ t^7 = e$.

Элемент $g \in Z_7$	$Type(g)$	$w(g)$	кол-во
e	$\langle 7, 0, \ldots \rangle$	x_1^7	1
$t, t^2, \ldots, t^6$	$\langle 0, \ldots, 0, 1 \rangle$	x_7	6
Всего			7

Цикловой индекс самодействия Z_7:

$$P_{Z_7}(x_1, \ldots, x_7) = \frac{1}{7}\left[x_1^7 + 6x_7\right] = \frac{1}{7}\sum_{d|7} \varphi(d) x_d^{7/d}.$$

Задача ТП-7...

Число различных раскрасок в 2 цвета (муха есть/нет), при условии окраски ровно 3 вершин из 7 есть коэффициент u_3 при y^3 после подстановки $x_1 \mapsto y+1,\ x_7 \mapsto y^7+1$ в P_{Z_7}:

$$P(y) = \frac{1}{7}\left[\,(y+1)^7 + 6(y+1)\,\right] = \frac{1}{7}\left[\ldots + C_7^3 y^3 + \ldots\right].$$

$$u_3 = \frac{7!}{7\cdot 3!\cdot 4!} = \frac{5\cdot 6}{2\cdot 3} = 5.$$

Задача ТП-8

Боковые грани правильной шестиугольной пирамиды окрашиваются в красный, синий и зелёный цвета. Определить

(а) *число различных 2- и 3-цветных пирамид;*

(б) *число пирамид с одной красной гранью;*

(в) *число пирамид, у которых не менее трёх красных граней.*

Решение. Имеем транзитивное самодействие Z_6.

(а) Общее число пирамид.

$$P(Z_6) = \frac{1}{6}\sum_{d|6}\varphi(d)\, x_d^{6/d} \; \boxed{=}$$

Задача ТП-8...

$$d = 1,\ 2,\ 3,\ 6. \quad \varphi(1) = \varphi(2) = 1,\ \varphi(3) = \varphi(6) = 2\,.$$

$$\boxed{=}\ \frac{1}{6}\left[\,x_1^6 + x_2^3 + 2x_3^2 + 2x_6\,\right] = P_{Z_6}(x_1, \ldots, x_6)$$

(P_{Z_6} мы уже находили в задаче ТП-3).

$$\#Col(2) = P(2, \ldots, 2) =$$

$$= \frac{1}{6}\left[2^6 + 2^3 + 2\cdot 2^2 + 2\cdot 2\right] = \frac{4\cdot 21}{6} = 14.$$

$$\#Col(3) = P(3, \ldots, 3) =$$

$$= \frac{1}{6}\left[3^6 + 3^3 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3\right] = \frac{780}{6} = 130.$$

Задача ТП-8... $P_{Z_6}(x_1,\dots,x_6) = \frac{1}{6}\left[x_1^6 + x_2^3 + 2x_3^2 + 2x_6\right]$

(б, в) Число пирамид с 1 и $3 \leqslant$ красными гранями.

Полагаем $y_1 = y,\ y_2 = y_3 = 1$ (следим только за красными гранями), $x_1 = y+2,\ x_2 = y^2+2,\ x_3 = y^3+2$.

$$P(y) = \frac{1}{6}\left[(y+2)^6 + (y^2+2)^3 + 2(y^3+2)^2 + 2(y^6+2)\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\left[u_0 + u_1 y + u_2 y^2 + \dots + u_6 y^6\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\left(2^6 + 2^3 + 2^3 + 4\right) + 6\cdot 2^5 y + (16\cdot 15 + 12)\,y^2 + \dots\right].$$

$$u_0 = 84/6 = 14, \quad u_1 = 2^5 = 32, \quad u_2 = 252/6 = 42.$$

Число пирамид с:

(б) одной красной гранью — $u_1 = 32$,

(в) не менее, чем 3 красными гранями —

$\#Col(3) - (u_0+u_1+u_2) = 130 - (14+32+42) = 130 - 88 = 42$.