Вопросы эффективности логических корректоров

Дюкова Елена Всеволодовна
Журавлёв Юрий Иванович
Прокофьев Пётр Александрович⋆

ВЦ РАН, Москва

19 сентября 2015 г.

Задача корректного распознавания по прецедентам

- M — множество объектов, $M = K_1 \sqcup \ldots \sqcup K_l$
- $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — система целочисленных признаков
- $(x_1(S), \ldots, x_n(S))$ — признаковое описание объекта $S \in M$
- $T = \{S_1, \ldots, S_m\}$ — обучающая выборка (прецеденты)
- y_i — номер класса, которому принадлежит прецедент S_i
- $A_T : M \to \{0, 1, \ldots, l\}$ — алгоритм распознавания
- если $A_T(S_i) = y_i$, $\forall S_i \in T$, то A_T — *корректный алгоритм*

Логический подход

1. Голосование по тестам (*Дмитриев, Журавлёв, Кренделев, 1968*)
2. Голосование по представительным наборам (*Вайнцвайг, 1973*)
3. Голосование по корректным элементарным классификаторам (*Дюкова, Песков, 2002*).

Определение

Элементарным классификатором (эл.кл.) ранга r, $1 \leqslant r \leqslant n$, *называется пара* (H, σ), *где* $H = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_r})$ — *набор признаков и* $\sigma = (\sigma^1, \ldots, \sigma^r)$ — *набор целых чисел.*

- $H(S) = (x_{j_1}(S), \ldots, x_{j_r}(S))$ — признаковое подописание S
- если $H(S) = \sigma$, то эл.кл. (H, σ) *выделяет* объект S

Определение

Эл.кл. (H, σ) *называется корректным для класса* K, *если не существует двух прецедентов* $S_i \in K$ *и* $S_t \notin K$, *выделяемых* (H, σ).

- Корректное распознавание на базе произвольных эл.кл. (*Дюкова, Журавлёв, Рудаков, 1996*).
- $U = \big((H_1, \sigma_1), \ldots, (H_d, \sigma_d)\big)$ — набор эл.кл.
  $U(S) = \big([H_1(S) = \sigma_1], \ldots, [H_d(S) = \sigma_d]\big)$ — отклик

Определение

- *Набор эл.кл. U называется корректным для класса K, если для любой пары прецедентов $S_i \in K$ и $S_t \notin K$ выполняется $U(S_i) \neq U(S_t)$.*
- *Булева функция $F(t_1, \ldots, t_d)$, для которой $F(U(S_i)) \neq F(U(S_t))$, $S_i \in T \cap K$, $S_t \in T \setminus K$, называется корректирующей.*
- *Корректный набор эл.кл. U, имеющий монотонную корректирующую функцию, называется монотонным.*

Алгоритмы голосования по корректным наборам эл.кл.

Первое экспериментальное исследование логических корректоров проведено в (*Дюкова, Журавлёв, Сотнезов, 2010*).

Простейший логический корректор

- На этапе обучения для каждого класса $K \in \{K_1, \ldots, K_l\}$ строится семейство W_K корректных для K наборов эл.кл.
- При распознавании объекта S для каждого класса $K \in \{K_1, \ldots, K_l\}$ вычисляется оценка принадлежности S к K

$$\Gamma(S, K) = \sum_{U \in W_K} \frac{1}{|W_K|} \sum_{S_i \in T \cap K} \frac{1}{|T \cap K|} [U(S_i) = U(S)] \qquad (1)$$

В случае голосования по монотонным корректным наборам эл.кл. в формуле (1) вместо $[U(S_i) = U(S)]$ берётся $[U(S_i) \preccurlyeq U(S)]$, где $(a_1, \ldots, a_n) \preccurlyeq (b_1, \ldots, b_n) \Leftrightarrow a_j \leqslant b_j, \forall j \in \{1, \ldots, n\}$.

Зачем усовершенствовать логические корректоры?

- Эксперименты показывают, что на «простых» задачах монотонные логические корректоры ошибаются чаще, чем алгоритмы голосования по представительным наборам, так как монотонный логический корректор эквивалентен «плохому» голосованию по представительным наборам.
- Этап обучения логических корректоров требует существенных временных затрат.
- Для расширения области применимости логических корректоров предлагается решить следующие задачи:

  1. построить схему логического корректора общего вида;
  2. построить логический корректор, отличный от ранее разработанных логических алгоритмов распознавания;
  3. разработать методики повышения скорости и качества распознавания логических корректоров;

Логический корректор на языке предикатов

Определение

- *Предикат* $B : M \to \{0, 1\}$ *называется корректным для класса* K, *если множество прецедентов, на которых значение* B *равно* 1, *является подмножеством либо* $T \cap K$, *либо* $T \setminus K$.
- *Корректный для класса* K *предикат называется представительным, если существует прецедент из* K, *на котором значение* B *равно* 1.

Конструирование корректных (представительных) предикатов:

1. $U = ((H_1, \sigma_1), \ldots, (H_d, \sigma_d))$ — набор эл.кл.;
2. $P = (\rho_1, \ldots, \rho_d)$ — набор бинарных отношений на $\{0, 1\}$, причём $\rho_j \in \{[x \leqslant y], [x \geqslant y], [x \vee y], [\neg x \vee \neg y]\}$;
3. G — непустой набор прецедентов класса K;
4. $B_{(U,P,G)}(S) = \bigvee\limits_{S_i \in G} \bigwedge\limits_{j=1}^{d} \rho_j\big([H_j(S_i) = \sigma_j], [H_j(S) = \sigma_j]\big)$.

Алгоритм голосования по корректным предикатам вида $B_{(U,P,G)}$

- На этапе обучения для каждого класса K строятся два семейства Z_K и $Z_{\overline{K}}$ корректных для K предикатов вида $B_{(U,P,G)}$.
- При распознавании объекта S для каждого класса K вычисляется оценка принадлежности S к K

$$\Gamma(S,K) = \sum_{B \in Z_K} \alpha_B B(S) - \sum_{B \in Z_{\overline{K}}} \alpha_B B(S).$$

Утверждение

Пусть предикат $B_{(U,P,G)}$ корректен для K, набор U состоит из *различных* эл.кл. и $G \subseteq T \cap K$. Тогда U является представительным для K и имеет поляризуемую[a] корректирующую функцию.

[a] булева функция $F(t_1, \ldots, t_d)$ называется *поляризуемой*, если для некоторого $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ функция $F(t_1 \oplus \alpha_1, \ldots, t_d \oplus \alpha_d)$ монотонна.

Задача этапа обучения логического корректора POLAR

Поиск корректных для K предикатов $B_{(U,P,G)}$ сводится к поиску покрытий булевой матрицы

$$L_K = \left\langle \begin{array}{ccccc} & (H,\sigma,\rho) & & S_j \in T \cap K & \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \neg\rho\left([H(S_i)=\sigma],[H(S_t)=\sigma]\right) & \cdots & [i=j] & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{array} \right\rangle \begin{array}{l} (S_i,S_t), \\ S_i \in T \cap K, \\ S_t \in T \setminus K \end{array}$$

Проблема вычислительного характера

Матрица L_K, как правило, имеет большой размер и много покрытий.

Ранее используемая на этапе обучения методика

- Поиск покрытий осуществлялся генетическим алгоритмом. Для каждого класса K отбиралось не более N_{max} различных неприводимых покрытий матрицы L_K, соответствующих корректным наборам эл.кл. с распознающей способностью близкой к максимальной.
- Рассматривались только эл.кл. ранга 1 (уменьшение числа столбцов).
- Выборка случайно делилась на базовую и настроечную подвыборки. Матрица L_K строилась по базовой подвыборке (уменьшение числа строк). По настроечной подвыборке оценивалась распознающая способность корректных наборов эл.кл.

Формирование семейств предикатов бустингом

- Семейства голосующих предикатов формируются итеративно по принципу *бустинга* (*Freund, Schapire, 1997*).
- Каждый добавляемый предикат соответствует покрытию подматрицы, составленной из сравнительно *небольшой части строк* матрицы L_K и не обязательно является корректным (подматрица меняется от итерации к итерации).
- Получена оценка числа итераций.

Теорема

Пусть решается задача распознавания с l классами и обучающей выборкой размера m. Если бустинг-алгоритм формирования семейств предикатов выполняет более $\frac{lm \ln m}{(\sqrt{m}-1)^2}$ итераций, то алгоритм голосования по построенным предикатам корректен.

Построение локальных базисов

- При поиске предиката рассматривается подматрица, состоящая из части столбцов матрицы L_K. Если эта подматрица не содержит нулевой строки, то соответствующие её столбцам тройки (H, σ, ρ) образуют *локальный базис*[1] *для* K.
- Использование локального базиса позволяет с одной стороны работать с эл.кл. произвольного ранга, а с другой стороны — отбросить малоинформативные эл.кл.
- Построены и экспериментально исследованы различные алгоритмы и стратегии формирования локальных базисов.

[1] термин введён в (*Воронцов, 1998*)

Тестовые задачи

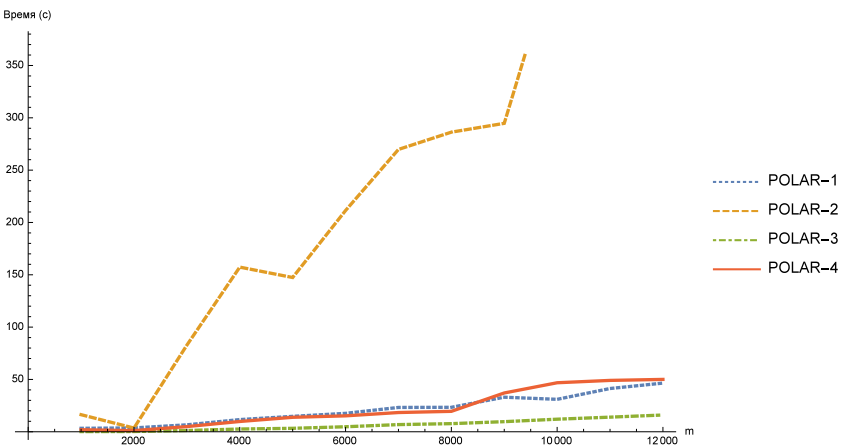
№	Название	l	m	n	z
1.	audiology	24	226	69	161
2.	balance scale	3	625	4	20
3.	breast cancer	2	699	9	90
4.	car	4	1728	6	21
5.	dermatology	4	366	34	192
6.	house votes	2	435	16	48
7.	kr vs kp	2	3196	36	73
8.	monks-2	2	601	6	17
9.	nursery	5	12960	8	27
10.	soybean large	19	307	35	132
11.	tic tac toe	2	958	9	27
12.	optdigits	10	5620	64	914
13.	letter recognition	26	20000	16	256
14.	lenses	3	24	4	9
15.	soybean small	4	47	35	72

Результаты экспериментов

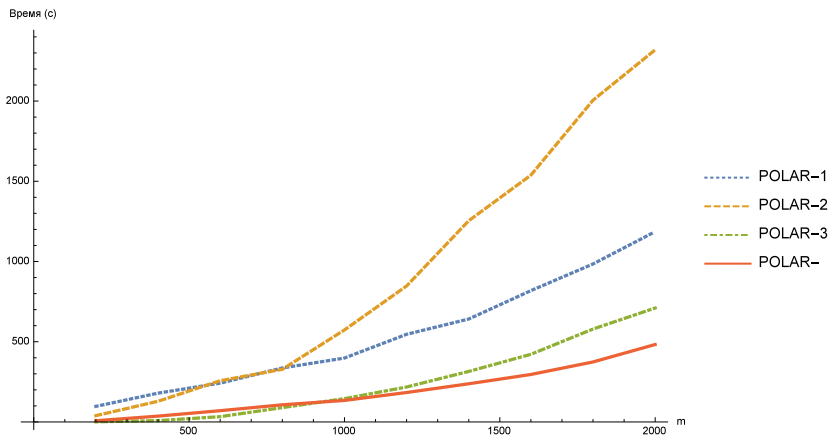
№	Задача	T*	ПН*	МОН*	Р.-1	Р.-2	Р.-3	Р.-4
1.	audiology	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	**0.02**	0.03
2.	b. scale	0.25	0.2	0.19	**0.18**	0.23	0.23	0.25
3.	b. cancer	0.046	**0.04**	0.057	0.061	0.059	0.065	0.059
4.	car	0.061	0.032	0.033	0.013	0.027	0.022	**0.01**
5.	dermat.	0.41	0.4	0.4	**0.39**	0.42	0.44	0.43
6.	h. votes	0.07	**0.05**	0.07	**0.05**	0.06	0.07	0.08
7.	kr-vs-kp	0.008	0.004	**0.003**	0.008	0.007	0.004	**0.003**
8.	monks-2	0.37	0.55	0.42	**0.04**	0.44	0.56	0.36
9.	nursery	0.027	0.003	0.005	**0.002**	—	**0.002**	0.004
10.	soybean l.	0.075	**0.06**	0.072	0.078	0.106	0.083	0.075
11.	tic-tac-toe	0.011	0.002	0.005	0.028	0.002	**0.001**	0.007
12.	letter r.	0.21	**0.16**	0.25	—	—	0.23	0.25
13.	optdigits	0.25	0.23	0.17	0.15	—	0.27	**0.14**
14.	lenses	0.42	**0.25**	0.29	0.33	0.29	0.38	**0.25**
15.	soybean s.	**0**	**0**	**0**	**0**	0.02	0.04	**0**

Приложение А. Время обучения при различных стратегиях построения локальных базисов

- POLAR-1 — один локальный базис из одноранговых эл.кл. с отношениями $[x \leqslant y]$ и $[x \geqslant y]$.
- POLAR-2 — один локальный базис строится бустингом над представительными наборами.
- POLAR-3 — локальный базис модифицируется на каждой итерации классическим голосованием по представительным наборам.
- POLAR-4 — локальный базис модифицируется на каждой итерации бустингом над представительными наборами.

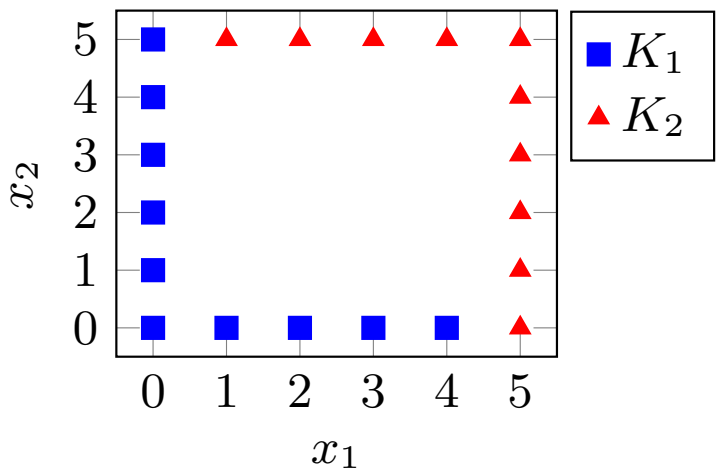


nursery



optdigits

Приложение Б. Преимущество поляризуемой корректирующей функции



Модельная задача распознавания с двумя классам и двумя признаками

- Наименьшая мощность монотонного корректного для K_1 набора равна 6, например, $U_1 = ([x_2{=}0], [x_1{=}0], [x_1{=}1], [x_1{=}2], [x_1{=}3], [x_1{=}4])$.

  Предикаты $[U_1(S_i) \preceq U_1(S)], S_i \in T \cap K_1$: $[x_1{=}0], [x_1{=}1 \wedge x_2{=}0], \ldots, [x_1{=}4 \wedge x_2{=}0]$.

- Корректный набор, имеющий поляризуемую корректирующую функцию, можно составить из 3 эл.кл., например, $U_2 = ([x_1 = 5], [x_2 = 0], [x_1 = 0])$.

  При $P = ([x \geqslant y], [x \leqslant y], [x \leqslant y])$ и $S_i \in T \cap K_1$ предикат $B_{(U_2,P,\{S_i\})}$ корректен для K_1. Каждый такой предикат имеет вид $[x_1 \neq 5 \wedge x_2 = 0]$ или $[x_1 = 0]$.