

ПРОГРАММА КУРСА «ПРИКЛАДНАЯ АЛГЕБРА»
2015 год.

1. Группы (повторение), конечные группы

Алгебраические операции, алгебраические системы, полугруппы, моноиды.

Единичный элемент (левый/правый), обратный элемент (левый/правый).

Группа.

Конечные группы малых порядков.

Циклические группы (+ факты о циклических группах).

Подгруппы. Критерии «подгрупповости».

Симметрические группы. Перестановки (определение, свойства, быстрое перемножение). Группа перестановок. Нормальные подгруппы группы перестановок. Чётность перестановки. Группа чётных перестановок.

Теорема Кэли.

Смежные классы.

Отношение эквивалентности в группе (через принадлежность смежным классам).

Сопряжённые элементы. Порядок элемента. Порядок группы.

Теорема Лагранжа (доказательство со вспомогательными леммами), ее следствия и невозможность обращения.

Нормальные делители. Факторгруппы.

Критерий нормальности делителя через сопряженные элементы.

Гомоморфизм, эпиморфизм, мономорфизм, группа автоморфизмов.

Внутренний автоморфизм, группа внутренних автоморфизмов.

Ядро и образ гомоморфизма.

Естественный (канонический) гомоморфизм. Свойства гомоморфизмов групп.

Теорема о гомоморфизмах групп.

Теорема Коши.

Прямое произведение групп.

Группы поворотов.

Порождение групп, свободные группы.

Центр группы.

Коммутант, коммутатор.

Циклические структуры, связь с сопряжённостью.

Пример теоретического вопроса: сформулировать и доказать теорему Коши.

Пример задачи: найти $|\text{Aut}(\mathbb{Z}_2)| + |\text{Aut}(\mathbb{Z}_6)|$.

2. Кольца, евклидовы кольца, кольца многочленов

Кольца (ассоциативные).

Целостные, коммутативные, нетривиальные кольца, кольца с 1.

Делители нуля.

Тело.

Кольцо классов вычетов.

Свойства сравнений. Корректность операций в кольце классов вычетов.

Гомоморфизмы колец. Теорема о гомоморфизмах колец.

Идеалы. Главные идеалы. Кольца главных идеалов.

Максимальные идеалы.

Простые идеалы.

Необходимое и достаточное условие для кольца классов вычетов быть полем (Теорема о максимальном идеале).

Евклидовы кольца. Свойства евклидовых колец (теоремы с доказательствами).

Наибольший общий делитель.

Собственные делители, ассоциированные элементы. Теорема о собственном делителе.

Разложение элементов в евклидовых кольцах.

Кольцо многочленов над полем (напоминание о нулях многочленов, теореме Безу).

Неприводимые (простые) многочлены (определение, построение, примеры).

Гомоморфизмы, изоморфизмы, автоморфизмы колец.

Идемпотенты. Нильпотенты.

Прямое произведение колец.

Пример теоретического вопроса: перечислить все известные Вам факты об евклидовых кольцах.

Пример задачи: найти все неприводимые многочлены второй степени над $GF(3)$.

3. Конечные поля

Поле. Характеристика поля.

Теорема о том, что конечное поле является векторным пространством.

Теорема о размерности кольца классов вычетов.

Теорема о минимальной функции элемента \bar{x} (элемента $\{x\}$ в $F[x]/(g(x))$).

Число элементов в конечном поле характеристики p .

Существование полей порядка p^m для всех простых p и целых положительных m .

Существование в конечном поле примитивного элемента (с доказательством вспомогательной леммы).

Уравнение, которому удовлетворяют все элементы конечного поля.

Минимальный многочлен (минимальная функция над подполем) элемента поля.

Теорема о разложении многочлена $X^{p^m}-X$ на множители (со всеми вспомогательными леммами, формулировки, доказательства).

Критерий делимости многочленов вида X^n+1 .

Теорема о делимости многочлена $X^{p^n}+1$ на неприводимый многочлен.

Корни уравнения $f(x)=a_0+\dots+a_nx^n=0$ с неприводимым многочленом $f(x)$ в $GF(p^m)$, $n \leq m$ (Теоремы о корнях).

Трансцендентные и алгебраические элементы.

Поле рациональных дробей.

Решение систем и уравнений в полях.

Пример теоретического вопроса: доказать, что любое конечное поле является векторным пространством над любым своим подполем.

Пример задачи: разложить X^7+1 на множители (над $GF(2)$).

4. Теория кодирования, коды БЧХ

Кодирование.

Коды Боуза-Чоудхури-Хоквингема (БЧХ).

Оценка расстояния между кодовыми вершинами БЧХ.

Теорема о линейной независимости в проверочной матрице.

Теорема об идеалах в $GF(p)[x]/(g(x))$.

Теорема о размерности и базисах идеалов в $GF(p)[x]/(g(x))$.

Циклические линейные подпространства.

Теорема о циклических линейных подпространствах кольца классов вычетов по (X^n+1) .

Примеры кодов Хэмминга и Боуза-Чоудхури-Хоквингема (БЧХ).

Пример теоретического вопроса: сформулировать и доказать теорему об идеалах в $GF(p)[x]/(g(x))$.

Пример задачи: привести пример кода БЧХ, который совпадает с кодом Хэмминга, построить его проверочную матрицу (булеву).