

ФКН ВШЭ, 3 курс, 3 модуль

## Задание 1. Основы теории случайных процессов

Вероятностные модели и статистика случайных процессов,  
весна 2017

Время выдачи задания: 23 января (понедельник).

Срок сдачи: **5 февраля (воскресенье), 23:59.**

Среда для выполнения практического задания – PYTHON 2.x.

## Правила сдачи

### Инструкция по отправке:

1. Домашнее задание необходимо отправить до дедлайна на почту [hse.cs.stochastics@gmail.com](mailto:hse.cs.stochastics@gmail.com).
2. В письме укажите тему «[ФКН ССП17] Задание 1, Фамилия Имя».
3. Решения задач следует присылать единым файлом формата .pdf, набранным в L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X. Допускается отправка последней задачи в виде отдельной ipython-тетрадки.

### Оценивание и штрафы:

1. **Каждая из задач имеет стоимость 2 балла**, при этом за задачу можно получить 0, 1 или 2 балла. Максимально допустимая оценка за работу – 10 баллов. Баллы, набранные сверх максимальной оценки, считаются бонусными и влияют на освобождение от задач на экзамене.

2. Дедлайн жесткий. Сдавать задание после указанного срока сдачи нельзя.
3. Задание выполняется самостоятельно. «Похожие» решения считаются плагиатом и все задействованные студенты (в том числе те, у кого списали) не могут получить за него больше 0 баллов (подробнее о плагиате см. на странице курса). Если вы нашли решение какого-то из заданий (или его часть) в открытом источнике, необходимо указать ссылку на этот источник в отдельном блоке в конце Вашей работы (скорее всего вы будете не единственным, кто это нашел, поэтому чтобы исключить подозрение в плагиате, необходима ссылка на источник).

# Необходимые теоретические сведения

1. Ковариационной функцией  $R_X(t_1, t_2)$  случайного процесса  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  называется неслучайная функция

$$R_X(t_1, t_2) = \text{cov}(X_{t_1} - \mathbb{E} X_{t_1})(X_{t_2} - \mathbb{E} X_{t_2}).$$

Корреляционной функцией  $r_X(t_1, t_2)$  случайного процесса  $X$  называется неслучайная функция

$$r_X(t_1, t_2) = \frac{R_X(t_1, t_2)}{\sqrt{V X_{t_1} V X_{t_2}}},$$

где  $V X_t = \mathbb{E}(X_t - \mathbb{E} X_t)^2$  – функция дисперсии случайного процесса  $X$ . Взаимной ковариационной функцией  $R_{XY}(t_1, t_2)$  пары случайных процессов  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  и  $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$  называется неслучайная функция

$$R_{XY}(t_1, t_2) = \text{cov}(X_{t_1} - \mathbb{E} X_{t_1})(Y_{t_2} - \mathbb{E} Y_{t_2}).$$

Взаимная корреляционная функция  $r_{XY}(t_1, t_2)$  определяется аналогично равенству для  $r_X(t_1, t_2)$  выше.

2. Случайный процесс  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  называется процессом с независимыми приращениями, если для любых  $t_0, t_1, \dots, t_n$ , таких, что  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$  случайные величины  $X_1 - X_0, \dots, X_n - X_{n-1}$  независимы в совокупности.

3. Вектор  $X = (X_1, \dots, X_n)$  называется гауссовским, если для любого набора коэффициентов  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$  случайная величина  $Y \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \lambda_k X_k$  имеет нормальное распределение.

4. Процесс  $W = (W_t)_{t \geq 0}$  на  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  называется винеровским (или броуновским движением), если

- $W_0 = 0$  P-п.н.,
- $W_t$  имеет независимые приращения  $\forall t$ ,
- $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s) \quad \forall t > s \geq 0$ .

# Вариант 1

1. Доказать, что данная функция может или не может являться ковариационной функцией случайного процесса:

(a)  $R_1(t, s) = \min\{t, s\} - ts,$

(b)  $R_2(t, s) = \min\{t, s\} - t(s + 1).$

2. Заданы случайные величины  $v_1, v_2, u_1, u_2$  такие, что  $E v_i = E u_i = 0, E v_i^2 = 1, E u_i^2 = 4, i = 1, 2,$  а нормированная корреляционная матрица системы  $(v_1, v_2, u_1, u_2)$  равна

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для случайных процессов

$$X_t = v_1 \cos \omega_1 t + v_2 \sin \omega_1 t,$$

$$Y_t = u_1 \cos \omega_2 t + u_2 \sin \omega_2 t$$

найти взаимные корреляционные функции  $r_{XY}(t_1, t_2) = \text{corr}(X_{t_1}, Y_{t_2})$  и  $r_{YX}(t_1, t_2) = \text{corr}(Y_{t_1}, X_{t_2})$  и вычислить их значения при  $t_1 = 0, t_2 = 1.$

3. Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  – случайный вектор. Докажите эквивалентность следующих утверждений (в обе стороны):

- (a) характеристическая функция вектора  $X$  допускает представление

$$\varphi_X(\mathbf{u}) = \exp \left\{ i \mathbf{u}^\top \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2} \mathbf{u}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{u} \right\},$$

где  $\boldsymbol{\mu}$  – неслучайный вектор из  $\mathbb{R}^n,$  а  $\boldsymbol{\Sigma}$  – симметричная неотрицательно определенная неслучайная матрица размера  $n \times n,$

(b) вектор  $X$  допускает представление

$$X = \mu + AZ,$$

где  $\mu$  – неслучайный вектор из  $\mathbb{R}^n$ ,  $A$  – неслучайная матрица размера  $n \times n$ , а  $Z \in \mathbb{R}^n$  – вектор, все координаты которого независимы в совокупности и имеют нормальное  $\mathcal{N}(0, 1)$  распределение.

4. Пусть  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  – винеровский процесс. Доказать, что следующие процессы также винеровские:

$$(a) B_t^{(1)} = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ tB_{1/t}, & t > 0. \end{cases}$$

$$(b) B_t^{(2)} = \sqrt{c}B_{t/c}, \quad c = \text{const} > 0.$$

5.  $\xi_1, \dots, \xi_n$  – независимые одинаково распределенные показательные случайные величины. Подсчитать (по индукции) плотность распределения суммы  $\xi_1 + \dots + \xi_n$ .

6. Пусть  $N = (N_t)_{t \geq 0}$  – пуассоновский случайный процесс с параметром  $\lambda$ . Доказать, что случайный процесс  $M = (M_t)_{t \geq 0}$ , задаваемый соотношением  $M_t = N_{t+1} - N_t$ , является стационарным второго порядка процессом, т.е. что его математическое ожидание  $E M_t$  не зависит от времени, а его ковариационная функция  $R_M(t_1, t_2)$  зависит от  $t_1$  и  $t_2$  через их разность  $\tau = t_1 - t_2$ .

7. Стандартное фрактальное броуновское движение  $B^H = (B_t^H)_{0 \leq t \leq T}$  на  $[0, T]$  с параметром Хёрста  $H \in (0, 1)$  – это гауссовский процесс с непрерывными траекториями такой, что

$$B_t^H = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_{-\infty}^0 [(t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}}] dB_s + \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s,$$

где  $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$  – гамма-функция Эйлера. Смоделируйте реализации фрактального броуновского движения с помощью вычисления стохастического интеграла по броуновскому движению. В качестве результата приведите:

- (a) разностную схему, использовавшуюся для моделирования,
- (b) исходный код, использовавшийся для моделирования,
- (c) примеры траекторий фрактального броуновского движения для различных значений параметра Херста  $H \in (0, 1)$ .

## Вариант 2

1. Доказать положительную определенность следующих функций:

$$(a) R_1(t, s) = \begin{cases} 1 - |t - s|, & |t - s| < 1, \\ 0, & |t - s| \geq 1. \end{cases},$$

$$(b) R_2(t, s) = e^{-|t-s|}.$$

2. Случайный процесс  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  имеет вид

$$X_t = b \sin(\gamma t + \varphi),$$

где  $b, \gamma$  – известные постоянные, а  $\varphi$  – случайная величина с плотностью  $f_\varphi(x)$ . Исследовать процесс  $X$  на стационарность в узком и широком смысле, а также на эргодичность по математическому ожиданию, если

$$(a) f_\varphi(x) = \cos(x) \mathbb{1}_{[0, \frac{\pi}{2}]}(x),$$

$$(b) f_\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{[0, 2\pi]}(x).$$

3. Доказать эквивалентность следующих двух определений винеровского процесса (доказательство провести в обе стороны):

(a) винеровский процесс – это гауссовский процесс  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  с математическим ожиданием  $E B_t \equiv m(t) = 0$  и ковариационной функцией  $E(B_s - E B_s)(B_t - E B_t) \equiv R(s, t) = \min\{s, t\}$ ,

(b) винеровский процесс – это случайный процесс  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  такой, что

- $B_0 = 0$  п.н.,
- $B$  – процесс с независимыми приращениями,
- $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s) \quad \forall t > s \geq 0$ .

4. Пусть  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  – винеровский процесс на  $[0, t]$ . Подсчитать

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2,$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}|.$$

5. Пусть  $N = (N_t)_{t \geq 0}$  – неоднородный пуассоновский процесс с интенсивностью  $\lambda(t)$ . Доказать, что

(a) функция  $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$  имеет обратную,

(b) процесс  $M_t = N_{\Lambda^{-1}(t)}$  является однородным пуассоновским процессом.

6. Пользовательские запросы поступают на веб-сервис в соответствии с однородным пуассоновским потоком  $N = (N_t)_{t \geq 0}$  с интенсивностью  $\lambda$ . Сервис оснащен балансировщиком нагрузки, разделяющим запросы на  $r$  подпотоков  $\{X^i\}_{i=1}^r$  ( $N_t = \sum_{i=1}^r X_t^i$ ) таким образом, что каждый запрос из  $N_t$  относится к подпотоку  $X_t^i$  с вероятностью  $p_i, i = 1, \dots, r$  (независимо от других событий). Определить тип и параметры случайных процессов  $\{X^i\}_{i=1}^r$ .

7. Составной пуассоновский поток событий (или пакетный пуассоновский процесс) – это случайный процесс  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  со скачками в моменты скачков пуассоновского потока с заданной интенсивностью  $\lambda$  и являются случайными величинами с заданным распределением  $G$ , не зависящими от пуассоновского потока. Он может быть записан в виде:

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} D_i,$$

где  $X_t$  – значение составного потока в момент  $t$ ,  $N_t$  – значение простого потока в момент  $t$  (число появлений пакетов), и  $D_i, i \geq 1$  – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих распределение  $G$ . Смоделируйте реализацию этого процесса, если



- $\lambda = \lambda(t) = 2 + \sin(t - 11\pi/16) + \sin(2t - 3\pi/8)$ , и
- $G(x)$  – распределение Пуассона с параметром  $\rho > 0$ .

В качестве результата приведите:

- (a) исходный код, использовавшийся для моделирования,
- (b) примеры траекторий составного пуассоновского потока для различных значений параметра  $\rho$ .