Прикладная статистика 4. Дисперсионный анализ.

4 марта 2013 г.

Случай одного фактора

Пусть имеется K выборок:

$$X^N = X_1^{n_1} \bigcup \ldots \bigcup X_K^{n_K}, \quad N = n_1 + \ldots + n_K.$$

Эквивалентная запись:
фактор $f \colon X \to \{1, \ldots, K\}$

$$\begin{array}{|c|c}
\multicolumn{1}{c}{X_N} & f \\
\hline
x_{11} & \\
\vdots & 1 \\
x_{1n_1} & \\
\hline
x_{21} & \\
\vdots & 2 \\
x_{2n_2} & \\
\hline
\vdots & \vdots \\
\hline
x_{K1} & \\
\vdots & K \\
x_{Kn_K} & \\
\hline
\end{array}$$

Однофакторный дисперсионный анализ

выборки: $X^N = X_1^{n_1} \bigcup \ldots \bigcup X_K^{n_K}, \quad X_{kj} \sim N(\mu_k, \sigma)$;

нулевая гипотеза: $H_0\colon \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_K$;

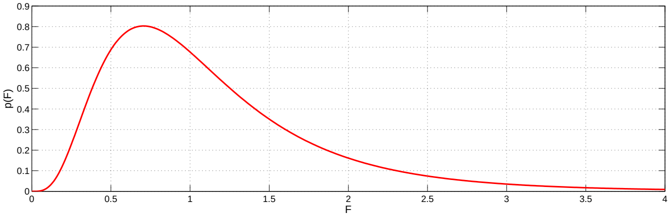
альтернатива: $H_1\colon H_0$ неверна;

статистика: $F(X^N) = \frac{S_2^2}{S_1^2}$,

$$S_1^2 = \frac{1}{N-K} \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{n_k} \left(X_{ki} - \bar{X}_k\right)^2$$ — внутригрупповая дисперсия,

$$S_2^2 = \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^{K} n_k \left(\bar{X}_k - \bar{X}\right)^2$$ — межгрупповая дисперсия;

$F(X^N) \sim F(K-1, N-K)$ при H_0;



достигаемый уровень значимости:

$$p(f) = fcdf(f, K-1, N-K).$$

Однофакторный дисперсионный анализ

Предположения метода:

1. значения признака во всех группах нормально распределены;
2. дисперсия значений признака во всех группах одинакова;
3. все наблюдения независимы.

Метод устойчив к нарушению первых двух предположений.

Однофакторный дисперсионный анализ

Пример: топливная компания тестирует влияние трёх видов присадок на потребление бензина. Выборка получена на 12 одинаковых автомобилях, на каждом из которых использовалась одна из трёх присадок.

H_0: три вида присадок одинаково влияют на среднее потребление бензина.
H_1: между средними уровнями потребления бензина с разными присадками есть различия $\Rightarrow p = 2.1717 \times 10^{-5}$.

Критерий Краскела-Уоллиса

выборки: $X^N = X_1^{n_1} \bigcup \ldots \bigcup X_K^{n_K}, \quad X_{kj} \sim F(x + \Delta_k);$

нулевая гипотеза: $H_0 \colon \Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_K \Leftrightarrow \mathrm{med}\, X_1 = \ldots = \mathrm{med}\, X_K;$

альтернатива: $H_1 \colon H_0$ неверна;

статистика: $K\left(X^N\right) = (N-1) \frac{\sum\limits_{k=1}^{K} n_k (\bar{r}_k - \bar{r})^2}{\sum\limits_{k=1}^{K} \sum\limits_{i=1}^{n_k} (r_{ki} - \bar{r})^2};$

$K\left(X^N\right)$ имеет табличное распределение при H_0.

Если нет связок, то:

$$\bar{r} = \frac{N-1}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{n_k} (r_{ki} - \bar{r})^2 = \frac{(N-1)\, N\, (N+1)}{12},$$

$$K\left(X^N\right) = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{k=1}^{K} n_k \bar{r}_k^2 - 3(N+1).$$

Аппроксимация для $n_k > 5$:

$$K\left(X^N\right) \sim \chi^2_{K-1}.$$

Критерий Краскела-Уоллиса

Пример: дегустаторы оценивают торты по совокупности факторов — вкус, внешний вид, запах и фактура. Итоговая оценка выставляется в баллах от 0 до 100. Сравниваются оценки трёх видов тортов, представленных каждый отдельной команде дегустаторов.

H_0: три вида тортов в среднем одинаковы.
H_1: между разными видами тортов есть различия $\Rightarrow p = 0.6587$.

Критерий Джонкхиера

выборки: $X^N = X_1^{n_1} \bigcup \ldots \bigcup X_K^{n_K}, \quad X_{kj} \sim F(x + \Delta_k);$

нулевая гипотеза: $H_0\colon \Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_K \Leftrightarrow \operatorname{med} X_1 = \ldots = \operatorname{med} X_K;$

альтернатива: $H_1\colon \operatorname{med} X_1 \leq \ldots \leq \operatorname{med} X_K;$

статистика: $S(X^N) = \sum\limits_{k=1}^{K} \sum\limits_{i=1}^{n_k} a_{ki},$

a_{ki} — число наблюдений из первых $k-1$ выборок, меньших, чем X_{ki};

$S(X^N)$ имеет табличное распределение при H_0.

Аппроксимация для $n_k > 10$:

$$S\left(X^N\right) \sim N\left(\mu, \sigma^2\right),$$

$$\mu = \frac{1}{4}\left(N^2 - \sum_{k=1}^{K} n_k^2\right),$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{72}\left(\left(\sum_{k=1}^{K} n_k\right)^2 \left(2\sum_{k=1}^{K} n_k + 3\right) - \sum_{k=1}^{K} n_k^2 \left(2n_k + 3\right)\right).$$

Критерий Джонкхиера

Пример: исследуется влияние информированности (знания цели работы) на выполнение монотонных производственных операций. 18 рабочих были случайным образом разделены на 3 группы. Попавшие в группу 1 не имели информации о требуемой производительности, в группу 2 — получили общее представление о том, что нужно делать, в группу 3 — точную информацию о задании и график выполнения работ.

H_0: информированность не влияет на производительность.
H_1: информированность влияет на производительность $\Rightarrow p = 0.113$.
H_1: информированность повышает производительность $\Rightarrow p = 0.022$.

Модели дисперсионного анализа

Модель со случайным эффектом (random-effects model ANOVA):

- характеристика, определяющая разбиение на группы, не представляет непосредственного интереса;
- группы случайно выбраны из множества возможных групп;
- если между группами есть неоднородность, ожидается, что она сохранится при повторе эксперимента, но соотношения между средними могут измениться.

Примеры.

- Размеры горбаток в разных семьях, выращенных на одном и том же растении; цель — определить значимость фактора семьи для дальнейших исследований.
- Уровень гликогена в различных образцах икроножной мышцы крысы; если вариация между образцами даёт маленький вклад в общую вариацию, то можно считать, что для измерения уровня достаточно одного образца.
- Вкусовые качества персиков с 10 различных деревьев; планируется сравнить различия во вкусовых качествах персиков с разных деревьев с различиями у персиков с одного дерева. Если последние больше, то бессмысленно выбрать для размножения дерево с лучшей средней оценкой.

Модели дисперсионного анализа

Если используется **модель со случайным эффектом**, следующий шаг — разделение дисперсий на внутригрупповые и межгруповые.

Результат — доля межгрупповой дисперсии в общей дисперсии X^N.

Модели дисперсионного анализа

Модель с фиксированным эффектом (fixed-effects model ANOVA):

- разбиение на группы определено до получения данных;
- при повторе эксперимента ожидается, что соотношения между средними групп сохранятся;
- если между средними есть различия, на следующем этапе анализируется, какие именно группы различаются.

Примеры.

- Продолжительность жизни разноногих раков в морской воде и растворах глюкозы и маннозы.
- Экспрессия определённого гена в тканях мозга, печени, лёгких и мышц; необходимо понять, в какой ткани экспрессия выше.
- Вкусовые качества персиков с 10 различных деревьев; планируется выбрать лучшее дерево для дальнейшего разведения.

Модели дисперсионного анализа

Если используется **модель с фиксированным эффектом**, то в случае отвержения гипотезы однородности средних проводится дополнительное сравнение с целью уточнения характера различий.
Сравнение может быть:

- запланированным, когда группы для дальнейшего сравнения отобраны до сбора данных.
- незапланированным, когда группы для сравнения выбираются по результатам первичного анализа данных.

Для запланированного попарного сравнения групп можно просто использовать подходящий двухвыборочный критерий.
Для незапланированного сравнения всё сложнее.

Fisher's LSD (least significant difference)

Если $\mu_i = \mu_j$, то

$$\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S \Big/ \sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}} \sim St(n_i + n_j - 2),$$

где $S = \sqrt{\frac{(n_i - 1)S_i^2 + \left(n_j - 1\right)S_j^2}{n_i + n_j - 2}}$.
Рассмотрим величину

$$LSD_{ij} = \frac{t_\alpha S}{\sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}},$$

где t_α — α-квантиль распределения Стьюдента с $n_i + n_j - 2$ степенями свободы.

Если $\left|\bar{X}_i - \bar{X}_j\right| > LSD_{ij}$, то частная нулевая гипотеза $H_0 \colon \mu_i = \mu_j$ отклоняется против общей альтернативы.

Метод LSD можно использовать только в случае отвержения общей гипотезы однородности.

Tukey's HSD (honestly significant difference)

$$n = \frac{K}{\sum\limits_{k=1}^{K} \frac{1}{n_k}},$$

$$S^2 = \frac{1}{N-K} \sum_{k=1}^{K} (n_k - 1)\, S_j^2,$$

S_j^2 — дисперсия выборки $X_j^{n_j}$,

$$HSD = \frac{q_\alpha (N-K)\, s}{\sqrt{n}},$$

где $q_\alpha (N-K)$ — критическое значение распределения стьюдентизированного размаха с $N-K$ степенями свободы.

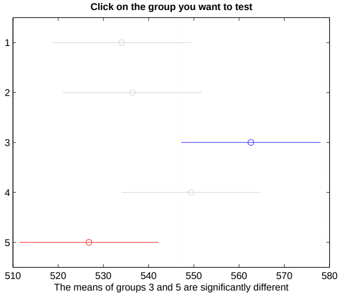
Если $\left|\bar{X}_i - \bar{X}_j\right| > HSD$, то частная нулевая гипотеза $H_0\colon \mu_i = \mu_j$ отклоняется против общей альтернативы.

Метод HSD можно использовать независимо от критерия Фишера.

Пример

Овсяная мука пяти видов помола расфасовывается при помощи одного и того же диспенсера. Стандартный объём упаковки — 500 г, но диспенсер обычно насыпает больше. Производитель подозревает, что объём упаковки может зависеть от помола муки.

Метод LSD: вес в группах 3 и 5 значимо отличается.



Метод HSD: значимых различий между средними не обнаружено.

Критерий Бартлета

выборки: $X^N = X_1^{n_1} \bigcup \ldots \bigcup X_K^{n_K}, \quad X_{kj} \sim N(\mu_k, \sigma_k);$

нулевая гипотеза: $H_0 \colon \sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_K;$

альтернатива: $H_1 \colon H_0$ неверна;

статистика: $B\left(X^N\right) = \frac{\ln 10}{C}\left((N-K)\ln S^2 - \sum\limits_{k=1}^{K}(n_k-1)\ln S_k^2\right),$

$S^2 = \frac{1}{N-K}\sum\limits_{k=1}^{K}(n_k-1)S_k^2,$

$C = 1 + \frac{1}{3K+1}\left(\sum\limits_{k=1}^{K}\frac{1}{n_k-1} - \frac{1}{N}\right);$

$B\left(X^N\right)$ имеет табличное распределение при H_0.

Аппроксимация для $n_k > 6$:

$$B\left(X^N\right) \sim \chi^2_{K-1}.$$

Критерий Бартлета

Пример: четыре шпиндельные головки сравниваются по вариабельности размеров деталей, которые выточены с их помощью. Контролёром качества собраны выборки из 31, 15, 20 и 42 деталей.

$H_0:$ дисперсия размеров деталей, выточенных с помощью различных головок, одинакова.
$H_1:$ дисперсия размеров деталей, выточенных с помощью различных головок, неодинакова $\Rightarrow p = 0.0626$.

Критерий квадратов рангов

выборки: $X^N = X_1^{n_1} \bigcup \ldots \bigcup X_K^{n_K}, \quad X_{ki} \sim F(\mu_k + \sigma_k x);$

нулевая гипотеза: $H_0\colon \sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_K;$

альтернатива: $H_1\colon H_0$ неверна;

статистика: $T_2\left(X^N\right) = \frac{1}{D^2}\left(\sum\limits_{k=1}^{K} \frac{S_k^2}{n_k} - N\bar{S}^2\right),$

$S_k = \sum\limits_{i=1}^{n_k} r\left(\left|X_{ki} - \bar{X}_k\right|\right)^2,$

$\bar{S} = \frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{K} S_k,$

$D^2 = \frac{1}{N-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{N} r_i^4 - N\bar{S}^2\right);$

$T_2\left(X^N\right)$ имеет табличное распределение при H_0.

Если нет связок, то:

$$\bar{S} = \frac{1}{6}(N+1)(2N+1),$$

$$D^2 = \frac{1}{180}N(N+1)(2N+1)(8N+11).$$

Аппроксимация для $n_k > 10$:

$$T_2\left(X^N\right) \sim \chi^2_{K-1}.$$

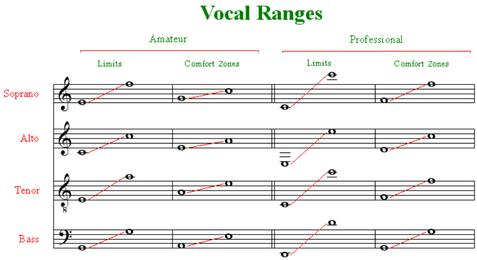
Критерий квадратов рангов

Пример: четыре шпиндельные головки сравниваются по вариабельности размеров деталей, которые выточены с их помощью. Контролёром качества собраны выборки из 31, 15, 20 и 42 деталей.

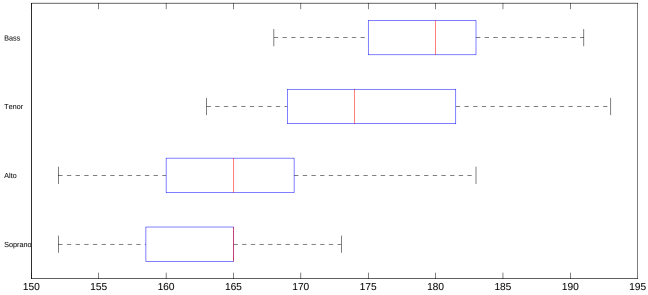
H_0: дисперсия размеров деталей, выточенных с помощью различных головок, одинакова.
H_1: дисперсия размеров деталей, выточенных с помощью различных головок, неодинакова $\Rightarrow p = 0.0856$.

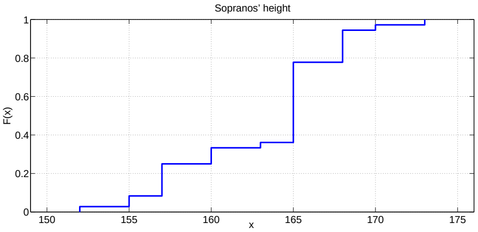
Рост певцов хора

В 1979 году 130 участников Нью-Йоркской ассоциации хорового пения сообщили данные своего роста; для каждого известен также регистр голоса. Есть ли связь между ростом и регистром?



Рост певцов хора





Рост певцов хора

H_0: рост и регистр голоса не связаны.
H_1: для каких-то видов регистра голоса средний рост отличается.

Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Groups	6901.4	3	2300.47	55.73	5.34718e-023
Error	5201.1	126	41.28		
Total	12102.5	129			

SS — сумма квадратов отклонений, df — число степеней свободы, MS — оценка дисперсии, F — статистика критерия;
строка Groups — межгрупповые отклонения, строка Error — внутригрупповые.

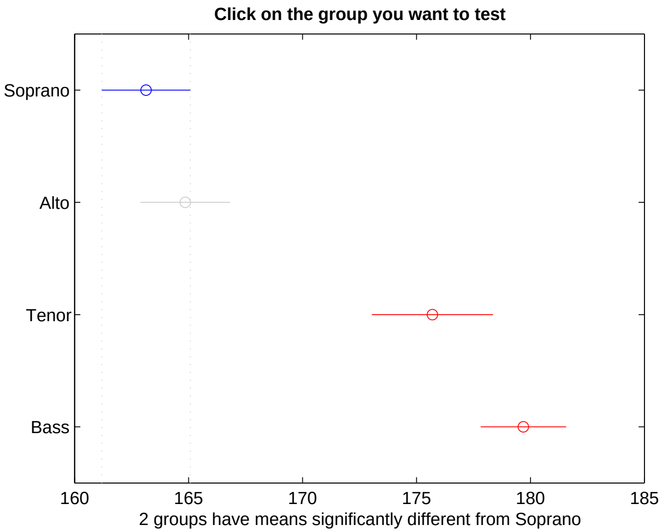
Рост певцов хора

Критерий Стьюдента для проверки гипотезы равенства роста певцов с альтом и сопрано: $p = 0.2460$ — против двусторонней альтернативы, $p = 0.1230$ — против односторонней альтернативы.

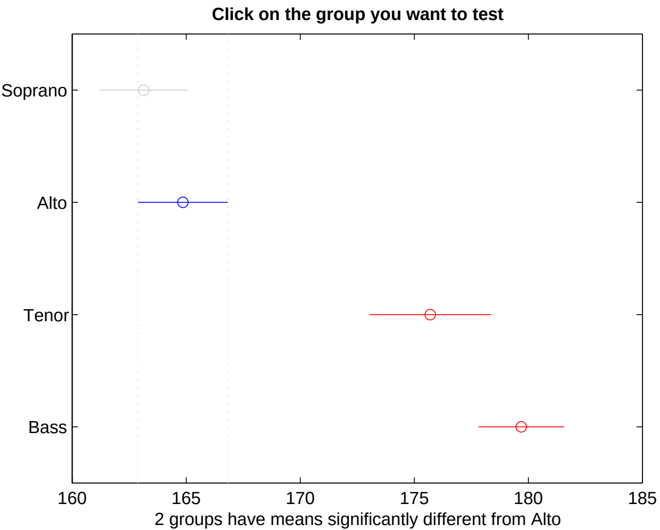
Критерий Стьюдента для проверки гипотезы равенства роста певцов с тенором и басом: $p = 0.0597$ — против двусторонней альтернативы, $p = 0.0298$ — против односторонней альтернативы.

Критерий Джонкхиера для проверки наличия тренда (увеличение роста с понижением регистра голоса): $p < 0.00001$.

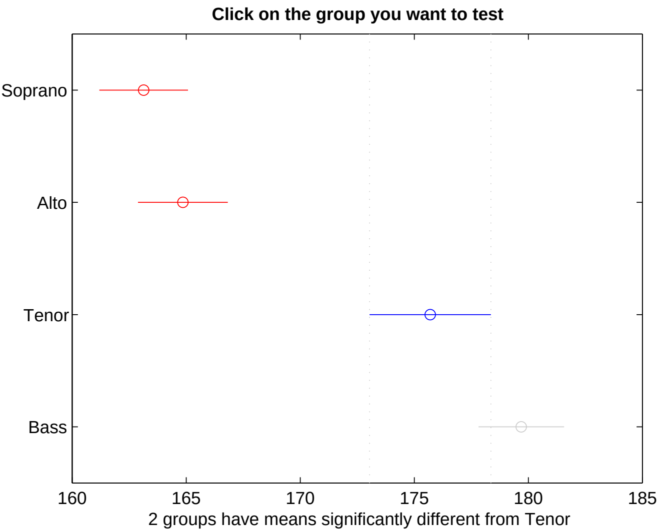
Рост певцов хора



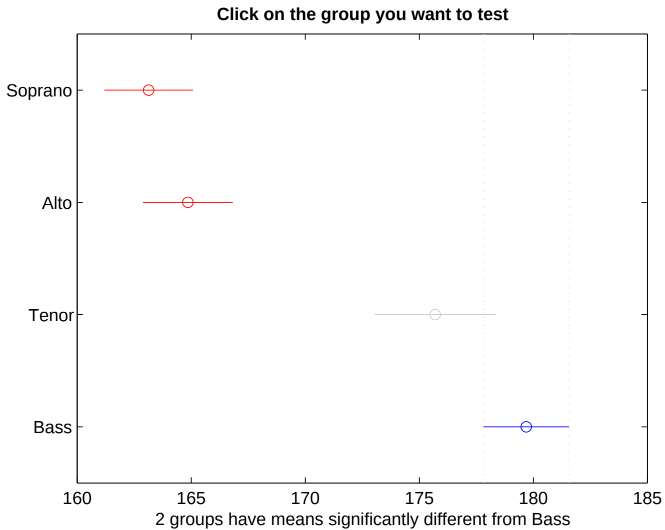
Рост певцов хора



Рост певцов хора



Рост певцов хора



Случай двух факторов

$$f_1 : X \to \{1, \ldots, K_1\}\,, \quad f_2 : X \to \{1, \ldots, K_2\}$$

$f_1 \backslash f_2$	1	$\ldots$	j	$\ldots$	K_2
1					
$\vdots$					
i			X_{ij1} $\vdots$ $X_{ijn_{ij}}$		
$\vdots$					
K_1					

Варианты:

$n_{11} = \ldots = n_{K_1K_2} = 1$ — неповторяемые измерения,

$n_{11} = \ldots = n_{K_1K_2} = n$ — повторяемые измерения,

$n_{11} \neq \ldots \neq n_{K_1K_2}$ — общий случай.

Случай двух факторов

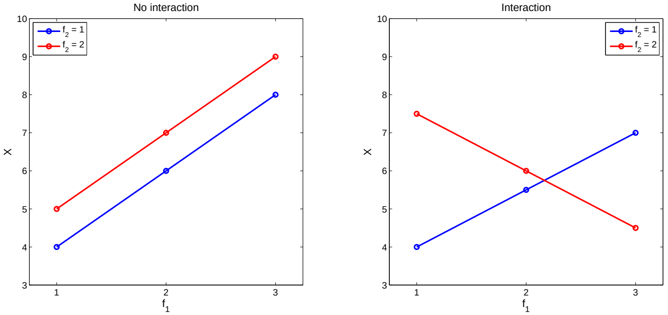
H_0^1: фактор f_1 не влияет на значение признака X,
H_1^1: f_1 влияет на значение X;

H_0^2: фактор f_2 не влияет на значение признака X,
H_1^2: f_2 влияет на значение X;

H_0^{12}: между факторами f_1, f_2 нет взаимодействия,
H_1^{12}: между факторами f_1, f_2 есть взаимодействие.

Случай двух факторов

Пример: X — успешность решения задачи (в баллах от 0 до 10),
f_1 — размер команды (1 — маленький, 2 — средний, 3 — большой),
f_2 — наличие назначенного лидера (1 — нет, 2 — есть).



Двухфакторный дисперсионный анализ

Предположим, что $X_{ijk} \sim N(\mu_{ij}, \sigma)$.
$\bar{X}_{ij}$ — среднее в ячейке,
$\bar{X}_{i\bullet}$ — среднее по строке i,
$\bar{X}_{\bullet j}$ — среднее по столбцу j,
$\bar{X}$ — общее среднее.
Внутрифакторные дисперсии:

$$S_1^2 = \frac{nK_2}{K_2 - 1} \sum_{i=1}^{K_1} \left(\bar{X}_{i\bullet} - \bar{X}\right)^2,$$

$$S_2^2 = \frac{nK_1}{K_1 - 1} \sum_{j=1}^{K_2} \left(\bar{X}_{\bullet j} - \bar{X}\right)^2,$$

$$S_{12}^2 = \frac{n}{(K_1 - 1)(K_2 - 1)} \sum_{i,j} \left(\bar{X}_{ij} - \bar{X}_{\bullet j} - \bar{X}_{i\bullet} + \bar{X}\right)^2,$$

$$S_{res}^2 = \frac{1}{K_1 K_2 (n-1)} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i,j} \left(X_{ijk} - \bar{X}_{ij}\right)^2.$$

Двухфакторный дисперсионный анализ

Проверка значимости факторов и их взаимодействия:

$$F_1 = \frac{S_1^2}{S_{res}^2} \sim F(K_1 - 1, K_1 K_2 (n-1)) \text{ при } H_0^1,$$
$$F_2 = \frac{S_2^2}{S_{res}^2} \sim F(K_2 - 1, K_1 K_2 (n-1)) \text{ при } H_0^2,$$
$$F_{12} = \frac{S_{12}^2}{S_{res}^2} \sim F((K_1 - 1)(K_2 - 1), K_1 K_2 (n-1)) \text{ при } H_0^{12}.$$

Непараметрический подход

Модель:

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}, \quad i = 1, \ldots, K_1, \; j = 1, \ldots, K_2, \; k = 1, \ldots, n.$$

μ — неизвестное общее среднее,
α_i — воздействие уровня i фактора f_1,
β_j — воздействие уровня j фактора f_2,
ε_{ijk} — случайные независимые одинаково распределённые ошибки.

Хотим проверить гипотезу об отсутствии влияния фактора f_1:

$$H_0\colon \beta_1 = \ldots = \beta_{K_2}, \quad H_1\colon H_0 \text{ неверна},$$

сняв влияние фактора f_1.

Критерий Фридмана

выборки: $X_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij},\; i = 1, \dots, K_1,\; j = 1, \dots, K_2;$

нулевая гипотеза: $H_0\colon \beta_1 = \ldots = \beta_{K_2};$

альтернатива: $H_1\colon H_0$ неверна;

статистика: $S(X) = \frac{12}{K_1 K_2 (K_2+1)} \sum\limits_{j=1}^{K_2} R_j^2 - 3K_1 (K_2 + 1)\,,$

$R_j = \sum\limits_{i=1}^{K_1} r_{ij},$

r_{ij} — ранг j элемента в i-й строке;

$S(X)$ имеет табличное распределение при H_0.

Аппроксимация для $K_1 > 15, K_2 > 10:$

$$S(X) \sim \chi^2_{K_2-1}.$$

Критерий Фридмана

Пример: исследуется K_2 технологий вытачивания детали; каждый из K_1 рабочих в течение нескольких смен использовал каждую из технологий. X_{ij} — производительность i-го рабочего при использовании j-й технологии.

H_0: выбор технологии не меняет производительности рабочих.
H_1: выбор технологии влияет на производительность рабочих $\Rightarrow$ $p = 0.35645$.

Критерий Пейджа

выборки: $X_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij},\ i = 1, \dots, K_1,\ j = 1, \dots, K_2;$

нулевая гипотеза: $H_0\colon \beta_1 = \ldots = \beta_{K_2};$

альтернатива: $H_1\colon \beta_1 \le \ldots \le \beta_{K_2};$

статистика: $L(X) = \sum\limits_{j=1}^{K_2} jR_j,$

$R_j = \sum\limits_{i=1}^{K_1} r_{ij},$

r_{ij} — ранг j элемента в i-й строке;

$L(X)$ имеет табличное распределение при H_0.

Аппроксимация для $K_1 > 15, K_2 > 10:$

$$S(X) \sim N\left(\frac{K_1 K_2 (K_2+1)^2}{4}, \frac{K_1 \left(K_2^3 - K_2\right)^2}{144 (K_2 - 1)}\right).$$

Критерий Пейджа

Пример: на K_1 полей тестируется K_2 доз калийных удобрений. Каждое поле поделено на K_2 участков, по одному на каждую дозу. Измерена прочность выращенного на каждом участке хлопка.

$H_0:$ дозировка удобрений не влияет на прочность хлопка.
$H_1:$ дозировка удобрений влияет на прочность хлопка $\Rightarrow p = 0.1255.$
$H_1:$ с ростом дозировки удобрений прочность хлопка увеличивается $\Rightarrow$ $p = 0.0456.$

Скорость обживания клеток у гремучих змей

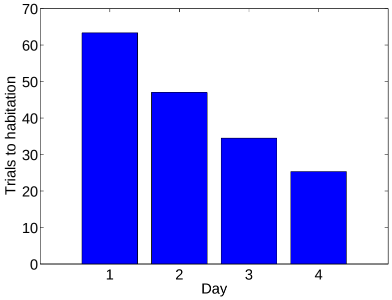
Place, Abramson, Habituation of the rattle response in western diamondback rattlesnakes, Crotalus atrox (2008): испытания проводились в течение четырёх дней. Каждый день гремучая змея помещалась в клетку, крышка которой автоматически открывалась и закрывалась каждые 5 минут. Первое время при этом змея начинала греметь, но со временем обживалась и переставала реагировать. Для 6 змей известен номер открытия крышки, при котором впервые змея не начинала греметь.

Требуется проверить, отличается ли скорость обживания клетки для различных змей и для различных дней проведения испытаний.

Скорость обживания клеток у гремучих змей

H_{01} : скорость обживания одинакова во все дни проведения испытания.
H_{02} : скорость обживания одинакова для всех змей.

Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Days	4877.79	3	1625.93	3.32	0.0487
Snakes	3042.21	5	608.44	1.24	0.3382
Error	7345.96	15	489.73		
Total	15265.96	23			



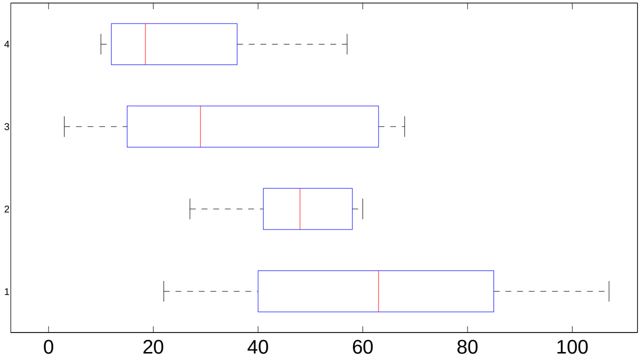
Скорость обживания клеток у гремучих змей

Критерий Фридмана убирает влияние одного из факторов, оценивает значимость оставшегося:

- если нейтрализовать влияние особи, получаем $p = 0.0384$;
- если нейтрализовать влияние дня, получаем $p = 0.1643$.

Скорость обживания клеток у гремучих змей

Однофакторный дисперсионный анализ с учётом только дня: $p = 0.0485$.



Критерий Джонкхиера для проверки наличия тренда (ускорение обживания): $p = 0.0037$.

Марихуана и скорость реакции

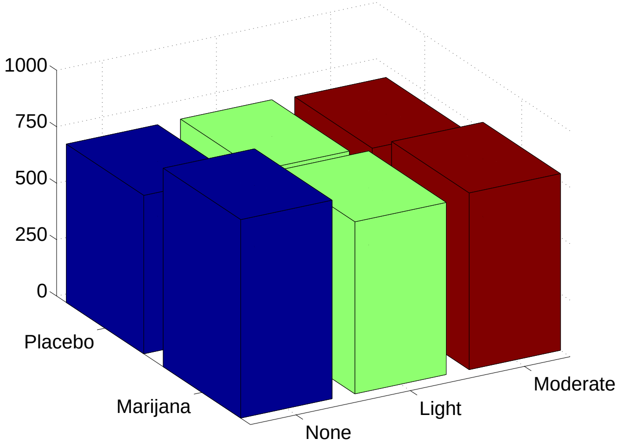
Изучалось воздействие марихуаны на скорость реакции. В качестве испытуемых были выбраны по 12 человек из каждой категории:

- никогда не пробовали марихуану;
- иногда употребляют марихуану;
- регулярно употребляют марихуану.

Испытуемые были разделены на две равные группы; половине из них дали выкурить две сигареты с марихуаной, вторая половина выкурила две обычные сигареты с запахом и вкусом марихуаны. Сразу после этого все испытуемые прошли тест на скорость реакции.
Требуется оценить влияние марихуаны на скорость реакции, учитывая фактор предыдущего опыта употребления.

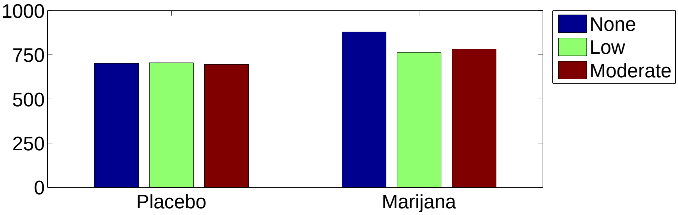
Марихуана и скорость реакции

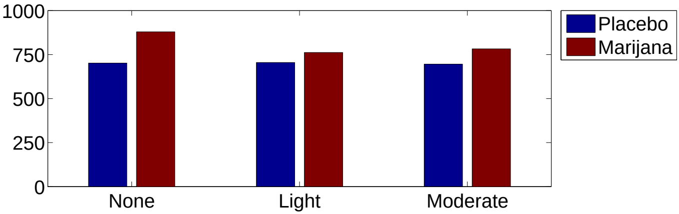
Плохой график:



Марихуана и скорость реакции

Хорошие графики:





Марихуана и скорость реакции

H_0^1: средняя скорость реакции одинакова при употреблении и марихуаны, и сигарет.
H_0^2: средняя скорость реакции не зависит от предыдущего опыта употребления марихуаны.
H_0^{12}: отсутствует межфакторное взаимодействие между употребляемым веществом и предыдущим опытом употребления марихуаны.

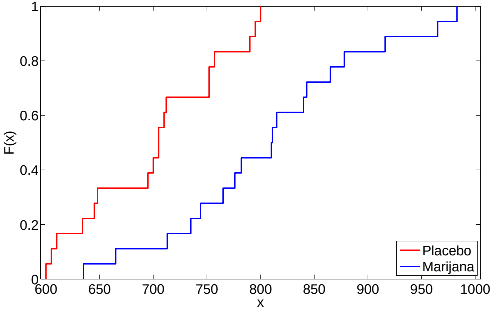
Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Group	103041	1	103041	17.58	0.0002
Past use	23634.5	2	11817.2	2.02	0.1508
Interaction	23642.2	2	11821.1	2.02	0.1507
Error	175796.3	30	5859.9		
Total	326114	35			

Марихуана и скорость реакции

Вывод: гипотеза о том, что предыдущий опыт употребления не влияет на скорость реакции, не отклоняется $\Rightarrow$ данные по группам можно объединить.

Для объединённых данных:

- однофакторный дисперсионный анализ: $p = 0.00036$;
- критерий Уилкоксона, двусторонняя альтернатива: $p = 0.000596$;
- критерий Стьюдента, односторонняя альтернатива: $p = 0.00018, \quad ci = (61.3, \infty)$;



Иерархический дизайн

Стандартная постановка двухфакторного дисперсионного анализа предполагает, что уровни факторов в выборке распределены независимо.

Пример, когда это не так: признак — уровень гликогена в икроножной мышце крысы, фактор 1 — уровень стресса крыс, фактор 2 — различия между клетками. Крысы со стрессом живут в клетках 1 и 2, без стресса — 3 и 4.

Решение — иерархический дисперсионный анализ (nested ANOVA).

CBI чернобрюхой дрозофилы

Codon bias index (CBI) — мера случайности использования синонимичных кодонов в геноме — была определена для нескольких регионов двух хромосом чернобрюхой дрозофилы. Требуется определить, есть ли систематические различия по величине CBI между разными хромосомами и регионами.

CBI чернобрюхой дрозофилы

Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Chromosome	0.00496	2	0.00248	0.32	0.7319
Region(Chromosome)	0.16295	3	0.05432	6.92	0.0011
Error	0.23564	30	0.00785		
Total	0.40891	35			

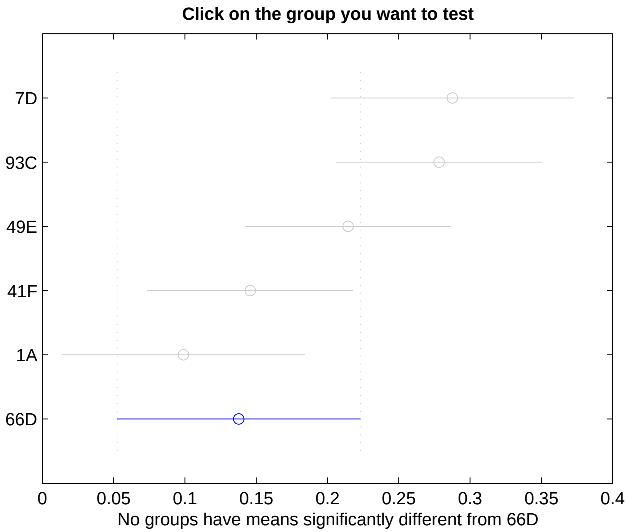
Есть различия между регионами, нет различий между хромосомами.

CBI чернобрюхой дрозофилы

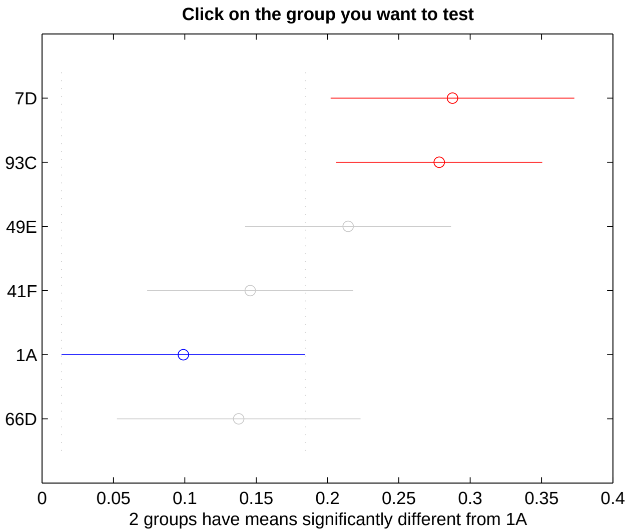
Для уточнения различий применим метод HSD:

Группа 1	Группа 2	CI_L	mean	CI_U
7D	93C	-0.1485	0.0093	0.1672
7D	49E	-0.0847	0.0732	0.2310
7D	41F	-0.0161	0.1417	0.2996
7D	1A	0.0181	0.1886	0.3591
7D	66D	-0.0207	0.1498	0.3203
93C	49E	-0.0802	0.0639	0.2079
93C	41F	-0.0117	0.1324	0.2765
93C	1A	0.0214	0.1793	0.3371
93C	66D	-0.0174	0.1405	0.2983
49E	41F	-0.0755	0.0686	0.2127
49E	1A	-0.0424	0.1154	0.2733
49E	66D	-0.0812	0.0766	0.2345
41F	1A	-0.1110	0.0469	0.2047
41F	66D	-0.1498	0.0081	0.1659
1A	66D	-0.2093	-0.0388	0.1317

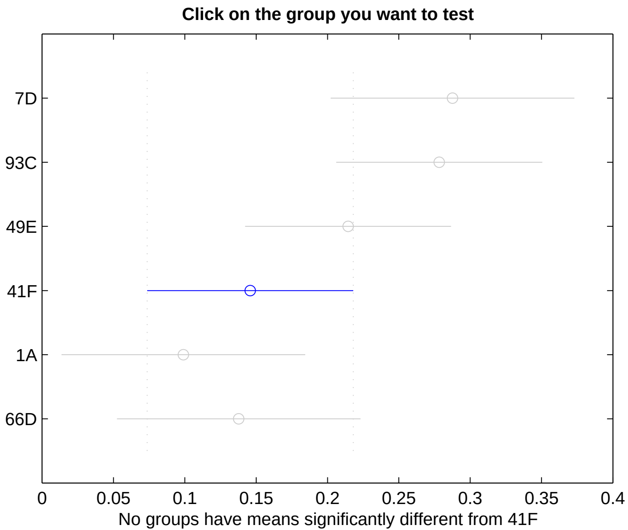
CBI чернобрюхой дрозофилы



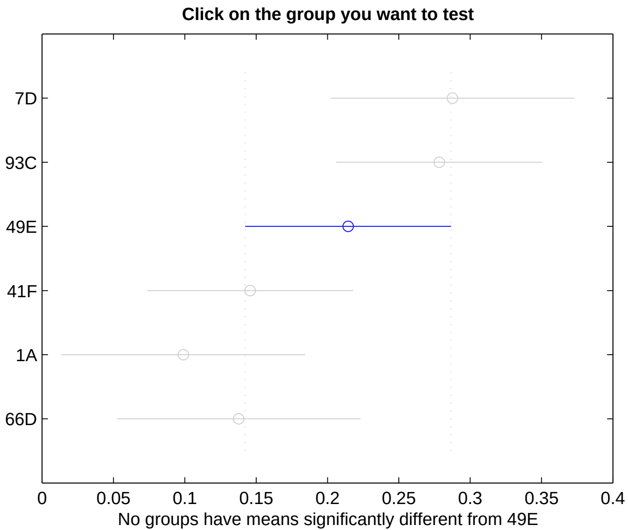
CBI чернобрюхой дрозофилы



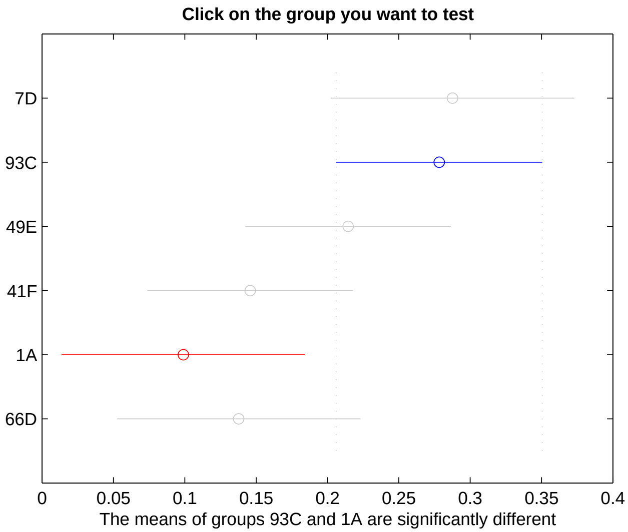
CBI чернобрюхой дрозофилы



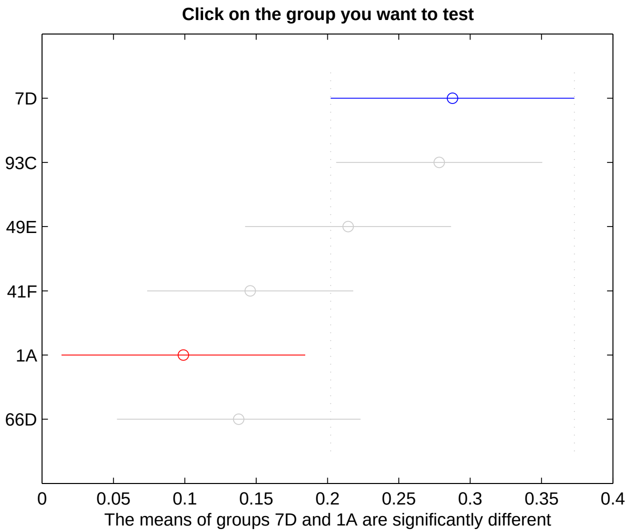
CBI чернобрюхой дрозофилы



CBI чернобрюхой дрозофилы



CBI чернобрюхой дрозофилы



Лечение гипертонии

72 пациента проходили лечение от гипертонии. Для лечения использовались три вида лекарств, при этом их эффект изучался как при использовании специальной диеты, так и в её отсутствии; кроме того, в ряде случаев применялась психотерапия. Данные — артериальное давление пациента по окончании лечения.
Требуется сравнить эффективность методов для лечения гипертонии.

Дизайн $[3 \times 2 \times 2]$.

Лечение гипертонии

Трёхфакторный дисперсионный анализ, все взаимодействия:

Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Therapy	2048	1	2048	13.07	0.0006
Diet	5202	1	5202	33.2	0
Drug	3675	2	1837.5	11.73	0.0001
Therapy*Diet	32	1	32	0.2	0.6529
Therapy*Drug	259	2	129.5	0.83	0.4425
Diet*Drug	903	2	451.5	2.88	0.0638
Therapy*Diet*Drug	1075	2	537.5	3.43	0.0388
Error	9400	60	156.67		
Total	22594	71			

Лечение гипертонии

Значимость многофакторных взаимодействий:

- Diet*Drug: воздействие диеты различно при различных применяемых препаратах (или наоборот, действие препаратов зависит от диеты);
- Therapy*Diet*Drug: воздействие одного из факторов различно при различных комбинациях двух других. Хотя эффект Therapy*Drug незначим в целом, значимость Therapy*Diet*Drug говорит о том, что влияние Therapy*Drug необходимо оценивать отдельно для пациентов, использующих и не использующих диету.

Прикладная статистика
4. Дисперсионный анализ.

Рябенко Евгений
riabenko.e@gmail.com