

Методы оптимизации (ФКН ВШЭ, 2017). Домашняя работа 3.

Тема: Выпуклые множества и функции.

Срок сдачи: 22 февраля (среда) 2017, 23:59, после срока не принимается.

Выполненное задание следует отправить письмом на почту своей группы¹ с заголовком:

Домашнее задание 3, Фамилия Имя.

либо сдать 21 февраля на семинаре в письменном виде.

Обязательная часть (10 баллов)

- 1 Покажите, что единичная сфера $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ не является выпуклым множеством. Здесь $\|\cdot\|$ — произвольная норма.
- 2 Какие из следующих множеств являются выпуклыми? Ответ обосновать.
 - (a) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \max_i x_i \leq 1\}$
 - (b) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \max_i x_i \geq 1\}$
 - (c) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \min_i x_i \leq 1\}$
 - (d) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \min_i x_i \geq 1\}$
- 3 Покажите выпуклость множества $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T P x \leq (c^T x)^2, c^T x \geq 0\}$, где $c \in \mathbb{R}^n$, $P \in \mathbb{S}_{++}^n$.

- 4 Покажите, что следующие функции являются выпуклыми:

(a) $f(x) = \sum_{i=1}^n w_i \ln(1 + \exp(a_i^T x)) + \frac{\mu}{2} \|x\|_2^2, \quad \mu > 0, w_i > 0, a_i \in \mathbb{R}^n, \quad \text{Dom } f := \mathbb{R}^n.$

(b) $f(x) = \max_{1 \leq i \leq n} \{w_i \ln(1 + \exp(|x_i|))\}, \quad w_i > 0, \quad \text{Dom } f := \mathbb{R}^n.$

(c) $f(X) = \text{Tr}(X^{-1}), \quad \text{Dom } f := \mathbb{S}_{++}^n.$

(d) $f(x) = (a^T x - b)_+, \quad a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}, \quad \text{Dom } f := \mathbb{R}^n.$

(e) $f(x) = \ln \left(\sum_{i=1}^n \exp([(x_i)_+]^2) \right), \quad \text{Dom } f := \mathbb{R}^n.$

(Обозначение: $(t)_+ := \max\{t, 0\}$ — положительная срезка.)

- 5 Пусть $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$, где Q — выпуклое множество. Докажите эквивалентность следующих утверждений:
 - (a) Функция f является выпуклой: $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ для всех $x, y \in Q, \lambda \in (0, 1)$.
 - (b) Надграфик $\text{Epi}(f) := \{(x, t) \in Q \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq t\}$ является выпуклым множеством.

¹Для 141 группы: opt.homework+141@gmail.com. Для 142 группы: opt.homework+142@gmail.com. Для 145 группы: opt.homework+145@gmail.com.

Бонусная часть (6 баллов)

6 Для каждой из следующих функций определите, является ли она выпуклой? Вогнутой?

(a) $f(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$, $p < 1$, $p \neq 0$, $\text{Dom } f := \mathbb{R}_{++}^n$.

(b) (Минимальное сингулярное число) $f(X) = \sigma_{\min}(X)$, $\text{Dom } f := \mathbb{R}^{m \times n}$.

(c) (Среднее геометрическое компонент) $f(x) = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n}$, $\text{Dom } f := \mathbb{R}_+^n$.

(d) (Среднее геометрическое собственных значений) $f(X) = \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i(X) \right)^{1/n}$, $\text{Dom } f := \mathbb{S}_+^n$.

(e) (Сумма k старших компонент) $f(x) = \sum_{i=1}^k x_{[i]}$, $1 \leq k \leq n$, $\text{Dom } f := \mathbb{R}^n$.

(Здесь $x_{[i]}$ обозначает i -ую компоненту отсортированного по убыванию вектора x .)

7 Рассмотрим функцию двух аргументов:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x_2^2}{x_1}, & x_1 > 0, \\ 0, & x_1 = x_2 = 0, \end{cases} \quad \text{Dom } f := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}.$$

Покажите, что надграфик $\text{Epi}(f) := \{(x, t) \in \text{Dom } f \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq t\}$ является выпуклым множеством и, тем самым, функция f является выпуклой (хоть и разрывной).

8 Пусть $\mathcal{F} \subset C^1(\mathbb{R}^n)$ — максимальное по включению подмножество непрерывно-дифференцируемых функций на \mathbb{R}^n , удовлетворяющее следующим трем требованиям.

- Для произвольной функции $f \in \mathcal{F}$ условие оптимальности первого порядка в некоторой точке является *достаточным* для того, чтобы эта точка была глобальным минимумом функции:

$$\left(\nabla f(x_0) = 0, x_0 \in \mathbb{R}^n \right) \Rightarrow \left(f(x) \geq f(x_0) \text{ для всех } x \in \mathbb{R}^n \right),$$

- Класс \mathcal{F} замкнут относительно неотрицательных линейных комбинаций:

$$\left(f_1, f_2 \in \mathcal{F}, \alpha, \beta \geq 0 \right) \Rightarrow \left(\alpha f_1 + \beta f_2 \in \mathcal{F} \right),$$

- Класс \mathcal{F} содержит все аффинные функции:

$$\left(f(x) = a^T x + b, a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R} \right) \Rightarrow \left(f \in \mathcal{F} \right).$$

Докажите, что \mathcal{F} состоит в точности из всех непрерывно-дифференцируемых выпуклых функций.