Методы оптимизации (ФКН ВШЭ, 2017). Домашняя работа 3. Тема: Выпуклые множества и функции.

Срок сдачи: 22 февраля (среда) 2017, 23:59, после срока не принимается.

Выполненное задание следует отправить письмом на почту своей группы[1] с заголовком:

Домашнее задание 3, Фамилия Имя.

либо сдать 21 февраля на семинаре в письменном виде.

Обязательная часть (10 баллов)

1 Покажите, что единичная сфера $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ не является выпуклым множеством. Здесь $\|\cdot\|$ — произвольная норма.

2 Какие из следующих множеств являются выпуклыми? Ответ обосновать.

(a) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \max_i x_i \leqslant 1\}$

(b) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \max_i x_i \geqslant 1\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \min_i x_i \leqslant 1\}$

(d) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \min_i x_i \geqslant 1\}$

3 Покажите выпуклость множества $\{x \in \mathbb{R}^n \;\big|\; x^T P x \leqslant (c^T x)^2,\ c^T x \geqslant 0\}$, где $c \in \mathbb{R}^n,\ P \in \mathbb{S}^n_{++}$.

4 Покажите, что следующие функции являются выпуклыми:

(a) $f(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i \ln(1 + \exp(a_i^T x)) + \frac{\mu}{2}\|x\|_2^2, \qquad \mu > 0,\ w_i > 0,\ a_i \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{Dom}\, f \;:=\; \mathbb{R}^n.$

(b) $f(x) = \max\limits_{1 \le i \le n} \Big\{ w_i \ln\big(1 + \exp(|x_i|)\big) \Big\}, \qquad w_i > 0, \quad \mathrm{Dom}\, f := \mathbb{R}^n.$

(c) $f(X) = \mathrm{Tr}(X^{-1}), \qquad \mathrm{Dom}\, f := \mathbb{S}^n_{++}.$

(d) $f(x) = (a^T x - b)_+, \qquad a \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Dom}\, f := \mathbb{R}^n.$

(e) $f(x) = \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \exp([(x_i)_+]^2)\right), \qquad \mathrm{Dom}\, f := \mathbb{R}^n.$

(Обозначение: $(t)_+ := \max\{t, 0\}$ — положительная срезка.)

5 Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Докажите эквивалентность следующих утверждений:

(a) Функция f является выпуклой: $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \alpha f(x) + (1-\lambda) f(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in (0, 1)$.

(b) Надграфик $\mathrm{Epi}(f) := \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant t\}$ является выпуклым множеством.

[1] Для 141 группы: opt.homework+141@gmail.com. Для 142 группы: opt.homework+142@gmail.com. Для 145 группы: opt.homework+145@gmail.com.

Бонусная часть (6 баллов)

6 Для каждой из следующих функций определите, является ли она выпуклой? Вогнутой?

(a) $f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p < 1,\ p \neq 0, \qquad \mathrm{Dom}\, f := \mathbb{R}^n_{++}.$

(b) (Минимальное сингулярное число) $f(X) = \sigma_{\min}(X), \qquad \mathrm{Dom}\, f := \mathbb{R}^{m \times n}.$

(c) (Среднее геометрическое компонент) $f(x) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}, \qquad \mathrm{Dom}\, f := \mathbb{R}^n_+.$

(d) (Среднее геометрическое собственных значений) $f(X) := \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i(X)\right)^{1/n}, \qquad \mathrm{Dom}\, f := \mathbb{S}^n_+.$

(e) (Сумма k старших компонент) $f(x) = \sum_{i=1}^{k} x_{[i]}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad \mathrm{Dom}\, f := \mathbb{R}^n.$

(Здесь $x_{[i]}$ обозначает i-ую компоненту отсортированного по убыванию вектора x.)

7 Рассмотрим функцию двух аргументов:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x_2^2}{x_1}, & x_1 > 0, \\ 0, & x_1 = x_2 = 0, \end{cases} \qquad \mathrm{Dom}\, f := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}.$$

Покажите, что надграфик $\mathrm{Epi}(f) := \{(x, t) \in \mathrm{Dom}\, f \times \mathbb{R} \,|\, f(x) \leqslant t\}$ является выпуклым множеством и, тем самым, функция f является выпуклой (хоть и разрывной).

8 Пусть $\mathcal{F} \subset C^1(\mathbb{R}^n)$ — некоторый класс непрерывно-дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющий следующим трем требованиям.

- Для произвольной функции $f \in \mathcal{F}$ условие оптимальности первого порядка в некоторой точке является *достаточным* для того, чтобы эта точка была глобальным минимумом функции:

$$\Big(\nabla f(x_0) = 0,\ x_0 \in \mathbb{R}^n\Big) \quad \Rightarrow \quad \Big(f(x) \geq f(x_0) \ \text{ для всех } x \in \mathbb{R}^n\Big),$$

- Класс $\mathcal{F}$ замкнут относительно неотрицательных линейных комбинаций:

$$\Big(f_1, f_2 \in \mathcal{F},\ \ \alpha, \beta \geqslant 0\Big) \quad \Rightarrow \quad \Big(\alpha f_1 + \beta f_2 \in \mathcal{F}\Big),$$

- Класс $\mathcal{F}$ не пустой и содержит, как минимум, все аффинные функции:

$$\Big(f(x) = a^T x + b, \quad a \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}\Big) \quad \Rightarrow \quad \Big(f \in \mathcal{F}\Big).$$

Докажите, что класс $\mathcal{F}$ состоит в точности из всех непрерывно-дифференцируемых выпуклых функций.