

# Методы оптимизации, ФКН ВШЭ, зима 2017

## Домашнее задание 4: Условная оптимизация

Срок сдачи: 15 марта (среда) 2017, 23:59, после срока не принимается.

Выполненное задание следует отправить письмом на почту своей группы<sup>1</sup> с заголовком:

Домашнее задание 4, Фамилия Имя.
----------------------------------

либо сдать 14 марта на семинаре в письменном виде.

1 Для каждой из следующих задач найдите оптимальное значение и множество оптимальных решений:

(a) (Линейное программирование с одним ограничением)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{c^T x : a^T x \leq \beta\},$$

где  $a, c \in \mathbb{R}^n$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ ,  $c \neq 0$ .

(b) (Линейная функция на стандартном симплексе)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ c^T x : x \succeq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\},$$

где  $c \in \mathbb{R}^n$ .

(c) (Линейная функция с энтропийным регуляризатором)

$$\min_{x \in \mathbb{R}_{++}^n} \left\{ c^T x + \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i : \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\},$$

где  $c \in \mathbb{R}^n$ .

2 Для каждой из следующих задач оптимизации: 1) Построить двойственную задачу. 2) Выписать явные формулы, позволяющие по решению двойственной задачи восстановить (вычислить) решение прямой.

(a) (Гребневая регрессия)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n, s \in \mathbb{R}^m} \left\{ \frac{1}{2} \|s - b\|_2^2 + \frac{\rho}{2} \|x\|_2^2 : s = Ax \right\},$$

где  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $\rho \in \mathbb{R}_{++}$ .

(b) (SVM)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^m} \left\{ \sum_{i=1}^m t_i + \frac{\rho}{2} \|x\|_2^2 : Ax \succeq 1_m - t, t \succeq 0 \right\},$$

где  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $1_m := (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^m$ .

---

<sup>1</sup>Для 141 группы: opt.homework+141@gmail.com. Для 142 группы: opt.homework+142@gmail.com. Для 145 группы: opt.homework+145@gmail.com.

3 Свести эквивалентным образом следующие негладкие безусловные задачи к гладким условным:

(a) (Максимум из конечного числа гладких функций)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \max\{f_1(x), \dots, f_m(x)\},$$

где  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — заданные гладкие функции.

(b) (Наилучшее решение линейной системы в  $\ell_\infty$ -норме)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_\infty,$$

где  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ .

(c) (Наилучшее решение линейной системы в  $\ell_1$ -норме)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_1,$$

где  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ .

(d) (Задача LASSO)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \rho \|x\|_1 \right\},$$

где  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $\rho \in \mathbb{R}_{++}$ ,  $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$ .

4 Для каждой из следующих квадратичных задач (QCQP) найдите аналитическое решение:

(a) (Минимизация линейной формы на эллипсоиде)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{c^T x : x^T A x \leq 1\},$$

где  $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  и  $A \in \mathbb{S}_{++}^n$ .

(b) (Минимизация квадратичной формы на эллипсоиде)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{x^T B x : x^T A x \leq 1\},$$

где  $A \in \mathbb{S}_{++}^n$ ,  $B \in \mathbb{S}_+^n$ .

5 Для каждого из следующих множеств  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  найти евклидову проекцию заданной точки  $v \in \mathbb{R}^n$  на множество  $Q$  (т. е. найти  $\Pi_Q(v) := \operatorname{argmin}_{x \in Q} \|x - v\|_2^2$ ):

(a) (Короб)  $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \in [l_i, r_i], i = 1, \dots, n\}$ , где  $-\infty \leq l_i \leq r_i \leq +\infty$ . (Замечание: Допускается, что  $l_i = -\infty$  и/или  $r_i = +\infty$ , т. е. короб может быть неограниченным вдоль некоторых направлений.)

(b) (Аффинное многообразие)  $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$ , где  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $\operatorname{Rank}(A) = m$ .

(c) (Полупространство)  $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq \beta\}$ , где  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ .

Воспользуйтесь полученными выше результатами и выпишите ответ для следующих случаев:

- (Неотрицательный ортант)  $Q = \mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$ .
- (Единичный  $L_\infty$ -шар)  $Q = B_\infty(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty \leq 1\}$ .
- (Гиперплоскость)  $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = \beta\}$ , где  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ .

## Бонусная часть (6 баллов)

6 Рассмотрим QCQP:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{1}{2} x^T A x - b^T x : \|x\|_2 \leq 1 \right\},$$

где  $A \in \mathbb{S}_{++}^n$  и  $b \in \mathbb{R}^n$ . Докажите, что оптимальное решение в этой задаче равно  $(A + \lambda I_n)^{-1} b$ , где  $\lambda := \max\{0, \bar{\lambda}\}$  и  $\bar{\lambda}$  — это наибольшее из решений нелинейного уравнения

$$b^T (A + \lambda I_n)^{-2} b = 1.$$

7 Рассмотрим задачу поиска евклидовой проекции заданной точки  $v \in \mathbb{R}^n$  на стандартный симплекс:

$$\Pi_{\Delta_n}(v) := \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \|x - v\|_2 : x \succeq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}.$$

Докажите, что  $\Pi_{\Delta_n}(v) = (v - \nu 1_n)_+$ , где  $\nu \in \mathbb{R}$  — корень нелинейного уравнения

$$1_n^T (v - \nu 1_n)_+ = 1. \tag{1}$$

Здесь  $1_n := (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ , а  $(u)_+$  обозначает поэлементную положительную срезку  $(u_i)_+ := \max\{0, u_i\}$ . Нарисуйте схематичный график левой части уравнения (1) как функции от  $\nu$ .

*Подсказка.* Удобно рассмотреть упорядоченные компоненты  $v_{[1]} \geq \dots \geq v_{[n]}$ .

8 Пусть  $\Sigma, \Sigma_0 \in \mathbb{S}_{++}^n$ . Обозначим через  $D(\Sigma; \Sigma_0)$  дивергенцию Кульбака-Лейблера между нормальными распределениями  $\mathcal{N}(0, \Sigma)$  и  $\mathcal{N}(0, \Sigma_0)$ :

$$D(\Sigma; \Sigma_0) = \frac{1}{2} (\operatorname{Tr}(\Sigma_0^{-1} \Sigma) - \ln \operatorname{Det}(\Sigma_0^{-1} \Sigma) - n).$$

Пусть  $H \in \mathbb{S}_{++}^n$ . Пусть также  $y, s \in \mathbb{R}^n$ , причем  $y^T s > 0$ . Рассмотрим задачу поиска матрицы  $X \in \mathbb{S}_{++}^n$ , минимизирующую дивергенцию  $D(X^{-1}; H^{-1})$  при условии  $Xy = s$ :

$$\min_{X \in \mathbb{S}_{++}^n} \{D(X^{-1}; H^{-1}) : Xy = s\}.$$

Решите эту задачу и убедитесь, что ее решение выражается по формуле обновления обратной матрицы в схеме BFGS:

$$X = (I_n - \rho s y^T) H (I_n - \rho y s^T) + \rho s s^T,$$

где  $\rho := 1/(y^T s)$ .