

Прикладной статистический анализ данных.  
12. Анализ временных рядов, часть третья.

Рябенко Евгений  
riabenko.e@gmail.com

28 ноября 2014 г.

## Причинность по Грейнджеру

Между рядами  $x_1, \dots, x_T$  и  $y_1, \dots, y_T$  существует **причинная связь Грейнджера**  $x_t \rightarrow y_t$ , если дисперсия ошибки оптимального прогноза  $\hat{y}_{t+1}$  по  $y_1, \dots, y_t, x_1, \dots, x_t$  меньше, чем только по  $y_1, \dots, y_t$ .

Причинность по Грейнджеру является необходимым, но не достаточным условием причинно-следственной связи.

$x_1, \dots, x_T$  и  $y_1, \dots, y_T$  **взаимосвязаны**, если  $x_t \rightarrow y_t$  и  $y_t \rightarrow x_t$ .

## Критерий Грейнджера

$$y_t = \alpha + \sum_{i=1}^{k_1} \phi_{1i} y_{t-i} + \sum_{i=1}^{k_2} \phi_{2i} x_{t-i} + \varepsilon_t.$$

$k_1$  и  $k_2$  выбирается по информационному критерию.

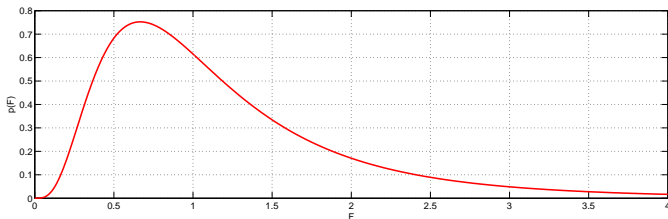
$$x_t \rightarrow y_t \Rightarrow \exists \phi_{2i} \neq 0.$$

нулевая гипотеза:  $H_0: \phi_{21} = \dots = \phi_{2k_2} = 0;$

альтернатива:  $H_1: H_0$  неверна;

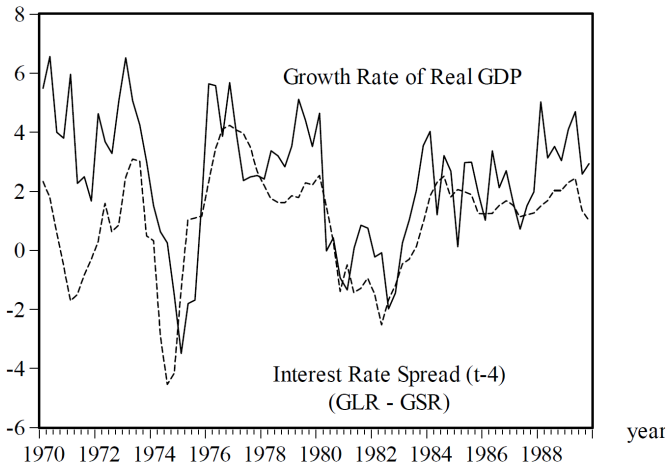
статистика:  $F = \frac{(RSS_r - RSS_{ur})/k_2}{RSS_{ur}/(T - k_1 - k_2 - 1)};$

$F \sim F(k_1, T - k_1 - k_2 - 1)$  при  $H_0$ .



# Критерий Грейнджера

Маржа сверх процентной ставки и рост ВВП, ФРГ:



## Критерий Грейнджера

$y$	$x$	$k_1$	$k_2$	$F(y \leftarrow x)$	$F(y \rightarrow x)$
$\Delta_4 \ln GDP_r$	$\Delta_4 \ln M1_r$	4	4	6.087***	1.918
		8	8	3.561**	1.443
$\Delta_4 \ln GDP_r$	$GLR - GSR$	4	4	3.160*	3.835**
		8	8	1.927(*)	2.077*
$\Delta_4 \ln M1_r$	$GLR - GSR$	4	4	5.615***	1.489
		8	8	2.521*	1.178

$\Delta_4 \ln GDP_r$  — годовой прирост ВВП в процентах,

$\Delta_4 \ln M1_r$  — годовой прирост фактического количества денег в процентах,

$GLR$  — рост государственных облигаций,

$GSR$  — трёхмесячная ставка денежного рынка во Франкфурте.

(\*), \*, \*\*, \*\*\* — значимость на уровне 0.1, 0.05, 0.01 и 0.001.

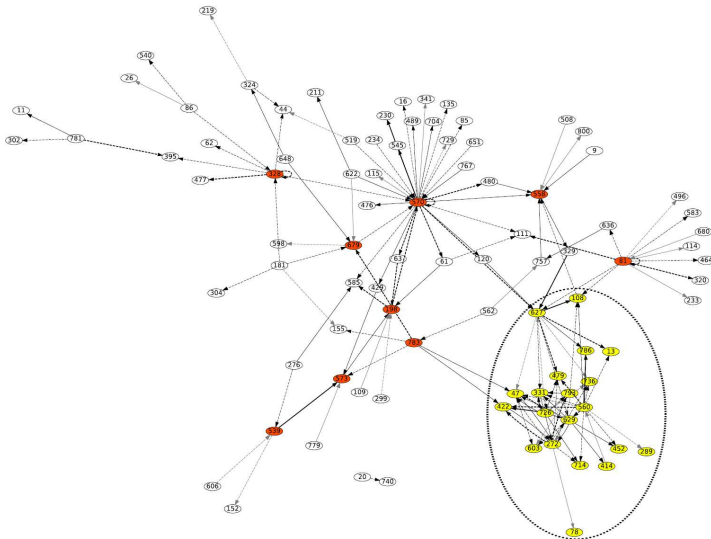
# Многомерный критерий Грейнджера

Зависимость между признаками  $x$  и  $y$  может оцениваться с учётом возможной зависимости от всех остальных признаков:

$$y_t = \alpha + \sum_{i=1}^{k_1} \phi_{1i} y_{t-i} + \sum_{i=1}^{k_2} \phi_{2i} x_{t-i} + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{k_{j+2}} \phi_{(j+2)i} z_{t-i}^j + \varepsilon_t.$$

Для задач с большим количеством признаков могут использоваться регуляризаторы (лассо, ридж).

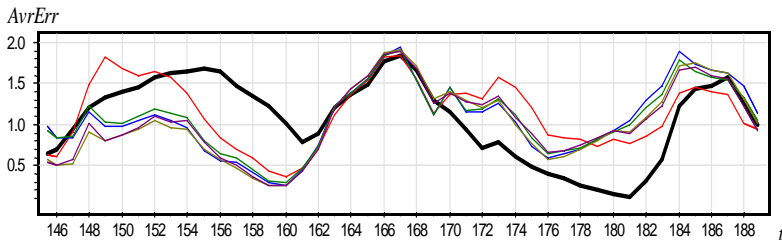
# Граф причинности по Грейнджеру



Критерий Грейнджера + поправка на множественную проверку гипотез

## Адаптивная селекция и композиция

Динамика средних ошибок прогнозов для 6 моделей (по реальным данным объёмов продаж в супермаркете):



**Идея:** включить наиболее удачные модели и отключить менее удачные.



## Адаптивная селективная модель

Пусть имеется  $k$  моделей прогнозирования,

$\hat{y}_{j,t+d}$  — прогноз  $j$ -й модели на момент  $t+d$ ,

$\varepsilon_{jt} = y_t - \hat{y}_{jt}$  — ошибка прогноза в момент  $t$ ,

$\tilde{\varepsilon}_{jt} = \sum_{l=R}^{t-d} \gamma^{t-d-l} |\varepsilon_{jl}|$  — экспоненциально сглаженная ошибка.

Лучшая модель в момент времени  $t$ :

$$j_t^* = \operatorname{argmin}_{j=1,\dots,k} \tilde{\varepsilon}_{jt}.$$

Адаптивный селективный прогноз:

$$\hat{y}_{j,t+d} := \hat{y}_{j_t^*,t+d}.$$

## Адаптивная композиция моделей

Пусть имеется  $k$  моделей прогнозирования,

$\hat{y}_{j,t+d}$  — прогноз  $j$ -й модели на момент  $t+d$ ,

$\varepsilon_{jt} = y_t - \hat{y}_{jt}$  — ошибка прогноза в момент  $t$ ,

$\tilde{\varepsilon}_{jt} = \sum_{l=R}^{t-d} \gamma^{t-d-l} |\varepsilon_{jl}|$  — экспоненциально сглаженная ошибка.

Линейная комбинация моделей:

$$\hat{y}_{t+d} = \sum_{j=1}^k w_{jt} \hat{y}_{j,t+d}, \quad \sum_{j=1}^k w_{jt} = 1, \quad \forall t.$$

Адаптивный подбор весов:

$$w_{jt} = \frac{(\tilde{\varepsilon}_{jt})^{-1}}{\sum_{s=1}^k (\tilde{\varepsilon}_{st})^{-1}}.$$

## Адаптация весов с регуляризацией

На каждом шаге  $t$  веса определяются по МНК и сглаживаются:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^t \beta^{t-i} \left( \sum_{j=1}^k w_j \hat{y}_{j,i} - y_i \right)^2 + \lambda \sum_{j=1}^k (w_j - w_{j,t-1})^2 \rightarrow \min_{w_j, j=1, \dots, k} \\ \sum_{j=1}^k w_j = 1. \end{array} \right.$$

$\beta$  — коэффициент забывания предыстории,

$\lambda$  — коэффициент регуляризации.

### Дополнительные варианты:

- $\beta \rightarrow 0$  — локальная адаптация весов с регуляризацией (оставляем в функционале только одно слагаемое,  $i = t$ );
- $w_j \geq 0$  — монотонный корректор;
- если прогнозов слишком много, индивидуальные прогнозы можно кластеризовать, усреднить по кластерам и подбирать веса средних.

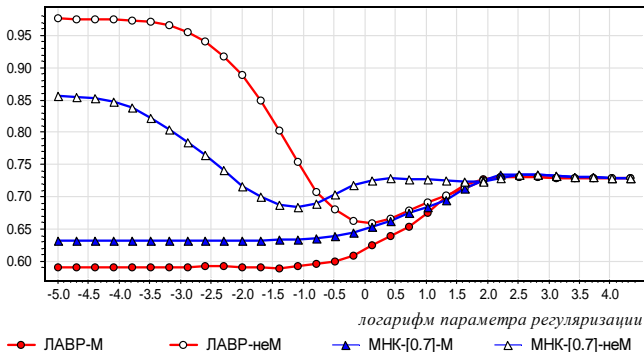
## Другие способы комбинирования

- регрессия ряда на несколько первых главных компонент прогнозов в скользящем окне;
- МНК с байесовским регуляризатором на веса (априорное распределение — равномерное);
- экспоненциально сглаживаются не модули, а квадраты ошибок;
- вместо экспоненциального сглаживания используется усреднение в окне;
- ...

## Сравнение способов комбинирования

(Воронцов, Егорова, 2006): лучшие результаты даёт адаптация весов с монотонным корректором и без регуляризации; хорошо работает адаптивная селекция с подбором параметра сглаживания.

Средняя ошибка прогнозов на скользящем контроле ( $T = 620$ )



(Genre et al., 2013): относительный выигрыш сложных методов по сравнению с простым усреднением прогнозов невелик и в большинстве случаев статистически незначим (“forecast combination puzzle”).

## Агрегирующий алгоритм Вовка

Пусть  $y \in [0, 1]$ ; рассмотрим адаптивную композицию со следующими весами:

$$\begin{aligned}w_{j1} &= \frac{1}{k}, \\w_{jt}^* &= e^{-\eta \varepsilon_{jt}^2} w_{j(t-1)}, \\w_{jt} &= \frac{w_{jt}^*}{\sum_{j=1}^k w_{jt}^*},\end{aligned}$$

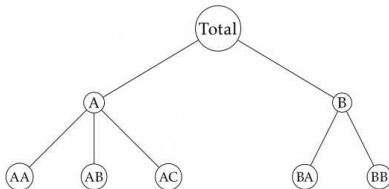
$j = 1, \dots, k$ ,  $\eta \in (0, \infty)$  — скорость обучения.

Пусть  $\varepsilon_{AGG,t}$  — остатки такого алгоритма. При  $0 < \eta \leq 2$

$$\sum_{t=1}^T \varepsilon_{AGG,t}^2 \leq \sum_{t=1}^T \varepsilon_{jt}^2 + \frac{\ln k}{\eta} \quad \forall j = 1, \dots, k.$$

# Иерархия рядов

Часто необходимо прогнозировать совокупности временных рядов иерархической структуры. Например, продажи могут группироваться по товарным группам, складам, поставщикам и т. д.



$$\begin{pmatrix} y_t \\ y_{A,t} \\ y_{B,t} \\ y_{AA,t} \\ y_{AB,t} \\ y_{AC,t} \\ y_{BA,t} \\ y_{BB,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{AA,t} \\ y_{AB,t} \\ y_{AC,t} \\ y_{BA,t} \\ y_{BB,t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_t = \mathbf{S}\mathbf{y}_{K,t}.$$

## Подходы к прогнозированию

**Снизу вверх:** прогнозы рядов более высоких уровней иерархии получаются суммированием прогнозов нижнего уровня.

- информация не теряется из-за агрегирования, но
- прогнозировать ряды нижнего уровня часто сложнее.

**Сверху вниз:** прогноз суммарного ряда  $y_t$  распределяется согласно средним долям:

$$p_j = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{y_{j,t}}{y_t}$$

или долям средних:

$$p_j = \sum_{t=1}^T \frac{y_{j,t}}{T} / \sum_{t=1}^T \frac{y_t}{T}.$$

- прогнозировать суммированный ряд легко, но
- из-за агрегирования теряется информация (например, если компоненты имеют разную сезонность).



## Подходы к прогнозированию

**Оптимальная комбинация:** ряд каждого уровня прогнозируется отдельно, затем прогнозы корректируются в сторону большей согласованности с помощью регрессии

$$\hat{\mathbf{y}}_h = S\beta_h + \varepsilon_h, \quad \mathbb{E}\varepsilon_h = 0, \quad \text{cov } \varepsilon = \Sigma_h;$$

$$\varepsilon_h \approx S\varepsilon_{K,h} \Rightarrow \tilde{\mathbf{y}}_h = S \left( S^T S \right)^{-1} \hat{\mathbf{y}}_h.$$

Метод реализован в пакете `hts`.

**Метод с теоретическими гарантиями:** (Стенина, Стрижов, 2015) если суммарные потери при прогнозировании всех рядов иерархии измеряются с помощью функции из класса дивергенций Брегмана, проецирование вектора прогнозов на множество векторов, удовлетворяющих структуре иерархии, не увеличивает суммарные потери.

Метод Хольта-Уинтерса (ETS(A,A,A)):

$$\begin{aligned}\hat{y}_{t+d|t} &= l_t + db_t + s_{t-m+(d \bmod m)}, \\ l_t &= \alpha (y_t - s_{t-m}) + (1 - \alpha) (l_{t-1} + b_{t-1}), \\ b_t &= \beta (l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta) b_{t-1}, \\ s_t &= \gamma (y_t - l_{t-1} - b_{t-1}) + (1 - \gamma) s_{t-m}.\end{aligned}$$

Если  $m$  велико, число сезонных коэффициентов можно сократить с помощью разложения Фурье:

$$\begin{aligned}s_t &= \sum_{j=1}^k s_{j,t}, \\ s_{j,t} &= s_{j,t-1} \cos \lambda_j + s_{j,t-1}^* \sin \lambda_j + \gamma_1 d_t, \\ s_{j,t}^* &= -s_{j,t-1} \sin \lambda_j + s_{j,t-1}^* \cos \lambda_j + \gamma_2 d_t, \\ \lambda_j &= \frac{2\pi j}{m},\end{aligned}$$

$d_t$  — ARMA(p,q)-процесс,  $\gamma_1, \gamma_2$  — параметры сглаживания.

## TBATS

- реализован с автоматическим подбором параметров в пакете `forecast`, функция `tbats`;
- позволяет моделировать ряды с нецелым периодом сезонности;
- может учитывать сезонность с несколькими разными периодами (для этого ряд должен быть объектом типа `msts`, а не `ts`);
- наследует недостаток методов экспоненциального сглаживания — не может включать регрессоры.

Пример — прогнозирование недельных данных:

```
y <- ts(x, frequency=52.18)
fit <- tbats(y)
fc <- forecast(fit)
```

## regARIMA

regARIMA позволяет моделировать сложные сезонности за счёт включения фурье-гармоник по длинным сезонным периодам в регрессоры. Кроме того, можно добавить индикаторы плавающих праздников.

Пример — прогнозирование дневных данных с годовой сезонностью:

```
y <- ts(x, frequency=7)
z <- fourier(ts(x, frequency=365.25), K=5)
zf <- fourierf(ts(x, frequency=365.25), K=5, h=100)
fit <- auto.arima(y, xreg=cbind(z,holiday))
fc <- forecast(fit, xreg=cbind(zf,holidayf), h=100)
```

$K$  можно выбрать, минимизируя  $AIC$ .

## Литература

- причинность по Грейнджеру (Granger causality) — Kirchgassner, глава 3;
- пример построения графа причинности — Orgen-Rhein;
- адаптивная селекция и композиция прогнозирующих алгоритмов — Воронцов, Genre;
- агрегирующий алгоритм Вовка — Калнишкан;
- иерархические ряды — Hyndman, 9.4;
- TBATS — De Livera.

## Литература

- Воронцов К.В., Егорова Е.В. (2006). *Динамически адаптируемые композиции алгоритмов прогнозирования*. Искусственный Интеллект, Донецк, 2, 277–280.
- Калнишкан Ю.А. *Введение в методы конкурентного предсказания*.  
[http://www.clrc.rhul.ac.uk/people/yura/concurrent\\_rus.pdf](http://www.clrc.rhul.ac.uk/people/yura/concurrent_rus.pdf)
- De Livera A.M., Hyndman R.J., Snyder R.D. (2011). *Forecasting Time Series With Complex Seasonal Patterns Using Exponential Smoothing*. Journal of the American Statistical Association, 106(496), 1513–1527.
- Genre V., Kenny G., Meyler A., Timmermann A. (2013). *Combining expert forecasts: Can anything beat the simple average?* International Journal of Forecasting, 29(1), 108–121.
- Hyndman R.J., Athanasopoulos G. *Forecasting: principles and practice*. — OTexts, 2014. <https://www.otexts.org/book/fpp>
- Kirchgassner G., Wolters J., Hassler U. *Introduction to modern time series analysis*. — Heidelberg: Springer, 2013.
- Opgen-Rhein R., Strimmer K. (2007). *Learning causal networks from systems biology time course data: an effective model selection procedure for the vector autoregressive process*. BMC Bioinformatics, 8 Suppl 2, S3.