Методы оптимизации в машинном обучении, ВМК+Физтех, осень 2017

Домашнее задание 2: Выпуклые множества и функции

Срок сдачи: 4 октября 2017 (среда), 23:59 для ВМК
6 октября 2017 (пятница), 23:59 для Физтеха

Обязательная часть

1 Пусть V — нетривиальное вещественное нормированное пространство (таким образом, $V \neq \{0\}$). Покажите, что единичная сфера $S := \{x \in V : \|x\| = 1\}$ не является выпуклым множеством.

2 Пусть V — вещественное векторное пространство, E — непустое выпуклое множество в V, и пусть $f : E \to \mathbb{R}$ — функция. Докажите эквивалентность следующих утверждений:

(a) Функция f выпуклая, т. е. $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ для всех $x, y \in E$ и всех $\lambda \in [0, 1]$.

(b) Надграфик $\operatorname{Epi}(f) := \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} : f(x) \leq t\}$ является выпуклым множеством.

3 Пусть $P \in \mathbb{S}^n_{++}$, $c \in \mathbb{R}^n$. Покажите, что множество $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle Px, x\rangle \leq \langle c, x\rangle^2;\ \langle c, x\rangle \geq 0\}$ является выпуклым.

4 Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — одна из следующих функций:

(a) $f(x) := \max\{0, \langle a, x\rangle - b\}$, где $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$.

(b) $f(x) := \sum_{i=1}^n w_i \ln(1 + \exp(\langle a_i, x\rangle)) + \frac{\mu}{2}\|x\|_2^2$, где $\mu, w_1, \ldots, w_n > 0$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$.

(c) $f(x) := \max_{1 \leq i \leq n} w_i \ln(1 + \exp(|x_i|))$, где $w_1, \ldots, w_n > 0$.

(d) $f(x) := \ln \sum_{i=1}^n \exp(\max\{0, x_i\}^2)$.

Покажите, что f выпуклая. (*Подсказка:* Опирайтесь на стандартные примеры выпуклых функций и утверждение об операциях, сохраняющих выпуклость.)

5 Для каждой из следующих задач минимизации найдите множество ее решений:

(a) $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n;\, \langle b, x\rangle < 1} \langle a, x\rangle - \ln(1 - \langle b, x\rangle)$, где $a, b \in \mathbb{R}^n$ — ненулевые векторы.

(b) $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \langle c, x\rangle e^{-\langle Ax, x\rangle}$, где $c \in \mathbb{R}^n$ — ненулевой вектор, $A \in \mathbb{S}^n_{++}$.

(c) $\min\limits_{X \in \mathbb{S}^n_{++}} \sum\limits_{i=1}^m \langle X^{-1} a_i, a_i\rangle + \ln \operatorname{Det}(X)$, где $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$.

(d) $\min\limits_{X \in \mathbb{S}^n_{++}} \langle I_n, X^{-1}\rangle - \langle A, X\rangle$, где $A \in \mathbb{S}^n$.

Обратите внимание, что в некоторых задачах при определенных значениях параметров множество решений может быть пустым.

Бонусная часть

6 Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция $f(x) := \sum_{i=1}^k x_{[i]}$, где $1 \le k \le n$, а символ $x_{[i]}$ обозначает i-ую компоненту отсортированного по убыванию вектора x. Покажите, что функция f выпуклая.

7 Пусть $f : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ — функция $f(x) := (\sum_{i=1}^n x_i^p)^{1/p}$, где $p < 1$, $p \neq 0$. Покажите, что f вогнутая.

8 Пусть $n \ge 2$, и пусть $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ — функция $f(X) := \sigma_{\min}(X)$ (наименьшее сингулярное число). Покажите, что функция f не является ни выпуклой, ни вогнутой.

9 Пусть $E := (\mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}) \cup \{(0,0)\}$ — множество в $\mathbb{R}^2$, и пусть $f : E \to \mathbb{R}$ — функция

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x_2^2}{x_1}, & \text{если } x_1 > 0, \\ 0, & \text{если } x_1 = x_2 = 0. \end{cases}$$

Покажите, что функция f не является непрерывной, но при этом ее надграфик $\mathrm{Epi}(f) := \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : f(x) \le t\}$ является выпуклым множеством. Таким образом, f представляет собой пример выпуклой разрывной функции.

10 Пусть $\mathcal{F} \subset C^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ — максимальное по включению подмножество непрерывно-дифференцируемых функций, удовлетворяющее следующим трем требованиям:

(a) (Достаточность условия оптимальности первого порядка) Если для некоторой функции $f \in \mathcal{F}$ и некоторой точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ выполнено $\nabla f(x_0) = 0$, то $f(x) \ge f(x_0)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) (Замкнутость относительно конических комбинаций) Если $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$, то $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in \mathcal{F}$ для любых $\alpha_1, \alpha_2 \ge 0$.

(c) (Нетривиальность) $\mathcal{F}$ содержит все аффинные функции.

Докажите, что $\mathcal{F}$ есть в точности класс всех непрерывно-дифференцируемых выпуклых функций из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. (*Подсказка:* Вспомните дифференциальное условие первого порядка, которым описываются непрерывно-дифференцируемые выпуклые функции.)