ПРИКЛАДНАЯ АЛГЕБРА

Лекции для групп 320–328 (III поток)
5-й семестр

Лектор — ***Гуров Сергей Исаевич***

ассистент — ***Кропотов Дмитрий Александрович***

МГУ имени М.В. Ломоносова
Факультет Вычислительной математики и кибернетики

Кафедра Математических методов прогнозирования

комн. 530, 573, 682

e-mail: *sgur@cs.msu.ru*

Литература


Воронин В.П. Дополнительные главы дискретной математики. — М.: ф-т ВМК МГУ, 2002. http://padabum.com/d.php?id=10281


Гуров С.И. Булевы алгебры, упорядоченные множества, решетки: Определения, свойства, примеры. — М.: Либроком, 2013.


Журавлёв Ю.И., Флёров Ю.А., Вялый М.Н. Дискретный анализ. Основы высшей алгебры. — М.: МЗ Пресс, 2007.


Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля: В 2-х т. — М.: Мир, 1988.


Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А. Теория кодов, исправляющих ошибки. — М.: Связь, 1979.


Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики. — М.: Изд-во МАИ, 1992.


Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки. — М.: Мир, 1976.

Часть 0

Группы, кольца, поля

Разделы

Группы (покон Эваристу Галуа): определение и нотация

Определение

Группой $\mathbf{G}$ называется пара $\langle G, * \rangle$, где G — непустое множество (*носитель*), а $*$ — бинарная операция на нём такая, что для любых $x, y, z \in G$ выполняются следующие *законы* или *аксиомы группы*:

G1: $(x * y) * z = x * (y * z)$ — ассоциативность;

G2: $\exists e \forall x : e * x = x * e = x$ — существование единицы (e);

G3: $\forall x \exists! y : y * x = x * y = e$ — существование обратного элемента к x, символически $y = x^{-1}$.

G0: $x * y \in G$ — устойчивость (замкнутость) носителя.

Группы $\mathbf{G}$ со свойством $\underset{G}{\forall} x, y : x * y = y * x$ называются *коммутативными* или *абелевыми*.

Если $|\mathbf{G}| = n$, то $\mathbf{G}$ — *конечная группа* и n — её *порядок*.

Группы: определение и нотация...

В конечной группе операцию $*$ удобно задавать *таблицей умножения* (*таблицей Кэли*).

Пример (Таблица умножения группы Клейна V_4)

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

$V_4 = \{e, a, b, c\}$
— четверная группа Клейна

Часто c обозначают ab
(и $ab = ba$, т.к. группа V_4 абелева).

Мультипликативная запись групповой операции: $x \cdot y$ (или xy), $a^0 = e$, $a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$ и справедливы все обычные свойства степени: $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$, $a^{m^n} = a^{mn}$, $a^{-n} = (a^{-1})^n$, ...

Примеры групп

1. **Числовые группы**:

   - $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — абелевы группы относительно сложения. Для них используют *аддитивную запись* $x + y$, единичный элемент называют *нулем* (0), а обратный к x — *противоположным* $(-x)$.
   - Множества ненулевых элементов $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — абелевы группы относительно умножения; здесь 1 — нуль группы.

2. **Бинарные наборы**: элементы $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B^n$ относительно $\oplus$. Аддитивная запись:

$$\widetilde{\alpha} \oplus \widetilde{\beta} = (\alpha_1 \oplus \beta_1, \ldots, \alpha_n \oplus \beta_n).$$

Нуль группы: $\widetilde{0} = (0, \ldots, 0)$.

Примеры групп: симметрическая группа S_n

3. **Симметрическая группа** S_n: все перестановки n-элементного множества $X = \{1, \ldots, n\}$ относительно композиции $\circ$. Ясно, что $|S_n| = n!$.

Перестановки можно записывать в виде:

а) *таблицы* —

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & n \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_i & \ldots & t_n \end{pmatrix},$$

Пример (сначала выполняется 2-я перестановка, потом — 1-я):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \neq$$

$$\neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

— симметрическая группа не абелева при $n \geqslant 3$.

Примеры групп: симметрическая группа S_n...

б) *разложения на циклы* —

$$\pi = \left(t_1^1 t_2^1 t_3^1 \dots t_{k_1}^1\right)\left(t_1^2 t_2^2 t_3^2 \dots t_{k_2}^2\right)\dots\left(t_1^c t_2^c t_3^c \dots t_{k_c}^c\right).$$

Внутри каждой пары скобок числа переставляются циклически: $\pi(t_1) = t_2$, $\pi(t_2) = t_3$, $\dots$, $\pi(t_k) = t_1$; в перестановке π — c циклов.

Циклы длины 1 (вида (t)) обычно опускают:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow (154)(26)$$

Пример (предыдущей композиции перестановок):

$$(123)\circ(23) = (12) \neq (13) = (23)\circ(123).$$

Примеры групп: группы симметрии объекта

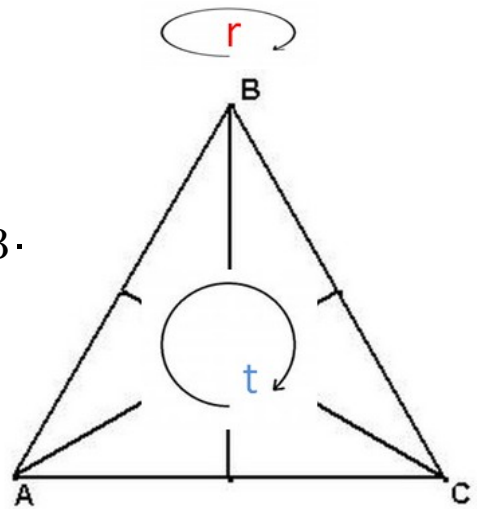
4. **Группы симметрии объекта** — *совокупность преобразований, совмещающих объект с самим собой*.

4.1. *Группа симметрии правильного* n*-угольника* — группа диэдра D_n

а) *У группы* D_{2k+1}, $k \in \mathbb{N}$ — две образующих: (1) вращение вокруг центра на $\frac{360^\circ}{2k+1}$ в выбранном направлении и (2) симметрия относительно оси, проходящей через выбранную вершину и середину противоположной стороны.

Пример: группа симметрии правильного треугольника $D_3 = \langle t, r \rangle = \{ e, (ABC), (ACB), (A)(BC), (B)(AC), (C)(AB) \} = S_3$.

Любая перестановка вершин (сторон) описываться через образующие и имеет вид $t^m r^n$.



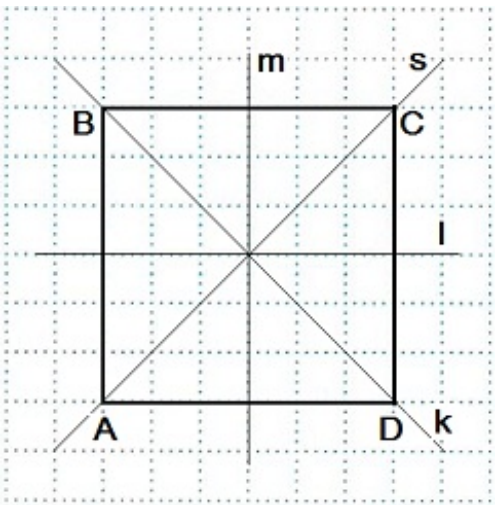
Примеры групп: группы симметрии объекта...

б) *У группы* D_{2k}, $k \in \mathbb{N}$ — три образующих: (1) вращение вокруг центра (в выбранном направлении) на $\frac{360^\circ}{2k}$ и две осевых симметрий — относительно фиксированных осей, проходящих через середины противоположных (2) сторон и (3) вершин.

Пример: группа симметрии квадрата

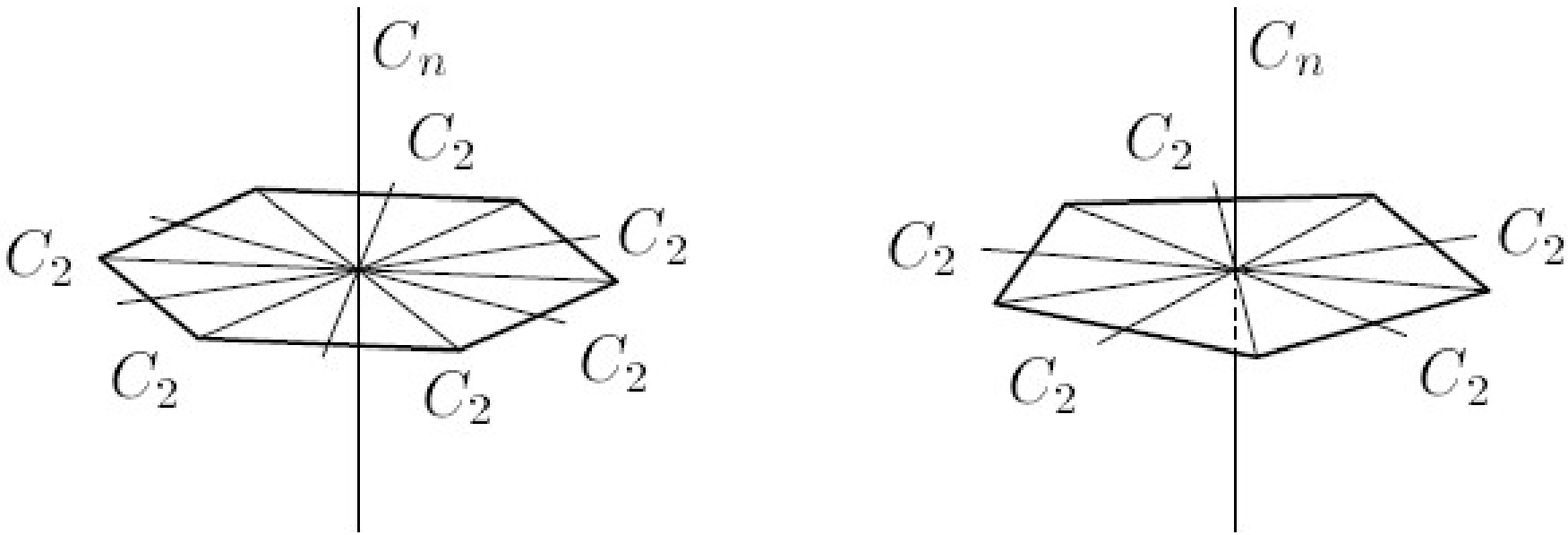
$D_4 = \langle t, r, f \rangle = \{ e,$
$(ABCD), (AC)(BD), (ADCB),$
$(AD)(BC), (AB)(CD),$
$(BD), (AC) \}.$

Любая перестановка вершин (сторон) описываться через образующие и имеет вид $t^m r^n f^k$.



Примеры групп: группы симметрии объекта...

Пример: группы диэдра D_6 и D_5.

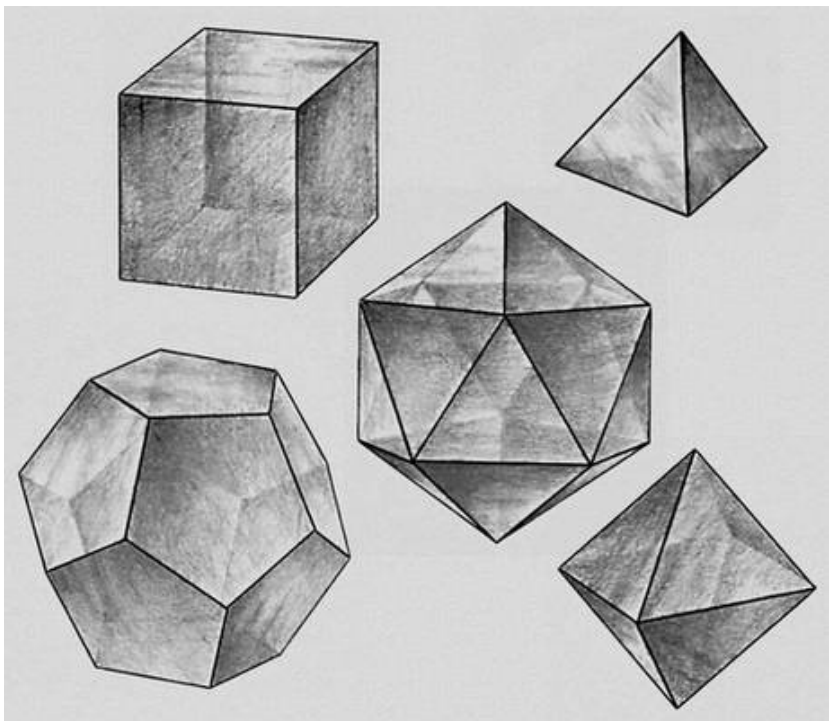


$|D_n| = 2n$: тождественная перестановка,
$n-1$ поворотов вокруг оси C_n и
n отражений вокруг осей C_2.

Примеры групп: группы симметрии объекта...

4.2. *Группы вращений правильного многогранника.*
Вращения — это не все симметрии многогранника, а только повороты (исключены зеркальные отражения).

Пять *платоновых тел* —

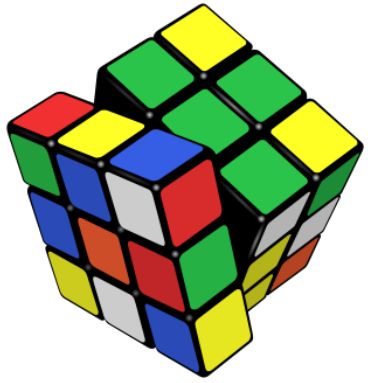


T — группа тетраэдра,
O — группа октаэдра (вращение октаэдра и куба),
Y — группа икосаэдра (вращение икосаэдра и додекаэдра).

Эти группы будут рассмотрены позже.

Примеры групп: вращений кубика Рубика

❶ Группа внутренних вращений кубика Рубика.
Порядок группы —



$$\frac{1}{2} \cdot 2^{11} \cdot 12! \cdot 3^7 \cdot 8! = 43252003274489856000 \approx \approx 4,3 \cdot 10^{19}.$$

что является совсем небольшим числом по стандартам современной теории конечных групп (≈ объём Мирового океана в кубометрах).

❷ Группа внутренних вращений кубика Рубика $4 \times 4 \times 4$ (*месть Рубика*). Порядок группы —

$$\frac{3^7 \cdot 8! \cdot 24!^2}{24^7} = 7401196841564901869874093974498574336000000000 \approx 7,4 \cdot 10^{45}.$$

Подгруппы и смежные классы

Если $\mathbf{G} = \langle G, * \rangle$ — группа, а H — подмножество G, устойчивое относительно групповой операции $*$, то $\mathbf{H} = \langle H, * \rangle$ — подгруппа G, символически $\mathbf{H} \leqslant \mathbf{G}$.

$H \leqslant G, x \in G \Rightarrow xH = \{ xh \mid h \in H \}$ и $Hx = \{ hx \mid h \in H \}$ — соответственно левый и правый *смежные классы по подгруппе* H (с представителем x).

Утверждение

Смежные классы с разными представителями либо не пересекаются, либо совпадают.

Если $\underset{G}{\forall} x : xH = Hx$, то подгруппа H называется *нормальной*. Нормальность — ослабленное условие коммутативности: в абелевой группе все подгруппы нормальны.

Изоморфизм групп

Определение

Пусть $\mathbf{G} = \langle G, * \rangle$ и $\mathbf{G}' = \langle G', \circ \rangle$ — группы. Отображение $\varphi : G \to G'$ называется *изоморфизмом*, если оно

1. взаимно однозначно;
2. сохраняет операцию: $\forall a, b \in G$: $\varphi(a * b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$,

а такие группы — *изоморфными*, символически $\mathbf{G} \cong \mathbf{G}'$.

Свойства изоморфизма φ: $\varphi(e) = e'$ (сохранение единицы), $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$ (образ обратного элемента — обратный к его образу)...

Теорема (Кэли)

Любая конечная группа порядка n изоморфна некоторой подгруппе симметрической группы S_n.

Циклические группы

В *циклических группах* есть *порождающий элемент* (или *генератор*) — такой, что каждый элемент группы может быть получен многократным применением к нему групповой операции: C — циклическая группа, если

$$\underset{C}{\exists} c \, \underset{C}{\forall} x \, \underset{\mathbb{Z}}{\exists} k \, \left(c^k = x \right), \quad \langle c \rangle = C.$$

Для циклических групп возможны два случая.

1. Все степени порождающего элемента различны — тогда группа состоит из элементов: $\ldots, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, \ldots$, т.е. она изоморфна группе $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ целых чисел по сложению.

2. Две различные степени порождающего элемента совпадают: $a^{n+m} = a^n a^m = a^n \Rightarrow a^m = e$.
Пусть q — наименьшее натуральное m, для которого $a^m = e$.
Тогда m — *порядок элемента* a, символически $\deg a$.

Циклические группы...

В рассматриваемом случае получаем:

- конечную группу;
- изоморфность любой конечной циклической группы с числом элементов n (*порядок группы*) группе
$$\mathbb{Z}_n = \langle \{0, 1, \ldots, n-1\}, +_{\mathrm{mod}\, n} \rangle.$$

Свойства циклических групп:

- Все циклические группы абелевы.
- Каждая подгруппа циклической группы — циклическая. В применении к единственной бесконечной циклической группе $\mathbb{Z}$ это даёт, что любая нетривиальная подгруппа H группы $\mathbb{Z}$ имеет вид $H = \{ mn \mid n \in \mathbb{Z} \} = m\mathbb{Z}$, где m — наименьшее положительное число из H.

  Например: $H = \{\ldots -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\} = 3\mathbb{Z}$.

Генераторы конечной циклической группы

У циклической группы порядка n существует ровно $\varphi(n)$ порождающих элементов (генераторов).

Определение

$\varphi(n)$ (функция Эйлера) — количество чисел из интервала $[1, \ldots, n-1]$, взаимно простых с n

$\varphi(1) = 1$ (по определению), $\ldots$, $\varphi(6) = |\{1, 5\}| = 2$, $\varphi(7) = 6$, $\ldots$

Генераторы конечной циклической группы

У циклической группы порядка n существует ровно $\varphi(n)$ порождающих элементов (генераторов).

Определение

$\varphi(n)$ (функция Эйлера) — количество чисел из интервала $[1, \ldots, n-1]$, взаимно простых с n

$\varphi(1) = 1$ (по определению), $\ldots$, $\varphi(6) = |\{1,5\}| = 2$, $\varphi(7) = 6$, $\ldots$

Свойства:

- $\varphi(n^m) = n^{m-1}\varphi(n)$, т.е. $\varphi(p^m) = p^{m-1}(p-1)$, $\varphi(p) = p-1$ (p — простое число).
- если m и n взаимно просты, то $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$.

Примеры: $\varphi(15) = \varphi(3 \cdot 5) = \varphi(3) \cdot \varphi(5) = (3-1)(5-1) = 8$,
$\varphi(16) = \varphi(2^4) = 2^3 \cdot \varphi(2) = 8$.

Первые 99 значений $\varphi(\cdot)$

$\varphi(n)$	+0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9
0+		1	1	2	2	4	2	6	4	6
10+	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18
20+	8	12	10	22	8	20	12	18	12	28
30+	8	30	16	20	16	24	12	36	18	24
40+	16	40	12	42	20	24	22	46	16	42
50+	20	32	24	52	18	40	24	36	28	58
60+	16	60	30	36	32	48	20	66	32	44
70+	24	70	24	72	36	40	36	60	24	78
80+	32	54	40	82	24	64	42	56	40	88
90+	24	72	44	60	46	72	32	96	42	60

Первые 99 значений $\varphi(\cdot)$

$\varphi(n)$	+0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9
0+		1	1	2	2	4	2	6	4	6
10+	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18
20+	8	12	10	22	8	20	12	18	12	28
30+	8	30	16	20	16	24	12	36	18	24
40+	16	40	12	42	20	24	22	46	16	42
50+	20	32	24	52	18	40	24	36	28	58
60+	16	60	30	36	32	48	20	66	32	44
70+	24	70	24	72	36	40	36	60	24	78
80+	32	54	40	82	24	64	42	56	40	88
90+	24	72	44	60	46	72	32	96	42	60

Т.о. в группе $\mathbb{Z}_6 = \langle \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, +_6 \rangle$ $\varphi(6) = 2$ генератора. Например, $5 + 5 = 10 \equiv_6 4$, $4 + 5 = 9 \equiv_6 3$, ...

Первые 99 значений $\varphi(\cdot)$

$\varphi(n)$	+0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9
0+		1	1	2	2	4	2	6	4	6
10+	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18
20+	8	12	10	22	8	20	12	18	12	28
30+	8	30	16	20	16	24	12	36	18	24
40+	16	40	12	42	20	24	22	46	16	42
50+	20	32	24	52	18	40	24	36	28	58
60+	16	60	30	36	32	48	20	66	32	44
70+	24	70	24	72	36	40	36	60	24	78
80+	32	54	40	82	24	64	42	56	40	88
90+	24	72	44	60	46	72	32	96	42	60

Т.о. в группе $\mathbb{Z}_6 = \langle \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, +_6 \rangle$ $\varphi(6) = 2$ генератора. Например, $5 + 5 = 10 \equiv_6 4$, $4 + 5 = 9 \equiv_6 3$, ...
Сколько генераторов в группе $\mathbb{Z}_5$?

Первые 99 значений $\varphi(\cdot)$

$\varphi(n)$	+0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9
0+		1	1	2	2	4	2	6	4	6
10+	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18
20+	8	12	10	22	8	20	12	18	12	28
30+	8	30	16	20	16	24	12	36	18	24
40+	16	40	12	42	20	24	22	46	16	42
50+	20	32	24	52	18	40	24	36	28	58
60+	16	60	30	36	32	48	20	66	32	44
70+	24	70	24	72	36	40	36	60	24	78
80+	32	54	40	82	24	64	42	56	40	88
90+	24	72	44	60	46	72	32	96	42	60

Т.о. в группе $\mathbb{Z}_6 = \langle \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, +_6 \rangle$ $\varphi(6) = 2$ генератора. Например, $5 + 5 = 10 \equiv_6 4$, $4 + 5 = 9 \equiv_6 3$, ...

Сколько генераторов в группе $\mathbb{Z}_5$? $\varphi(5) = 4$ — все, кроме 0.

Циклические группы: примеры

- $\mathbb{Z}$ — единственная (с точностью до изоморфизма) бесконечная циклическая группа.

Циклические группы: примеры

- $\mathbb{Z}$ — единственная (с точностью до изоморфизма) бесконечная циклическая группа.
  Вопрос. Сколько генераторов в $\mathbb{Z}$?

Циклические группы: примеры

- $\mathbb{Z}$ — единственная (с точностью до изоморфизма) бесконечная циклическая группа.
  Вопрос. Сколько генераторов в $\mathbb{Z}$? Ответ. Два: 1 и -1.

Циклические группы: примеры

- $\mathbb{Z}$ — единственная (с точностью до изоморфизма) бесконечная циклическая группа.
  Вопрос. Сколько генераторов в $\mathbb{Z}$? Ответ. Два: 1 и -1.
- $\mathbb{Z}_n \cong \langle \{0, 1, \ldots, n-1\}, +_n \rangle = \langle 1 \rangle \cong$
  $\cong \langle \{a^0 = 1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}, \cdot_n \rangle = \langle a \rangle$;
- Вращения в плоскости вокруг центра правильного n-угольника, совмещающие его с собой — группа $\left\langle \frac{2\pi}{n} \right\rangle$;

Циклические группы: примеры

- $\mathbb{Z}$ — единственная (с точностью до изоморфизма) бесконечная циклическая группа.
  Вопрос. Сколько генераторов в $\mathbb{Z}$? Ответ. Два: 1 и -1.
- $\mathbb{Z}_n \cong \langle \{0, 1, \ldots, n-1\}, +_n \rangle = \langle 1 \rangle \cong$
  $\cong \langle \{a^0 = 1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}, \cdot_n \rangle = \langle a \rangle$;
- Вращения в плоскости вокруг центра правильного n-угольника, совмещающие его с собой — группа $\left\langle \frac{2\pi}{n} \right\rangle$;
- Группа *афинных преобразований* $f_{a,b} : x \mapsto ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ вещественной прямой $\mathbb{R}$ с законом умножения $f_{a,b} \cdot f_{c,d} = f_{ac,\, ad+b}$ (сначала $f_{c,d}$).
  Содержит подгруппы «растяжений/сжатий» $(b = 0)$ и «чистых сдвигов» $(a = 1)$.

Теорема Лагранжа и следствия из неё

Теорема (Лагранжа)

$$\mathbf{H} \leqslant \mathbf{G} \Rightarrow |H| \mid |G|$$

(порядок подгруппы делит порядок группы)

Следствия

1. *Порядок любого элемента есть делитель порядка группы.*
2. *Группа* $\mathbf{G}$ *простого порядка* p*:*
   - *циклическая и любой её отличный от единицы элемент — порождающий* ($\varphi(p) = p - 1$)*;*
   - *не имеет нетривиальных подгрупп, т.е.* $E \stackrel{\text{def}}{=} \{e\}$ *и* $\mathbf{G}$ *— единственные подгруппы* $\mathbf{G}$*.*

Замечание: обращение теоремы Лагранжа неверно (будет пример 60-элементной группы, не имеющей 15-элементной подгруппы).

Порядок элемента конечной группы

Лемма (о порядке элемента конечной группы)

Пусть m *— максимальный порядок элемента в конечной абелевой группе* $\mathbf{G}$ *с единицей* e.
Тогда порядок любого элемента $x \in G$ *делит* m.

Порядок элемента конечной группы

Лемма (о порядке элемента конечной группы)

Пусть m — максимальный порядок элемента в конечной абелевой группе $\mathbf{G}$ с единицей e.
Тогда порядок любого элемента $x \in G$ делит m.

Доказательство

Группа $\mathbf{G}$ однозначно разлагается в объединение циклических групп, порядки которых являются степенями простых чисел.
Для каждого простого делителя p_i порядка группы найдем циклическую группу максимального порядка p^{k_i}.
Обозначим произведение чисел p^{k_i} через M. Для любого $x \in G$ выполняется $x^M = e$, т.е. порядок x делит M.
Но произведение всех выбранных циклических групп имеет порядок M. Поэтому $m = M$.

Примеры

❶ Группа $\langle \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, +_6 \rangle \cong \mathbb{Z}_6$ — циклическая 6-элементная; имеет подгруппы:

- $\{0\} = \langle 0 \rangle \cong E$ — единичная, $\deg 0 = 1,\ 1 \mid 6$,
- $\{0, 2, 4\} = \langle 2 \rangle = \langle 4 \rangle \cong \mathbb{Z}_3$, $\deg 2 = \deg 4 = 3,\ 3 \mid 6$,
- $\{0, 3\} = \langle 3 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$, $\deg 3 = 2,\ 2 \mid 6$,
- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = \langle 1 \rangle = \langle 5 \rangle \cong \mathbb{Z}_6$ — имеет $\varphi(6) = 2$ генератора, $\deg 1 = \deg 5 = 6,\ 6 \mid 6$.

Примеры

❶ Группа $\langle \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, +_6 \rangle \cong \mathbb{Z}_6$ — циклическая 6-элементная; имеет подгруппы:

- $\{0\} = \langle 0 \rangle \cong E$ — единичная, $\deg 0 = 1,\ 1 \mid 6$,
- $\{0, 2, 4\} = \langle 2 \rangle = \langle 4 \rangle \cong \mathbb{Z}_3$, $\deg 2 = \deg 4 = 3,\ 3 \mid 6$,
- $\{0, 3\} = \langle 3 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$, $\deg 3 = 2,\ 2 \mid 6$,
- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = \langle 1 \rangle = \langle 5 \rangle \cong \mathbb{Z}_6$ — имеет $\varphi(6) = 2$ генератора, $\deg 1 = \deg 5 = 6,\ 6 \mid 6$.

❷ Группа $\langle \{1, 2, 3, 4, 5\}, \cdot_5 \rangle \cong \mathbb{Z}_5$ — циклическая 5-элементная; имеет подгруппы

- $\{1\} = \langle 1 \rangle \cong E$ — единичная, $\deg 1 = 1,\ 1 \mid 5$,
- $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \langle 2 \rangle = \langle 3 \rangle = \ldots = \langle 5 \rangle \cong \mathbb{Z}_5$ — имеет $\varphi(5) = 4$ генератора, $\deg 2 = \ldots = \deg 5 = 5,\ 5 \mid 5$.

Группы: разные факты

- Симметрическая группа S_n при $n > 1$ порождается транспозициями $(1, 2), (1, 3), \ldots, (1, n)$.
- Если для всех элементов a группы G выполняется тождество $a * a = e$, то группа G коммутативна.
- Всякая циклическая группа является гомоморфным образом группы $\mathbb{Z}$.
- Ещё пример группы — *булева группа*: множество $\mathcal{P}(A)$ всех подмножеств непустого множества A с операцией симметрической разности множеств.
  Здесь нейтральный элемент — $\varnothing$, а порядок каждого элемента — 2.

Разделы

Кольца: определение

Определение

Кольцом $\mathbf{R}$ называется тройка $\langle R, +, \cdot \rangle$, где R — непустое множество (носитель), а $+$ (сложение) и $\cdot$ (умножение) — бинарные операции на нём такие, что для любых $x, y, z \in R$ выполняются следующие *законы* или *аксиомы кольца*:

R1: относительно сложения $\mathbf{R}$ — коммутативная группа (*аддитивная группа кольца*);

[R2: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ — ассоциативность умножения];

R3: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ и $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$ — *дистрибутивность слева и справа умножения относительно сложения*.

Если в R имеется единичный элемент для умножения 1, то кольцо называется *кольцом с единицей* (*унитальным*).
Если $x \cdot y = y \cdot x$, то кольцо называется *коммутативным*.

Кольца: основные свойства, примеры

- Пример кольца без единицы — кольцо чётных чисел $2\mathbb{Z}$.
- Элемент a унитального кольца называется *обратимым*, если существует элемент b такой, что $a \cdot b = b \cdot a = 1$.
- Если $\forall\, r_1, r_2 : (r_1 \cdot r_2 = 0) \Rightarrow (r_1 = 0) \vee (r_2 = 0)$ — то это кольцо *без делителей нуля*.
  Унитальное ассоциативно-коммутативное кольцо без делителей нуля — *целостное кольцо*.

Примеры колец:

1. Классический пример — множество целых чисел $\mathbb{Z}$ с операциями сложения и умножения (целостное кольцо). Обратимые элементы — только ± 1.

2. $\mathbb{Z}_n \stackrel{\text{def}}{=} \langle \{0, 1, \ldots, n-1\}, +_{\bmod n}, \cdot_{\bmod n} \rangle$ — кольцо классов вычетов по модулю n (*вычет = остаток*).

3. Кольца многочленов — будет рассматриваться далее.

Кольца: изоморфизмы, гомоморфизмы, подкольца

Определение

Пусть $\mathbf{R} = \langle R, +, \cdot \rangle$ и $\mathbf{R}' = \langle R', \oplus, \otimes \rangle$ — кольца. Отображение $\varphi : R \to R'$ называется *гомоморфизмом*, если оно сохраняет обе операции: $\forall\, r_1, r_2 \in R$ справедливо

$$\varphi(r_1 + r_2) = \varphi(r_1) \oplus \varphi(r_2), \quad \varphi(r_1 \cdot r_2) = \varphi(r_1) \otimes \varphi(r_2).$$

Взаимно однозначный гомоморфизм колец есть *изоморфизм*, символически $R \cong R'$.

Утверждение

Гомоморфная область кольца есть кольцо.

Подмножество $S \subseteq R$ кольца $\langle R, +, \cdot \rangle$, устойчивое относительно операций $+$ и $\cdot$ называется *подкольцом*.

Идеалы колец

Определение

Подкольцо I коммутативного кольца $\mathbf{R}$ называется его *идеалом* (символически $I \lhd \mathbf{R}$), если

$$\underset{I}{\forall}\, x\, \underset{R}{\forall}\, r : ax \in I.$$

Определение

Идеал I унитального коммутативного кольца $\mathbf{R}$ называется *главным*, если найдётся элемент $a \in R$ такой, что

$$I = \{\, ar \mid r \in R \,\},$$

символически $I = (a)$.

Пример: $(n) = n\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$ (ну, например, $5\mathbb{Z}$ — идеал в $\mathbb{Z}$).

Целостные кольца, в которых все идеалы (отличные от самого кольца) главные называются *кольцами главных идеалов* (*КГИ*).

Идеалы колец: свойства I

- Само кольцо $\mathbf{R}$ и его нуль — идеалы $\mathbf{R}$, они называются *собственными*, остальные идеалы — *несобственные*.
- В кольце $\mathbb{Z}$ целых чисел все идеалы главные и имеют вид $n\mathbb{Z} = \{ nz \mid z \in \mathbb{Z} \}$, где $n \in \mathbb{N}_0$.
- Бинарное отношение $\lhd$ на множестве идеалов кольца рефлексивно, транзитивно и антисимметрично, т.е. является порядком.
- Если $\mathbf{R}$ — произвольное кольцо, и $n \in \mathbb{Z}$, то
$$nR = \{ na \mid a \in R \} \lhd \mathbf{R}.$$
- Если $\mathbf{R}$ — коммутативное кольцо, и $a_1, \ldots, a_n \in R$, то $(a_1, \ldots, a_n) = \{ x_1a_1 + \ldots + x_na_n \mid x_1, \ldots, x_n \in R \} \lhd \mathbf{R}$ — *идеал, порождённый элементами* $a_1, \ldots, a_n$.

Идеалы колец: свойства II

- Если $I_1, I_2 \lhd \mathbf{R}$, то

  пересечение идеалов $I_1 \cap I_2$,

  сумма идеалов $I_1 + I_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{ x + y \mid x \in I_1,\, y \in I_2 \}$,

  произведение идеалов $I_1 \cdot I_2 \stackrel{\text{def}}{=}$
  $$\{ x_1 \cdot y_1 + \ldots + x_n \cdot y_n \mid x_1 \in I_1,\, y_1 \in I_2,\, i = \overline{1, n} \},$$
  — идеалы $\mathbf{R}$.

Факторкóльца

Классом вычетов по модулю идеала I кольца $\langle R, +, \cdot \rangle$ называется смежный класс по нормальной подгруппе $\langle I, + \rangle$ аддитивной группы кольца с некоторым фиксированным представителем r: $\{ r + x \mid r \in R, x \in I \}$, символически $[r]_I$.

Множество классов вычетов — кольцо (вместо операндов можно брать любые элементы соответствующих классов), оно называется *факторкольцом кольца R по модулю идеала I*, символически R/I.

Пример: $I = 2\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{ [0]_I, [1]_I \}$.

Определение

Идеал I называется *максимальным* в кольце R, если не существует такого идеала I', что $I \subset I' \subset R$.

Факториальные кольца

Определение

Целостное кольцо, в котором каждый ненулевой элемент x либо обратим, либо однозначно с точностью до перестановки сомножителей и умножения на обратимый элемент представляется в виде произведения неприводимых элементов $x = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$, $n \geqslant 1$, называется *факториальным*.

- $\mathbb{Z}$ — факториальное кольцо.
- Кольца главных идеалов факториальны.
- Кольцо $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ является факториальным (и, следовательно, областью целостности), если и только если n — простое число.

Евклидовы кольца

Определение

Кольцо $\mathbf{R} = \langle R, +, \cdot \rangle$ называется *евклидовым*, если для него выполнены следующие свойства:

E1: $\mathbf{R}$ — целостное кольцо;

E2: для каждого ненулевого элемента $r \in R$ определена его норма $N(r) \in \mathbb{N}_0$;

E3: для любых элементов a и $b \neq 0$ кольца $\mathbf{R}$ существуют такие элементы q и r, что
$$a = q \cdot b + r \text{ и либо } r = 0, \text{ либо } N(r) < N(b).$$
(возможность деления с остатком — основное свойство нормы).

E4: норма произведения двух ненулевых сомножителей больше либо равна норме любого из сомножителей: $a, b \in R$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ выполнено $\max\{ N(a), N(b) \} \leqslant N(a \cdot b)$.

Евклидовы кольца: примеры и свойства

- Кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$; норма — абсолютная величина. Это классический пример евклидова кольца.
- Кольцо целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i]$ (комплексные числа, у которых и вещественная, и мнимая части целые); норма $N(a+ib) = a^2 + b^2$.
- Произвольное поле $\mathbf{K}$ (вспоминаем, что это такое); норма: $N(x) = 1$, если $x \neq 0$, $N(0) = -\infty$.
- Кольцо конечных десятичных дробей (кольцо частных кольца $\mathbb{Z}$, пояснение будет потом); норма $N(r) = |r|$.
- Кольцо многочленов $k[x]$; норма — степень многочлена.
- Евклидово кольцо унитально.
- Евклидовы кольца — кольца главных идеалов (обратное неверно).

Поле: определение

Определение

Полем $\mathbf{K}$ называется тройка $\langle K, +, \cdot \rangle$, где K — непустое множество (носитель), а $+$ (сложение) и $\cdot$ (умножение) — бинарные операции на нём такие, что выполняются следующие *законы* или *аксиомы поля*:

K1: относительно сложения $\mathbf{K}$ — абелева группа;

K2: относительно умножения $\mathbf{K} \setminus \{0\}$ — абелева группа (*мультипликативная группа поля*);

K3: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ для любых $x, y, z \in K$ — *дистрибутивность умножения относительно сложения*.

Т.о. поле — кольцо, ненулевые элементы которого образуют группу относительно умножения.

Примеры бесконечных полей: числовые поля $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

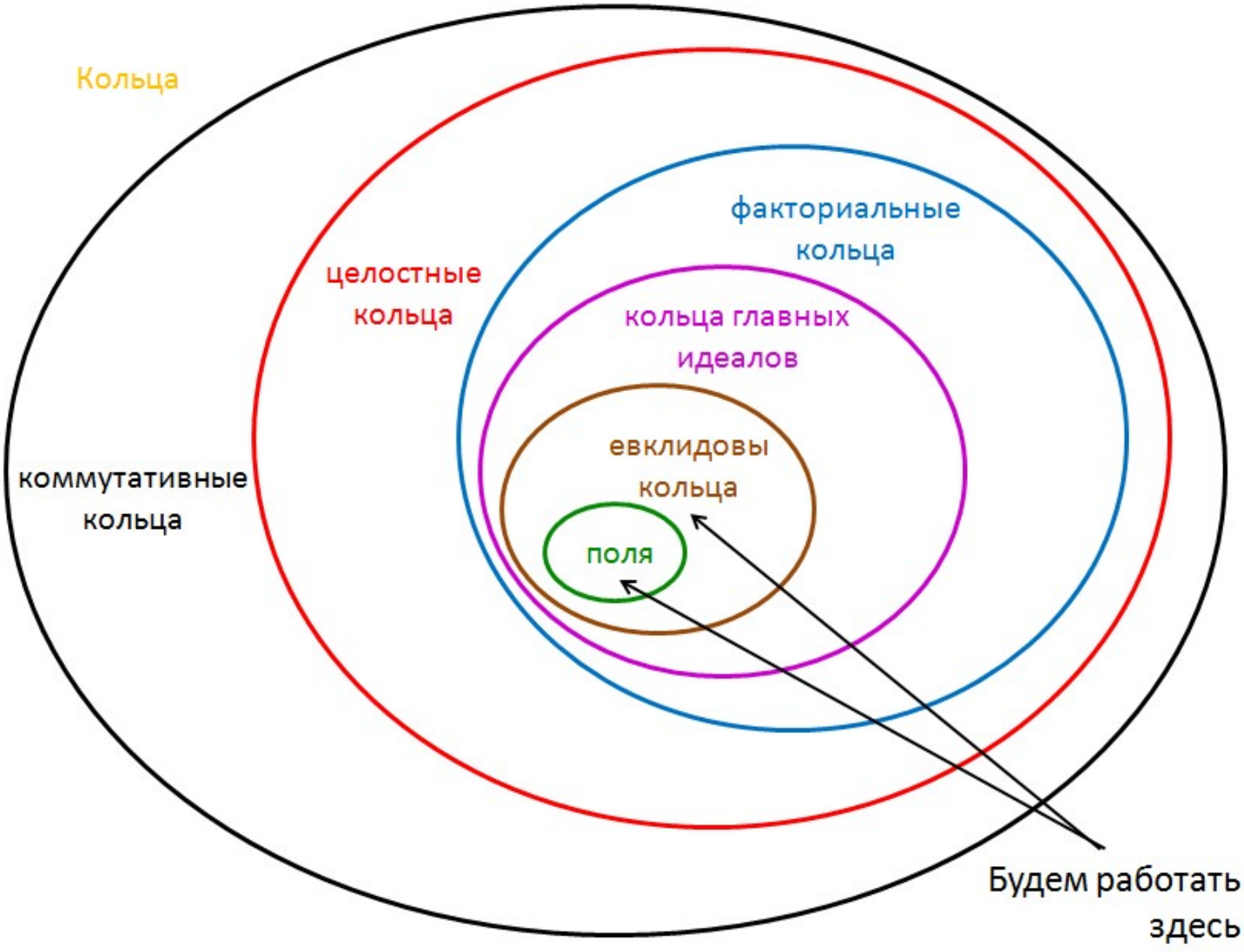
Группы, кольца, поля общего вида: резюме I

- Неформально: группа — множество с единицей, обратными элементами и устойчивое относительно ассоциативной операции.
- Неформально: кольцо — множество, устойчивое относительно сложения, вычитания и умножения с естественными аксиомами. Унитальное кольцо — с единицей по умножению.
- Унитальное ассоциативно-коммутативное (по умножению) кольцо без делителей нуля — целостное кольцо.
- Кольцо классов вычетов R/I коммутативного кольца с единицей есть поле тогда и только тогда, когда I — максимальный идеал.

Группы, кольца, поля общего вида: резюме II

- В евклидовом кольце простой элемент p порождает максимальный идеал (p).
- Все обратимые элементы кольца с единицей образуют группу относительно умножения.
- Конечное целостное кольцо является полем.
- Поле, не обладающее никаким собственным подполем, называется *простым*.
  В каждом поле содержится только одно простое подполе, которое изморфно либо $\mathbb{Q}$, либо $\mathbb{Z}_p$, p — простое.

От колец к полям



Разделы

Задача ГКП-1

Выяснить, образуют ли группы следующие множества при указанной операции над элементами:

1. целые числа относительно сложения?

Задача ГКП-1

Выяснить, образуют ли группы следующие множества при указанной операции над элементами:

1. целые числа относительно сложения? Да

Задача ГКП-1

Выяснить, образуют ли группы следующие множества при указанной операции над элементами:

1. целые числа относительно сложения? Да
2. четные числа относительно сложения?

Задача ГКП-1

Выяснить, образуют ли группы следующие множества при указанной операции над элементами:

1. целые числа относительно сложения? Да
2. четные числа относительно сложения? Да

Задача ГКП-1

Выяснить, образуют ли группы следующие множества при указанной операции над элементами:

1. целые числа относительно сложения? Да
2. четные числа относительно сложения? Да
3. целые числа, кратные данному натуральному числу n, относительно сложения?

Задача ГКП-1

Выяснить, образуют ли группы следующие множества при указанной операции над элементами:

1. целые числа относительно сложения? Да
2. четные числа относительно сложения? Да
3. целые числа, кратные данному натуральному числу n, относительно сложения? Да

Задача ГКП-1

Выяснить, образуют ли группы следующие множества при указанной операции над элементами:

1. целые числа относительно сложения? Да
2. четные числа относительно сложения? Да
3. целые числа, кратные данному натуральному числу n, относительно сложения? Да
4. степени данного действительного числа a, $a \neq 0, \pm 1$, с целыми показателями относительно умножения?

Задача ГКП-1

Выяснить, образуют ли группы следующие множества при указанной операции над элементами:

1. целые числа относительно сложения? Да
2. четные числа относительно сложения? Да
3. целые числа, кратные данному натуральному числу n, относительно сложения? Да
4. степени данного действительного числа a, $a \neq 0, \pm 1$, с целыми показателями относительно умножения? Да

Задача ГКП-1

Выяснить, образуют ли группы следующие множества при указанной операции над элементами:

1. целые числа относительно сложения? Да
2. четные числа относительно сложения? Да
3. целые числа, кратные данному натуральному числу n, относительно сложения? Да
4. степени данного действительного числа a, $a \neq 0, \pm 1$, с целыми показателями относительно умножения? Да
5. неотрицательные целые числа относительно сложения?

Задача ГКП-1

Выяснить, образуют ли группы следующие множества при указанной операции над элементами:

1. целые числа относительно сложения? Да
2. четные числа относительно сложения? Да
3. целые числа, кратные данному натуральному числу n, относительно сложения? Да
4. степени данного действительного числа a, $a \neq 0, \pm 1$, с целыми показателями относительно умножения? Да
5. неотрицательные целые числа относительно сложения? Нет (единицы, противоположного элемента)

Задача ГКП-1

Выяснить, образуют ли группы следующие множества при указанной операции над элементами:

1. целые числа относительно сложения? Да
2. четные числа относительно сложения? Да
3. целые числа, кратные данному натуральному числу n, относительно сложения? Да
4. степени данного действительного числа a, $a \neq 0, \pm 1$, с целыми показателями относительно умножения? Да
5. неотрицательные целые числа относительно сложения? Нет (единицы, противоположного элемента)
6. нечетные целые числа относительно сложения?

Задача ГКП-1

Выяснить, образуют ли группы следующие множества при указанной операции над элементами:

1. целые числа относительно сложения? Да
2. четные числа относительно сложения? Да
3. целые числа, кратные данному натуральному числу n, относительно сложения? Да
4. степени данного действительного числа a, $a \neq 0, \pm 1$, с целыми показателями относительно умножения? Да
5. неотрицательные целые числа относительно сложения? Нет (единицы, противоположного элемента)
6. нечетные целые числа относительно сложения? Нет (устойчивости)

Задача ГКП-1...

7. целые числа относительно вычитания?

Задача ГКП-1...

7. целые числа относительно вычитания?
   Нет (ассоциативности)

Задача ГКП-1...

7. целые числа относительно вычитания?
   Нет (ассоциативности)
8. рациональные числа относительно сложения?

Задача ГКП-1...

7. целые числа относительно вычитания?
   Нет (ассоциативности)
8. рациональные числа относительно сложения? Да

Задача ГКП-1...

7. целые числа относительно вычитания?
   Нет (ассоциативности)
8. рациональные числа относительно сложения? Да
9. рациональные числа относительно умножения?

Задача ГКП-1...

7. целые числа относительно вычитания?
   Нет (ассоциативности)
8. рациональные числа относительно сложения? Да
9. рациональные числа относительно умножения?
   Нет (обратного у 0)

Задача ГКП-1...

7. целые числа относительно вычитания?
   Нет (ассоциативности)
8. рациональные числа относительно сложения? Да
9. рациональные числа относительно умножения?
   Нет (обратного у 0)
10. рациональные числа, отличные от нуля, относительно умножения?

Задача ГКП-1...

7. целые числа относительно вычитания?
   Нет (ассоциативности)
8. рациональные числа относительно сложения? Да
9. рациональные числа относительно умножения?
   Нет (обратного у 0)
10. рациональные числа, отличные от нуля, относительно умножения? Да

Задача ГКП-1...

7. целые числа относительно вычитания?
   Нет (ассоциативности)
8. рациональные числа относительно сложения? Да
9. рациональные числа относительно умножения?
   Нет (обратного у 0)
10. рациональные числа, отличные от нуля, относительно умножения? Да
11. положительные рациональные числа относительно умножения?

Задача ГКП-1...

7. целые числа относительно вычитания?
   Нет (ассоциативности)
8. рациональные числа относительно сложения? Да
9. рациональные числа относительно умножения?
   Нет (обратного у 0)
10. рациональные числа, отличные от нуля, относительно умножения? Да
11. положительные рациональные числа относительно умножения? Да

Задача ГКП-1...

7. целые числа относительно вычитания?
   Нет (ассоциативности)
8. рациональные числа относительно сложения? Да
9. рациональные числа относительно умножения?
   Нет (обратного у 0)
10. рациональные числа, отличные от нуля, относительно умножения? Да
11. положительные рациональные числа относительно умножения? Да
12. положительные рациональные числа относительно деления?

Задача ГКП-1...

7. целые числа относительно вычитания?
   Нет (ассоциативности)
8. рациональные числа относительно сложения? Да
9. рациональные числа относительно умножения?
   Нет (обратного у 0)
10. рациональные числа, отличные от нуля, относительно умножения? Да
11. положительные рациональные числа относительно умножения? Да
12. положительные рациональные числа относительно деления? Нет (ассоциативности)

Задача ГКП-1...

7. целые числа относительно вычитания?
   Нет (ассоциативности)
8. рациональные числа относительно сложения? Да
9. рациональные числа относительно умножения?
   Нет (обратного у 0)
10. рациональные числа, отличные от нуля, относительно умножения? Да
11. положительные рациональные числа относительно умножения? Да
12. положительные рациональные числа относительно деления? Нет (ассоциативности)

Задача ГКП-1...

13. корни n-й степени из единицы (как действительные, так и комплексные) относительно умножения?

Задача ГКП-1...

13. корни n-й степени из единицы (как действительные, так и комплексные) относительно умножения? Да

Задача ГКП-1...

13. корни n-й степени из единицы (как действительные, так и комплексные) относительно умножения? Да
14. матрицы порядка n с действительными элементами относительно умножения?

Задача ГКП-1...

13. корни n-й степени из единицы (как действительные, так и комплексные) относительно умножения? Да
14. матрицы порядка n с действительными элементами относительно умножения? Нет (обратных — у всех)

Задача ГКП-1...

13. корни n-й степени из единицы (как действительные, так и комплексные) относительно умножения? Да
14. матрицы порядка n с действительными элементами относительно умножения? Нет (обратных — у всех)
15. невырожденные матрицы порядка n с действительными элементами относительно умножения?

Задача ГКП-1...

13. корни n-й степени из единицы (как действительные, так и комплексные) относительно умножения? Да
14. матрицы порядка n с действительными элементами относительно умножения? Нет (обратных — у всех)
15. невырожденные матрицы порядка n с действительными элементами относительно умножения? Да

Задача ГКП-1...

13. корни n-й степени из единицы (как действительные, так и комплексные) относительно умножения? Да
14. матрицы порядка n с действительными элементами относительно умножения? Нет (обратных — у всех)
15. невырожденные матрицы порядка n с действительными элементами относительно умножения? Да
16. матрицы порядка n с целыми элементами и определителем, равным 1 относительно умножения?

Задача ГКП-1...

13. корни n-й степени из единицы (как действительные, так и комплексные) относительно умножения? Да
14. матрицы порядка n с действительными элементами относительно умножения? Нет (обратных — у всех)
15. невырожденные матрицы порядка n с действительными элементами относительно умножения? Да
16. матрицы порядка n с целыми элементами и определителем, равным 1 относительно умножения? Да

Задача ГКП-1...

13. корни n-й степени из единицы (как действительные, так и комплексные) относительно умножения? Да
14. матрицы порядка n с действительными элементами относительно умножения? Нет (обратных — у всех)
15. невырожденные матрицы порядка n с действительными элементами относительно умножения? Да
16. матрицы порядка n с целыми элементами и определителем, равным 1 относительно умножения? Да
17. матрицы порядка n с целыми элементами и определителем, равным ± 1 относительно умножения?

Задача ГКП-1...

13. корни n-й степени из единицы (как действительные, так и комплексные) относительно умножения? Да
14. матрицы порядка n с действительными элементами относительно умножения? Нет (обратных — у всех)
15. невырожденные матрицы порядка n с действительными элементами относительно умножения? Да
16. матрицы порядка n с целыми элементами и определителем, равным 1 относительно умножения? Да
17. матрицы порядка n с целыми элементами и определителем, равным ± 1 относительно умножения? Да

Задача ГКП-1...

13. корни n-й степени из единицы (как действительные, так и комплексные) относительно умножения? Да
14. матрицы порядка n с действительными элементами относительно умножения? Нет (обратных — у всех)
15. невырожденные матрицы порядка n с действительными элементами относительно умножения? Да
16. матрицы порядка n с целыми элементами и определителем, равным 1 относительно умножения? Да
17. матрицы порядка n с целыми элементами и определителем, равным ± 1 относительно умножения? Да
18. матрицы порядка n с действительными элементами относительно сложения?

Задача ГКП-1...

13. корни n-й степени из единицы (как действительные, так и комплексные) относительно умножения? Да
14. матрицы порядка n с действительными элементами относительно умножения? Нет (обратных — у всех)
15. невырожденные матрицы порядка n с действительными элементами относительно умножения? Да
16. матрицы порядка n с целыми элементами и определителем, равным 1 относительно умножения? Да
17. матрицы порядка n с целыми элементами и определителем, равным ± 1 относительно умножения? Да
18. матрицы порядка n с действительными элементами относительно сложения? Да

Задача ГКП-1...

13. корни n-й степени из единицы (как действительные, так и комплексные) относительно умножения? Да
14. матрицы порядка n с действительными элементами относительно умножения? Нет (обратных — у всех)
15. невырожденные матрицы порядка n с действительными элементами относительно умножения? Да
16. матрицы порядка n с целыми элементами и определителем, равным 1 относительно умножения? Да
17. матрицы порядка n с целыми элементами и определителем, равным ± 1 относительно умножения? Да
18. матрицы порядка n с действительными элементами относительно сложения? Да

Задача ГКП-1...

19. перестановки чисел $1, 2, \ldots, n$ относительно композиции перестановок?

Задача ГКП-1...

19. перестановки чисел $1, 2, \ldots, n$ относительно композиции перестановок? Да

Задача ГКП-1...

19. перестановки чисел $1, 2, \ldots, n$ относительно композиции перестановок? Да
20. взаимно однозначные отображения множества натуральных чисел на себя, каждое из которых перемещает (отображает не в себя) лишь конечное число чисел, если за произведение отображений s и t принята композиция $s \circ t$ отображений (последовательное выполнение отображений t , затем s)?

Задача ГКП-1...

19. перестановки чисел $1, 2, \ldots, n$ относительно композиции перестановок? Да
20. взаимно однозначные отображения множества натуральных чисел на себя, каждое из которых перемещает (отображает не в себя) лишь конечное число чисел, если за произведение отображений s и t принята композиция $s \circ t$ отображений (последовательное выполнение отображений t , затем s)? Да

Задача ГКП-1...

19. перестановки чисел $1, 2, \ldots, n$ относительно композиции перестановок? Да
20. взаимно однозначные отображения множества натуральных чисел на себя, каждое из которых перемещает (отображает не в себя) лишь конечное число чисел, если за произведение отображений s и t принята композиция $s \circ t$ отображений (последовательное выполнение отображений t , затем s)? Да
21. преобразования множества M , т.е. взаимно однозначные отображения этого множества на себя, относительно композиции отображений?

Задача ГКП-1...

19. перестановки чисел $1, 2, \ldots, n$ относительно композиции перестановок? Да
20. взаимно однозначные отображения множества натуральных чисел на себя, каждое из которых перемещает (отображает не в себя) лишь конечное число чисел, если за произведение отображений s и t принята композиция $s \circ t$ отображений (последовательное выполнение отображений t , затем s)? Да
21. преобразования множества M , т.е. взаимно однозначные отображения этого множества на себя, относительно композиции отображений? Да

Задача ГКП-1...

19. перестановки чисел $1, 2, \ldots, n$ относительно композиции перестановок? Да
20. взаимно однозначные отображения множества натуральных чисел на себя, каждое из которых перемещает (отображает не в себя) лишь конечное число чисел, если за произведение отображений s и t принята композиция $s \circ t$ отображений (последовательное выполнение отображений t , затем s)? Да
21. преобразования множества M , т.е. взаимно однозначные отображения этого множества на себя, относительно композиции отображений? Да
22. элементы n-мерного векторного пространства $\mathbb{R}^n$ относительно сложения?

Задача ГКП-1...

19. перестановки чисел $1, 2, \ldots, n$ относительно композиции перестановок? Да
20. взаимно однозначные отображения множества натуральных чисел на себя, каждое из которых перемещает (отображает не в себя) лишь конечное число чисел, если за произведение отображений s и t принята композиция $s \circ t$ отображений (последовательное выполнение отображений t , затем s)? Да
21. преобразования множества M , т.е. взаимно однозначные отображения этого множества на себя, относительно композиции отображений? Да
22. элементы n-мерного векторного пространства $\mathbb{R}^n$ относительно сложения? Да

Задача ГКП-1...

19. перестановки чисел $1, 2, \ldots, n$ относительно композиции перестановок? Да
20. взаимно однозначные отображения множества натуральных чисел на себя, каждое из которых перемещает (отображает не в себя) лишь конечное число чисел, если за произведение отображений s и t принята композиция $s \circ t$ отображений (последовательное выполнение отображений t , затем s)? Да
21. преобразования множества M , т.е. взаимно однозначные отображения этого множества на себя, относительно композиции отображений? Да
22. элементы n-мерного векторного пространства $\mathbb{R}^n$ относительно сложения? Да

Задача ГКП-1...

28 параллельные переносы трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ относительно композиции движений?

Задача ГКП-1...

28 параллельные переносы трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ относительно композиции движений? Да

Задача ГКП-1...

28. параллельные переносы трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ относительно композиции движений? Да
29. повороты трехмерного пространства $\mathbb{R}^n$ вокруг прямых, проходящих через данную точку O относительно композиции движений?

Задача ГКП-1...

28. параллельные переносы трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ относительно композиции движений? Да
29. повороты трехмерного пространства $\mathbb{R}^n$ вокруг прямых, проходящих через данную точку O относительно композиции движений? Да

Задача ГКП-1...

28. параллельные переносы трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ относительно композиции движений? Да
29. повороты трехмерного пространства $\mathbb{R}^n$ вокруг прямых, проходящих через данную точку O относительно композиции движений? Да
30. все движения трехмерного пространства $\mathbb{R}^n$ относительно композиции движений?

Задача ГКП-1...

28. параллельные переносы трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ относительно композиции движений? Да
29. повороты трехмерного пространства $\mathbb{R}^n$ вокруг прямых, проходящих через данную точку O относительно композиции движений? Да
30. все движения трехмерного пространства $\mathbb{R}^n$ относительно композиции движений? Да

Задача ГКП-1...

28. параллельные переносы трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ относительно композиции движений? Да
29. повороты трехмерного пространства $\mathbb{R}^n$ вокруг прямых, проходящих через данную точку O относительно композиции движений? Да
30. все движения трехмерного пространства $\mathbb{R}^n$ относительно композиции движений? Да
31. действительные многочлены степени не выше n от неизвестного x и нулевой многочлен относительно сложения?

Задача ГКП-1...

28. параллельные переносы трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ относительно композиции движений? Да
29. повороты трехмерного пространства $\mathbb{R}^n$ вокруг прямых, проходящих через данную точку O относительно композиции движений? Да
30. все движения трехмерного пространства $\mathbb{R}^n$ относительно композиции движений? Да
31. действительные многочлены степени не выше n от неизвестного x и нулевой многочлен относительно сложения? Да

Задача ГКП-1...

28. параллельные переносы трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ относительно композиции движений? Да
29. повороты трехмерного пространства $\mathbb{R}^n$ вокруг прямых, проходящих через данную точку O относительно композиции движений? Да
30. все движения трехмерного пространства $\mathbb{R}^n$ относительно композиции движений? Да
31. действительные многочлены степени не выше n от неизвестного x и нулевой многочлен относительно сложения? Да
32. действительные многочлены любых степеней (включая 0) от переменной x относительно сложения?

Задача ГКП-1...

28. параллельные переносы трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ относительно композиции движений? Да
29. повороты трехмерного пространства $\mathbb{R}^n$ вокруг прямых, проходящих через данную точку O относительно композиции движений? Да
30. все движения трехмерного пространства $\mathbb{R}^n$ относительно композиции движений? Да
31. действительные многочлены степени не выше n от неизвестного x и нулевой многочлен относительно сложения? Да
32. действительные многочлены любых степеней (включая 0) от переменной x относительно сложения? Да

Задача ГКП-1...

28. параллельные переносы трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ относительно композиции движений? Да
29. повороты трехмерного пространства $\mathbb{R}^n$ вокруг прямых, проходящих через данную точку O относительно композиции движений? Да
30. все движения трехмерного пространства $\mathbb{R}^n$ относительно композиции движений? Да
31. действительные многочлены степени не выше n от неизвестного x и нулевой многочлен относительно сложения? Да
32. действительные многочлены любых степеней (включая 0) от переменной x относительно сложения? Да

Задача ГКП-2

В циклической группе $\langle a \rangle$ *порядка* n *найти все генераторы и элементы* g *порядка* k*, удовлетворяющие условию* $g^k = e$ *при*

1. $n = 24,\ k = 6,$ 2. $n = 100,\ k = 20,$ 3. $n = 100,\ k = 5$

Задача ГКП-2

В циклической группе $\langle a \rangle$ порядка n найти все генераторы и элементы g порядка k, удовлетворяющие условию $g^k = e$ при

1. $n = 24,\ k = 6,$ 2. $n = 100,\ k = 20,$ 3. $n = 100,\ k = 5$

Решение . Порядок любого элемента делит порядок группы.
Элемент $g = a^m$ циклической группы
$C(n) = \{ a^0 = 1, a^1, a^2, \ldots, a^{n-1} \}$ будет удовлетворять условию $g^k = e = 1$, если $m = \frac{n}{k} \cdot l,\ l = 1, \ldots, k-1$. При $l = 5$ получаем тривиальное решение $m = 0,\ g = 1$.
$g = a^m$ — генератор $C(n)$, если m взаимно просто с n.

1. $\underline{n = 24,\ k = 6}$
   Группа имеет $\varphi(24) = \varphi(2^3 \cdot 3) = 2^2 \varphi(2) \cdot \varphi(3) = 8$ генераторов: a^m — генератор, если
   $m = 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.$
   $a^m = g,\ g^6 = e$, если $m = \frac{24}{6} \cdot l,\ l = 1, \ldots, 5,$
   $m = 4, 8, 12, 16, 20.$

Задача ГКП-2...

2. $n = 100,\ k = 20$

Группа имеет
$\varphi(100) = \varphi(2^2 \cdot 5^2) = 2^1 \cdot \varphi(2) \cdot 5^1 \cdot \varphi(5) = 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 = 40$
генераторов: a^m — генератор, если
$m = 1,\ 3,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ \ldots,\ 99.$
$a^m = g,\ g^{20} = e$, если $m = \frac{100}{20} \cdot l,\ l = 1,\ \ldots,\ 19$:
$m = 0,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20,\ \ldots,\ 5 \cdot 19 = 95.$

3. $n = 100,\ k = 5$

Группа — та же, что и в предыдущей задаче, и генераторы — те же.
$a^m = g,\ g^5 = e$, если $m = \frac{100}{5} \cdot l,\ l = 1,\ \ldots,\ 4$:
$m = 0,\ 20,\ 40,\ 60,\ 80.$

Задача ГКП-3

Показать, что

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right),$$

если $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ *— примарное разложение* n.

Задача ГКП-3

Показать, что

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right),$$

если $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ *— примарное разложение* n.

Решение

$$\varphi(n) = \varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_k^{\alpha_k}\right) = p_1^{\alpha_1 - 1}\varphi(p_1) \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k - 1}\varphi(p_k) =$$

$$= \frac{n}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_k}(p_1 - 1) \cdot \ldots \cdot (p_k - 1) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Задача ГКП-4

Найти все подгруппы циклической группы порядка 24.

Задача ГКП-4

Найти все подгруппы циклической группы порядка 24.

Решение . Циклическая 24-элементная группа $C = \{ a^0 = 1, a^1, a^2, \ldots, a^{23} \}$ имеет (циклические) подгруппы, генераторами которых будут элементы a^m, где $m \mid n$, т.е. $m = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 22$.

Порядок соответствующей подгруппы — n/m.

$$
\begin{aligned}
m = 1 &: \{ 1, a^1, a^2, \ldots, a^{24} \} = \langle a^1 \rangle = C \cong \mathbb{Z}_{24};\\
m = 2 &: \{ 1, a^2, a^4, a^6, \ldots, a^{22} \} = \langle a^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_{12};\\
m = 3 &: \{ 1, a^3, a^6, a^9, \ldots, a^{21} \} = \langle a^3 \rangle \cong \mathbb{Z}_{8};\\
m = 4 &: \{ 1, a^4, a^8, a^{12}, \ldots, a^{20} \} = \langle a^4 \rangle \cong \mathbb{Z}_{6};\\
m = 6 &: \{ 1, a^6, a^{12}, a^{18} \} = \langle a^6 \rangle \cong \mathbb{Z}_{4};\\
m = 8 &: \{ 1, a^8, a^{16} \} = \langle a^8 \rangle \cong \mathbb{Z}_{3};\\
m = 12 &: \{ 1, a^{12} \} = \langle a^{12} \rangle \cong \mathbb{Z}_{2};\\
m = 24 &: \{ 1 \} = \langle 1 \rangle \cong E \text{ — единичная.}
\end{aligned}
$$

Задача ГКП-5

Выяснить, какие из следующих множеств являются кольцами (но не полями) и какие полями относительно указанных операций. (Если операции не указаны, то подразумеваются сложение и умножение чисел.)

1. целые числа $\mathbb{Z}$?

Задача ГКП-5

Выяснить, какие из следующих множеств являются кольцами (но не полями) и какие полями относительно указанных операций. (Если операции не указаны, то подразумеваются сложение и умножение чисел.)

1. целые числа $\mathbb{Z}$? Кольцо.

Задача ГКП-5

Выяснить, какие из следующих множеств являются кольцами (но не полями) и какие полями относительно указанных операций. (Если операции не указаны, то подразумеваются сложение и умножение чисел.)

1. целые числа $\mathbb{Z}$? Кольцо.
2. четные числа $(2\mathbb{Z})$?

Задача ГКП-5

Выяснить, какие из следующих множеств являются кольцами (но не полями) и какие полями относительно указанных операций. (Если операции не указаны, то подразумеваются сложение и умножение чисел.)

1. целые числа $\mathbb{Z}$? Кольцо.
2. четные числа $(2\mathbb{Z})$? Кольцо.

Задача ГКП-5

Выяснить, какие из следующих множеств являются кольцами (но не полями) и какие полями относительно указанных операций. (Если операции не указаны, то подразумеваются сложение и умножение чисел.)

1. целые числа $\mathbb{Z}$? Кольцо.
2. четные числа $(2\mathbb{Z})$? Кольцо.
3. целые $d\mathbb{Z}$, $d > 0$?

Задача ГКП-5

Выяснить, какие из следующих множеств являются кольцами (но не полями) и какие полями относительно указанных операций. (Если операции не указаны, то подразумеваются сложение и умножение чисел.)

1. целые числа $\mathbb{Z}$? Кольцо.
2. четные числа $(2\mathbb{Z})$? Кольцо.
3. целые $d\mathbb{Z}$, $d > 0$? Кольцо.

Задача ГКП-5

Выяснить, какие из следующих множеств являются кольцами (но не полями) и какие полями относительно указанных операций. (Если операции не указаны, то подразумеваются сложение и умножение чисел.)

1. целые числа $\mathbb{Z}$? Кольцо.
2. четные числа $(2\mathbb{Z})$? Кольцо.
3. целые $d\mathbb{Z}$, $d > 0$? Кольцо.
4. рациональные числа $\mathbb{Q}$?

Задача ГКП-5

Выяснить, какие из следующих множеств являются кольцами (но не полями) и какие полями относительно указанных операций. (Если операции не указаны, то подразумеваются сложение и умножение чисел.)

1. целые числа $\mathbb{Z}$? Кольцо.
2. четные числа $(2\mathbb{Z})$? Кольцо.
3. целые $d\mathbb{Z}$, $d > 0$? Кольцо.
4. рациональные числа $\mathbb{Q}$? Поле.

Задача ГКП-5

Выяснить, какие из следующих множеств являются кольцами (но не полями) и какие полями относительно указанных операций. (Если операции не указаны, то подразумеваются сложение и умножение чисел.)

1. целые числа $\mathbb{Z}$? Кольцо.
2. четные числа $(2\mathbb{Z})$? Кольцо.
3. целые $d\mathbb{Z}$, $d > 0$? Кольцо.
4. рациональные числа $\mathbb{Q}$? Поле.
5. действительные числа $\mathbb{R}$?

Задача ГКП-5

Выяснить, какие из следующих множеств являются кольцами (но не полями) и какие полями относительно указанных операций. (Если операции не указаны, то подразумеваются сложение и умножение чисел.)

1. целые числа $\mathbb{Z}$? Кольцо.
2. четные числа $(2\mathbb{Z})$? Кольцо.
3. целые $d\mathbb{Z}$, $d > 0$? Кольцо.
4. рациональные числа $\mathbb{Q}$? Поле.
5. действительные числа $\mathbb{R}$? Поле.

Задача ГКП-5

Выяснить, какие из следующих множеств являются кольцами (но не полями) и какие полями относительно указанных операций. (Если операции не указаны, то подразумеваются сложение и умножение чисел.)

1. целые числа $\mathbb{Z}$? Кольцо.
2. четные числа $(2\mathbb{Z})$? Кольцо.
3. целые $d\mathbb{Z}$, $d > 0$? Кольцо.
4. рациональные числа $\mathbb{Q}$? Поле.
5. действительные числа $\mathbb{R}$? Поле.
6. комплексные числа $\mathbb{C}$?

Задача ГКП-5

Выяснить, какие из следующих множеств являются кольцами (но не полями) и какие полями относительно указанных операций. (Если операции не указаны, то подразумеваются сложение и умножение чисел.)

1. целые числа $\mathbb{Z}$? Кольцо.
2. четные числа $(2\mathbb{Z})$? Кольцо.
3. целые $d\mathbb{Z}$, $d > 0$? Кольцо.
4. рациональные числа $\mathbb{Q}$? Поле.
5. действительные числа $\mathbb{R}$? Поле.
6. комплексные числа $\mathbb{C}$? Поле.

Задача ГКП-5

Выяснить, какие из следующих множеств являются кольцами (но не полями) и какие полями относительно указанных операций. (Если операции не указаны, то подразумеваются сложение и умножение чисел.)

1. целые числа $\mathbb{Z}$? Кольцо.
2. четные числа $(2\mathbb{Z})$? Кольцо.
3. целые $d\mathbb{Z}$, $d > 0$? Кольцо.
4. рациональные числа $\mathbb{Q}$? Поле.
5. действительные числа $\mathbb{R}$? Поле.
6. комплексные числа $\mathbb{C}$? Поле.

Задача ГКП-5...

7. матрицы порядка n с целыми элементами относительно сложения и умножения матриц?

Задача ГКП-5...

7. матрицы порядка n с целыми элементами относительно сложения и умножения матриц?

   Кольцо (обратной матрицы может не быть).

Задача ГКП-5...

7. матрицы порядка n с целыми элементами относительно сложения и умножения матриц?
   Кольцо (обратной матрицы может не быть).
8. матрицы порядка n с действительными элементами относительно сложения и умножения матриц?

Задача ГКП-5...

7. матрицы порядка n с целыми элементами относительно сложения и умножения матриц?
   Кольцо (обратной матрицы может не быть).
8. матрицы порядка n с действительными элементами относительно сложения и умножения матриц?
   Кольцо (обратной матрицы может не быть).

Задача ГКП-5...

7. матрицы порядка n с целыми элементами относительно сложения и умножения матриц?
   Кольцо (обратной матрицы может не быть).
8. матрицы порядка n с действительными элементами относительно сложения и умножения матриц?
   Кольцо (обратной матрицы может не быть).
9. многочлены от одного неизвестного x с целыми коэффициентами относительно обычных операций сложения и умножения?

Задача ГКП-5...

7. матрицы порядка n с целыми элементами относительно сложения и умножения матриц?
   Кольцо (обратной матрицы может не быть).
8. матрицы порядка n с действительными элементами относительно сложения и умножения матриц?
   Кольцо (обратной матрицы может не быть).
9. многочлены от одного неизвестного x с целыми коэффициентами относительно обычных операций сложения и умножения?
   Кольцо (многочлены $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ в случае $a_0 = 0$ необратимы).

Задача ГКП-5...

7. матрицы порядка n с целыми элементами относительно сложения и умножения матриц?
   Кольцо (обратной матрицы может не быть).
8. матрицы порядка n с действительными элементами относительно сложения и умножения матриц?
   Кольцо (обратной матрицы может не быть).
9. многочлены от одного неизвестного x с целыми коэффициентами относительно обычных операций сложения и умножения?
   Кольцо (многочлены $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ в случае $a_0 = 0$ необратимы).
10. многочлены от одного неизвестного x с действительными коэффициентами относительно обычных операций?

Задача ГКП-5...

7. матрицы порядка n с целыми элементами относительно сложения и умножения матриц?
   Кольцо (обратной матрицы может не быть).
8. матрицы порядка n с действительными элементами относительно сложения и умножения матриц?
   Кольцо (обратной матрицы может не быть).
9. многочлены от одного неизвестного x с целыми коэффициентами относительно обычных операций сложения и умножения?
   Кольцо (многочлены $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ в случае $a_0 = 0$ необратимы).
10. многочлены от одного неизвестного x с действительными коэффициентами относительно обычных операций?
    Кольцо (многочлены $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ в случае $a_0 = 0$ необратимы).

Задача ГКП-5...

7. матрицы порядка n с целыми элементами относительно сложения и умножения матриц?
   Кольцо (обратной матрицы может не быть).
8. матрицы порядка n с действительными элементами относительно сложения и умножения матриц?
   Кольцо (обратной матрицы может не быть).
9. многочлены от одного неизвестного x с целыми коэффициентами относительно обычных операций сложения и умножения?
   Кольцо (многочлены $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ в случае $a_0 = 0$ необратимы).
10. многочлены от одного неизвестного x с действительными коэффициентами относительно обычных операций?
    Кольцо (многочлены $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ в случае $a_0 = 0$ необратимы).