

# Вероятностные тематические модели

## Лекция 10. Анализ зависимостей

К. В. Воронцов  
vokov@forecsys.ru

Этот курс доступен на странице вики-ресурса  
<http://www.MachineLearning.ru/wiki>  
«Вероятностные тематические модели (курс лекций, К.В.Воронцов)»

ВМК МГУ • 25 апреля 2019

- 1 Зависимости, корреляции, связи**
  - Классификация и регрессия
  - Модель СТМ (Correlated Topic Model)
  - Гиперссылки, цитирование, влияние
- 2 Время и пространство**
  - Регуляризаторы времени
  - Эксперименты на коллекции пресс-релизов
  - Гео-пространственные модели
- 3 Социальные сети**
  - Тематические сообщества
  - Направленные связи
  - Социальные роли пользователей

## Тематическая модель классификации (категоризации)

Обучающие данные:  $C$  — множество классов (категорий);

$C_d \subseteq C$  — классы, к которым  $d$  относится;

$C'_d \subseteq C$  — классы, к которым  $d$  не относится.

$p(c|d) = \sum_{t \in T} \phi_{ct} \theta_{td}$  — линейная модель классификации

Правдоподобие вероятностной модели бинарных данных:

$$R(\Phi, \Theta) = \tau \sum_{d \in D} \sum_{c \in C_d} \ln \sum_{t \in T} \phi_{ct} \theta_{td} + \\ + \tau \sum_{d \in D} \sum_{c \in C'_d} \ln \left( 1 - \sum_{t \in T} \phi_{ct} \theta_{td} \right) \rightarrow \max$$

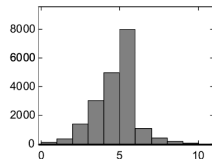
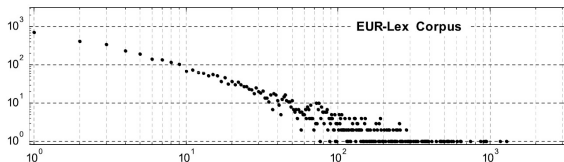
При  $C'_d = \emptyset$ ,  $n_{dc} = [c \in C_d]$  это правдоподобие модальности  $C$ .

---

*Rubin T. N., Chambers A., Smyth P., Steyvers M.* Statistical topic models for multi-label document classification // Machine Learning, 2012, no. 88 (1–2).

## Эксперимент. Категоризация коллекции EUR-Lex

- EUR-Lex:  $|D| = 19\,800$  документов — законы Евросоюза
- Две модальности:  $W^1$  слова (21К),  $W^2$  категории (3 250)
- Категории несбалансированные и пересекающиеся:



- слева:  $\#$  категорий с заданным  $\#$  документов в категории
- справа:  $\#$  документов с заданным  $\#$  категорий

Rubin T. N., Chambers A., Smyth P., Steyvers M. Statistical topic models for multi-label document classification // Machine Learning, 2012, no. 88 (1–2).

## Эксперимент. Категоризация коллекции EUR-Lex

### Регуляризаторы:

- Равномерное сглаживание  $\Theta$
- Равномерное сглаживание матрицы слова–темы  $\Phi^1$
- *Label regularization* для матрицы категории–темы  $\Phi^2$ :

$$R(\Phi^2) = \tau \sum_{c \in W^2} \hat{p}_c \ln p(c) \rightarrow \max,$$

где  $p(c) = \sum_{t \in T} \phi_{ct} p(t)$  — распределение на категориях  $c$ ,

$p(t) = \frac{n_t}{n}$  — распределение на темах,

$\hat{p}_c$  — доля документов категории  $c$  в обучающей выборке.

---

*Mann G. S., McCallum A.* Simple, robust, scalable semi-supervised learning via expectation regularization // ICML 2007, Pp. 593–600.

## Эксперимент. Категоризация коллекции EUR-Lex

DLDA (Dependency LDA) [Rubin 2012] — среди байесовских моделей ближайший аналог ARTM для классификации

Критерии качества [Rubin 2012]:

- AUC-PR (% ,  $\uparrow$ ) — Area under precision-recall curve
- AUC (% ,  $\uparrow$ ) — Area under ROC curve
- OneErr (% ,  $\downarrow$ ) — One error (most ranked label is not relevant)
- IsErr (% ,  $\downarrow$ ) — Is error (no perfect classification)

Результаты сравнения:

	AUC-PR $\uparrow$	AUC $\uparrow$	OneErr $\downarrow$	IsErr $\downarrow$
BigARTM	<b>52.9</b>	98.0	<b>27.1</b>	<b>94.2</b>
DLDA [Rubin 2012]	49.2	<b>98.2</b>	32.0	97.2
SVM	43.5	97.5	31.6	98.1

## Тематическая модель регрессии

Обучающие данные:  $y_d \in \mathbb{R}$  для всех документов  $d \in D$ .

$E(y|d) = \sum_{t \in T} v_t \theta_{td}$  — линейная модель регрессии,  $v \in \mathbb{R}^{|T|}$ .

Регуляризатор — среднеквадратичная ошибка (МНК):

$$R(\Theta, v) = -\tau \sum_{d \in D} \left( y_d - \sum_{t \in T} v_t \theta_{td} \right)^2 \rightarrow \max$$

Подставляем, получаем формулы М-шага:

$$\theta_{td} = \operatorname{norm}_t \left( n_{td} + \tau v_t \theta_{td} \left( y_d - \sum_{s \in T} v_s \theta_{sd} \right) \right);$$
$$v = (\Theta \Theta^T)^{-1} \Theta y.$$

---

Sokolov E., Bogolubsky L. Topic Models Regularization and Initialization for Regression Problems // CIKM-2015 Workshop on Topic Models. ACM, pp. 21–27.

## Примеры задач регрессии на текстах

### MovieReview [Pang, Lee, 2005]

$d$  — текст отзыва на фильм

$y_d$  — рейтинг фильма (1..5), поставленный автором отзыва

### Salary (kaggle.com: *Adzuna Job Salary Prediction*)

$d$  — описание вакансии, предлагаемой работодателем

$y_d$  — годовая зарплата

### Yelp (kaggle.com: *Yelp Recruiting Competition*)

$d$  — отзыв (на ресторан, отель, сервис и т.п.)

$y_d$  — число голосов «useful», которые получит отзыв

### Прогнозирование скачков цен на финансовых рынках

$d$  — текст новости

$y_d$  — изменение цены в последующие 10–60 минут

---

*B. Pang, L. Lee. Seeing stars: Exploiting class relationships for sentiment categorization with respect to rating scales // ACL, 2005.*





## Многомерное лог-нормальное распределение

**Мотивация.** Темы могут коррелировать: «статьи по археологии чаще связаны с историей и геологией, чем с генетикой».

**Гипотеза.** Вектор-столбцы  $\theta_d$  порождаются  $|T|$ -мерным лог-нормальным распределением с ковариационной матрицей  $S$ :

$$p(\eta_d | \mu, S) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |S|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\eta_d - \mu)^T S^{-1}(\eta_d - \mu)\right),$$

где  $\eta_d = (\eta_{td})_{t \in T}$ ,  $\eta_{td} = \ln \theta_{td} + C_d$  — векторы документов, определённые с точностью до константы  $C_d$ , не зависящей от  $t$ ,  $\mu$ ,  $S$  — параметры гауссовского распределения.

---

*David Blei, John Lafferty. A Correlated Topic Model of SCIENCE // Annals of Applied Statistics, 2007. Vol. 1, Pp. 17-35.*

## Регуляризатор модели коррелированных тем СТМ

Максимизация правдоподобия выборки векторов  $\eta_d = (\eta_{td})$ :

$$\sum_{d \in D} \ln p(\eta_d | \mu, S) \rightarrow \max.$$

Регуляризатор с параметрами  $\mu, S$ :

$$R(\Theta) = -\frac{\tau}{2} \sum_{d \in D} (\eta_d - \mu)^\top S^{-1} (\eta_d - \mu) \rightarrow \max.$$

Формулы M-шага ( $S, \mu$  можно обновлять в конце итерации):

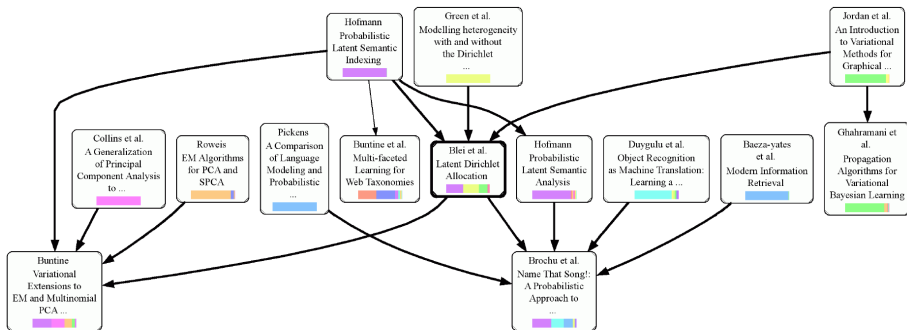
$$\theta_{td} = \operatorname{norm}_{t \in T} \left( n_{td} - \tau \sum_{s \in T} S_{ts}^{-1} (\ln \theta_{sd} - \mu_s) \right);$$

$$\mu = \frac{1}{|D|} \sum_{d \in D} \ln \theta_d;$$

$$S = \frac{1}{|D|} \sum_{d \in D} (\ln \theta_d - \mu) (\ln \theta_d - \mu)^\top.$$

## Модели, учитывающие цитирования или гиперссылки

- Учёт ссылок уточняет тематическую модель
- Тематическая модель выявляет влиятельные ссылки



Laura Dietz, Steffen Bickel, Tobias Scheffer. Unsupervised prediction of citation influences. ICML-2007.

## Регуляризатор $\Theta$ для учёта связей между документами

**Цель:** улучшить темы, используя ссылки или цитирования (если документы ссылаются друг на друга, то их темы близки):

$n_{dc}$  — число ссылок из  $d$  на  $c$ .

Максимизируем ковариации связанных документов  $\theta_d, \theta_c$ :

$$R(\Theta) = \tau \sum_{d,c \in D} n_{dc} \text{cov}(\theta_d, \theta_c) \rightarrow \max.$$

Подставляем, получаем ещё один вариант сглаживания:

$$\theta_{td} = \text{norm}_t \left( n_{td} + \tau \theta_{td} \sum_{c \in D} n_{dc} \theta_{tc} \right).$$

---

*Laura Dietz, Steffen Bickel, Tobias Scheffer.* Unsupervised prediction of citation influences. ICML-2007.

## Связи как модальность. Регуляризатор $\Phi$

**Проблема учёта связей** в пакетном EM-алгоритме:  
 связанные документы могут оказаться в разных пакетах.

Документы содержат термины  $w \in W^1$  и ссылки  $c \in W^2 \subseteq D$   
 $W^2$  — модальность документов, на которые есть ссылки

Регуляризатор — log-правдоподобие модальности  $W^2$ :

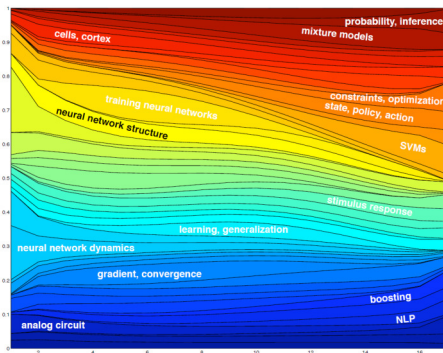
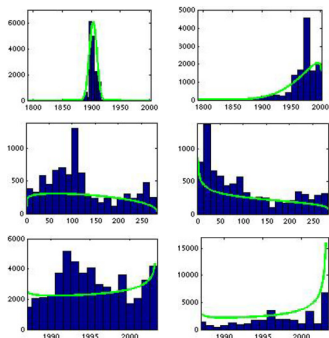
$$R(\Phi^2, \Theta) = \tau \sum_{d \in D} \sum_{c \in W^2} n_{dc} \ln \sum_{t \in T} \phi_{ct} \theta_{td} \rightarrow \max.$$

Другой вариант — сумма ковариационных регуляризаторов:

$$R(\Phi^2, \Theta) = \tau \sum_{d,c} n_{dc} \sum_{t \in T} \phi_{ct} \theta_{td} \rightarrow \max.$$

## Модель TOT (Topics over Time)

1. Каждая тема имеет непрерывное  $\beta$ -распределение во времени
2. Каждое слово имеет метку времени



Xuerui Wang, Andrew McCallum. Topics over Time: A Non-Markov Continuous-Time Model of Topical Trends. ACM SIGKDD-2006

## Темпоральные тематические модели

Неадекватность ТОТ очевидна даже по картинкам из статьи!

**Наши предположения:**

- Время дискретно,  $i \in I$  — интервалы времени
- Как и в ТОТ, темы  $p(w|t)$  не меняются во времени
- *Перманентные* темы имеют медленно меняющиеся  $p(i|t)$
- *Событийные* темы имеют  $p(i|t) = 0$  почти всё время
- Метки времени приписываются документам, а не словам
- Параметрические модели не используются

**Цели моделирования:**

- Выделить событийные и перманентные темы.
- Проследить развитие тем во времени.
- Выделить тренды (в новостях, в научных публикациях).



## Регуляризаторы $\Theta$ для темпоральных тематических моделей

$I$  — интервалы времени (например, годы публикаций),  
 $D_i \subset D$  — все документы, относящиеся к интервалу  $i \in I$ .  
 $n_i = \sum_{d \in D_i} n_d$  — доля коллекции, относящаяся к интервалу  $i$ .

1. Разреживание  $p(t|i) = \sum_{d \in D_i} \theta_{td} \frac{n_d}{n_i}$  в каждом интервале  $i$ :

$$R_1(\Theta) = \tau_1 \sum_{i \in I} \text{KL}\left(\frac{1}{|T|} \parallel p(t|i)\right) \rightarrow \max.$$

2. Сглаживание  $p(i|t) = \sum_{d \in D_i} \theta_{td} \frac{n_d}{n_t}$  в соседних интервалах  $i, i-1$ :

$$R_2(\Theta) = -\tau_2 \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} |p(i|t) - p(i-1|t)| \rightarrow \max.$$

---

Никита Дойков. Адаптивная регуляризация вероятностных тематических моделей // ВКР бакалавра, 2015. ВМК МГУ.

## Время как модальность. Регуляризатор $\Phi$

**Проблема** регуляризатора  $\Theta$  в пакетном EM-алгоритме:  
 соседние по времени документы могут попасть в разные пакеты.

Документы содержат слова  $w \in W^1$  и время  $i \in W^2 = I$   
 $W^2$  — модальность интервалов времени (time stamps)

1. Разреживание  $p(t|i)$  эквивалентно разреживанию  $p(i|t) = \phi_{it}$ :

$$R_1(\Phi^2) = -\tau_1 \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} \ln \phi_{it} \rightarrow \max$$

2. Сглаживание  $p(i|t) = \phi_{it}$  в соседних интервалах  $i, i-1$ :

$$R_2(\Phi^2) = -\tau_2 \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} |\phi_{it} - \phi_{i-1,t}| \rightarrow \max$$

## Задача анализа потока пресс-релизов

Коллекция официальных пресс-релизов внешнеполитических ведомств ряда стран на английском языке.

Более 20 тыс. сообщений за 10 лет, 180Мб текста.

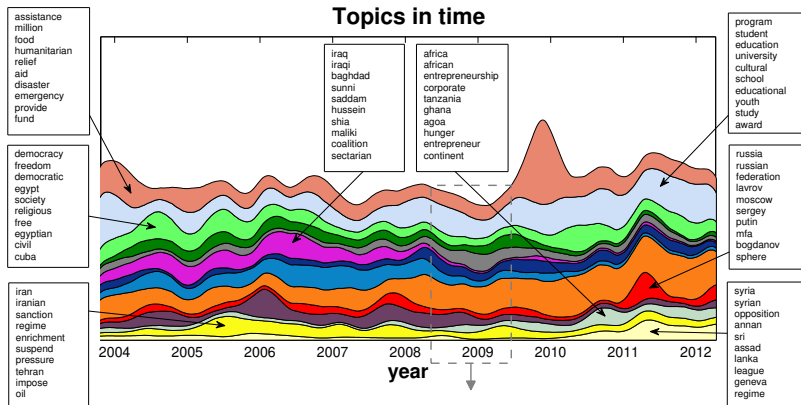
### Цели исследования:

- какие темы общие, какие специфичны для источников?
- какие темы событийные, какие перманентные?
- какие темы и когда коррелируют с заданной темой?

### Модальности и регуляризаторы:

- две модальности: источники, интервалы времени
- разреживание, сглаживание, декоррелирование
- сглаживание тем во времени

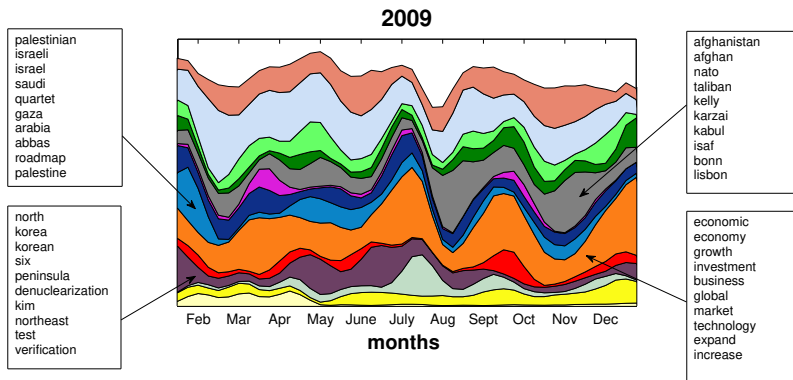
## Динамика тем во времени



Никита Дойков. Адаптивная регуляризация вероятностных тематических моделей // ВКР бакалавра, 2015. ВМК МГУ.

## Динамика тем во времени

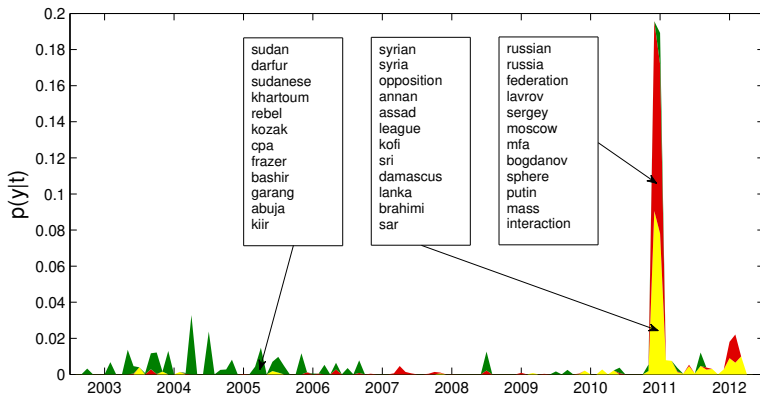
### Укрупнение масштаба времени



Никита Дойков. Адаптивная регуляризация вероятностных тематических моделей // ВКР бакалавра, 2015. ВМК МГУ.

## Динамика тем во времени

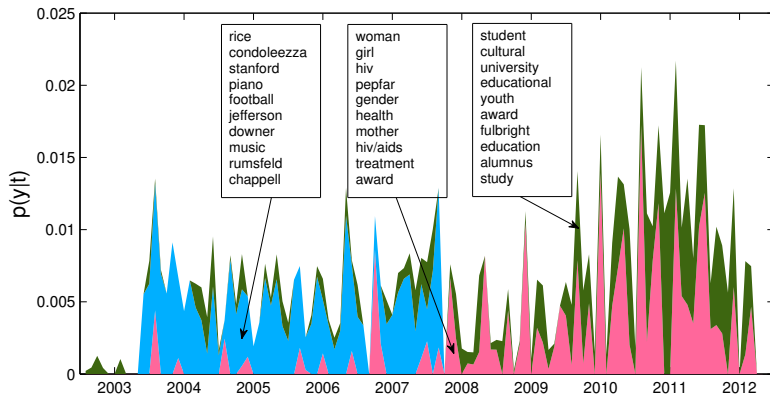
Пример: событийные темы и момент их совместного всплеска



Никита Дойков. Адаптивная регуляризация вероятностных тематических моделей // ВКР бакалавра, 2015. ВМК МГУ.

## Динамика тем во времени

Примеры перманентных тем (сглаживание отключено)



Никита Дойков. Адаптивная регуляризация вероятностных тематических моделей // ВКР бакалавра, 2015. ВМК МГУ.

## Гео-пространственные модели

Данные:  $\ell_d = (x_d, y_d)$  — геолокация (GPS) документа  $d$

Цели исследования:

- какие темы общие, какие специфичны для региона?
- какие есть похожие темы в других регионах?

Регуляризатор:

$$R(\Theta) = -\frac{T}{2} \sum_{(c,d)} w_{cd} \sum_{t \in T} (\theta_{td} - \theta_{tc})^2 \rightarrow \max,$$

$w_{cd}$  — вес пары  $(c, d)$ , близость геолокаций  $(x_c, y_c)$  и  $(x_d, y_d)$

---

Zhijun Yin, Liangliang Cao, Jiawei Han, Chengxiang Zhai, Thomas Huang.  
Geographical Topic Discovery and Comparison. WWW 2011.



## Пример: Food dataset

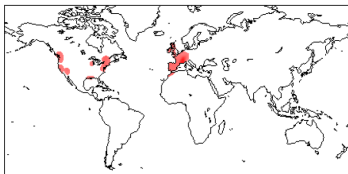
Где и что едят пользователи Flickr?



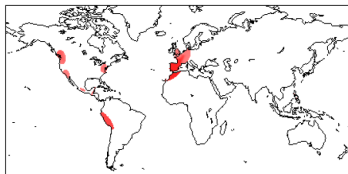
Chinese Food



Japanese Food



French Food



Spanish Food

---

Zhijun Yin, Liangliang Cao, Jiawei Han, Chengxiang Zhai, Thomas Huang.  
Geographical Topic Discovery and Comparison. WWW 2011.

## Задача выявления тематических сообществ

Граф  $\langle V, E \rangle$ , вершины  $v$  — подмножества  $D_v \subset D$ , например:

$D_v$  — отдельный документ  $v \equiv d$

$D_v$  — все статьи одного автора  $v$

$D_v$  — все посты из одного географического региона  $v$

Тематика вершины:

$$p(t|v) = \sum_{d \in D_v} p(t|d)p(d|v) = \frac{1}{|D_v|} \sum_{d \in D_v} \theta_{td}$$

Регуляризатор NetPLSA, при заданных весах  $w_{uv}$  рёбер  $(u, v)$ :

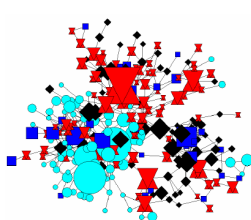
$$R(\Theta) = -\frac{\tau}{2} \sum_{(u,v) \in E} w_{uv} \sum_{t \in T} (p(t|v) - p(t|u))^2 \rightarrow \max_{\Theta}$$

---

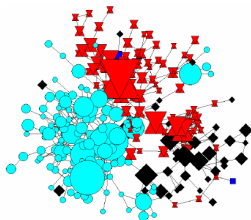
Qiaozhu Mei, Deng Cai, Duo Zhang, ChengXiang Zhai. Topic Modeling with Network Regularization. WWW-2008.

## Примеры тематических сообществ

$D_v$  — все статьи автора  $v$  на четырёх конференциях:

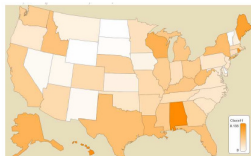


PLSA

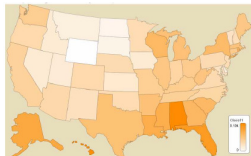


NetPLSA

$D_v$  — все посты про ураган Катрина из штата  $v$ :



With PLSA



With NetPLSA

## От NetPLSA к модальности вершин графа

**Проблема** регуляризатора  $\Theta$  в пакетном EM-алгоритме: связанные документы могут попасть в разные пакеты.

$W^2 = V$  — модальность вершин графа  $\langle V, E \rangle$ .

В каждый документ  $d \in D_v$  добавляется терм-вершина  $v$ .

Тематика вершины:

$$p(t|v) = p(v|t) \frac{p(t)}{p(v)} = \phi_{vt} \frac{n_t}{n_v}$$

Регуляризатор NetPLSA, при заданных весах  $w_{uv}$  рёбер  $(u, v)$ :

$$R(\Phi^2) = -\frac{\tau}{2} \sum_{(u,v) \in E} w_{uv} \sum_{t \in T} n_t^2 \left( \frac{\phi_{vt}}{n_v} - \frac{\phi_{ut}}{n_u} \right)^2 \rightarrow \max_{\Phi}$$

---

*Виктор Булатов. Использование графовой структуры в тематическом моделировании // Магистерская диссертация, ФИБТ МФТИ, 2016.*

## Направленные связи

**Проблема:** квадратичный регуляризатор NetPLSA игнорирует направленность связей  $u \rightarrow v$ .

**Предположение:** направление связи  $u \rightarrow v$  означает, что распределение  $p(t|v)$  «подчиняется» распределению  $p(t|u)$ .

**Модель iTopicModel.** В отличие от NetPLSA, минимизируется не квадратичный критерий, а дивергенция  $KL(p(t|v) \parallel p(t|u))$ :

$$R(\Theta \text{ или } \Phi^2) = \frac{\tau}{2} \sum_{(u,v) \in E} w_{uv} \sum_{t \in T} p(t|v) \ln p(t|u) \rightarrow \max,$$

причём  $p(t|v)$  можно выразить и через  $\Theta$ , и через  $\Phi^2$ .

---

*Yizhou Sun, Jiawei Han, Jing Gao, Yintao Yu.* iTopicModel: Information Network-Integrated Topic Modeling. 2009.

## Создатель или распространитель контента?

Документ  $a \in D$  — все твиты, созданные пользователем  $a$

Документ  $b \in D$  — все ретвиты пользователя  $b$

$n_a$  — число сообщений пользователя  $a$

$r_b$  — число ретвитов пользователя  $b$

$r_{ab}$  — сколько раз  $b$  сделал ретвит сообщения пользователя  $a$

$\theta_{ta} = p(t|a)$  — тематика  $a$  в роли создателя контента

$\theta'_{tb} = p'(t|b)$  — тематика  $b$  в роли распространителя контента

**Предположения:**

- если  $b$  ретвитит  $a$ , то тематики  $\theta_{ta}$  и  $\theta'_{tb}$  близки
- если  $c$  ретвитит  $a$  и  $b$ , то тематики  $\theta_{ta}$  и  $\theta_{tb}$  близки
- если  $a$  и  $b$  ретвият  $c$ , то тематики  $\theta'_{ta}$  и  $\theta'_{tb}$  близки

---

Wayne Xin Zhao, Jinpeng Wang, Yulan He, Jian-Yun Nie, Xiaoming Li.  
Originator or Propagator? Incorporating Social Role Theory into Topic Models  
for Twitter Content Analysis. CIKM 2013.

## Создатель или распространитель контента?

Меры близости пар пользователей  $a$  и  $b$ :

$\text{sim}_1(a, b) = \frac{r_{ab}}{n_a + r_b - r_{ab}}$  — как непосредственно взаимодействующих

$\text{sim}_2(a, b) = \frac{\sum_c r_{ac} r_{bc}}{(\sum_c r_{ac}^2)^{1/2} (\sum_c r_{bc}^2)^{1/2}}$  — как создателей контента

$\text{sim}_3(a, b) = \frac{\sum_c r_{ca} r_{cb}}{(\sum_c r_{ca}^2)^{1/2} (\sum_c r_{cb}^2)^{1/2}}$  — как распространителей контента

Регуляризаторы:

$$R_1(\Theta) = \tau_1 \sum_{(a,b)} \text{sim}_1(a, b) \sum_{t \in T} (\theta_{ta} - \theta'_{tb})^2 \rightarrow \max;$$

$$R_2(\Theta) = \tau_2 \sum_{(a,b)} \text{sim}_2(a, b) \sum_{t \in T} (\theta_{ta} - \theta_{tb})^2 \rightarrow \max;$$

$$R_3(\Theta) = \tau_3 \sum_{(a,b)} \text{sim}_3(a, b) \sum_{t \in T} (\theta'_{ta} - \theta'_{tb})^2 \rightarrow \max;$$

## Переход к модальностям создателей и распространителей

**Проблема регуляризатора  $\Theta$  в пакетном EM-алгоритме:**  
связанные пользователи могут попасть в разные пакеты.

Документ  $d \in D$  — отдельный твит, содержащий:

$a_d \in A$  — один терм модальности  $\Phi^A$  создателя,

$b \in B_d \subset B$  — термины модальности  $\Phi^B$  распространителей,

$A \equiv B$  — множество всех пользователей социальной сети.

Регуляризаторы над  $p(t|a) = \phi_{at}^A \frac{n_a}{n_t}$  и  $p(t|b) = \phi_{bt}^B \frac{n_b}{n_t}$ :

$$R_1(\Phi) = \tau_1 \sum_{(a,b)} \text{sim}_1(a, b) \sum_{t \in T} \left( \phi_{at}^A \frac{n_a}{n_t} - \phi_{bt}^B \frac{n_b}{n_t} \right)^2 \rightarrow \max;$$

$$R_2(\Phi) = \tau_2 \sum_{(a,b)} \text{sim}_2(a, b) \sum_{t \in T} \left( \phi_{at}^A \frac{n_a}{n_t} - \phi_{bt}^A \frac{n_b}{n_t} \right)^2 \rightarrow \max;$$

$$R_3(\Phi) = \tau_3 \sum_{(a,b)} \text{sim}_3(a, b) \sum_{t \in T} \left( \phi_{at}^B \frac{n_a}{n_t} - \phi_{bt}^B \frac{n_b}{n_t} \right)^2 \rightarrow \max;$$



- Регуляризаторы позволяют нацелить тематическую модель на классификацию, регрессию, выявление связей
- Классы, категории, время, связи – это всё модальности
- Регуляризаторы  $\Theta$ , не удобные в пакетном алгоритме, можно превращать в регуляризаторы  $\Phi$