Вероятностные тематические модели
Лекция 4.
Классика тематических моделей: PLSA, LDA и EM-алгоритм

К. В. Воронцов
vokov@forecsys.ru

Этот курс доступен на странице вики-ресурса
http://www.MachineLearning.ru/wiki
«Вероятностные тематические модели (курс лекций, К.В.Воронцов)»

МФТИ – ФИЦ ИУ РАН • 2 октября 2019

Содержание

Напоминание. Задача тематического моделирования

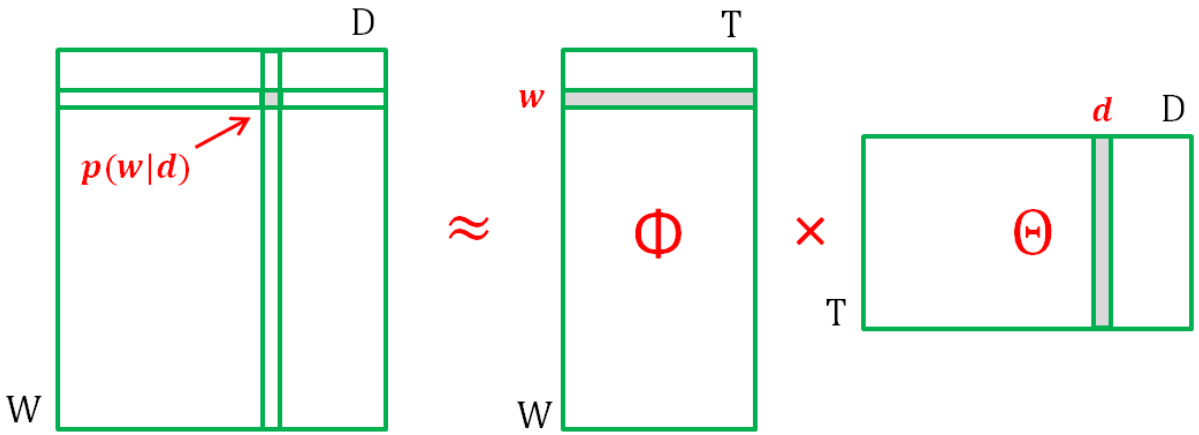
Дано: коллекция текстовых документов

- n_{dw} — частоты термов в документах, $\hat{p}(w|d) = \frac{n_{dw}}{n_d}$

Найти: параметры тематической модели $p(w|d) = \sum_{t \in T} \phi_{wt}\theta_{td}$

- $\phi_{wt} = p(w|t)$ — вероятности термов w в каждой теме t
- $\theta_{td} = p(t|d)$ — вероятности тем t в каждом документе d

Это задача стохастического матричного разложения:



Напоминание. PLSA (Probabilistic Latent Semantic Analysis)

Задача максимизации логарифма правдоподобия:

$$\mathscr{L}(\Phi,\Theta) = \sum_{d,w} n_{dw} \ln \sum_{t} \phi_{wt}\theta_{td} \;\to\; \max_{\Phi,\Theta}$$

EM-алгоритм: метод простой итерации для системы уравнений

$$\begin{cases} \text{E-шаг:} & p_{tdw} = \underset{t\in T}{\text{norm}}\left(\phi_{wt}\theta_{td}\right) \\ \text{M-шаг:} & \phi_{wt} = \underset{w\in W}{\text{norm}}\left(\sum\limits_{d\in D} n_{dw}p_{tdw}\right) \\ & \theta_{td} = \underset{t\in T}{\text{norm}}\left(\sum\limits_{w\in d} n_{dw}p_{tdw}\right) \end{cases}$$

где $\underset{t\in T}{\text{norm}}(x_t) = \dfrac{\max\{x_t,0\}}{\sum\limits_{s\in T}\max\{x_s,0\}}$ — операция нормировки вектора.

Недостатки PLSA (и необходимость его регуляризации)

1. Большая размерность пространства параметров
2. Якобы из-за этого сильное переобучение
3. Якобы невозможность моделирования новых документов
4. Неединственность и неустойчивость решения:
   если $\Phi\Theta$ — решение, то $(\Phi S)(S^{-1}\Theta)$ — тоже решение
5. Нет управления *разреженностью* Φ и Θ, т.к.
   (в начале $\phi_{wt} = 0$) $\Leftrightarrow$ (в финале $\phi_{wt} = 0$),
   (в начале $\theta_{td} = 0$) $\Leftrightarrow$ (в финале $\theta_{td} = 0$)
6. Темы не всегда интерпретируемы
7. Нет выделения нетематических (фоновых) слов
8. Не ясно, как учитывать дополнительную информацию

Blei D., Ng A., Jordan M. Latent Dirichlet Allocation. JMLR, 2003.

Гипотеза об априорных распределениях Дирихле

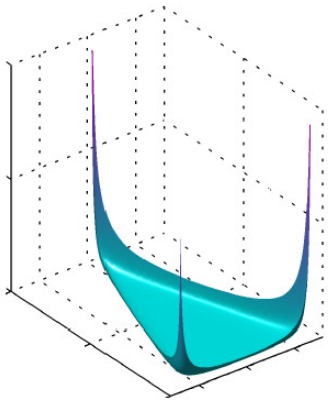
Гипотеза: вектор-столбцы $\phi_t = (\phi_{wt})_{w \in W}$ и $\theta_d = (\theta_{td})_{t \in T}$ порождаются распределениями Дирихле, $\alpha \in \mathbb{R}^{|T|}$, $\beta \in \mathbb{R}^{|W|}$:

$$\mathrm{Dir}(\phi_t|\beta) = \frac{\Gamma(\beta_0)}{\prod_w \Gamma(\beta_w)} \prod_w \phi_{wt}^{\beta_w - 1}, \quad \phi_{wt} > 0; \quad \beta_0 = \sum_w \beta_w, \ \beta_w > 0;$$

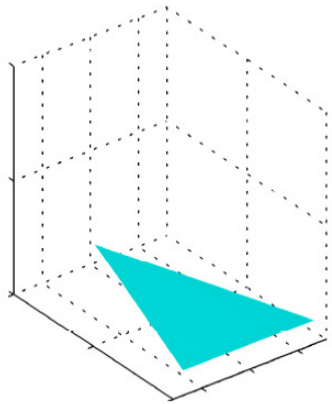
$$\mathrm{Dir}(\theta_d|\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha_0)}{\prod_t \Gamma(\alpha_t)} \prod_t \theta_{td}^{\alpha_t - 1}, \quad \theta_{td} > 0; \quad \alpha_0 = \sum_t \alpha_t, \ \alpha_t > 0;$$

Пример:

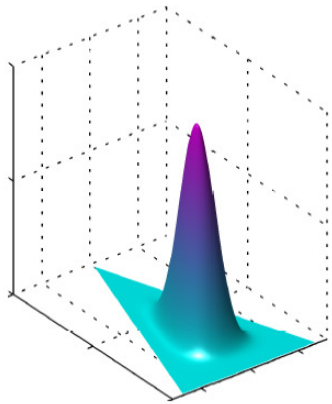
$\mathrm{Dir}(\theta|\alpha)$,
$|T| = 3$,
$\theta, \alpha \in \mathbb{R}^3$



$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.1$

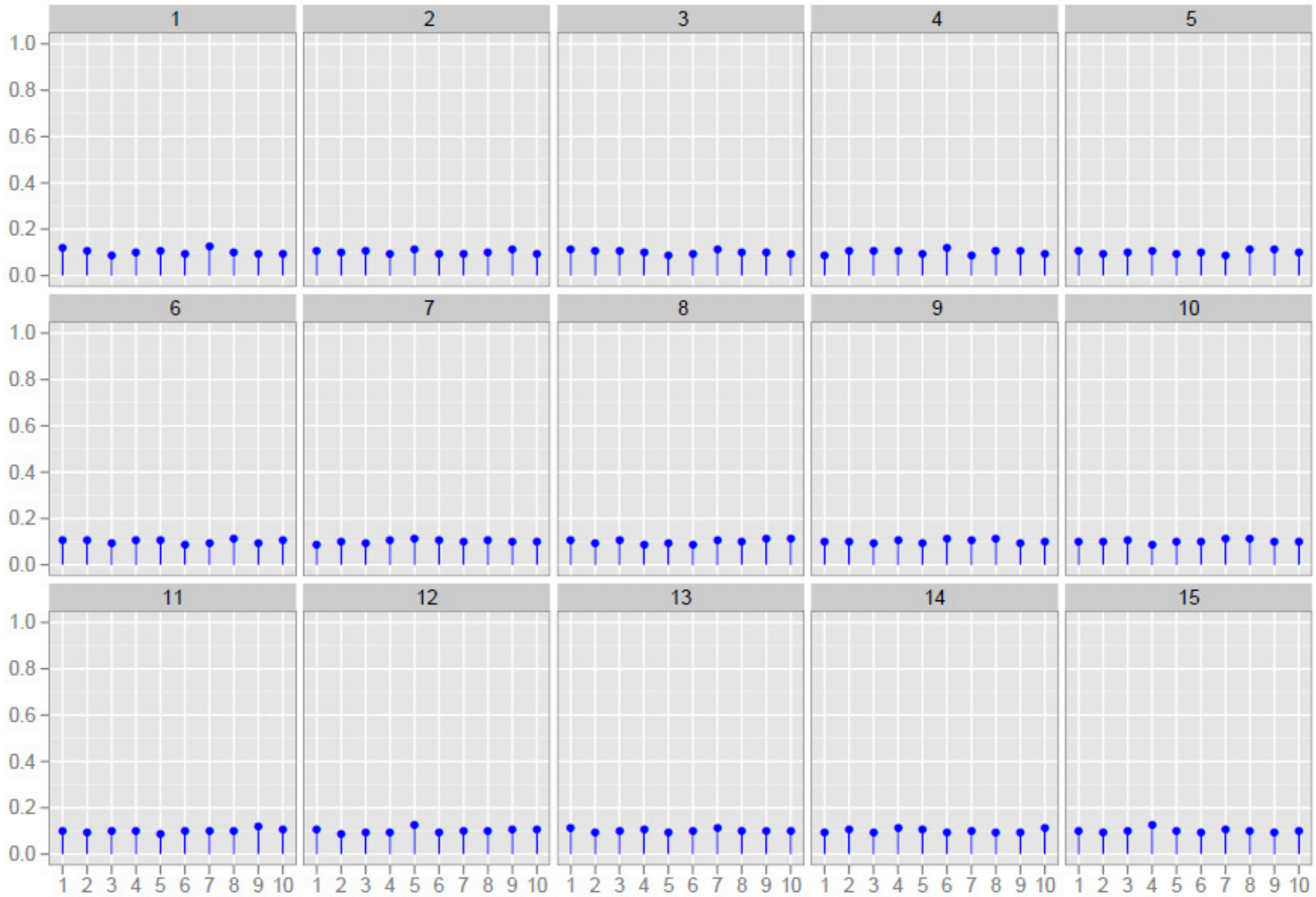


$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$

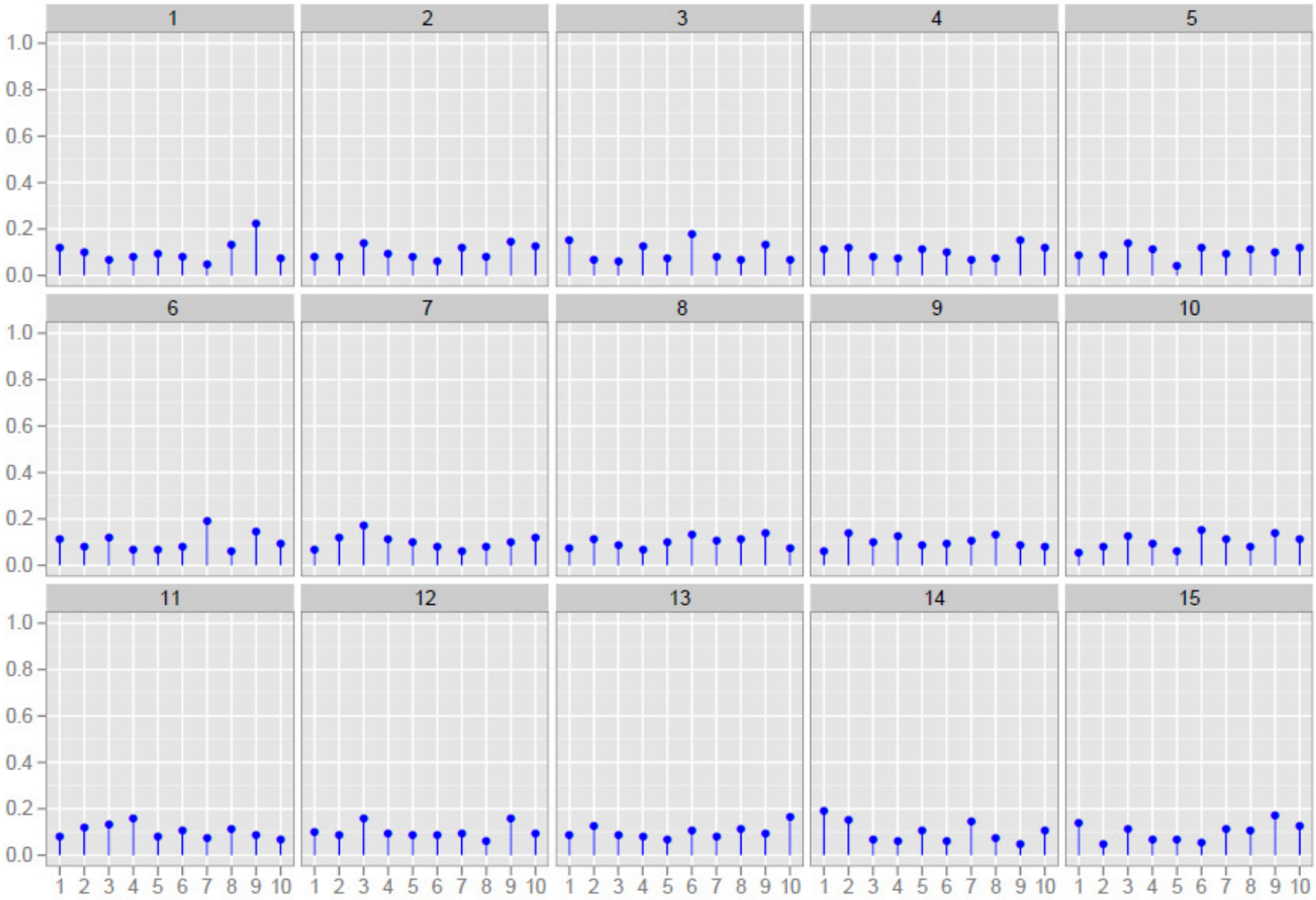


$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 10$

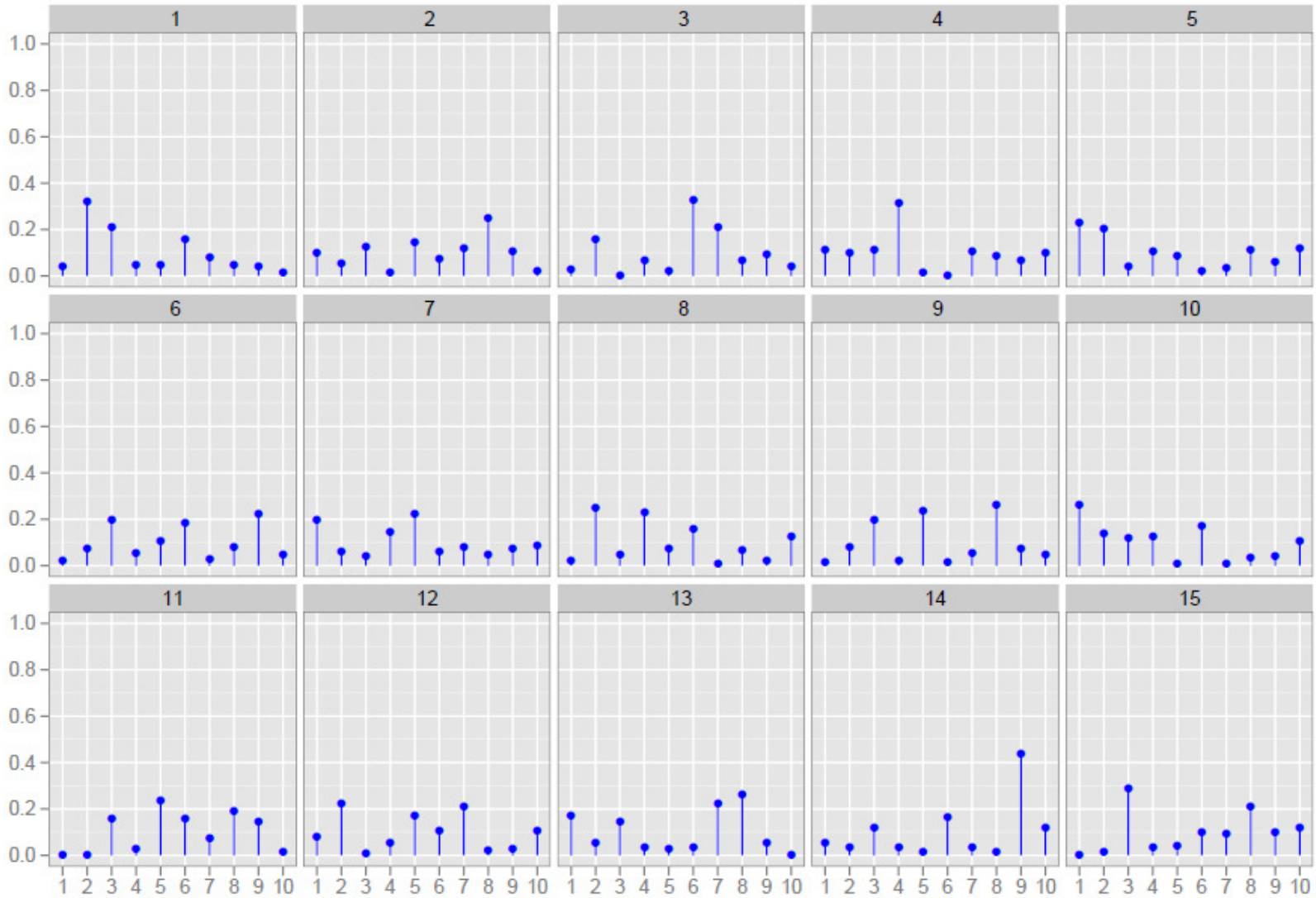
Распределение $\mathrm{Dir}(\theta_d|\alpha)$ при $\alpha_t \equiv 100$, 10 тем, 15 документов



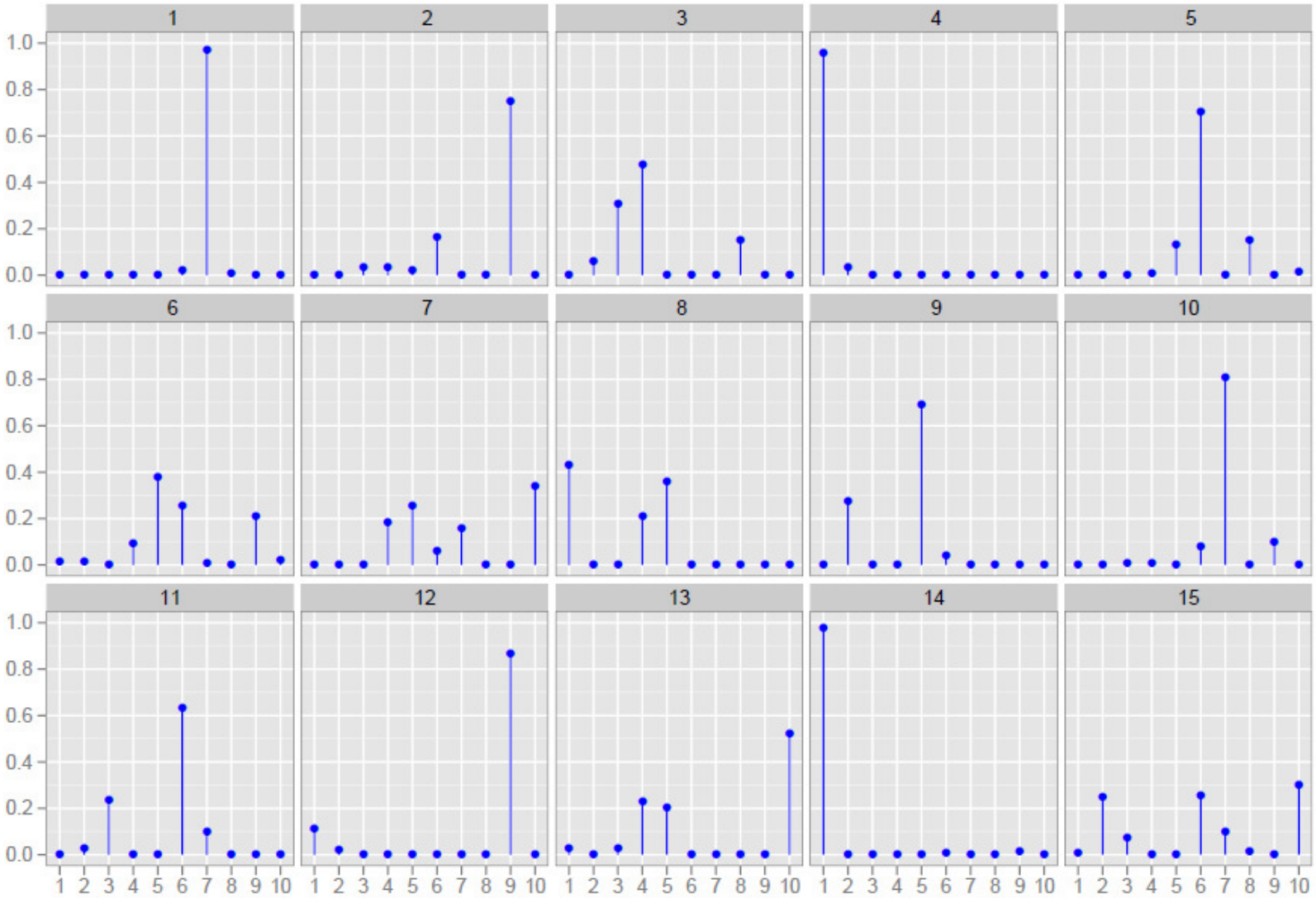
Распределение $\mathrm{Dir}(\theta_d|\alpha)$ при $\alpha_t \equiv 10$, 10 тем, 15 документов



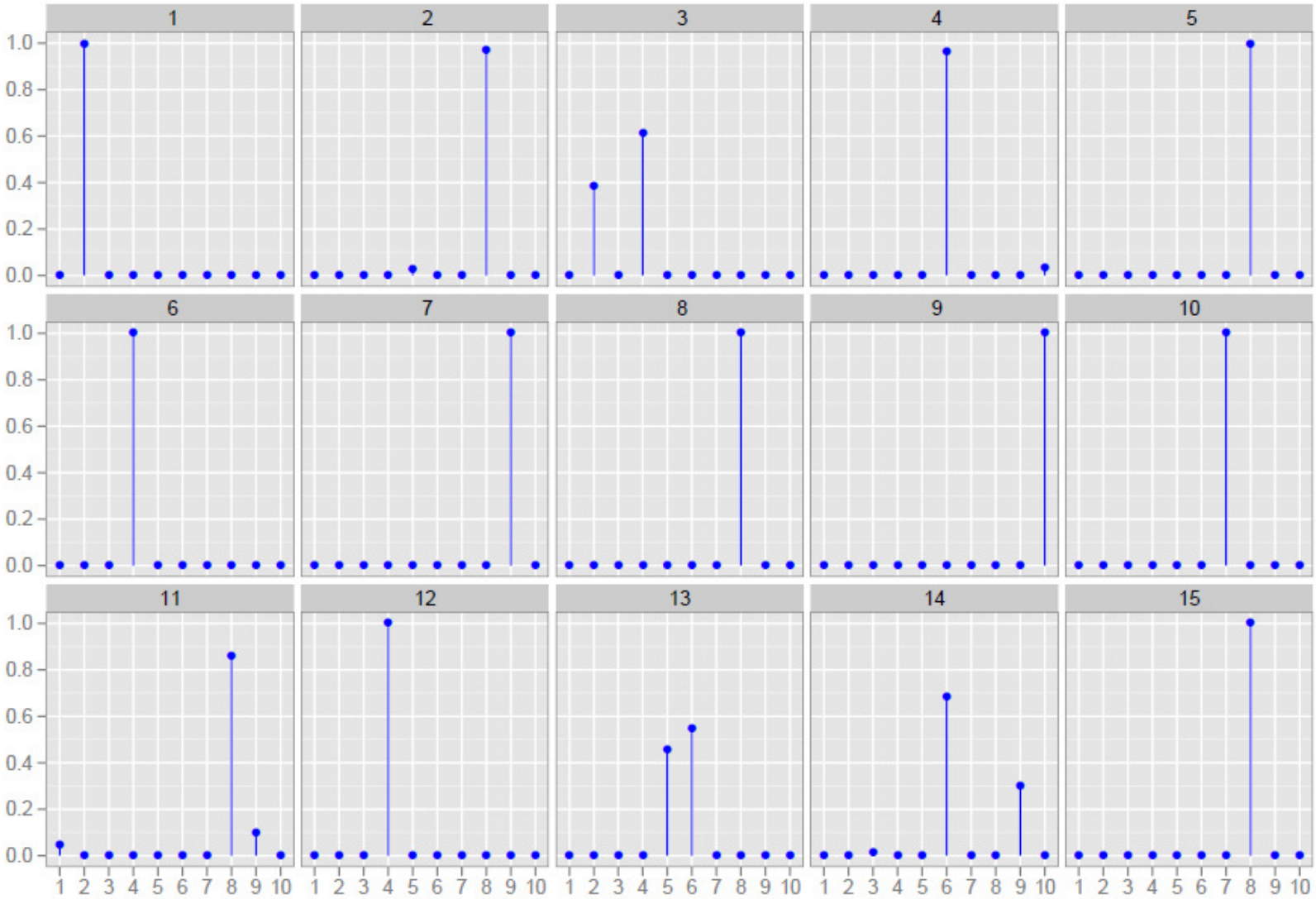
Распределение $\mathrm{Dir}(\theta_d|\alpha)$ при $\alpha_t \equiv 1$, 10 тем, 15 документов



Распределение $\mathrm{Dir}(\theta_d|\alpha)$ при $\alpha_t \equiv 0.1$, 10 тем, 15 документов



Распределение $\mathrm{Dir}(\theta_d|\alpha)$ при $\alpha_t \equiv 0.01$, 10 тем, 15 документов



Вероятностная модель порождения текста

Тематическая модель LDA (Latent Dirichlet Allocation):

$$p(w|d) = \sum_{t \in T} \phi_{wt}\theta_{td}, \quad \phi_t \sim \mathrm{Dir}(\phi|\beta), \quad \theta_d \sim \mathrm{Dir}(\theta|\alpha).$$

Процесс порождения документов $d = \{w_1 \dots w_{n_d}\}$ коллекции D:

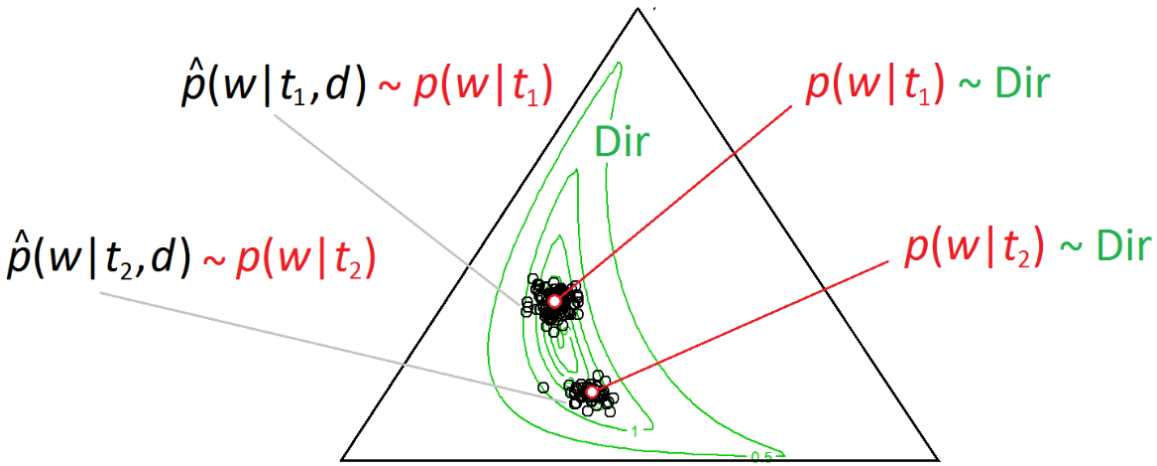
Вход: векторы гиперпараметров β, α;
Выход: коллекция документов;

выбрать вектор ϕ_t из $\mathrm{Dir}(\phi|\beta)$ для каждой темы $t \in T$;
выбрать вектор θ_d из $\mathrm{Dir}(\theta|\alpha)$ для каждого документа $d \in D$;
для всех документов $d \in D$
  для всех позиций термов $i = 1, \dots, n_d$ в документе d
    выбрать тему t_i из $p(t|d) \equiv \theta_{td}$;
    выбрать терм w_i из $p(w|t_i) \equiv \phi_{wt_i}$;

Почему именно распределение Дирихле?

- оно способно порождать разреженные векторы
- имеет параметры, управляющие степенью разреженности
- описывает кластерные структуры на симплексе (см. рис.)
- является сопряжённым с мультиномиальным распределением, что сильно упрощает байесовский вывод (см. далее)

Распределение $\mathrm{Dir}(\phi|\alpha)$ порождает векторы тем $\phi_t = p(w|t)$, которые порождают мультиномиальные распределения $\hat{p}(w|t,d)$.



Формула Байеса для апостериорного распределения

Введём более общие обозначения:

$X = (d_i, w_i)_{i=1}^n$ — исходные данные, *наблюдаемые переменные*
$\Omega = (\Phi, \Theta)$ — параметры порождающей модели $p(X|\Omega)$
$\gamma = (\beta, \alpha)$ — гиперпараметры *априорного распределения* $p(\Omega|\gamma)$

Задача: по X найти Ω.

Формула Байеса даёт *апостериорное распределение* $p(\Omega|X,\gamma)$, где символ $\propto$ означает «равно с точностью до нормировки»:

$$p(\Omega|X,\gamma) = \frac{p(\Omega,X|\gamma)}{p(X|\gamma)} \propto p(\Omega,X|\gamma) \propto p(X|\Omega)\,p(\Omega|\gamma)$$

Далее есть два пути:

- Максимизация правдоподобия: $\Omega = \arg\max_\Omega \ln p(\Omega|X,\gamma)$
- Байесовский вывод: вычисление распределения $p(\Omega|X,\gamma)$

Максимизация апостериорной вероятности для модели LDA

Максимизация *совместного правдоподобия* данных и модели, называется также *maximum a posteriori probability* (MAP):

$$\ln p(X|\Omega)\,p(\Omega|\gamma) = \ln \prod_{i=1}^{n} p(d_i, w_i|\Phi,\Theta)\,p(\Phi|\beta)\,p(\Theta|\alpha) =$$

$$= \ln \prod_{d\in D}\prod_{w\in d} p(d,w|\Phi,\Theta)^{n_{dw}} \prod_{t\in T} \mathrm{Dir}(\phi_t|\beta) \prod_{d\in D} \mathrm{Dir}(\theta_d|\alpha) \to \max_{\Phi,\Theta}$$

Это задача максимизации регуляризованного log-правдоподобия:

$$\sum_{d,w} n_{dw} \ln \sum_t \phi_{wt}\theta_{td} + \sum_{t,w} \ln \phi_{wt}^{\beta_w - 1} + \sum_{d,t} \ln \theta_{td}^{\alpha_t - 1} \to \max_{\Phi,\Theta},$$

при ограничениях неотрицательности и нормировки

$$\phi_{wt} \geqslant 0; \quad \sum_{w\in W} \phi_{wt} = 1; \qquad \theta_{td} \geqslant 0; \quad \sum_{t\in T} \theta_{td} = 1.$$

Регуляризованный EM-алгоритм для модели LDA в ARTM

Максимизация апостериорной вероятности эквивалентна регуляризатору логарифма априорного распределения:

$$\underbrace{\sum_{d,w} n_{dw} \ln \sum_t \phi_{wt}\theta_{td}}_{\ln \text{ правдоподобия } \mathscr{L}(\Phi,\Theta)} + \underbrace{\sum_{t,w}(\beta_w - 1)\ln \phi_{wt} + \sum_{d,t}(\alpha_t - 1)\ln \theta_{td}}_{\text{регуляризатор } R(\Phi,\Theta) = \ln p(\Phi,\Theta|\alpha,\beta)} \to \max_{\Phi,\Theta}$$

EM-алгоритм: метод простой итерации для системы уравнений

$$\begin{cases} \text{E-шаг:} & p_{tdw} = \underset{t\in T}{\text{norm}}\left(\phi_{wt}\theta_{td}\right) \\ \text{M-шаг:} & \phi_{wt} = \underset{w\in W}{\text{norm}}\left(\sum\limits_{d\in D} n_{dw}p_{tdw} + \beta_w - 1\right) \\ & \theta_{td} = \underset{t\in T}{\text{norm}}\left(\sum\limits_{w\in d} n_{dw}p_{tdw} + \alpha_t - 1\right) \end{cases}$$

Промежуточное резюме

- LDA проще вводить через KL-дивергенцию, как регуляризатор сглаживания/разреживания
- Заодно снимаются ограничения $\beta_w > 0$, $\alpha_t > 0$

- Распределение Дирихле играет особую роль в байесовских методах тематического моделирования
- ARTM — это более простая альтернатива байесовским методам, но в статьях по тематическому моделированию они преобладают, поэтому в них надо уметь разбираться
- Мы рассмотрим байесовские методы в следующей лекции, а сейчас введём несколько полезных для них техник

Постановка задачи со скрытыми переменными

Вернёмся к нашим общим обозначениям:

$X = (d_i, w_i)_{i=1}^n$ — исходные данные, *наблюдаемые переменные*

$Z = (t_i)_{i=1}^n$ — *скрытые переменные*

$\Omega = (\Phi, \Theta)$ — параметры порождающей модели $p(X|\Omega)$

$\gamma = (\beta, \alpha)$ — гиперпараметры *априорного распределения* $p(\Omega|\gamma)$

Задача: по X найти не Ω, а его распределение $p(\Omega|X, \gamma)$.

Байесовский вывод *апостериорного распределения*:

$$p(\Omega|X, \gamma) \propto p(X|\Omega)\, p(\Omega|\gamma) = \sum_Z p(X, Z|\Omega)\, p(\Omega|\gamma)$$

Дальнейший план — поэтапно усложнять постановку задачи:

1. Z — наблюдаемые переменные (временное упрощение)
2. Z — скрытые переменные
3. Z, Φ, Θ — скрытые переменные (в следующей лекции)

Функция совместного правдоподобия X и Z

Допустим (временно), что скрытые переменные Z известны.
Тогда известны и все частоты, связанные с темами:

$$n_{dwt} = \sum_{i=1}^{n} [d_i = d]\,[w_i = w]\,[t_i = t], \quad n_{wt} = \sum_{d} n_{dwt}, \quad n_{td} = \sum_{w} n_{dwt}.$$

Воспользуемся независимостью элементов выборки (d_i, w_i, t_i):

$$\begin{aligned} p(X, Z|\Omega) &= \prod_{i=1}^{n} p(d_i,w_i,t_i|\Omega) = \prod_{d,w,t} p(d,w,t|\Omega)^{n_{dwt}} = \\ &= \prod_{d,w,t} \big(p(w|t,\Phi)\,p(t|d,\Theta)\,p(d)\big)^{n_{dwt}} = \\ &= \prod_{d,w,t} \big(\phi_{wt}\theta_{td}p_d\big)^{n_{dwt}} = \prod_{d} p_d^{n_d} \prod_{w,t} \phi_{wt}^{n_{wt}} \prod_{d,t} \theta_{td}^{n_{td}}. \end{aligned}$$

В дальнейшем эта функция нам неоднократно понадобится

Случай известных Z и равномерного априорного распределения

Допустим (временно), что априорное распределение равномерно.

Максимизация логарифма правдоподобия

$$\ln p(X, Z|\Phi, \Theta) = \sum_{w,t} n_{wt} \ln \phi_{wt} + \sum_{d,t} n_{td} \ln \theta_{td} \;\to\; \max_{\Phi,\Theta}$$

при ограничениях нормировки и неотрицательности

$$\phi_{wt} \geqslant 0; \quad \sum_w \phi_{wt} = 1; \qquad \theta_{td} \geqslant 0; \quad \sum_t \theta_{td} = 1$$

Решение — частотные оценки условных вероятностей:

$$\phi_{wt} = \frac{n_{wt}}{n_t} = \underset{w \in W}{\operatorname{norm}}(n_{wt}), \qquad n_t = \sum_w n_{wt};$$

$$\theta_{td} = \frac{n_{td}}{n_d} = \underset{t \in T}{\operatorname{norm}}(n_{td}), \qquad n_d = \sum_t n_{td}.$$

Напоминания. Условия Каруша–Куна–Таккера

Задача математического программирования:

$$\begin{cases} f(x) \to \min\limits_x; \\ g_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m; \\ h_j(x) = 0, \quad j = 1, \ldots, k. \end{cases}$$

Необходимые условия. Если x — точка локального минимума, то существуют множители μ_i, $i = 1, \ldots, m$, λ_j, $j = 1, \ldots, k$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 0, \quad \mathscr{L}(x; \mu, \lambda) = f(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i g_i(x) + \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j h_j(x); \\ g_i(x) \leqslant 0; \ h_j(x) = 0; \ \text{(исходные ограничения)} \\ \mu_i \geqslant 0; \ \text{(двойственные ограничения)} \\ \mu_i g_i(x) = 0; \ \text{(условие дополняющей нежёсткости)} \end{cases}$$

Доказательство

Чтобы применить условия KKT, выписываем лагранжиан:

$$\mathscr{L}(\Phi,\Theta) = \sum_{w,t} n_{wt} \ln \phi_{wt} - \sum_t \lambda_t \Big(\sum_w \phi_{wt} - 1 \Big) + \\ + \sum_{d,t} n_{dt} \ln \theta_{td} - \sum_d \mu_d \Big(\sum_t \theta_{td} - 1 \Big)$$

Условия KKT для стационарной точки лагранжиана:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_{wt}} = n_{wt} \frac{1}{\phi_{wt}} - \lambda_t = 0$$
$$n_{wt} = \lambda_t \phi_{wt}$$
$$n_t = \lambda_t$$
$$\phi_{wt} = \frac{n_{wt}}{n_t}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta_{td}} = n_{td} \frac{1}{\theta_{td}} - \mu_d = 0$$
$$n_{td} = \mu_d \theta_{td}$$
$$n_d = \mu_d$$
$$\theta_{td} = \frac{n_{td}}{n_d}$$

Сопряженные распределения

Пусть теперь априорное распределение $p(\Omega|\gamma)$ — Дирихле.
Распределение Дирихле — *сопряжённое* к мультиномиальному.
Это значит, что апостериорное $p(\Omega|X,Z,\gamma)$ — тоже Дирихле:

$$p(\Omega|X,Z,\gamma) \propto p(X,Z|\Omega)\,p(\Omega|\gamma) = p(X,Z|\Phi,\Theta)\,p(\Phi,\Theta|\beta,\alpha) =$$

$$= \prod_d p_d^{n_d} \prod_{w,t} \phi_{wt}^{n_{wt}} \prod_{d,t} \theta_{td}^{n_{td}} \prod_t \mathrm{Dir}(\phi_t|\beta) \prod_d \mathrm{Dir}(\theta_d|\alpha) \propto$$

$$\propto \prod_{w,t} \phi_{wt}^{n_{wt}} \prod_{d,t} \theta_{td}^{n_{td}} \prod_{w,t} \phi_{wt}^{\beta_w - 1} \prod_{d,t} \theta_{td}^{\alpha_t - 1} \propto$$

$$\propto \prod_{w,t} \phi_{wt}^{n_{wt}+\beta_w-1} \prod_{d,t} \theta_{td}^{n_{td}+\alpha_t-1} =$$

$$= \prod_t \mathrm{Dir}(\phi_t|\tilde{\beta}_t) \prod_d \mathrm{Dir}(\theta_d|\tilde{\alpha}_d),$$

где $\tilde{\beta}_{wt} = n_{wt} + \beta_w - 1$, $\tilde{\alpha}_{td} = n_{td} + \alpha_t - 1$.

Случай известных Z и априорного распределения Дирихле

Пусть априорное распределение $p(\Omega|\gamma)$ — Дирихле.

Максимизация правдоподобия апостериорного распределения:

$$\ln p(X, Z|\Phi, \Theta)\, p(\Phi, \Theta|\beta, \alpha) =$$
$$= \sum_{w,t}(n_{wt} + \beta_w - 1)\ln \phi_{wt} + \sum_{d,t}(n_{td} + \alpha_t - 1)\ln \theta_{td} \to \max_{\Phi,\Theta}$$

при ограничениях нормировки и неотрицательности

$$\phi_{wt} \geqslant 0; \quad \sum_w \phi_{wt} = 1; \qquad \theta_{td} \geqslant 0; \quad \sum_t \theta_{td} = 1$$

Решение — сглаженные оценки условных вероятностей:

$$\phi_{wt} = \underset{w\in W}{\text{norm}}(n_{wt} + \beta_w - 1), \qquad n_t = \sum_w n_{wt};$$
$$\theta_{td} = \underset{t\in T}{\text{norm}}(n_{td} + \alpha_t - 1), \qquad n_d = \sum_t n_{td}.$$

Промежуточное резюме: чего мы добились

- Разобрали простой но непрактичный частный случай, когда скрытые переменные Z известны
- Вывели формулу для правдоподобия $p(X, Z|\Phi, \Theta)$
- Нашли максимум правдоподобия при известных Z, получили частотные оценки условных вероятностей, совпадающие с формулами M-шага, соответственно:
  — PLSA при равномерном априорном распределении
  — LDA при априорном распределении Дирихле
- Далее: как вычислять n_{wt} и n_{td} при неизвестных Z?

Максимизация неполного правдоподобия

Проблема — возникает сумма под логарифмом:

$$\ln p(X|\Omega) = \ln \sum_Z p(X, Z|\Omega) \;\to\; \max_\Omega$$

Формула условной вероятности:

$$p(X, Z|\Omega) = p(Z|X, \Omega)p(X|\Omega) \;\Rightarrow\; p(X|\Omega) = \frac{p(X,Z|\Omega)}{p(Z|X,\Omega)}$$

Для произвольного распределения $q(Z)$

$$\ln p(X|\Omega) = \sum_Z q(Z) \ln p(X|\Omega) = \sum_Z q(Z) \ln \frac{p(X,Z|\Omega)}{p(Z|X,\Omega)} =$$

$$= \underbrace{\sum_Z q(Z) \ln p(X, Z|\Omega) - \sum_Z q(Z) \ln q(Z)}_{L(q,\Omega) \text{ — нижняя оценка } \ln p(X|\Omega)} + \underbrace{\sum_Z q(Z) \ln \frac{q(Z)}{p(Z|X,\Omega)}}_{\mathrm{KL}\left(q(Z)\middle\|p(Z|X,\Omega)\right)\geqslant 0}$$

Основная идея EM-алгоритма. Задача E-шага

Максимизировать нижнюю оценку $L(q, \Omega)$ то по q, то по Ω:

$$\begin{aligned} \text{E-шаг:} \quad & L(q, \Omega) \to \max_q \\ \text{M-шаг:} \quad & L(q, \Omega) \to \max_\Omega \end{aligned}$$

Задача E-шага.

Подставим $p(X, Z|\Omega) = p(Z|X, \Omega)p(X|\Omega)$ в формулу $L(q, \Omega)$:

$$\sum_Z q(Z) \ln p(Z|X, \Omega) + \underbrace{\sum\nolimits_Z q(Z)}_{=1} \underbrace{\ln p(X|\Omega)}_{\text{const по } q} - \sum_Z q(Z) \ln q(Z) \to \max_q$$

$$\mathrm{KL}\big(q(Z) \,\big\|\, p(Z|X, \Omega)\big) \to \min_q$$

Утв. 1. $q(Z) = p(Z|X, \Omega)$ — точное решение задачи E-шага.

Утв. 2. $L(q, \Omega)$ — достигаемая нижняя оценка $\ln p(X|\Omega)$.

EM-алгоритм. Обоснование сходимости

Мы вывели EM-алгоритм для Z и Ω общего вида:

$$\text{E-шаг:} \quad q(Z) = p(Z|X,\Omega)$$

$$\text{M-шаг:} \quad \sum_Z q(Z) \ln p(X,Z|\Omega) \;\to\; \max_\Omega$$

и доказали его *сходимость в слабом смысле:*

- на каждом шаге правдоподобие $\ln p(X|\Omega)$ увеличивается;
- не гарантируется достижение max с заданной точностью;
- не гарантируется глобальная сходимость, так как задача в общем случае многоэкстремальная (на практике важен выбор начального приближения).

N.B. Если скрытая переменная Z не дискретна, а непрерывна, то суммирование $\sum_Z$ заменяется интегрированием $\int_Z$.

Максимизация регуляризованного правдоподобия

Пусть $p(\Omega)$ — априорное распределение параметров модели

Принцип максимума апостериорной вероятности:

$$\ln p(X,\Omega) = \ln p(X|\Omega) + \underbrace{\ln p(\Omega)}_{R(\Omega)} \;\to\; \max_{\Omega}$$

Регуляризатор $R(\Omega)$ может даже и не иметь вероятностной интерпретации, тем не менее, все выкладки остаются в силе!

$$\text{E-шаг:}\quad q(Z) = p(Z|X,\Omega)$$

$$\text{M-шаг:}\quad \sum_{Z} q(Z)\ln p(X,Z|\Omega) + R(\Omega) \;\to\; \max_{\Omega}$$

Регуляризаторы используются для формализации дополнительных требований к вероятностной модели.

Регуляризованный EM-алгоритм для тематической модели

Напоминание: $\Omega = (\Phi, \Theta)$, $X = (d_i, w_i)_{i=1}^n$, $Z = (t_i)_{i=1}^n$.

E-шаг: в силу независимости элементов выборки

$$q(Z) = p(Z|X,\Omega) = \prod_{i=1}^{n} p(t_i|d_i,w_i) = \prod_{i=1}^{n} \operatorname*{norm}_{t_i}\left(\phi_{w_i t_i}\theta_{t_i d_i}\right)$$

M-шаг:

$$\sum_{Z\in T^n} q(Z)\ln p(X,Z|\Omega) + R(\Omega) \;\to\; \max_{\Omega}$$

$$\sum_{(t_1,\ldots,t_n)\in T^n} \prod_{k=1}^{n} p(t_k|d_k,w_k) \sum_{i=1}^{n} \ln p(d_i,w_i,t_i|\Omega) + R(\Omega) \;\to\; \max_{\Omega}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{t_1\in T} \cdots \sum_{t_n\in T} \prod_{k=1}^{n} p(t_k|d_k,w_k) \ln p(d_i,w_i,t_i|\Omega) + R(\Omega) \;\to\; \max_{\Omega}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{t\in T} p(t|d_i,w_i) \ln p(d_i,w_i,t|\Omega) + R(\Omega) \;\to\; \max_{\Omega}$$

Регуляризованный EM-алгоритм для тематической модели

... продолжаем вывод формулы M-шага:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{t\in T} p(t|d_i,w_i)\ln p(d_i,w_i,t|\Omega) + R(\Omega) \to \max_{\Omega}$$

$$\sum_{d\in D}\sum_{w\in W}\sum_{t\in T} \underbrace{n_{dw}p(t|d,w)}_{\text{обозначим } n_{dwt}} \ln\left(\phi_{wt}\theta_{td}\right) + R(\Phi,\Theta) \to \max_{\Phi,\Theta}$$

$$\sum_{w,t} n_{wt}\ln\phi_{wt} + \sum_{d,t} n_{td}\ln\theta_{td} + R(\Phi,\Theta) \to \max_{\Phi,\Theta}$$

Чтобы применить условия KKT, выписываем лагранжиан:

$$\mathscr{L}(\Phi,\Theta) = \sum_{w,t} n_{wt}\ln\phi_{wt} - \sum_{t}\lambda_t\left(\sum_{w}\phi_{wt} - 1\right) +$$

$$+ \sum_{d,t} n_{td}\ln\theta_{td} - \sum_{d}\mu_d\left(\sum_{t}\theta_{td} - 1\right) + R(\Phi,\Theta)$$

Регуляризованный EM-алгоритм для тематической модели

Условия ККТ для стационарной точки лагранжиана:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_{wt}} = \frac{n_{wt}}{\phi_{wt}} + \frac{\partial R}{\partial \phi_{wt}} - \lambda_t = 0 \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta_{td}} = \frac{n_{td}}{\theta_{td}} + \frac{\partial R}{\partial \theta_{td}} - \mu_d = 0$$

$$\left(n_{wt} + \phi_{wt}\frac{\partial R}{\partial \phi_{wt}}\right)_+ = \lambda_t \phi_{wt} \qquad \left(n_{td} + \theta_{td}\frac{\partial R}{\partial \theta_{td}}\right)_+ = \mu_d \theta_{td}$$

$$\phi_{wt} = \underset{w \in W}{\text{norm}}\left(n_{wt} + \phi_{wt}\frac{\partial R}{\partial \phi_{wt}}\right) \qquad \theta_{td} = \underset{t \in T}{\text{norm}}\left(n_{td} + \theta_{td}\frac{\partial R}{\partial \theta_{td}}\right)$$

То есть мы вывели формулы ARTM из общего EM-алгоритма.
Преимущество — есть доказательство (слабой) сходимости.

Частные случаи:

PLSA: $R(\Phi, \Theta) = 0.$

LDA: $R(\Phi, \Theta) = \ln \prod_{t \in T} \text{Dir}(\phi_t | \beta) \prod_{d \in D} \text{Dir}(\theta_d | \alpha).$

ARTM: аддитивная регуляризация тематических моделей

Максимизация логарифма правдоподобия с регуляризатором:

$$\ln \prod_{i=1}^{n} p(d_i, w_i|\Phi,\Theta) + R(\Phi,\Theta) \to \max_{\Phi,\Theta}; \qquad R(\Phi,\Theta) = \sum_i \tau_i R_i(\Phi,\Theta)$$

EM-алгоритм: метод простой итерации для системы уравнений

$$\text{E-шаг:} \quad p_{tdw} \equiv p(t|d,w) = \underset{t\in T}{\text{norm}}\left(\phi_{wt}\theta_{td}\right)$$

$$\text{M-шаг:} \quad \begin{cases} \phi_{wt} = \underset{w\in W}{\text{norm}}\left(n_{wt} + \phi_{wt}\dfrac{\partial R}{\partial \phi_{wt}} \right), & n_{wt} = \sum\limits_{d\in D} n_{dw} p_{tdw} \\ \theta_{td} = \underset{t\in T}{\text{norm}}\left(n_{td} + \theta_{td}\dfrac{\partial R}{\partial \theta_{td}} \right), & n_{td} = \sum\limits_{w\in d} n_{dw} p_{tdw} \end{cases}$$

где $\underset{t\in T}{\text{norm}}(x_t) = \dfrac{\max\{x_t,0\}}{\sum\limits_{s\in T}\max\{x_s,0\}}$ — операция нормировки вектора.

Промежуточный итог

Общий вариант EM-алгоритма

- снабжён возможностью регуляризации,
- имеет обоснование слабой сходимости,
- используется в методах байесовского вывода.

Следующая лекция — про *байесовский вывод*, который

- даёт апостериорные распределения $p(\Omega|X)$,
  хотя в BTM используются только точечные оценки Ω.
- намного более громоздкий по сравнению с ARTM,
  хотя в литературе именно он в основном и используется.
- претендует на то, чтобы оценивать меньше параметров,
  хотя на деле оценивает те же Φ и Θ, плюс гиперпараметры.