

Методы оптимизации (ФКН ВШЭ, 2017). Домашняя работа 2.
Тема: Производные и условия оптимальности.

Срок сдачи: 31 января 2017 (на семинаре)

1 Для каждой из следующих функций f (заданных на множестве $\text{Dom } f$) найти производную $Df(x)[\Delta x]$ (для произвольного $x \in \text{Dom } f$ и произвольного достаточно малого Δx) по определению:

(a) $f(X) := X^T$, $\text{Dom } f := \mathbb{R}^{m \times n}$.

(b) $f(X) := \|X\|_F^2$, $\text{Dom } f := \mathbb{R}^{m \times n}$.

(c) $f(x) := Axx^T A^T$, $\text{Dom } f := \mathbb{R}^n$. [$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$]

2 Для каждой из следующих функций f (заданных на множестве $\text{Dom } f$) найти первые и вторые производные $Df(x)[\Delta x]$ и $D^2 f(x)[\Delta x_1, \Delta x_2]$ (для произвольного $x \in \text{Dom } f$ и произвольных достаточно малых $\Delta x, \Delta x_1, \Delta x_2$). Для вещественнозначных функций дополнительно вычислить градиент $\nabla f(x)$ и гессиан $\nabla^2 f(x)$ (только для функций векторного аргумента). Для векторнозначных функций векторного аргумента дополнительно вычислить якобиан $J_f(x)$.

(a) $f(X) := \text{Tr}(AX^{-1}B)$, $\text{Dom } f := \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} : \text{Det}(X) \neq 0\}$. [$A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$]

(b) $f(x) := \frac{x^T A x}{x^T x}$, $\text{Dom } f := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. [$A \in \mathbb{S}^{n \times n}$]

(c) $f(X) := a^T X^{-1} a$, $\text{Dom } f := \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} : \text{Det}(X) \neq 0\}$. [$a \in \mathbb{R}^n$]

(d) $f(X) := \frac{1}{2} \|AX - B\|_F^2$, $\text{Dom } f := \mathbb{R}^{k \times n}$. [$A \in \mathbb{R}^{m \times k}, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$]

(e) $f(X) := \frac{1}{2} \|XA - B\|_F^2$, $\text{Dom } f := \mathbb{R}^{m \times k}$. [$A \in \mathbb{R}^{k \times n}, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$]

(f) $f(x) := \frac{1}{2} \|xx^T - A\|_F^2$, $\text{Dom } f := \mathbb{R}^n$. [$A \in \mathbb{S}^n$]

(g) $f(x) := \ln \left(\sum_{i=1}^n \exp(a_i^T x) \right)$, $\text{Dom } f := \mathbb{R}^n$. [$a_i \in \mathbb{R}^n$ для всех $1 \leq i \leq n$]

(h) $f(X) := \arctan(Xa)$, $\text{Dom } f := \mathbb{R}^{m \times n}$. [$a \in \mathbb{R}^n$, \arctan вычисляется поэлементно]

(i) $f(x) := (x^T x)^{x^T x}$, $\text{Dom } f := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(j) $f(x) := (f_i(x))_{i=1}^n$, где $f_i(x) := \frac{\exp(a_i^T x)}{\sum_{j=1}^n \exp(a_j^T x)}$, $\text{Dom } f = \mathbb{R}^n$. [$a_i \in \mathbb{R}^n$ для всех $1 \leq i \leq n$]

(k) $f(x) := \|(A + xI_n)^{-1} b\|_2^2$, $\text{Dom } f := \mathbb{R}_+$. [$A \in \mathbb{S}_+^n, b \in \mathbb{R}^n$]

3 Для каждой из следующих функций $f : \text{Dom } f \rightarrow \mathbb{R}$ найти все точки стационарности и определить их тип (локальный минимум/максимум, седловая точка). В каких точках достигается глобальный минимум?

(a) $f(x) := 2x_1^2 + x_2^2(x_2^2 - 2)$, $\text{Dom } f := \mathbb{R}^2$.

(b) $f(x) := (1 - x_1)^2 + 100(x_2 - x_1^2)^2$, $\text{Dom } f := \mathbb{R}^2$.

(c) $f(x) := \frac{1}{2} x^T A x - b^T x$, $\text{Dom } f := \mathbb{R}^n$. [$A \in \mathbb{S}^n, b \in \mathbb{R}^n$]

$$(d) f(x) := \frac{x^T Ax}{x^T x}, \quad \text{Dom } f := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \quad [A \in \mathbb{S}^n]$$

4 Для каждой из следующих задач оптимизации найти ее множество решений и оптимальное значение целевой функции:

$$(a) \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x. \quad [c \in \mathbb{R}^n]$$

$$(b) \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{1}{2} x^T Ax - b^T x \right\}. \quad [A \in \mathbb{S}_{++}^n, b \in \mathbb{R}^n]$$

$$(c) \min_{x \in \mathbb{R}^n} |a^T x - \beta|. \quad [a \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}]$$

$$(d) \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ c^T x + \frac{\sigma}{3} \|x\|_2^3 \right\}. \quad [c \in \mathbb{R}^n, \sigma > 0]$$

$$(e) \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{c^T x \exp(-x^T Ax)\}. \quad [c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{S}_{++}^n]$$

$$(f) \min_{X \in \mathbb{R}^{k \times n}} \|AX - B\|_F. \quad [A \in \mathbb{R}^{m \times k}, B \in \mathbb{R}^{m \times n}, \text{Rank}(A) = k]$$

$$(g) \min_{X \in \mathbb{R}^{n \times n}, \text{Det}(X) > 0} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m a_i^T X^{-1} a_i + \ln \text{Det}(X) \right\}. \quad [a_i \in \mathbb{R}^n \text{ для всех } 1 \leq i \leq m]$$

$$(h) \min_{X \in \mathbb{R}^{m \times n}, \text{Tr}(B^T X) < 1} \{ \text{Tr}(A^T X) - \ln(1 - \text{Tr}(B^T X)) \}. \quad [A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}]$$