Методы оптимизации (ФКН ВШЭ, 2017). Домашняя работа 2. Тема: Производные и условия оптимальности.

Срок сдачи: 31 января 2017 (на семинаре)

1 Для каждой из следующих функций f (заданных на множестве $\operatorname{Dom} f$) найти производную $Df(x)[\Delta x]$ (для произвольного x и произвольного достаточно малого $\Delta x \in \operatorname{Dom} f$) по определению:

(a) $f(X) := X^T, \quad \operatorname{Dom} f := \mathbb{R}^{m\times n}$.

(b) $f(X) := \|X\|_F^2, \quad \operatorname{Dom} f := \mathbb{R}^{m\times n}$.

(c) $f(x) := Axx^TA^T, \quad \operatorname{Dom} f := \mathbb{R}^n$. $[A \in \mathbb{R}^{n\times n}]$

2 Для каждой из следующих функций f (заданных на множестве $\operatorname{Dom} f$) найти первые и вторые производные $Df(x)[\Delta x]$ и $D^2f(x)[\Delta x_1, \Delta x_2]$ (для произвольного $x \in \operatorname{Dom} f$ и произвольных достаточно малых $\Delta x, \Delta x_1, \Delta x_2 \in \operatorname{Dom} f$). Для вещественнозначных функций дополнительно вычислить градиент $\nabla f(x)$ и гессиан $\nabla^2 f(x)$ (только для функций векторного аргумента). Для векторнозначных функций векторного аргумента дополнительно вычислить якобиан $J(x)$.

(a) $f(X) := \operatorname{Tr}(AX^{-1}B), \quad \operatorname{Dom} f := \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} : \operatorname{Det}(X) \neq 0\}$. $[A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}]$

(b) $f(x) := \dfrac{x^TAx}{x^Tx}, \quad \operatorname{Dom} f := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. $[A \in \mathbb{S}^{n\times n}]$

(c) $f(X) := a^TX^{-1}a, \quad \operatorname{Dom} f := \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} : \operatorname{Det}(X) \neq 0\}$. $[a \in \mathbb{R}^n]$

(d) $f(X) := \dfrac{1}{2}\|AX - B\|_F^2, \quad \operatorname{Dom} f := \mathbb{R}^{k\times n}$. $[A \in \mathbb{R}^{m\times k},\ B \in \mathbb{R}^{m\times n}]$

(e) $f(X) := \dfrac{1}{2}\|XA - B\|_F^2, \quad \operatorname{Dom} f := \mathbb{R}^{m\times k}$. $[A \in \mathbb{R}^{k\times n},\ B \in \mathbb{R}^{m\times n}]$

(f) $f(x) := \dfrac{1}{2}\|xx^T - A\|_F^2, \quad \operatorname{Dom} f := \mathbb{R}^n$. $[A \in \mathbb{S}^n]$

(g) $f(x) := \ln\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n \exp(a_i^Tx)\right), \quad \operatorname{Dom} f := \mathbb{R}^n$. $[a_i \in \mathbb{R}^n$ для всех $1 \leq i \leq n]$

(h) $f(X) := \arctan(Xa), \quad \operatorname{Dom} f := \mathbb{R}^{m\times n}$. $[a \in \mathbb{R}^n$, $\arctan$ вычисляется поэлементно$]$

(i) $f(x) := (x^Tx)^{x^Tx}, \quad \operatorname{Dom} f := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(j) $f(x) := (f_i(x))_{i=1}^n$, где $f_i(x) := \dfrac{\exp(a_i^Tx)}{\sum\limits_{j=1}^n \exp(a_j^Tx)}, \quad \operatorname{Dom} f = \mathbb{R}^n$. $[a_i \in \mathbb{R}^n$ для всех $1 \leq i \leq n]$

(k) $f(x) := \|\,(A + xI_n)^{-1}\, b\|_2^2, \quad \operatorname{Dom} f := \mathbb{R}_+$. $[A \in \mathbb{S}_+^n,\ b \in \mathbb{R}^n]$

3 Для каждой из следующих функций $f : \operatorname{Dom} f \to \mathbb{R}$ найти все точки стационарности и определить их тип (локальный минимум/максимум, седловая точка). В каких точках достигается глобальный минимум?

(a) $f(x) := 2x_1^2 + x_2^2(x_2^2 - 2), \quad \operatorname{Dom} f := \mathbb{R}^2$.

(b) $f(x) := (1 - x_1)^2 + 100(x_2 - x_1^2)^2, \quad \operatorname{Dom} f := \mathbb{R}^2$.

(c) $f(x) := \dfrac{1}{2}x^TAx - b^Tx, \quad \operatorname{Dom} f := \mathbb{R}^n$. $[A \in \mathbb{S}^n,\ b \in \mathbb{R}^n]$

(d) $f(x) := \dfrac{x^T A x}{x^T x}, \quad \operatorname{Dom} f := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$ $[A \in \mathbb{S}^n]$

4 Для каждой из следующих задач оптимизации найти ее множество решений и оптимальное значение целевой функции:

(a) $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x.$ $[c \in \mathbb{R}^n]$

(b) $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \dfrac{1}{2} x^T A x - b^T x \right\}.$ $[A \in \mathbb{S}^n_{++},\ b \in \mathbb{R}^n]$

(c) $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |a^T x - \beta|.$ $[a \in \mathbb{R}^n,\ \beta \in \mathbb{R}]$

(d) $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ c^T x + \dfrac{\sigma}{3} \|x\|_2^3 \right\}.$ $[c \in \mathbb{R}^n,\ \sigma > 0]$

(e) $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \{ c^T x \exp(-x^T A x) \}.$ $[c \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{S}^n_{++}]$

(f) $\min\limits_{X \in \mathbb{R}^{k \times n}} \|AX - B\|_F.$ $[A \in \mathbb{R}^{m \times k},\ B \in \mathbb{R}^{m \times n},\ \operatorname{Rank}(A) = k]$

(g) $\min\limits_{X \in \mathbb{R}^{n \times n},\, \operatorname{Det}(X) > 0} \left\{ \dfrac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} a_i^T X^{-1} a_i + \ln \operatorname{Det}(X) \right\}.$ $[a_i \in \mathbb{R}^n$ для всех $1 \le i \le n]$

(h) $\min\limits_{X \in \mathbb{R}^{m \times n},\, \operatorname{Tr}(B^T X) < 1} \left\{ \operatorname{Tr}(A^T X) - \ln(1 - \operatorname{Tr}(B^T X)) \right\}.$ $[A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}]$