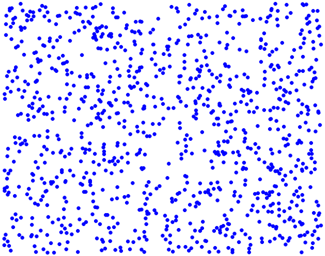
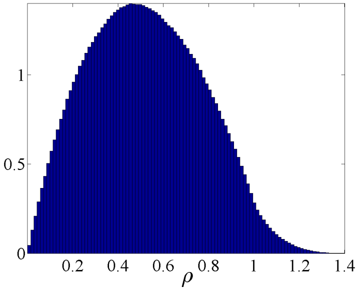
Комбинаторные оценки ε-разбиений метрических пространств

Пушняков Алексей

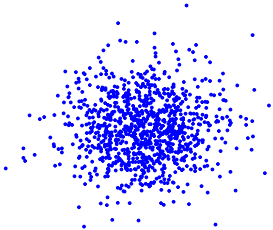
5 октября 2014 г.

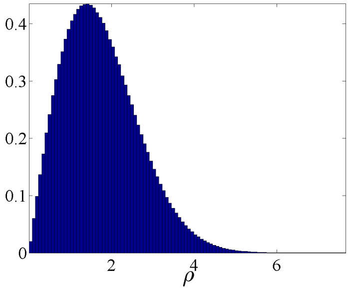
Сгущения в метрических конфигурациях





Слева — пример метрической конфигурации на плоскости, справа — эмпирическая плотность распределения парных расстояний.





Теперь точки конфигурации получены из нормального распределения. В данном случае можно выделить множество *небольшого* диаметра, содержащее *значительную* долю точек.

Постановка задачи

Дано конечное метрическое пространство (X, ρ).

Определение

Любое подмножество X диаметра не более ε будем называть ε-кластером.

Определение

Пару различных точек $x, y \in X$ будем называть ε-длинными ребром, если $\rho(x, y) > \varepsilon$, иначе — ε-коротким ребром.

Пусть известно, что в X существует ε-кластер мощности d, тогда найдутся хотя бы $\frac{d(d-1)}{2}$ ε-коротких рёбер.
Если существует *большой* ε-кластер, тогда ε-длинных рёбер *мало*.

Постановка задачи

Вопрос: верно ли из того, что ε-длинных рёбер мало, следует существование большого ε-кластера?
Ответ: существуют метрические пространства, в которых мало ε-длинных рёбер и не существует большого ε-кластера.

Цель работы

- найти такие $\varepsilon'(\varepsilon)$, что можно гарантировать существование большого ε'-кластера при условии, что ε-длинных рёбер мало.
- получить нижние оценки на максимальную мощность ε'-кластера.

Случай $\varepsilon' < 2\varepsilon$

Ограничение для числа ε-длинных рёбер

$$|\Lambda_\varepsilon| = |\{(x,y)\colon \rho(x,y) > \varepsilon\}| \leqslant \frac{\delta |X|^2}{2}$$

Утверждение

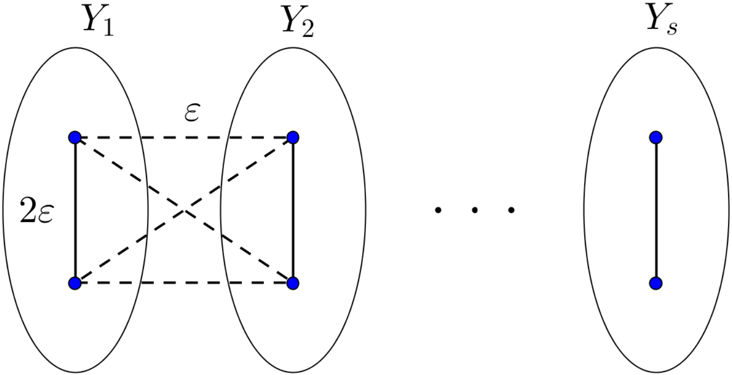
Пусть $\varepsilon' < 2\varepsilon$, тогда для любых $\alpha > 0$, $\delta > 0$ существует метрическое пространство (X, ρ) такое, что $|\Lambda_\varepsilon| \leqslant \frac{\delta|X|^2}{2}$, и максимальная мощность любого ε'-кластера меньше $\alpha|X|$.

Положим $X = \bigcup\limits_{i=1}^{s} Y_i$, где $Y_i = \{x_{i1}, \dots x_{im}\}$. Определим метрику следующим образом:

$$\rho(x_{ij}, x_{kl}) = \begin{cases} 2\varepsilon, & i \neq k,\ j = l, \\ 0, & i = k,\ j = l, \\ \varepsilon, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Остается подобрать $m(\delta)$ и $s(\alpha)$.

Случай $\varepsilon' < 2\varepsilon$



ε-разбиения метрического пространства

Определение

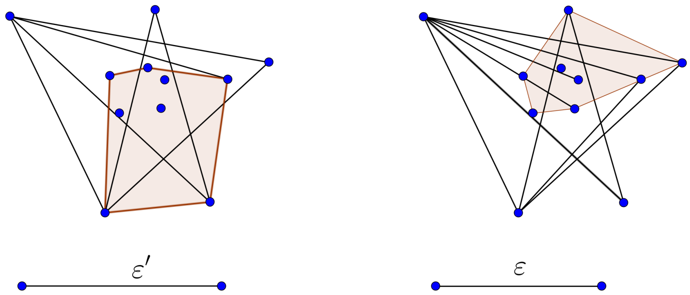
Набор подмножеств $\{X_0, \dots X_s\}$ *будем называть* ε*-разбиением метрического пространства* (X, ρ)*, если выполнены следующие условия:*

- $\bigcup\limits_{i=0}^{s} X_i = X$;
- $X_i \cap X_j = \emptyset$ *при всех* $0 \leqslant i < j \leqslant s$;
- X_i *является* ε*-кластером при всех* $0 \leqslant i \leqslant s$.

Определение

Набор подмножеств $\{X_0, \dots X_s\}$ *будем называть максимальным* ε*-разбиением метрического пространства* (X, ρ)*, если выполнены следующие условия:*

- *набор является* ε*-разбиением* (X, ρ);
- *при всех* $0 \leqslant i \leqslant s$ *для любого* ε*-кластера* Y *такого, что* $Y \cap \bigcup\limits_{j=0}^{i-1} X_j = \emptyset$*, выполнено* $|Y| \leqslant |X_i|$.



Для метрической конфигурации (X, ρ) определим граф $G(\varepsilon) = (X, E(\varepsilon))$, где

$$E(\varepsilon) = \{(x, y) \colon \rho(x, y) > \varepsilon\}.$$

Утверждение

Для всех $i = 0, \dots s$ и любого ε-кластера $Z \subseteq \bigcup\limits_{k=i+1}^{s} X_k$ существует инъективное отображение $\varphi : Z \to X_i$, удовлетворяющее условию $\rho(x, \varphi(x)) > \varepsilon$ для любого $x \in Z$.

Набросок доказательства:
Пусть

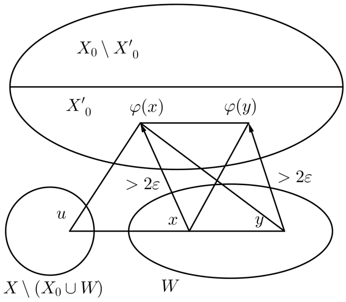
$$\mathrm{ImY} = \{z \in X_i \colon \exists y \in Y,\ \rho(z, y) > \varepsilon\}.$$

По построению X_i получаем $|\mathrm{ImY}| \geqslant |Y|$. Осталось применить лемму Холла.

Пусть $\{X_i\}$ — максимальное 2ε-разбиение (X, ρ). Требуется получить нижнюю оценку на X_i.
Тривиальная оценка: $|X_0| \geqslant |X|(1 - \delta)$.
Доказательство: в качестве 2ε-кластера взять шар радиуса ε с центром в точке, которая входит в максимальное число ε-коротких рёбер.
Неулучшаемая оценка: $|X_0| \geqslant \dfrac{|X|(1+\sqrt{1-2\delta})}{2}$ (при $\delta \leqslant \frac{1}{2}$).
Эта оценка получается из следующего факта

Утверждение

Число ε-длинных ребер в X не меньше, чем $|X_0| \cdot |X \setminus X_0|$.



Рассмотрим двудольный граф H с долями $X_0, X \setminus X_0$, где рёбрами являются 2ε-длинные рёбра. Максимальное паросочетание M покрывает в доле X_0 множество X'_0, а в доле $X \setminus X_0$ — множество W.

Утверждение

Для любого 2ε-кластера $V \subseteq X \setminus X_0$ существует инъекция φ по рёбрам G в X'_0.

Случай евклидовой метрики

В случае евклидовой метрики можно гарантировать существование большого ε'-кластера для $\varepsilon' = \sqrt{2}\varepsilon$.

Утверждение

Пусть $a, b, c, d \in X$ *и* $\rho(a, c) > \sqrt{2}\varepsilon$ *и* $\rho(b, d) > \sqrt{2}\varepsilon$, *тогда*

$$\max\{\rho(a, b), \rho(a, d), \rho(b, c), \rho(c, d)\} > \varepsilon.$$

Утверждение

Пусть ρ *вложима в евклидово пространство и* $\delta \leqslant \frac{1}{4}$, *тогда верна следующая оценка на максимальную мощность* $\sqrt{2}\varepsilon$*-кластера:*

$$|X_0| \geqslant |X|(1 - 2\sqrt{\delta}).$$

Заключение

- При ограничениях на число расстояний, превосходящих ε, получена неулучшаемая нижняя оценка на мощность максимального по включению множества диаметра не более 2ε
- Показано, что при $\varepsilon' < 2\varepsilon$ в общем случае нельзя гарантировать существования линейной по мощности метрической конфигурации нижней оценки на мощность множества диаметра не более ε'.
- Показано, что в частных случаях значение ε' может быть уменьшено.