

# Математические методы распознавания образов

Виктор Владимирович Китов

МГУ им. Ломоносова, ф-т ВМиК, кафедра ММП.

I семестр 2015 г.

## Информация о курсе

- Лектор - Виктор Владимирович Китов, семинарист - Евгений Соколов
- 12-14 лекций
- семинары (задачи, программирование на python)
- подробности на сайте [machinelearning.ru](http://machinelearning.ru), в поиске раздел «Машинное обучение (курс лекций, В.В.Китов)/2015-2016».

## Рекомендуемые материалы по курсу

- **Курс лекций по машинному обучению.** Константин Воронцов. См. [machinelearning.ru](http://machinelearning.ru).
- **Statistical Pattern Recognition.** 3rd Edition, Andrew R. Webb, Keith D. Copsey, John Wiley & Sons Ltd., 2011.
- **The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction.** Trevor Hastie, Robert Tibshirani, Jerome Friedman, 2nd Edition, Springer, 2009.  
<http://statweb.stanford.edu/~tibs/ElemStatLearn/>.
- **Machine Learning: A Probabilistic Perspective.** Kevin P. Murphy. Massachusetts Institute of Technology. 2012.
- **Pattern Recognition and Machine Learning.** Christopher M. Bishop. Springer. 2006.
- **Дополнительные источники** - wikipedia, статьи, видео-лекции (в основном, на английском).

# Содержание

- 1 Задачи распознавания образов
- 2 Основные понятия задачи обучения с учителем.
- 3 Практическое применение алгоритмов машинного обучения

# Распознавание образов и машинное обучение

- Теория распознавания образов — раздел информатики и смежных дисциплин, развивающий основы и методы классификации и идентификации предметов, процессов, сигналов, ситуаций и аналогичных явлений, которые характеризуются конечным набором некоторых свойств и признаков.
- Машинное обучение - наука об алгоритмах, которые сами настраиваются на данных.
- Распознавание образов использует методы машинного обучения, созданные для восстановления зависимости между признаками и распознаваемыми явлениями.
- В дальнейшем, под машинным обучением будет пониматься класс всех методов машинного обучения, используемых для распознавания образов, и два термина будут взаимозаменяемы.

## Общая задача распознавания образов

- Рассматривается множество объектов  $O$
- Каждый объект описывается набором известных признаков  $x \in \mathcal{X}$  и характеристик  $y \in \mathcal{Y}$ .

$$o \in O \longrightarrow (x, y)$$

- Обычно  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^D$ ,  $\mathcal{Y}$  - число, но в общем случае - любые структурные описания объектов.

# Общая задача распознавания образов

- Задача: найти отображение  $f$ , которое бы приближало  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ .
  - по известным данным о конечном числе объектов
  - на интересующем наборе других объектов
- Вопросы, которые решаются в машинном обучении:
  - как выбрать признаки и характеристики
  - в каком смысле отображение  $a$  должно приближать реальную взаимосвязь
  - как строить  $f$

## Варианты постановок задач

- Для каждого нового объекта  $x$  требуется сопоставить  $y$ .
- Что известно:
  - $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$  - обучение с учителем (supervised learning where ):
  - $x_1, x_2, \dots, x_N$  - обучение без учителя
    - снижение размерности
    - кластеризация
  - $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N), x_{N+1}, x_{N+2}, \dots, x_{N+M}$  - частичное обучение (semi-supervised learning).
- Если все новые объекты  $x'_1, x'_2, \dots, x'_K$ , для которых требуется предсказать  $y$ , известны то это трансдуктивное обучение (transductive learning).



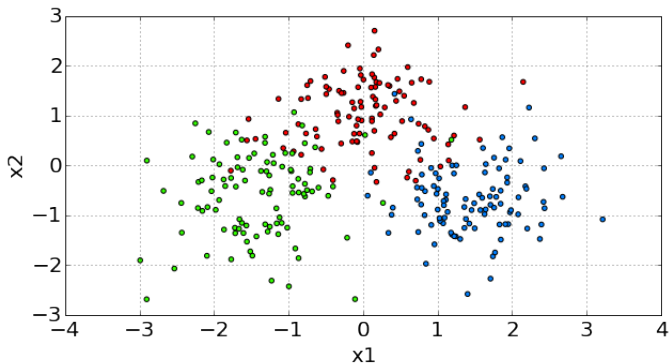
## Варианты характеристик

- Тип интересующей характеристики:
  - $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$  - регрессия (в обучении с учителем)
  - $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^M$  - векторная регрессия (в обучении с учителем) или извлечение признаков (обучение без учителя)
  - $\mathcal{Y} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_C\}$  - классификация (в обучении с учителем) и кластеризация (в обучении без учителя).
    - $\mathcal{Y} = \{+1, -1\}$ : два класса
    - $\mathcal{Y} = \{1, 2, \dots, C\}$ :  $C$  классов
  - $\mathcal{Y}$ -множество всех подмножеств  $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_C\}$  - классификация с пересекающимися классами
    - $\mathcal{Y} = \{y \in \mathbb{R}^C : y_i \in \{0, 1\}\}$ ,  $y_i = 1 \Leftrightarrow \omega_i$  соответствует  $i$ -му объекту.

## Варианты признаков

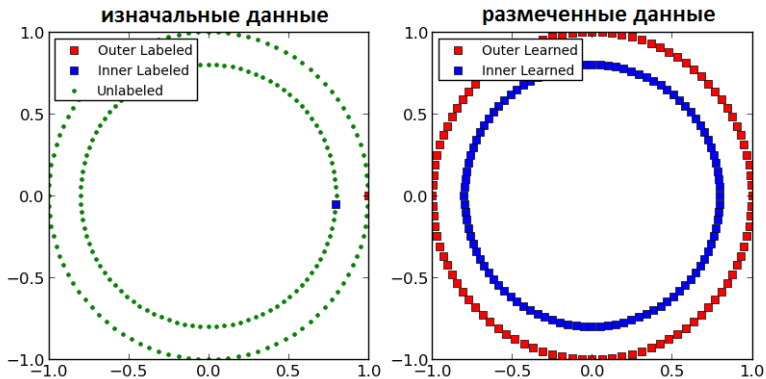
- Признаковое описание  $x \in \mathcal{X}$  состоит из отдельных признаков  $x_i \in \mathcal{X}_i$
- Варианты признаков
  - $\mathcal{X}_i = \{0, 1\}$  - бинарный признак
  - $|\mathcal{X}_i| < \infty$  - дискретный признак
  - $|\mathcal{X}_i| < \infty$  и  $\mathcal{X}_i$  - упорядочено - порядковый признак
  - $\mathcal{X}_i = \mathbb{R}$  - количественный признак

# Пример классификации



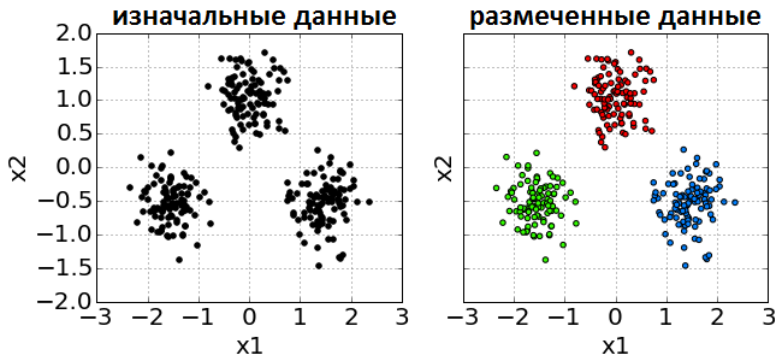
Обучение с учителем:  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y$  обозначен цветом

# Пример частичного обучения



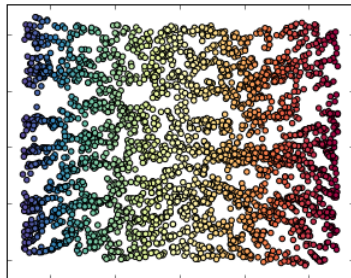
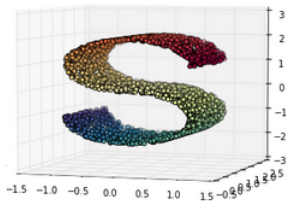
Частичное обучение.

# Пример кластеризации



Обучение без учителя: кластеризация

## Пример снижения размерности



Обучение без учителя: снижение размерности

## Содержание

- 1 Задачи распознавания образов
- 2 Основные понятия задачи обучения с учителем.**
- 3 Практическое применение алгоритмов машинного обучения

## Обучающая выборка

- **Обучающая выборка:**  $X \in \mathbb{R}^{N \times D}$  - матрица объекты-признаки,  $Y \in \mathbb{R}^N$  - предсказываемые величины (ответы, характеристики)
- Требуется по  $X$  восстановить параметры  $\hat{\theta}$  отображения  $\hat{y} = f_{\theta}(x)$  так, чтобы оно приближало истинное отображение  $y = y(x)$
- Предполагается, что  $z_n = (x_n, y_n)$  для  $n = 1, 2, \dots, N$  - независимые одинаково распределенные случайные величины.
- Для этапа МО:
  - обучение
  - применение



## Функция потерь

- **Функция потерь**  $\mathcal{L}(\hat{y}, y, x)$  обычно берется  $\mathcal{L}(\hat{y}, y)$
- Примеры:

- классификация:

- частота ошибок

$$\mathcal{L}(\hat{y}, y) = \mathbb{I}[\hat{y} \neq y]$$

- регрессия:

- MAE (Mean absolute error):

$$\mathcal{L}(\hat{y}, y) = |\hat{y} - y|$$

- MSE (mean squared error):

$$\mathcal{L}(\hat{y}, y) = (\hat{y} - y)^2$$

- модуль относительной ошибки:

$$\mathcal{L}(\hat{y}, y) = \frac{|\hat{y} - y|}{|y|}$$

## Класс функций для распознавания

- **Класс функций** - параметризованное семейство функций  $F = \{f_\theta, \theta \in \Theta\}$ , в котором подбирается соответствие  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ .
- Примеры линейного класса моделей:
  - регрессия:

$$f(x) = \theta_0 + \theta_1 x^1 + \theta_2 x^2 + \dots + \theta_D x^D,$$

где  $x^i$  -  $i$ -й признак вектора признаков  $x$ .

- классификация на два класса  $y \in \{+1, -1\}$ :

$$f(x) = \text{sign}\{\theta_0 + \theta_1 x^1 + \theta_2 x^2 + \dots + \theta_D x^D\},$$

где функция  $\text{sign}$  определена как

$$\text{sign}(a) = \begin{cases} 1, & a \geq 0 \\ 0, & a < 0 \end{cases}$$

## Эмпирический риск

- **Алгоритм обучения** сопоставляет  $f_{\hat{\theta}}(\cdot)$  по  $(X, Y)$ 
  - в классе функций  $F = \{f_{\theta}, \theta \in \Theta\}$
  - для заданной функции потерь  $\mathcal{L}(\hat{y}, y)$
- **Эмпирический риск:**

$$L(\theta|X, Y) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathcal{L}(f_{\theta}(x_n), y_n)$$

- **Метод минимизации эмпирического риска:**

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} L(\theta|X, Y)$$

## Оценки эмпирического риска

- Для метода минимизации эмпирического риска обычно выполнено:

$$L(\hat{\theta}|X, Y) < L(\hat{\theta}|X', Y')$$

где  $X, Y$  - выборка, на которой настраивался метод минимизации эмпирического риска, а  $X', Y'$  - новые данные.

- Оценить  $L(\hat{\theta}|X', Y')$  можно с помощью:
  - контрольной выборки (не использовавшейся для оптимизации  $L(\theta|X, Y)$ )
  - кросс-валидации
  - метода leave-one-out

## Степени обученности модели

### Недообученная модель

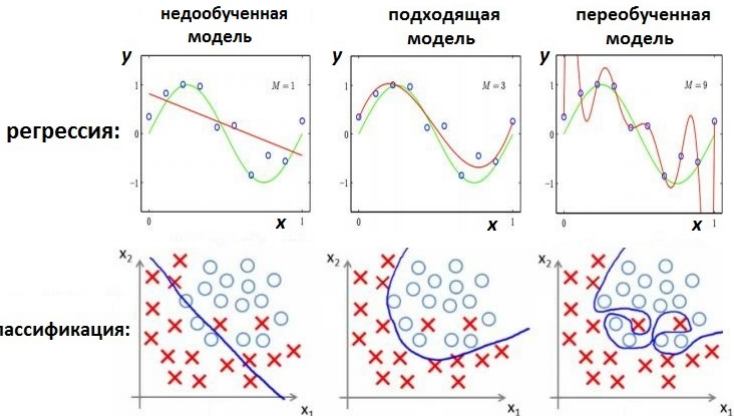
Модель, слишком сильно упрощающая закономерность  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ .

### Переобученная модель

Модель, слишком сильно настроенная на особенности обучающей выборки (на шум в наблюдениях), а не на реальную закономерность  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ .

# Примеры недообученных/переобученных моделей

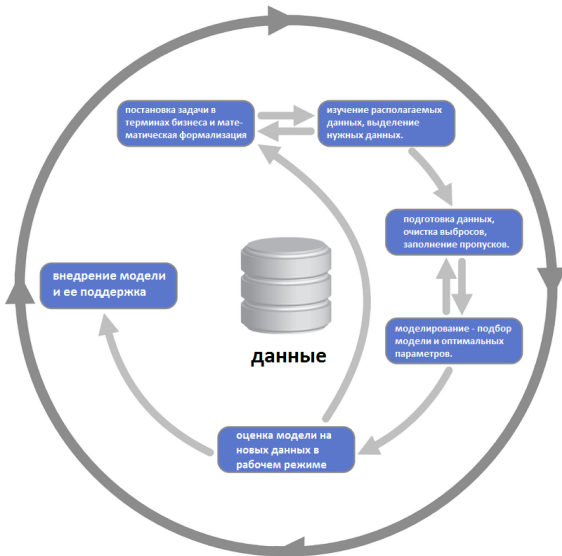
- истинная закономерность
- оцененная закономерность полиномом степени  $M$
- объекты обучающей выборки



# Содержание

- 1 Задачи распознавания образов
- 2 Основные понятия задачи обучения с учителем.
- 3 Практическое применение алгоритмов машинного обучения

# Методология CrispDM





## Примеры прикладных задач

### Классификация:

- сопоставление тематических рубрик текстовым документам
- в поисковой системе - соответствуют ли друг другу поисковый запрос и документ?
- является ли последовательность транзакций в сети регулярной последовательностью или попыткой взлома системы?
- уйдет ли клиент с заданной историей звонков, платежей и используемых услуг к другому мобильному оператору?
- погасит ли клиент банка взятый кредит в полном объеме?
- свидетельствует ли полученный сигнал от радара о наличии самолета, или это шум?

### Регрессия:

- определить цену на квартиру по ее характеристикам
- определить величину спроса в магазине за некоторый будущий период

# Система обозначений, используемых в курсе

- Если это соответствует контексту изложения, и нет переобозначений, то:
  - $x$  - вектор признакового описания объекта
  - $y$  - оцениваемая характеристика объекта с вектором признаков  $x$
  - $x_i$  -  $i$ -й объект обучающей выборки,  $y_i$  - соответствующая характеристика
  - $x^k$  -  $k$ -й признак признакового описания  $x$
  - $x_i^k$  -  $k$ -й признак признакового описания  $x_i$
  - $D$  - размерность признакового пространства:  $x \in \mathbb{R}^D$
  - $N$  - количество объектов в обучающей выборке
  - $X$  - матрица объекты-признаки,  $X \in \mathbb{R}^{N \times D}$
  - $Y \in \mathbb{R}^N$  - вектор характеристик объектов обучающей выборки
  - $\mathcal{L}(\hat{y}, y)$  - функция цены при предсказании истинного значения  $y$  значением  $\hat{y}$ .
  - в задачах классификации  $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_C\}$  - множество классов,  $C$  - общее количество классов.
  - $\hat{z}$  обозначает оценку  $z$  по данным обучающей выборки: например,  $\hat{\theta}$  - оценка  $\theta$ ,  $\hat{y}$  - оценка  $y$  и т.д.