Часть VI

Комбинаторные методы в анализе структур (I)

Комбинаторика — математика 21 века

И.М. Гельфанд, академик РАН,
почётный член большинства иностранных Академий наук.

Комбинаторика (*комбинаторный анализ*) — раздел математики, посвященный решению задач **выбора и расположения элементов** некоторого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами.

Каждое такое правило определяет способ построения некоторой конструкции из элементов исходного множества, называемой *комбинаторной конфигурацией* (перестановки, размещения и сочетания; блок-схемы и латинские квадраты...).

Цель комбинаторики — изучение комбинаторных конфигураций, в частности вопросы их существования, алгоритмы построения, решение задач на перечисление.

Разделы

Задача кластерного анализа

Пусть даны n-множество объектов, m-множество их признаков и матрица информаций $X_{n\times m}$.

Задача кластерного анализа состоит в том, чтобы на основании данных из X разбить множество объектов на $k < n$ *кластеров* (подмножеств) так, чтобы

- каждый объект принадлежал единственному кластеру;
- объекты одного кластера были сходными, а объекты, принадлежащие разным кластерам — не-сходными;
- разбиение должно удовлетворять некоторому критерию оптимальности — *целевой функции* (функционалу), выражающему уровень желательности данного разбиения.

Сходство: мера, коэффициенты, матрица

Определение

Неотрицательная вещественная функция $s(X_i, X_j) = s_{ij}$ (*коэффициент сходства*) называется *мерой сходства*, если:

1) $0 \leqslant s(X_i, X_j) < 1$ для $X_i \neq X_j$;
2) $s(X_i, X_i) = 1$;
3) $s(X_i, X_j) = s(X_j, X_i)$.

Если X — $(0,1)$-матрица, то s_{ij} — *коэффициент ассоциации*.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & 1 & \dots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$ — *матрица сходства.*

Кластеризация: некоторые замечания

При решении задачи кластерного анализа молчаливо принимается, что

1) выбранные характеристики в принципе допускают желательное разбиение на кластеры;
2) единицы измерения (масштаб) выбраны правильно.

Это проблемы формирования признакового пространства.

В данном курсе не рассматриваются различные методы определения и вычислений

- коэффициентов сходства,
- компактности кластеров,
- расстояний между кластерами,

а также эвристические алгоритмы кластеризации.

Кластеризация полным перебором

Прямой метод кластеризации

— перебором всевозможных разбиений на кластеры находят доставляющее оптимальное значение целевой функции.

Такая процедура практически выполнима лишь при малых n и k: например, если $n = 8$, $k = 4$ число возможных разбиений равно 1701.

Определение

Число $S(n, k) = \left\{ n \atop k \right\}$ разбиений n-элементного множества на k непустых частей называется *числом Стирлинга II рода*.

Обозначения:

- $[n] = \{ 1, \ldots, n \}$ при $n \in \mathbb{N}$, так что $[0] = \varnothing$.
- $\operatorname{Coef}_n\{f(z)\} = [z^n]f(z)$ — коэффициент при z^n в разложении $f(z)$ по степеням z.

Разделы

Дж. Стирлинг

Джеймс Стирлинг
(James Stirling, 1692–1770)
— шотландский математик.
Получил образование Оксфорде, но для получения диплома надо было принести присягу английской королеве, а Стирлинг категорически отказался делать это.

Работал в Италии, с 1724 г. — в Лондоне.
Переписывался с Ньютоном, который издавал его работы и по рекомендации которого избирается членом Королевского общества.

Автор одного из первых содержательных учебников по математическому анализу.
В честь его названы *числа Стирлинга* и *формула Стирлинга*.

Задача: число разбиений множества на непустые части

Разбиение n-множества на k *непустых* частей $\Leftrightarrow$ распределение n *различных* шаров по k *неразличимым* урнам, ни одна из которых *не должна остаться пустой*.

Замечание: задача «наоборот»: найти число w распределений n неразличимых шаров по k различимым урнам, когда некоторые урны могут остаться пустыми, решается легко.

- пронумеруем урны $1, \ldots, k$ и нарисуем подряд n кружков, обозначающих шары;
- распределение шаров по урнам будем отмечать вставкой $k-1$ вертикальных отрезков между шарами;
- всего имеется $n+k-1$ мест, из которых $k-1$ занимают отрезки (или n мест — кружки), поэтому

$$w = C_{n+k-1}^{k-1} = C_{n+k-1}^{n} = \binom{n+k-1}{k-1}.$$

Напоминание основных перечислительных правил

Правило суммы: если первое событие может произойти n способами, а второе — m способами и при этом они *не могут произойти одновременно*, то одно из этих событий может произойти $n+m$ способами.

Правило произведения: если первое событие может произойти n способами, а второе *независимо от исхода первого события*, может произойти m способами, то совместная реализация двух событий может произойти $n \cdot m$ способами.

Пример. В группе из 15 студентов и 10 студенток, тогда возможен выбор

$$\text{старосты} \;\; — \;\; 15+10=25$$ способами (правило суммы);

$$\text{пары «студент-студентка»} \;\; — \;\; 15 \cdot 10 = 150$$ способами (правило произведения).

Энумераторы

Определение

Энумератором события называется выражение в котором

- взаимоисключающие исходы соединены операцией суммирования,
- а происходящие одновременно — операцией произведения.

Такой выбор удобен тем, что выполнение комбинаторных правил суммы и произведения обеспечивается свойством дистрибутивности указанных арифметических операций.

Метод производящих функций —

— эффективный способ решения комбинаторных задач.

Пример: рассмотрим функцию 4 переменных:

$$F(x_1, \ldots, x_4) = (1 + x_1) \cdot \ldots \cdot (1 + x_4) =$$

$$= (x_1x_2x_3x_4) + (x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) +$$

$$+ \underbrace{(x_1x_2 + \ldots + x_3x_4)}_{6 \text{ попарных произведений}} + (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 1.$$

Обобщим: раскрыв скобки в формуле

$$F(x_1, \ldots, x_n) = (1 + x_1) \cdot (1 + x_2) \cdot \ldots \cdot (1 + x_n),$$

получим сумму произведений, представляющих m-выборки из n-множества $x_1, \ldots, x_n$:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{n_m \subseteq [n] \\ |n_m| = m}} \prod_{i \in n_m} x_i,$$

т.е. $F(x_1, \ldots, x_n)$ — энумератор (*порядок элементов в выборке несущественен*).

Метод производящих функций: подсчёт числа выборок

Положив, например, $x_1 = \ldots = x_n = x$, получим $[x^m]f(x) = C_n^m$ — число выборок (*без повторений и учёта порядка в них* = сочетаний) m объектов из n и

$$(1+x)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m$$ — *производящий полином* для $C_n^0, \ldots, C_n^n$.

Если порядок элементов в выборке существенен:

$$(1+x)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m = \sum_{m=0}^{n} A_n^m \frac{x^m}{m!}$$

— *экспоненциальный производящий полином* (функция), ЭПФ для $A_n^0, \ldots, A_n^n$.

$A_n^m = C_n^m m! = \frac{n!}{(n-m)!}$ — число m-выборок *с учётом порядка* (= размещений) из n-множества, $m = 0, 1, \ldots, n$.

I. Выборки с повторениями объёма m из n-множества

А если возможен выбор с повторениями?

Если элемент множества может быть выбран неоднократно:

1) $n = 1$ — имеется одна такая выборка и ЭПФ чисел $1, 1, \ldots$ данных выборок будет

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^m}{m!} + \ldots = e^x.$$

2) выборка объёма m из n элементов *с повторениями учётом порядка в выборке* — каких выборок n^m и ЭПФ этих чисел будет

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^m}{m!} + \ldots\right)^n = e^x = \sum_{m \geqslant 0} n^m \frac{x^m}{m!}.$$

I. Выборки с повторениями объёма m из n-множества...

3) m-выборка из n-множества *с повторениями и учётом порядка в выборке, но каждый элемент должен быть выбран не менее одного раза*: ЭПФ чисел таких выборок —

$$\left(x+\frac{x^2}{2!}+\ldots\right)^n = (e^x-1)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j(-1)^j e^{(n-j)x} =$$

$$= \sum_{m\geqslant 0}\frac{x^m}{m!}\left(\sum_{j=0}^{n} C_n^j(-1)^j j^m\right) = \sum_{m\geqslant 0}\frac{x^m}{m!}\left(\underbrace{\sum_{j=0}^{n} C_n^j(-1)^j (n-j)^m}_{\text{число таких выборок}}\right).$$

Это не то, что нам нужно (разбиение множества из n *различимых* элементов на k *непустых* частей *без учёта порядка* в этих частях и самих частей = размещение различных шаров по неразличимым урнам, пустых урн нет), но пригодится...

II. Размещения n различных шаров по k различным урнам:

В задаче размещения шаров рассуждаем аналогично (здесь урна выбирается неоднократно).

1) ЭПФ для случая, когда урна i содержит n_i шаров —

$$(x_1 + \ldots + x_k)^n = \sum_{n_1+\ldots+n_k=n} \underbrace{\frac{n!}{n_1! \ldots n_k!}}_{\text{число таких размещений}} x_1^{n_1} \ldots x_k^{n_k}$$

Например, распределение 21 голосующих в группы по 8, 7 и 6 человек возможно $\frac{21!}{8!\,7!\,6!} = 349188840 \approx 3{,}49 \cdot 10^8$ способами.

2) ЭПФ числа размещений n различных шаров в *одной* урне

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = e^x.$$

II. Размещения n различных шаров по k различным урнам:

3) ЭПФ числа k^n размещений n *различных* шаров в k *различных* урнах (1-й шар – в любой из k урн, 2-й также и т.д., порядок шаров в урне безразличен):

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots\right)^k = e^{kx} = 1 + kx + k^2\frac{x^2}{2!} + \ldots + k^n\frac{x^n}{n!} + \ldots$$

= числу выборок объёма n с повторениями из k элементов с учётом порядка в выборке.

Например, пусть имеется $n = 3$ шара A, B, C и $k = 2$ урны, тогда возможны $k^n = 8$ вариантов размещения шаров по урнам $1|2$:

$$ABC|\varnothing$$

$$AB|C \quad AC|B \quad BC|A \qquad A|BC \quad B|AC \quad C|AB$$

$$\varnothing|ABC$$

Возвращаемся к нашей задаче

Утверждение

Число $S(n,k)$ способов так распределить $n \geqslant 1$ различных шаров по k неразличимым урнам (порядок шаров в урнах несущественен), что ни одна урна не оказывается пустой, равно

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k} C_k^j (-1)^j (k-j)^n, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Доказательство

ЭПФ числа способов помещения n различных шаров в одну урну —

$$x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = e^x - 1.$$

Размещение n шаров по k различным непустым урнам

Доказательство (продолжение)

ЭПФ числа помещений n различных шаров в k различных урн так, что ни одна из них не оказывается пустой —

$$\left(x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\right)^k = (e^x - 1)^k =$$

$$= \sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!} \left(\sum_{j=0}^{k} C_k^j (-1)^j (k-j)^n \right).$$

Поскольку урны неразличимы, то

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} C_k^j (-1)^j (k-j)^n$$

— числа Стирлинга II рода.

Числа Стирлинга II рода: рекуррентная формула

Утверждение

$$S(n,k) \;=\; S(n-1,k-1)+kS(n-1,k)\,, \quad n>0$$

Доказательство (методом *выделенного элемента*)

Выделим некоторый элемент x в рассматриваем множестве.

1) x образует отдельный блок — число таких разбиений столько же, сколько существует разбиений оставшегося $(n-1)$-элементного множества на $k-1$ блоков, т.е. $S(n-1,k-1)$;

2) x не образует отдельного блока — такие разбиения могут быть получены присоединением x к любому из k блоков разбиения $(n-1)$-элементного множества на k блоков, т.е. их всего $kS(n-1,k)$.

По определению полагают $S(0,0)=1$.

Ясно, что $S(n,0)=S(n,k)=0$, $k>n>1$.

Числа Стирлинга II рода: таблица

Числа $S(n,k)$ Стирлинга II рода могут задаваться таблицей:

$n \diagdown k$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2	1	1						
3	1	3	1					
4	1	7	6	1				
5	1	15	25	10	1			
6	1	31	90	65	15	1		
7	1	63	301	350	140	21	1	
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1

Пример. Все $S(4,2) = 7$ разбиений 4-элементного множества $\{1,2,3,4\}$ на 2 блока:

$$1|234,\ \ 2|134,\ \ 3|124,\ \ 4|123,\ \ 12|34,\ \ 13|24,\ \ 14|23$$

Числа Стирлинга II рода: формула суммирования

Утверждение

$$S(n,k) = \sum_{i=k-1}^{n-1} C_{n-1}^{i} S(i,k-1), \quad k \geqslant 2.$$

Доказательство

Выделим элемент x рассматриваемого n-элементного множества X.
Затем для каждого $j = 0, \ldots, n-k$ выделим из элементов $X \setminus x$ блок размера j — это можно сделать C_{n-1}^{j} способами — и присоединим x к этому блоку.

После этого для каждого j рассмотрим все $S(n-j-1, k-1)$ разбиения оставшегося $(n-j-1)$-элементного множества.

Числа Стирлинга II рода: формула суммирования...

Доказательство (продолжение)

Все вышеописанные ситуации несовместны, т.е. перебирают разные разбиения.

Таким образом,

$$S(n,k) = \sum_{j=0}^{n-k} C_{n-1}^{j} S(n-j-1, k-1)\,.$$

Выполняя замену переменной $i = n - j - 1$, получаем

$$S(n,k) = \sum_{i=k-1}^{n-1} C_{n-1}^{n-i-1} S(i, k-1) = \sum_{i=k-1}^{n-1} C_{n-1}^{i} S(i, k-1)\,.$$

Разделы

Числа Стирлинга II рода и беллиан

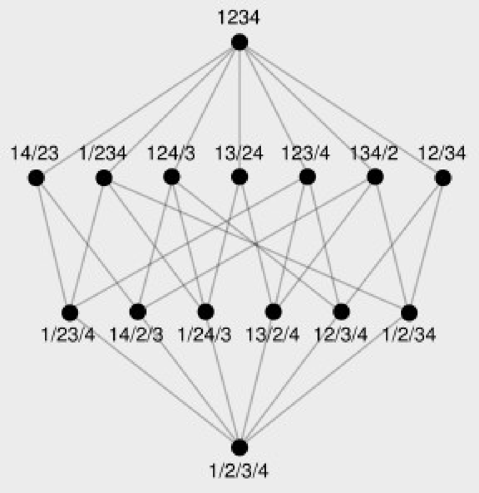
Совокупность всех разбиений множества X называют его *беллианом*, символически $\mathcal{B}(X)$.

$$\sum_{k=1}^{n} S(n,k) = B(n)$$

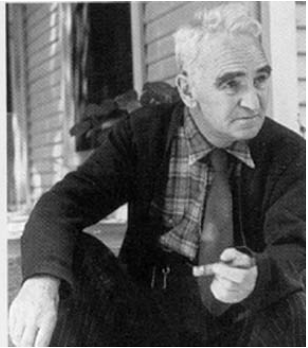
— *числа Белла*, мощность беллиана n-множества

Например, $B(4) = 15$

По определению $B(0) = 1$.



Э.Т. Белл



Эрик Темпл Белл
(Eric Temple Bell, 1883–1960)
— шотландский математик,
работавший в США.
Основные труды в области
теории чисел.
Разрабатывал т.н.
«теневое исчисление»
(umbral calculus).
Вице-президент Американского математического общества и
член Национальной Академии Наук.
Писал популярные книги по математике и истории математики,
многие из которых стали классическими, а также стихи и (под
псевдонимом Джон Тэн) — научную фантастику.

Числа Белла: рекуррентная формула

Утверждение

$$B(n+1) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i B(i) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i B(n-i).$$

Доказательство

Покажем второе равенство, т.к. первое следует из него в силу симметричности биномиальных коэффициентов.

Выбираем выделенный элемент исходного множества и для $i = 0, \ldots, n$, рассматривая поочерёдно все C_n^i блоков размера i оставшегося n-элементного множества, присоединяя к каждому из них по очереди выделенный элемент.
Для оставшихся $n - i$ элементов рассматриваем их всевозможные разбиения.

Числа Белла: таблица первых значений

n	$B(n)$
0	1
1	1
2	2
3	5
4	15
5	52
6	203
7	877
8	4 140
9	21 147
10	115 975
11	678 570
12	4 213 597
13	27 644 437

Числа Белла быстро растут: например, $B(20) = 51\ 724\ 158\ 235\ 371 \approx \approx 5{,}17 \cdot 10^{13}$.

Справедлива *формула Добинского*:

$$B(n) = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}.$$

Треугольник Белла

Числа $B(n)$ могут быть построены при помощи *треугольника Белла*.

Первая строка содержит 1, каждая следующая строка начинается числом, стоящим в конце предыдущей строки.

Каждое следующее число в строке равно сумме чисел, стоящих слева и слева-сверху от него. Числа Белла образуют последние числа в строках.

$$
\begin{array}{llllllll}
1 \\
1 & 2 \\
2 & 3 & 5 \\
5 & 7 & 10 & 15 \\
15 & 20 & 27 & 37 & 52 \\
52 & 67 & 87 & 114 & 151 & 203 \\
203 & 255 & 322 & 409 & 523 & 674 & 877 \\
877 & 1080 & 1335 & 1657 & 2066 & 2589 & 3263 & 4140 \\
 & \vdots & & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

Убывающие факториальные многочлены

Убывающие факториальные степени:

$$x^{\underline{n}} = \underbrace{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}_{n \text{ сомножителей}},\ n \geqslant 0.$$

Рассмотрим два базиса полиномов над некоторым полем:

1-й стандартный

$$1,\, x,\, x^2,\, \ldots,\, x^n,\, \ldots\,,$$

и 2-й из убывающих факториалов

$$1,\, x^{\underline{1}},\, x^{\underline{2}},\, \ldots,\, x^{\underline{n}},\, \ldots.$$

Выразим обычные степени x^n через убывающие степени $x^{\underline{n}}$.

Несколько первых случаев дают

$$x^0 = x^{\underline{0}}, \qquad x^2 = x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}},$$

$$x^1 = x^{\underline{1}}, \qquad x^4 = x^{\underline{4}} + 6x^{\underline{3}} + 7x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}.$$

$$x^3 = x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}, \qquad x^5 = x^{\underline{5}} + 10x^{\underline{4}} + 25x^{\underline{3}} + 15x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}.$$

Числа Стирлинга II рода: формальное определение

Замечаем, что коэффициенты в полиномах — числа Стирлинга II рода из приведённой ранее таблицы, прочитанные не слева направо, а справа налево.

Определение

Числа Стирлинга II рода называются числа $S(n,k)$, удовлетворяющие уравнениям

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) x^{\underline{k}},\ n \geqslant 0,\ S(n,0) = 0, S(n,n+k) = 0 \text{ для } k > 0.$$

Утверждение

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) x^{\underline{k}}, \quad n \geqslant 0.$$

Числа Стирлинга II рода: формальное определение...

Доказательство

Докажем формулу по индукции:

$$x \cdot x^{\underline{k}} = x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}, \text{ так как } x^{\underline{k+1}} = x^{\underline{k}}(x-k),$$

следовательно $x^n = x \cdot x^{n-1} =$

$$= x\sum_k S(n-1,k)x^{\underline{k}} = \sum_k S(n-1,k)x^{\underline{k+1}} + \sum_k S(n-1,k)kx^{\underline{k}} =$$

$$= \sum_k S(n-1,k-1)x^{\underline{k}} + \sum_k S(n-1,k)kx^{\underline{k}} =$$

$$= \sum_k \big(kS(n-1,k) + S(n-1,k-1)\big)x^{\underline{k}} = \sum_k S(n,k)x^{\underline{k}}.$$

Т.о. числа Стирлинга II рода — коэффициенты при убывающих факториальных степенях, которые дают обычные степени.

Разделы

Разделы

Числа Стирлинга I рода: определение

Определение

Число $s(n,k) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ перестановок n-элементного множества, содержащих k блоков, $n, k \geqslant 1$.

Из определения сразу следует, что

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k) = n!$$

Напоминание: циклическую перестановку $a \mapsto b \mapsto c \mapsto d \mapsto a$ записывают (a,b,c,d), поэтому

$$(a,b,c,d) = (b,c,d,a) = (c,d,a,b) = (d,a,b,c),$$
$$\text{но } (a,b,c,d) \neq (b,a,c,d).$$

Числа Стирлинга I рода: свойства

Приведём все 11 разбиений 4-элементного множества $\{1,2,3,4\}$ на 2 цикла:

$$(1)(234),\ \ (1)(243),\ \ (2)(134),\ \ (2)(143),\ \ (3)(124),\ \ (3)(142),$$
$$(4)(123),\ \ (4)(132),\ \ (12)(34),\ \ (13)(24),\ \ (14)(23)$$

Понятно, что $s(n,1) = (n-1)!$ и

$$s(n,k) \geqslant S(n,k), \quad n,k \geqslant 0,$$

т.к. каждое разбиение на непустые множества приводит, как минимум, к одному циклу.

Равенства будут если, все циклы являются единичными или двойными (в таких случаях циклы эквивалентны подмножествам);

а это будет при $k = n$ или $k = n-1$, следовательно

$$s(n,n) = S(n,n) = 1, \quad s(n,k-1) = S(n,k-1) = 2.$$

Числа Стирлинга I рода: рекуррентное соотношение

Утверждение

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) + (n-1)s(n-1,k), \quad n > 0.$$

Доказательство

Каждое представление n объектов в виде k циклов

- либо помещает последний объект в отдельный цикл — $s(n-1,k-1)$ способами,
- либо вставляет этот объект в одно из $s(n-1,k)$ циклических представлений первых $n-1$ объектов — $n-1$ способами (т.к. существует j способов поместить новый элемент в j-цикл, чтобы получить $(j+1)$-цикл: например, если $j=3$, то вставка d в цикл (a,b,c) приводит к циклам (a,b,c,d), (a,b,d,c), (a,d,b,c)).

Числа Стирлинга I рода: таблица

Числа $s(n,k)$ Стирлинга I рода могут задаваться таблицей:

$n \diagdown k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	2	3	1				
4	0	6	11	6	1			
5	0	24	50	35	10	1		
6	0	120	274	225	85	15	1	
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1

Элементы таблицы образуются по правилу

$s(n-1,k-1)$	$s(n-1,k)$	$\times(1-n)$
	$s(n,k)$	

Возрастающие факториальные многочлены

Возрастающие факториальные степени:

$$x^{\overline{n}} = \underbrace{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}_{n \text{ сомножителей}}, \quad n \geqslant 0.$$

Понятно, что $x^{\overline{0}} = x^0 = 1$, $x^{\overline{1}} = x^1$.

Рассмотрим базис из факториальных степеней:

$$1,\, x^{\overline{1}},\, x^{\overline{2}}\, \ldots,\, x^{\overline{n}},\, \ldots.$$

Выразим первые возрастающие степени $x^{\overline{n}}$ через обычные.

$$\begin{aligned}
x^{\overline{0}} &= x^0\,, & x^{\overline{3}} &= x^3 + 3x^2 + 2x^1\,,\\
x^{\overline{1}} &= x^1\,, & x^{\overline{4}} &= x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x^1\,,\\
x^{\overline{2}} &= x^2 + x^1\,, & x^{\overline{5}} &= x^5 + 10x^4 + 35x^3 + 50x^2 + 24x^1\,.
\end{aligned}$$

Замечаем, что коэффициенты в полиномах — числа Стирлинга I рода из приведённой ранее таблицы, прочитанные не слева направо, а справа налево.

Числа Стирлинга I рода: другое определение

Утверждение

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k\,, \quad n \geqslant 0\,.$$

Доказательство

Проведём индукцию по n.
Имеем $(x+n-1)\cdot x^k = x^{k+1} + (n-1)x^k$ и далее, аналогично выводу соотношения для числа Стирлинга II рода —

$$(x+n-1)x^{\overline{n-1}} = (x+n-1)\sum_{k=0}^{n} s(n-1,k)x^k = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k.$$

Т.о. числа Стирлинга I рода — коэффициенты при обычных степенях, которые дают возрастающие факториальные степени.

Связь чисел Стирлинга I и II родов ($n \geqslant 0$)

Имеем:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) x^{\underline{k}}, \qquad x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) x^k.$$

Можно показать, что справедливы «двойственные» равенства:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} S(n,k) x^{\overline{k}},$$

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s(n,k) x^k$$

Подстановкой получим симметричную формулу

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} S(n,k) s(k,m) = [m=n].$$

ЭПФ чисел Стирлинга I и II рода

ЭПФ последовательностей $S(n,k)$ и $s(n,k)$ $(k = n, n+1, \ldots)$ имеют вид

$$\sum_{n\geqslant k} S(n,k)\frac{z^n}{n!} = \frac{(e^z-1)^k}{k!};$$

$$\sum_{n\geqslant k} s(n,k)\frac{z^n}{n!} = \frac{(\ln\frac{1}{1-z})^k}{k!}.$$

Первая формула была фактически доказана.

Разделы

Числа Эйлера: определение

Рассмотрим перестановку

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_i & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

чисел $1, 2, \dots, n$.

Будем говорить, что π имеет k *участков подъёма*, если в этой перестановке есть k мест таких, где $a_j < a_{j+1}$.

Определение

Двухпараметрическим числом Эйлера $E(n,k) = \left\langle {n \atop k} \right\rangle$ называется число перестановок n-элементного множества с k участками подъёма.

По определению $E(0,0) = 1$.

Числа Эйлера: пример

Пример. Одиннадцать перестановок множества $\{1, 2, 3, 4\}$, содержащие по два участка подъема:

$$\begin{aligned}&(1324),\ (1423),\ (2314),\ (2413),\ (3412),\\&(1243),\ (1342),\ (2341),\\&(2134),\ (3124),\ (4123).\end{aligned}$$

Перечислены перестановки

в первой строке — вида $a_1 < a_2 > a_3 < a_4$;
во второй строке — вида $a_1 < a_2 < a_3 > a_4$;
в третьей строке — вида $a_1 > a_2 < a_3 < a_4$.

Следовательно, $E(4, 2) = 11$.

Двухпарметрические числа Эйлера: таблица (треугольник)

В таблице приведены начальные двухпарметрические числа Эйлера $E(n,k)$.
При $n > 0$ может быть самое большее $n-1$ участков подъема, так что $E(n,n) = 0$ на диагонали этого треугольника.

$n \diagdown k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0						
1	1	0						
2	1	1	0					
3	1	4	1	0				
4	1	11	11	1	0			
5	1	26	66	26	1	0		
6	1	57	302	302	57	1	0	
7	1	120	119	2 416	1 191	1 20	1	0

Двухпарметрические числа Эйлера: рекуррентная формула

Треугольник Эйлера, подобно треугольнику Паскаля, симметричен слева направо:

$$E(n,k) = E(n,n-k-1)\,, \quad n > 0.$$

Перестановка $a_1, \ldots, a_n$ содержит $(n-1-k)$ участков подъема тогда и только тогда, когда её “отражение” $a_n, \ldots, a_1$ содержит k таких участков.

По определению полагают

$$E(0,k) = 0\,, \quad k < 0.$$

Утверждение

$$E(n,k) = (k+1)E(n-1,k) + (n-k)E(n-1,k-1),\ n > 0.$$

$E(n,k) = (k+1)E(n-1,k) + (n-k)E(n-1,k-1),\ n > 0$...

Доказательство

Каждая перестановка $\pi = (a_1, \ldots, a_n)$ множества

При вставке n на j-е место получаем подстановку $(a_1, \ldots, a_{j-1}, n, a_j, \ldots, a_n)$ и число участков подъема увеличится на 1, если $a_{j-1} > a_j$ или $j = n$ $((n-2) - (k-1) + 1$ вариантов) и останется без изменений, иначе (k вариантов).

Поэтому новая перестановка с k участками подъема получается

- $(k+1)E(n-1,k)$ способами из перестановок π, которые содержат k участков подъема,

$+$

- $((n-k)E(n-1,k-1)$ способами из перестановок π, которые содержат $k-1$ участков подъема.

Двухпарметрические числа Эйлера: свойства

Утверждение (тождество Ворпицкого)

$$x^n = \sum_k E(n,k) C^n_{x+k},\ n \geqslant 0.$$

Так,

$$\begin{aligned} x^2 &= C^2_x + C^2_{x+1}, \\ x^3 &= C^3_x + 4C^3_{x+1} + C^3_{x+1}, \\ x^4 &= C^4_x + 11C^4_{x+1} + 11C^4_{x+2} + C^4_{x+3}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Доказательство — по индукции.

Впервые данная формула упоминается в книге Ли Сянь-Ляня, опубликованной в Китае в 1867 г.

Разделы

Наблюдение Бернулли

Положим $S_m(n) = 0^m + 1^m + \ldots + (n-1)^m = \sum_{k=0}^{n-1} k^m$.

Якоб Бернулли заметил, что

$$\begin{aligned}
S_0(n) &= n\,,\\
S_1(n) &= \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n\,,\\
S_2(n) &= \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\,,\\
S_3(n) &= \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2\,,\\
S_4(n) &= \frac{1}{5}n^5 - \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{30}n\,,\\
S_5(n) &= \frac{1}{6}n^6 - \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^3 - \frac{1}{12}n^2\,,\\
S_6(n) &= \frac{1}{7}n^7 - \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n\,,\\
S_7(n) &= \frac{1}{8}n^8 - \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2\,,\\
S_8(n) &= \frac{1}{9}n^9 - \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 + \frac{1}{30}n\,.
\end{aligned}$$

Числа Бернулли...

Мы видим закономерность: в формуле для $S_m(n)$

- коэффициент при n^{m+1} всегда равен $\dfrac{1}{m+1}$;
- коэффициент при n^m всегда равен $-\dfrac{1}{2}$;
- коэффициент при n^{m-1} всегда равен $\dfrac{m}{12}$;
- коэффициент при n^{m-2} всегда равен нулю;
- коэффициент при n^{m-3} всегда равен ... $-\dfrac{m(m-1)(m-2)}{720}$;
- коэффициент при n^{m-4} всегда равен нулю.

А если эту закономерность продолжить, то коэффициент при n^{m-k} всегда будет иметь вид некоторой константы, умноженной на m^k.

Именно это и обнаружил Бернулли.

Запись наблюдения в Бернулли современных обозначениях

Утверждение

$$S_m(n) = \frac{1}{m+1}\left(B_0 n^{m+1} + C_{m+1}^1 B_1 n^m + \ldots + C_{m+1}^m B_m n \right) = $$
$$= \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} C_{m+1}^k B_k n^{m+1-k}.$$

B_0, B_1, B_2, … — *числа Бернулли*.

Доказательстово по индукции, но мы доказывать не будем…

Определение

Числа Бернулли — числа $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, определяемые рекуррентным соотношением

$$B_0 = 1\,, \quad \sum_{j=0}^{n-1} C_n^j B_j = 0\,,\ n \geqslant 2.$$

Справедливость соотношения (можно показать по индукции).

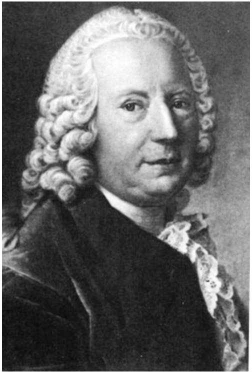
Числа Бернулли...

Так, $C_2^0 B_0 + C_2^1 B_1 = 0$, откуда $B_1 = -\frac{1}{2}$.

Несколько первых этих величин оказываются такими:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{43}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0

Д. Бернулли



Даниэль Бернулли
(Daniel Bernoulli, 1700–1782)
— швейцарский физик и математик, один из создателей кинетической теории газов, гидродинамики и математической физики.
В 1725–1733 г. работал в Петербурге, куда пригласил своего друга Л.Эйлера.
Сын Иоганна Бернулли, один из последних представителей рода Бернулли (всего их было девять), которые внесли фундаментальный вклад в математику, теорию вероятностей и математическую статистику в XVII и XVIII веках.
Академик и иностранный почётный член Петербургской академии наук, член Академий: Болонской, Берлинской, Парижской, Лондонского королевского общества.

Разделы

Числа Фибоначчи: определение

Определение

Числа Фибоначчи — числа $u_0, u_1, \ldots$, определяемые рекуррентным соотношением

$$u_0 = u_1 = 1, \quad u_k = u_{k-1} + u_{k-2},\ k \geqslant 2.$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

Числа Фибоначчи (введены в 1202 г. Леонардо Фиббоначчи) часто обнаруживаются в природе. Например, семечки, плотно набитые в крупную “корзинку” подсолнуха, располагаются по спиралям — обычно это 34 спирали, закручивающиеся в одном направлении, и 55 спиралей — в другом, корзинки поменьше иметь соответственно 21 и 34 или же 13 и 21 спираль, а однажды в Англии демонстрировался гигантский подсолнух с 89 спиралями одного направления и 144 — другого.

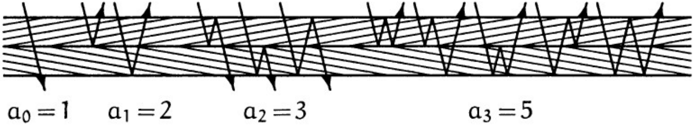
Фибоначчи

Леонардо Пизанский (Leonardus Pisanus, 1170–1250) — крупный математик средневековой Европы, известен под прозвищем Фибоначчи (данном ему в XIX в.). Fibonacci — сокращение от слов «filius Bonacci», появившихся на обложке его «Книги абака», может означать «удачливый».

По словам историка математики А. П. Юшкевича, «„Книга абака“ резко возвышается над европейской арифметико-алгебраической литературой XII—XIV веков разнообразием и силой методов, богатством задач, доказательностью изложения... Последующие математики широко черпали из неё как задачи, так и приёмы их решения».

Числа Фибоначчи: свойства

Друг на друга наложены две стеклянные пластинки. Сколько существует способов a_n прохождения света через пластинки или отражения от них после изменения его направления n раз? $a_n = u_{n+1}$:



Справедливо соотношение

$$F_{k+1}F_{k-1} - F_k^2 = (-1)^{k+1},\ n \geqslant 1,$$

например, $5 \cdot 13 - 8^2 = -1$ (обнаружено в 1680 г. французским астрономом Жан-Домиником Кассини, хотя было известно ещё Иоганну Кеплеру в 1608 г.).

Числа Фибоначчи: формула для общего члена

Построим ПФ $F(x) = \sum\limits_{k\geqslant 0} u_k x^k$ для последовательности чисел Фибоначчи $u_0 = u_1 = 1$, $u_k = u_{k-1} + u_{k-2}$, $k \geqslant 2$.

$$F(x) = 1 + x + \sum_{k\geqslant 2} u_k x^k = 1 + x + \sum_{k\geqslant 2} (u_{k-1} + u_{k-2}) x^k =$$

$$= 1 + x + x \sum_{k\geqslant 2} u_{k-1} x^{k-1} + x^2 \sum_{k\geqslant 2} u_{k-2} x^{k-2} =$$

$$= 1 + x + x(F(x) - 1) + x^2 F(x)\,.$$

Таким образом

$$F(x) = 1 + \cancel{x} + xF(x) - \cancel{x} + x^2 F(x)\,,$$

$$F(x)(1 - x - x^2) = 1\,,$$

$$F(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}\,.$$

Числа Фибоначчи: формула для общего члена...

Разлагаем полученную ПФ в ряд по x.

Сначала находим разложение $F(x)$ на простые дроби:

$$1 - x - x^2 = (1 - ax)(1 - bx) = 1 - (a + b)x + abx^2$$

$$\begin{cases} ab = -1, \\ a + b = 1, \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$$a \text{ и } b \text{ — корни } z^2 - z - 1 = 0, \text{ т.е. } a, b = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Пусть $a \geqslant b$: $a = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} = \dfrac{1}{\varphi} = \varphi + 1$, $b = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\varphi$

$\varphi \approx 0,61803\ldots$ — золотое сечение (обозначение в честь Фидия).

Числа Фибоначчи: формула для общего члена...

$$\underset{0}{|}\;\text{—————————}\;\underset{\varphi}{|}\;\text{————}\;\underset{1}{|}$$

$$\frac{1-\varphi}{\varphi} = \frac{\varphi}{1} \quad\Rightarrow\quad \varphi^2+\varphi-1 = 0 \quad\Rightarrow\quad \varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Теперь

$$F(x) = \frac{1}{(1-ax)(1-bx)} = \frac{A}{1-ax}+\frac{B}{1-bx}.$$

$$A - Abx + B - Bax = 1 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} A+B &= 1 \\ Ab+Ba &= 0 \end{cases} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad A = \frac{a}{a-b}; \qquad B = -\frac{b}{a-b}.$$

Числа Фибоначчи: формула для общего члена...

Поскольку $\dfrac{1}{1-\alpha x} = \sum\limits_{k\geqslant 0} (\alpha x)^k$, то

$$F(x) = \sum_{k\geqslant 0} a^k x^k + B \sum_{k\geqslant 0} b^k x^k = \sum_{k\geqslant 0} \frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a-b} x^k .$$

Учитывая, что $a - b = \sqrt{5}$, окончательно получаем

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right].$$

Эта формула впервые опубликована Даниэлем Бернулли (1728) и переоткрыта Жаком Бине (1843).

Методом линейных рекуррентных последовательностей

— было найдено характеристическое уравнение для чисел Фибоначчи: $P(x) = x^2 - x - 1 = 0$, оно имеет корни $a, b = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, и следовательно,

$$u_k = \beta_1 a^k + \beta_2 b^k = \beta_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k + \beta_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k .$$

Из начальных условий:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \beta_1 + \beta_2 & = 1 \\ \beta_1 a + \beta_2 b & = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \beta_1 & = \dfrac{1-b}{a-b} = \dfrac{a}{a-b} = A \\ \beta_2 & = \dfrac{a-1}{a-b} = \dfrac{-b}{a-b} = B \end{array} \right.$$

т.е. ($a + b = 1$, $a - b = \sqrt{5}$) получаем уже найденную формулу.

Разделы

Числа Каталана в задачах

Задача 1. В кассу за билетами стоит очередь из $2n$ человек, у каждого по купюре в 100 или 50 руб., причем этих купюр в очереди поровну — по n 50- и 100-рублевок.
Билет стоит 50 руб., в начале продажи касса пуста.
Найти число способов расположить очередь так, чтобы кассир всегда мог выдать сдачу.

Ответ — n-е число Каталана.

Числа Каталана в задачах...

Закодируем очередь с купюрами двоичным набором, заменяя 50-рублевки единицами, а 100-рублевки — нулями.

Задача 2. Найти число различных двоичных наборов длины $2n$, в которых поровну нулей и единиц, и на любом начальном отрезке каждого такого набора число единиц не менее числа нулей. (Заметим, что если бы ограничения не было, то ответом, очевидно, было бы число $C_{2n}^{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!}$.)

Решим задачу перебором для $n = 3$:

	1	2	3	4	5	6
1)	1	1	1	0	0	0
2)	1	1	0	1	0	0
3)	1	1	0	0	1	0
4)	1	0	1	1	0	0
5)	1	0	1	0	1	0

Будем решать задачу —

Найти число t_k неизоморфных двоичных деревьев с k вершинами.

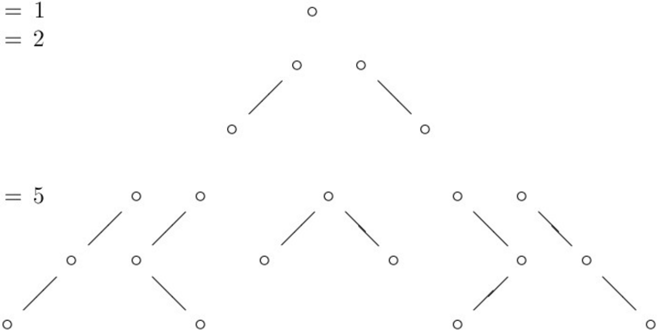
<u>Ответ</u>: это числа Каталана

$t_0 = 1$ $\varnothing$

$t_1 = 1$

$t_2 = 2$

$t_3 = 5$



$t_k = ?$

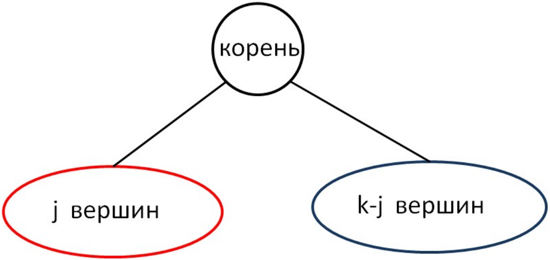
Число неизоморфных двоичных деревьев с k вершинами

ПФ для последовательности чисел t_k:

$$C(x) = \sum_{k \geqslant 0} t_k x^k.$$

Идея: представим ВТ с $k+1$-й вершиной как

корень + левое поддерево + правое поддерево



ПФ для чисел Каталана

Итак, $t_0 = 1,\ t_{k+1} = \sum_{j=0}^{k} t_j t_{k-j},\ k > 0.$

Отсюда:

$$C(x) = 1 + \sum_{k\geqslant 1} t_k x^k = 1 + \sum_{k\geqslant 0} t_{k+1} x^{k+1} =$$

$$= 1 + x \sum_{k\geqslant 0} \Bigl(\sum_{j=0}^{k} t_j t_{k-j} \Bigr) x^k = 1 + xC^2(x)$$

— по правилу перемножения рядов.

Решая квадратное уравнение $xC^2(x) - C(x) + 1 = 0$, получим

$$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}\,. \qquad (*)$$

ПФ для чисел Каталана...

Разложим $\sqrt{1-4x}$ в ряд (Маклорена, ЭПФ):

$$(1-4x)^{1/2} = \sum_{k\geqslant 0} a_k \frac{x^k}{k!}.$$

Имеем

$$a_0 = 1; \quad \frac{a_k}{k!} = (-1)^k \binom{1/2}{k} 4^k =$$

$$= \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)\cdot(-2)^k 2^k =$$

умножаем на -2 каждую из k скобок

$$= \frac{1}{k!}(-1)(-1+2)(-1+4)\ldots(-1+2k-2)\cdot 2^k =$$

$$= \frac{1}{k!}(-1)\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-3)\cdot 2^k.$$

ПФ для чисел Каталана...

$$(1-4x)^{1/2} = 1 - \sum_{k\geqslant 1} \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-3)\cdot 2^k}{k!} x^k =$$

$\big($домножаем числитель и знаменатель на $2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2k-2)\big)$

$$= 1 - \sum_{k\geqslant 1} \frac{(2k-2)!2^k}{k!\cdot 2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2k-2)} x^k =$$

$\big($делим числитель и знаменатель на $2^{k-1}\big)$

$$= 1 - \sum_{k\geqslant 1} \frac{(2k-2)!2}{k!(k-1)!} x^k = 1 - \sum_{k\geqslant 1} \frac{2}{k}\binom{2k-2}{k-1} x^k =$$

$$= \big(\text{делаем замену } k \mapsto k+1\big) = 1 - \sum_{k\geqslant 0} \frac{2}{k+1}\binom{2k}{k} x^{k+1}.$$

Этот ряд надо подставить в $(*)$.

ПФ для чисел Каталана...

Понятно, что из условия $t_k \geqslant 0$ перед радикалом надо брать знак $(-)$. Окончательно,

$$C(x) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} x^k,$$

и, таким образом,

$$t_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} = \frac{1}{k+1} C_{2k}^k \quad \text{— \textit{числа Каталана}}$$

Имеем, например,

$$t_3 = \frac{1}{4}\binom{6}{3} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5; \quad t_4 = \frac{1}{5}\binom{8}{4} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 14;$$

$$t_5 = \frac{1}{6}\binom{10}{5} = \frac{1}{6} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 42.$$

Э. Каталан

Эжен Шарль Каталан
(Eugene-Charles Catalan, 1814–1894)
— бельгийский математик.
Написал более 200 мемуаров, ставящих его в число лучших геометров XIX века.

Последовательность чисел Каталана была известна ещё Л.Эйлеру.

n-е число Каталана можно определить как количество —

- разбиений выпуклого $(n+2)$-угольника на n треугольников $n-1$ непересекающимися диагоналями;
- правильных скобочных структур длины $2n$;
- способов соединения $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами;
- неизоморфных упорядоченных бинарных деревьев с корнем и $n+1$ листьями;
- $e(\mathbf{2} \times \mathbf{n})$;
- ...

Во II-м томе монографии *Р. Стенли* «Перечислительная комбинаторика» приведено 66 различных математических задач, в которых появляются числа Каталана.

<u>Замечание</u>. В задаче об очереди в кассу вероятность того, что очередь в кассу задержится, равна $\frac{n}{n+1}$ и стремится к единице с ростом её длины.