Прикладная статистика 2. Параметрическая проверка гипотез.

18 февраля 2013 г.

О нормальном распределении

Благодаря центральной предельной теореме и удобству вывода критериев для нормально распределённых выборок методы, основанные на предположении о нормальности данных, наиболее широко распространены.

- Если принять предположение о нормальности, то можно применять более мощные критерии. Зачастую они также чувствительны к небольшим отклонениям от нормальности.
- Перед использованием методов, предполагающих нормальность, стоит проверить нормальность.
- Если гипотеза нормальности отвергается, следует использовать непараметрические методы.

Интегральный критерий Фишера (Жарка-Бера)

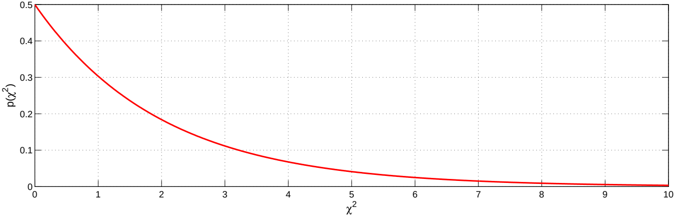
выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n)$;

нулевая гипотеза: $H_0\colon X_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$;

альтернатива: $H_1\colon H_0$ неверна;

статистика: $\chi^2\left(X^n\right) = g_1\sqrt{\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}} + \left(g_2 + \frac{6}{n+1}\right)\sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}}$;

$\chi^2\left(X^n\right) \sim \chi^2_2$ при H_0;



достигаемый уровень значимости:

$$p\left(\chi^2\right) = 1 - chi2cdf\left(\chi^2, 2\right).$$

Критерий согласия Пирсона (хи-квадрат)

выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n)$;

нулевая гипотеза: $H_0\colon X_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$;

альтернатива: $H_1\colon H_0$ неверна;

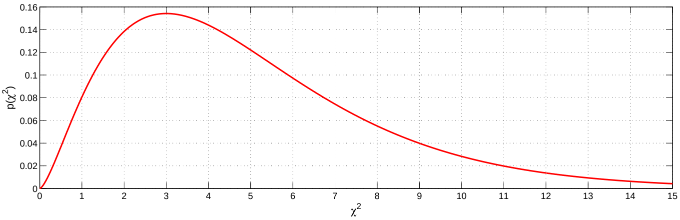
статистика: $\chi^2\left(X^n\right) = \sum_{i=1}^{K} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$;

$$\chi^2\left(X^n\right) \sim \begin{cases} \chi^2_{k-1}, & \text{если } \mu, \sigma \text{ заданы}, \\ \chi^2_{k-3}, & \text{если } \mu, \sigma \text{ оцениваются по выборке}, \end{cases}$$

при H_0;

K — число карманов гистограммы,
$[a_i, a_{i+1}]$ — i-й интервал,
n_i — число элементов выборки в i-м интервале,
$p_i = \Phi\left(a_{i+1}\right) - \Phi\left(a_i\right)$ — теоретическая вероятность попадания наблюдения в i-й интервал.

Критерий согласия Пирсона (хи-квадрат)



достигаемый уровень значимости:

$$p\left(\chi^2\right) = \begin{cases} 1 - chi2cdf\left(\chi^2, k-1\right), & \mu, \sigma \text{ заданы,} \\ 1 - chi2cdf\left(\chi^2, k-3\right), & \mu, \sigma \text{ оцениваются по выборке.} \end{cases}$$

Недостатки:

- требует больших выборок;
- неоднозначность способа разбиения на интервалы.

Критерий Колмогорова-Смирнова (Лиллиефорса)

выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n)$;

нулевая гипотеза: $H_0\colon X_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$;

альтернатива: $H_1\colon H_0$ неверна;

статистика: $D\left(X^n\right) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - \Phi(x)| =$

$= \max_{i=1,\dots,n}\left(\frac{i}{n} - \Phi(X_i), \Phi(X_i) - \frac{i-1}{n}\right),$

$F_n\left(x\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left[X_i < x\right]$;

$D\left(X^n\right)$ при H_0 имеет табличное распределение.

Недостатки:

- требует крайне больших выборок (для проверки с $\alpha = 0.01$ — $n \approx 2000$);
- не чувствителен к различиям на хвостах распределений.

Критерий ω^2 Смирнова-Крамера-фон Мизеса

выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n)$;

нулевая гипотеза: $H_0\colon X_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$;

альтернатива: $H_1\colon H_0$ неверна;

статистика: $n\omega^2 = \int \left(F_n(x) - \Phi(x)\right)^2 d\Phi(x) =$
$= \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left(\Phi(X_i) - \frac{2i-1}{2n}\right)^2$;

$n\omega^2\left(X^n\right)$ при H_0 имеет распределение, выражаемое через Γ-функции и функции Бесселя.

Критерий Шапиро-Уилка

выборка: $X^n = (X_1, \ldots, X_n)$;

нулевая гипотеза: $H_0\colon X_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$;

альтернатива: $H_1\colon H_0$ неверна;

статистика: $W\left(X^n\right) = \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i X_{(i)}\right)^2}{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2}$,

$(a_1, \ldots, a_n) = \frac{m^T V^{-1}}{\left(m^T V^{-1} V^{-1} m\right)^{1/2}}$,

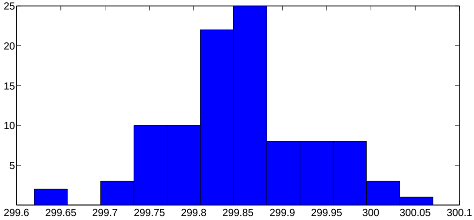
$m = (m_1, \ldots, m_n)^T$ — матожидания порядковых статистик $N(0,1)$, V — их ковариационная матрица;

$W\left(X^n\right)$ при H_0 имеет табличное распределение.

Значения a_i также табулированы.

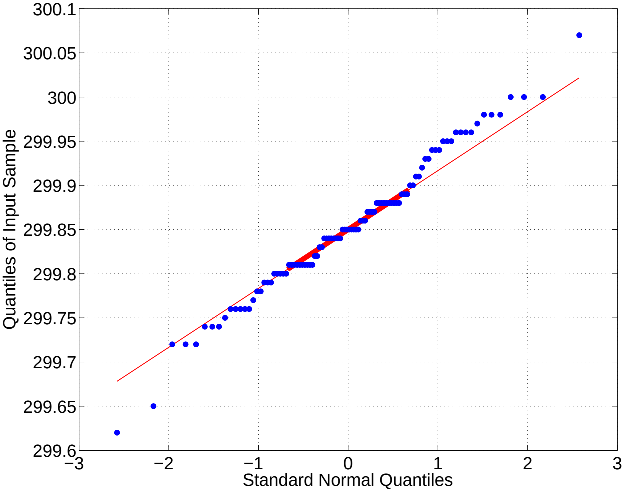
Измерения скорости света

Данные классического эксперимента Михельсона по измерению скорости света (1879), 100 наблюдений.



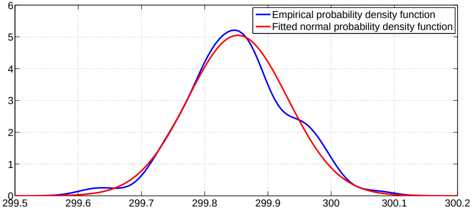
Подчиняются ли измерения нормальному распределению?

Измерения скорости света

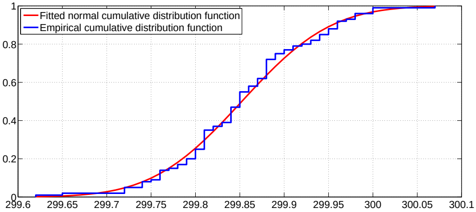


Q-Q plot

Измерения скорости света



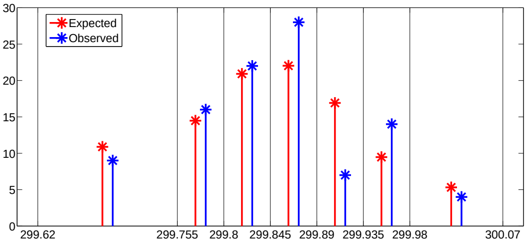
Оценки плотности вероятности



Оценки функции распределения

Измерения скорости света

Критерий хи-квадрат: $p = 0.0333$.



Чему равно число степеней свободы?

Критерий Колмогорова-Смирнова (Лиллиефорса): $p = 0.0860$.
Критерий Жарка-Бера: $p = 0.5$ / $p = 0.8533$.
Критерий Крамера-фон Мизеса: $p = 0.2227$.
Критерий Шапиро-Уилка: $p = 0.5138$.

Итого о проверке нормальности

- **очень маленькие выборки**: любой критерий может пропустить отклонения от нормальности, графические методы тоже часто бесполезны;
- **очень большие выборки**: любой критерий может выявлять небольшие статистически, но не практически значимые отклонения от нормальности; значительная часть методов, предполагающих нормальность, демонстрируют устойчивость к отклонениям;
- **выбросы**: сильно влияют на выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса;
- **критерий Колмогорова-Смирнова (Лиллиефорса)**: представляет только исторический интерес (Agostino, Goodness-of-fit techniques);
- **критерий хи-квадрат**: слишком общий, не самый мощный, потеря информации из-за разбиения на интервалы.

Итого о проверке нормальности

Сравнение критериев проверки нормальности распределения случайных величин

Наименование критерия (раздел)	Характер альтернативного распределения					Ранг
	асимметричное		симметричное		≈ нормальное	
	$\alpha_4 < 3$	$\alpha_4 > 3$	$\alpha_4 < 3$	$\alpha_4 > 3$	$\alpha_4 \approx 3$	
Критерий Шапиро–Уилка (3.2.2.1)	1	1	3	2	2	1
Критерий K^2 (3.2.2.16)	7	8	10	6	4	2
Критерий Дарбина (3.1.2.7)	11	7	7	15	1	3
Критерий Д'Агостино (3.2.2.14)	12	9	4	5	12	4
Критерий α_4 (3.2.2.16)	14	5	2	4	18	5
Критерий Васичека (3.2.2.2)	2	14	8	10	10	6
Критерий Дэвида–Хартли–Пирсона (3.2.2.10)	21	2	1	9	1	7
Критерий χ^2 (3.1.1.1)	9	20	9	8	3	8
Критерий Андерсона–Дарлинга (3.1.2.4)	18	3	5	18	7	9
Критерий Филлибена (3.2.2.5)	3	12	18	1	9	10
Критерий Колмогорова–Смирнова (3.1.2.1)	16	10	6	16	5	11
Критерий Мартинеса–Иглевича (3.2.2.14)	10	16	13	3	15	12
Критерий Лина–Мудхолкара (3.2.2.13)	4	15	12	12	16	13
Критерий α_3 (3.2.2.16)	8	6	21	7	19	14
Критерий Шпигельхальтера (3.2.2.11)	19	13	11	11	8	15
Критерий Саркади (3.2.2.12)	5	18	15	14	13	16
Критерий Смирнова–Крамера–фон Мизеса (3.1.2.2)	17	11	20	17	6	17
Критерий Локка–Спурье (3.2.2.7)	13	4	19	21	17	18
Критерий Оя (3.2.2.8)	20	17	14	13	14	19
Критерий Хегази–Грина (3.2.2.3)	6	19	16	19	21	20
Критерий Муроты–Такеучи (3.2.2.17)	15	21	17	20	20	21

Кобзарь, Прикладная математическая статистика, 2006.

Виды задач: одновыборочные

- $X^n \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$
  - $H_0\colon \mu = \mu_0$
    - σ известна 1
    - σ неизвестна 2
  - $H_0\colon \sigma = \sigma_0$ 3

Виды задач: двухвыборочные

- $X_1^{n_1} \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right), X_2^{n_2} \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$
  - $H_0\colon \mu_1 = \mu_2$
    - X_1, X_2 независимые
      - $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$
        - σ известно 4
        - σ неизвестно 5
      - $\sigma_1 \neq \sigma_2$
        - σ_1, σ_2 известны 6
        - σ_1, σ_2 неизвестны 7
    - X_1, X_2 связные 8
  - $H_0\colon \sigma_1 = \sigma_2$ 9

(1) Z-критерий

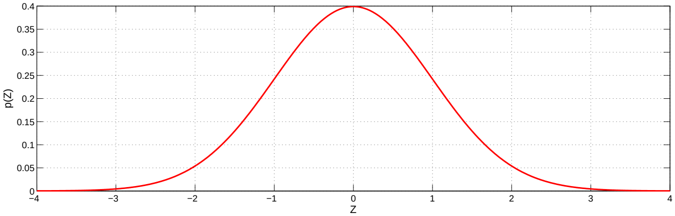
выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n) \sim N\left(\mu, \sigma^2\right), \sigma$ известна;

нулевая гипотеза: $H_0\colon \mu = \mu_0$;

альтернатива: $H_1\colon \mu <\neq> \mu_0$;

статистика: $Z\left(X^n\right) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$;

$Z\left(X^n\right) \sim N(0,1)$ при H_0;



достигаемый уровень значимости:

$$p(z) = \begin{cases} 1 - ncdf\left(z, 0, 1\right), & H_1\colon \mu > \mu_0, \\ ncdf\left(z, 0, 1\right), & H_1\colon \mu < \mu_0, \\ 2 \cdot \left(1 - ncdf\left(|z|, 0, 1\right)\right), & H_1\colon \mu \neq \mu_0. \end{cases}$$

(1) Z-критерий

Пример: линия по производству пудры должна обеспечивать средний вес пудры в упаковке 4 грамма, заявленное стандартное отклонение — 1 грамм. В ходе инспекции выбрано 9 упаковок, средний вес продукта в них составляет 4.6 грамма.

$H_0:$ средний вес пудры в упаковке соответствует норме.
$H_1:$ средний вес пудры в упаковке не соответствует норме $\Rightarrow p = 0.0719.$
$H_1:$ средний вес пудры в упаковке превышает норму $\Rightarrow p = 0.0359.$

(2) t-критерий Стьюдента

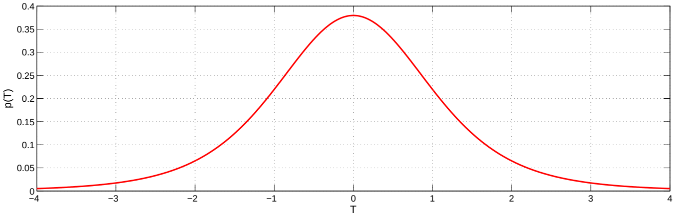
выборка: $X^n = (X_1, \ldots, X_n) \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ неизвестна;

нулевая гипотеза: $H_0\colon \mu = \mu_0$;

альтернатива: $H_1\colon \mu < \neq > \mu_0$;

статистика: $T(X^n) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$;

$T(X^n) \sim St(n-1)$ при H_0;



достигаемый уровень значимости:

$$p(t) = \begin{cases} 1 - tcdf(t, n-1), & H_1\colon \mu > \mu_0, \\ tcdf(t, n-1), & H_1\colon \mu < \mu_0, \\ 2 \cdot (1 - tcdf(|t|, n-1)), & H_1\colon \mu \neq \mu_0. \end{cases}$$

(2) t-критерий Стьюдента

Пример: в выборке из 9 пластиковых гаек средний диаметр составляет 3.1 см, стандартное отклонение — 1 см. Предполагается, что стандартный диаметр для таких гаек — 4 см.

$H_0:$ средний диаметр гаек в выборке соответствует стандарту.
$H_1:$ средний диаметр гаек в выборке не соответствует стандарту $\Rightarrow$ $p = 0.0271.$

(3) хи-квадрат

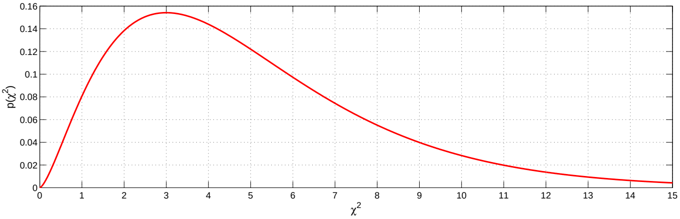
выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n) \sim N(\mu, \sigma^2)$;

нулевая гипотеза: $H_0\colon \sigma = \sigma_0$;

альтернатива: $H_1\colon \sigma <\neq> \sigma_0$;

статистика: $\chi^2(X^n) = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$;

$\chi^2(X^n) \sim \chi^2_{n-1}$ при H_0;



достигаемый уровень значимости:

$$p(\chi^2) = \begin{cases} 1 - chi2cdf(\chi^2, n-1), & H_1\colon \sigma > \sigma_0, \\ chi2cdf(\chi^2, n-1), & H_1\colon \sigma < \sigma_0, \\ 2 \cdot \min\left(1 - chi2cdf(\chi^2, n-1), chi2cdf(\chi^2, n-1)\right), & H_1\colon \sigma \neq \sigma_0. \end{cases}$$

(3) хи-квадрат

Пример: при производстве микрогидравлической системы делается инъекция жидкости. Дисперсия объёма жидкости — критически важный параметр, установленный стандартом на уровне 9 кв.мл. В выборке из 25 микрогидравлических систем дисперсия объёма жидкости составляет 12 кв.мл.

$H_0:$ дисперсия объёма жидкости в выборке соответствует стандарту.
$H_1:$ дисперсия объёма жидкости в выборке не соответствует стандарту $\Rightarrow$ $p = 0.254$.
$H_1:$ дисперсия объёма жидкости в выборке превышает допустимое значение $\Rightarrow p = 0.127$.

(4) Z-критерий

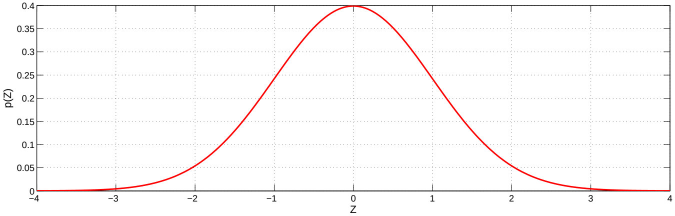
выборки: $X_1^{n_1} = (X_{11}, \dots, X_{1n_1}) \sim N(\mu_1, \sigma^2)$,
$X_2^{n_2} = (X_{21}, \dots, X_{2n_2}) \sim N(\mu_2, \sigma^2)$, σ известна;

нулевая гипотеза: $H_0\colon \mu_1 = \mu_2$;

альтернатива: $H_1\colon \mu_1 <\neq> \mu_2$;

статистика: $Z(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma \Big/ \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$;

$Z(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) \sim N(0,1)$ при H_0;



достигаемый уровень значимости:

$$p(z) = \begin{cases} 1 - ncdf(z, 0, 1), & H_1\colon \mu_1 > \mu_2, \\ ncdf(z, 0, 1), & H_1\colon \mu_1 < \mu_2, \\ 2 \cdot (1 - ncdf(|z|, 0, 1)), & H_1\colon \mu_1 \neq \mu_2. \end{cases}$$

(4) Z-критерий

Пример: два отдела сбыта сравниваются по коэффициенту результативности при выполнении схожих операций. В первом отделе на 9 операциях среднее значение коэффициента результативности составило 1.2, во втором на 16 операциях — 1.7. Дисперсии коэффициента результативности в обоих отделах равны 2.075.

H_0: средняя результативность в обоих отделах одинакова.
H_1: средняя результативность в двух отделах различается $\Rightarrow p = 0.405$.
H_1: средняя результативность второго отдела выше $\Rightarrow p = 0.202$.

(5) t-критерий Стьюдента

выборки: $X_1^{n_1} = (X_{11}, \dots, X_{1n_1}) \sim N(\mu_1, \sigma^2)$,

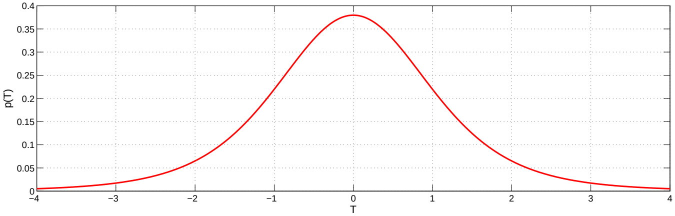
$X_2^{n_2} = (X_{21}, \dots, X_{2n_2}) \sim N(\mu_2, \sigma^2)$, σ неизвестна;

нулевая гипотеза: $H_0 \colon \mu_1 = \mu_2$;

альтернатива: $H_1 \colon \mu_1 <\neq> \mu_2$;

статистика: $T(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S \Big/ \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \quad S = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$;

$T(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) \sim St(n_1 + n_2 - 2)$ при H_0;



достигаемый уровень значимости:

$$p(t) = \begin{cases} 1 - tcdf(t, n_1 + n_2 - 2), & H_1 \colon \mu > \mu_0, \\ tcdf(t, n_1 + n_2 - 2), & H_1 \colon \mu < \mu_0, \\ 2 \cdot (1 - tcdf(|t|, n_1 + n_2 - 2)), & H_1 \colon \mu \neq \mu_0. \end{cases}$$

(5) t-критерий Стьюдента

Пример: чипсы продаются в тридцатиграммовых пакетах двух разновидностей. В выборке из 12 пачек каждого вида средние веса равны 31.75 г и 28.67 г, дисперсии — 112.25 г^2 и 66.64 г^2.

H_0: количество чипсов в упаковках двух разновидностей совпадает.
H_1: количество чипсов в упаковках двух разновидностей различается $\Rightarrow$ $p = 0.433$.

(6) Z-критерий

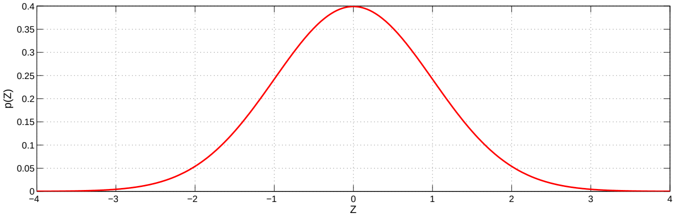
выборки: $X_1^{n_1} = (X_{11}, \dots, X_{1n_1}) \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right), \sigma_1$ известна;
$X_2^{n_2} = (X_{21}, \dots, X_{2n_2}) \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right), \sigma_2$ известна;

нулевая гипотеза: $H_0\colon \mu_1 = \mu_2;$

альтернатива: $H_1\colon \mu_1 <\neq> \mu_2;$

статистика: $Z\left(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}\right) = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)}};$

$Z\left(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}\right) \sim N(0,1)$ при H_0;



достигаемый уровень значимости:

$$p(z) = \begin{cases} 1 - ncdf\left(z, 0, 1\right), & H_1\colon \mu_1 > \mu_2, \\ ncdf\left(z, 0, 1\right), & H_1\colon \mu_1 < \mu_2, \\ 2 \cdot \left(1 - ncdf\left(|z|, 0, 1\right)\right), & H_1\colon \mu_1 \neq \mu_2. \end{cases}$$

(6) Z-критерий

Пример: известно, что одна из линий по расфасовке чипсов даёт упаковки с более вариабельным весом продукта, чем вторая. Дисперсии равны 0.000576 г^2 и 0.001089 г^2 соответственно, средние значения веса в выборках из 13 и 8 элементов — 80.02 г и 79.98 г.

H_0: средний вес продукта в упаковках, произведённых на двух линиях, совпадает.
H_1: средние веса продукта в упаковках, произведённых на двух линиях, различаются $\Rightarrow p = 0.001$.

(7) t-критерий Стьюдента / Аспина-Уэлша (проблема Беренца-Фишера)

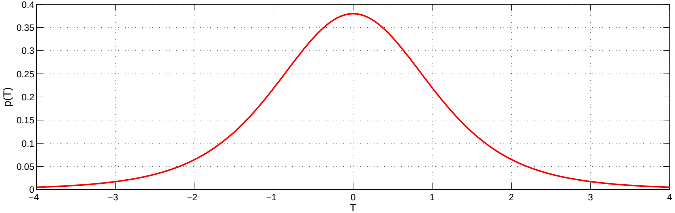
выборки: $X_1^{n_1} = (X_{11}, \dots, X_{1n_1}) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, σ_1 неизвестна;
$X_2^{n_2} = (X_{21}, \dots, X_{2n_2}) \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, σ_2 неизвестна;

нулевая гипотеза: $H_0\colon \mu_1 = \mu_2$;

альтернатива: $H_1\colon \mu_1 <\neq> \mu_2$;

статистика: $T(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$, $\nu = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{S_1^4}{n_1^2(n_1-1)} + \frac{S_2^4}{n_2^2(n_2-1)}}$;

$T(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) \sim\approx St(\nu)$ при H_0;



достигаемый уровень значимости:

$$p(t) = \begin{cases} 1 - tcdf(t, \nu), & H_1\colon \mu > \mu_0, \\ tcdf(t, \nu), & H_1\colon \mu < \mu_0, \\ 2 \cdot (1 - tcdf(|t|, \nu)), & H_1\colon \mu \neq \mu_0. \end{cases}$$

(7) t-критерий Стьюдента / Аспина-Уэлша (проблема Беренца-Фишера)

Пример: в связи со слиянием двух финансовых организаций решается вопрос о ликвидации отделов, выполняющих дублирующиеся функции. Рассматриваются две команды, занимающиеся сбытом похожих продуктов; первая продаёт 4 продукта, вторая — 9. Для каждого из продуктов рассчитывается уровень принесённой прибыли на одного работника за две недели, средние значения составляют 3166.00 и 2240.40, дисперсии — 6328.27 и 221 661.3.

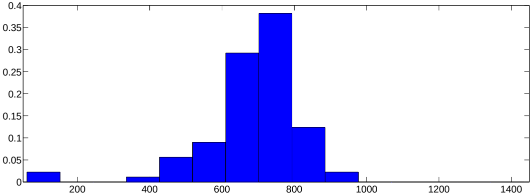
H_0: эффективность работы двух команд одинакова.
H_1: эффективность работы двух команд различна $\Rightarrow p = 1.342 \times 10^{-4}$.

Продолжительность жизни крыс

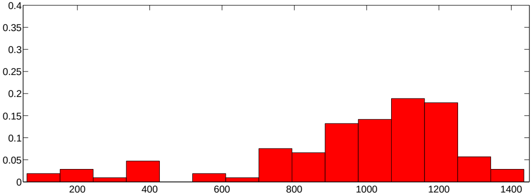
Walford and Weindruch, 1988, The Retardation of Aging and Disease by Dietary Restriction: в исследовании принимало участие 194 крысы. 105 из них держали на строгой диете, оставшиеся 89 — на диете ad libitum. Имеющиеся данные: продолжительность жизни крыс в каждой из групп.

Вопрос: влияет ли диета на продолжительность жизни?

Продолжительность жизни крыс

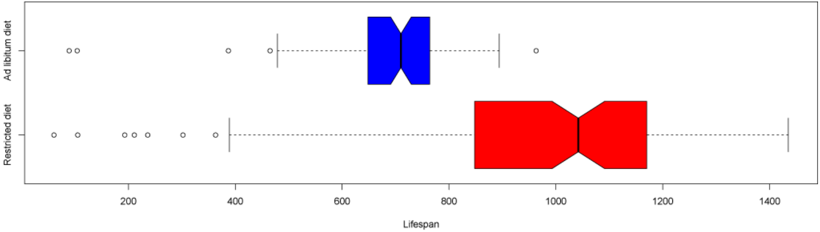


Продолжительность жизни крыс на диете ad libitum $(n = 89)$



Продолжительность жизни крыс на строгой диете $(n = 105)$

Продолжительность жизни крыс



Ящик с усами

От центра к краям:

- медиана;
- 95% доверительный интервал для медианы;
- квартили;
- точки данных, ближайшие (изнутри) к концу отрезка длиной $1.5 \times IQR$;
- точки, не попадающие в этот интервал.

Продолжительность жизни крыс

H_0: продолжительность жизни крыс не меняется при ограничении диеты.

H_1: крысы на строгой диете живут дольше.
Применяем критерий Стьюдента для двух выборок с неизвестными неравными дисперсиями: $p = 2 \times 10^{-15}$; нижний 95% доверительный предел для увеличения продолжительности жизни — $CL = 227$.

H_1: средняя продолжительность жизни крыс меняется при ограничении диеты.
Применяем критерий Стьюдента для двух выборок с неизвестными неравными дисперсиями: $p = 4 \times 10^{-15}$; 95% доверительный интервал для изменения продолжительности жизни — $CI = [217, 344]$.

Продолжительность жизни крыс

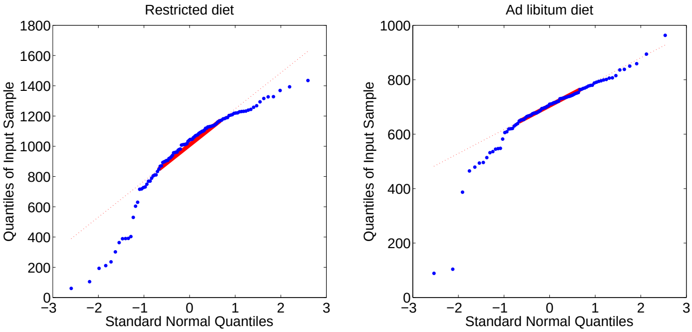
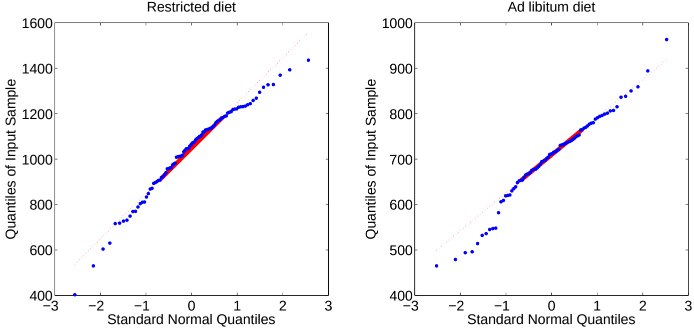


График Q-Q (квантиль-квантиль)

Критерий Шапиро-Уилка отклоняет гипотезу нормальности: $p_1 = 1.7 \times 10^{-6}, p_2 = 1.5 \times 10^{-7}$.

Продолжительность жизни крыс

Возьмём усечённую выборку:



$n_1 = 96, \quad n_2 = 86.$

Критерий Шапиро-Уилка: $p_1 = 0.0443, p_2 = 0.0960.$
Критерий Стьюдента:

- для односторонней альтернативы $p = 4 \times 10^{-32}, \quad CL = 298;$
- для двусторонней альтернативы $p = 9 \times 10^{-32}, \quad CI = [290, 382]\,.$

(8) t-критерий Стьюдента для связных выборок

выборки: $X_1^n = (X_{11}, \ldots, X_{1n}) \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$,
$X_2^n = (X_{21}, \ldots, X_{2n}) \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$, выборки связные;

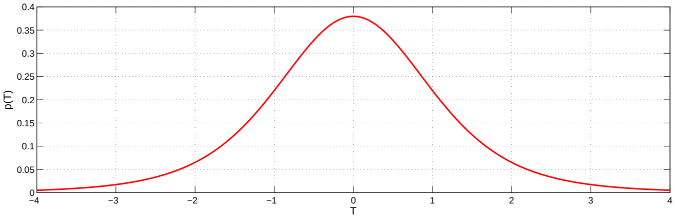
нулевая гипотеза: $H_0\colon \mu_1 = \mu_2$;

альтернатива: $H_1\colon \mu_1 <\neq> \mu_2$;

статистика: $T\left(X_1^n, X_2^n\right) = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S/\sqrt{n}}, \quad S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left(D_i - \bar{D}\right)^2}$,

$D_i = X_{1i} - X_{2i}$;

$T\left(X_1^n, X_2^n\right) \sim St(n-1)$ при H_0;



достигаемый уровень значимости:

$$p(t) = \begin{cases} 1 - tcdf\left(t, n-1\right), & H_1\colon \mu > \mu_0, \\ tcdf\left(t, n-1\right), & H_1\colon \mu < \mu_0, \\ 2\cdot\left(1 - tcdf\left(|t|, n-1\right)\right), & H_1\colon \mu \neq \mu_0. \end{cases}$$

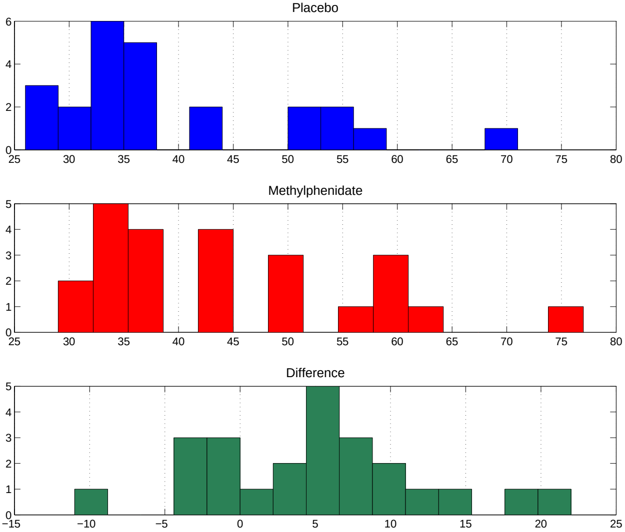
Метилфенидат

Пример: (Pearson et al, 2003, Treatment effects of methylphenidate on behavioral adjustment in children with mental retardation and ADHD) исследовалось влияние метилфенидата на способность к подавлению импульсивных поведенческих реакций умственно отсталых детей с синдромом дефицита внимания и гиперактивности. Каждый испытуемый в течение недели принимал либо препарат, либо плацебо, а в конце недели проходил тест. На втором этапе плацебо и препарат менялись, после недельного курса каждый испытуемый проходил второй тест.

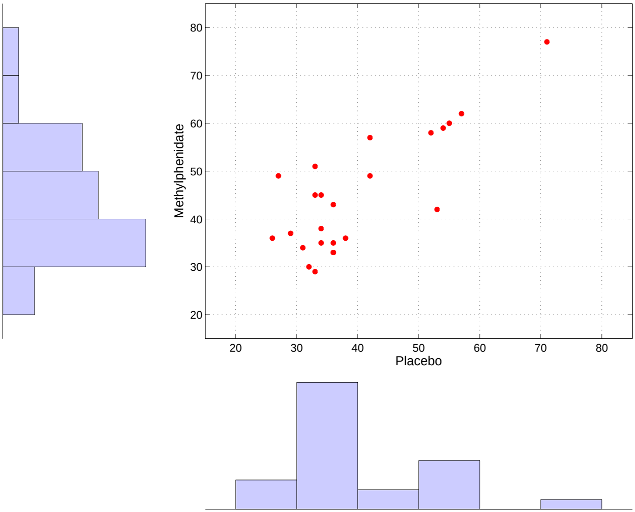
Для 24 испытуемых известны результаты в норме и после недельного курса препарата.

Эффективен ли препарат? Каков его эффект?

Метилфенидат



Метилфенидат



Метилфенидат

H_0: терапия неэффективна, способность к подавлению импульсивных поведенческих реакций не меняется.

H_1: в результате терапии способность к подавлению импульсивных поведенческих реакций увеличивается.
Применяем парный критерий Стьюдента: $p = 0.0019$; верхний 95% доверительный предел для увеличения — $CU = -2.3212$.

H_1: в результате терапии способность к подавлению импульсивных поведенческих реакций меняется.
Применяем парный критерий Стьюдента: $p = 0.0038$; 95% доверительный интервал для изменения — $CI = [-8.1414, -1.7752]$.

Игнорируем связь между выборками и применим обычный двухвыборочный критерий Стьюдента:

- для односторонней альтернативы $p = 0.0766$, $CU = 0.7734$;
- для двусторонней альтернативы $p = 0.1532$, $CI = [-11.8313, 1.9146]$.

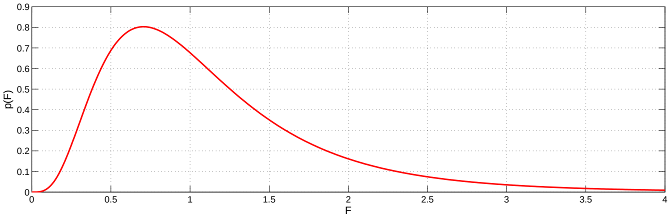
(9) F-критерий Фишера

выборки: $X_1^{n_1} = (X_{11}, \dots, X_{1n_1}) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$,
$X_2^{n_2} = (X_{21}, \dots, X_{2n_2}) \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$;

нулевая гипотеза: $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$;

альтернатива: $H_1: \sigma_1 <\neq> \sigma_2$;

статистика: $F(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \frac{S_1^2}{S_2^2}$;
$F(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$ при H_0;

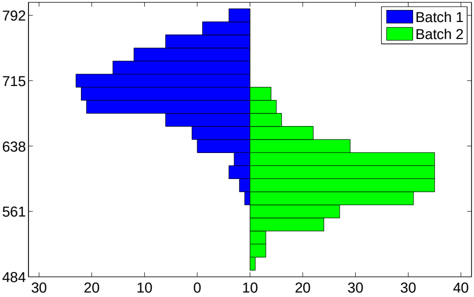


достигаемый уровень значимости:

$$p(f) = \begin{cases} fcdf\left(1/f, n_2 - 1, n_1 - 1\right), & H_1: \sigma > \sigma_0, \\ fcdf\left(f, n_1 - 1, n_2 - 1\right), & H_1: \sigma < \sigma_0, \\ 2 \cdot \min\left(fcdf\left(1/f, n_2 - 1, n_1 - 1\right), fcdf\left(f, n_1 - 1, n_2 - 1\right)\right), & H_1: \sigma \neq \sigma_0. \end{cases}$$

(9) F-критерий Фишера

Пример: NIST industry ceramics consortium for strength optimization of ceramic strength, 1996: собраны данные о прочности материала 440 керамических изделий из двух партий по 220 в каждой. Цель — проверить, одинакова ли дисперсия прочности в разных партиях.



Гипотеза нормальности не отклоняется критерием Шапиро-Уилка $(p_1 = 0.2062, p_2 = 0.7028)$.
Критерий Фишера: $p = 0.1721, \quad CI = [0.9225, 1.5690]$.

Z-критерий для доли

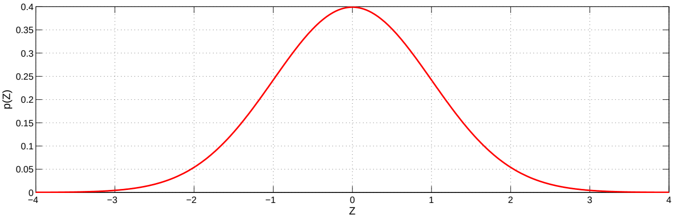
выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n) \sim Ber(p);$

нулевая гипотеза: $H_0\colon p = p_0;$

альтернатива: $H_1\colon p <\neq> p_0;$

статистика: $Z(X^n) = \frac{\hat{p} - p_0 - \frac{1}{2n}}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}};$

$Z(X^n) \sim N(0,1)$ при $H_0;$



достигаемый уровень значимости:

$$p - value(z) = \begin{cases} 1 - ncdf(z, 0, 1), & H_1\colon p > p_0, \\ ncdf(z, 0, 1), & H_1\colon p < p_0, \\ 2 \cdot (1 - ncdf(|z|, 0, 1)), & H_1\colon p \neq p_0. \end{cases}$$

Z-критерий для доли

Пример: (Кобзарь, 2006, Прикладная математическая статистика, задача 227) нормируемый уровень дефектных изделий в партии $p_0 = 0.05$. Из партии извлечена выборка $n = 20$ изделий, в которой обнаружены при проверке $t = 2$ дефектных.
Необходимо проверить гипотезу о том, что доля дефектных изделий в партии не превосходит нормируемого значения.

$H_0: p = p_0$
$H_1: p > p_0 \Rightarrow p - value = 0.15.$
$H_1: p \neq p_0 \Rightarrow p - value = 0.30.$
$H_1: p < p_0 \Rightarrow p - value = 0.85.$

Точный критерий для доли

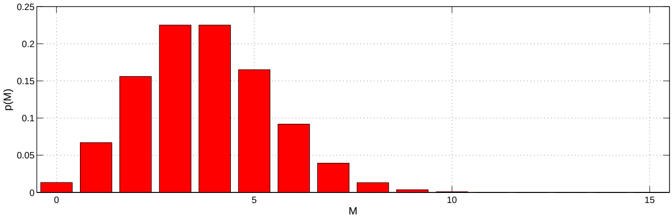
выборка: $X^n = (X_1, \ldots, X_n) \sim Ber(p)$;

нулевая гипотеза: $H_0\colon p = p_0$;

альтернатива: $H_1\colon p <\neq> p_0$;

статистика: $T(X^n) = \sum_{i=1}^n X_i$;

$T(X^n) \sim Bin(n, p_0)$ при H_0;

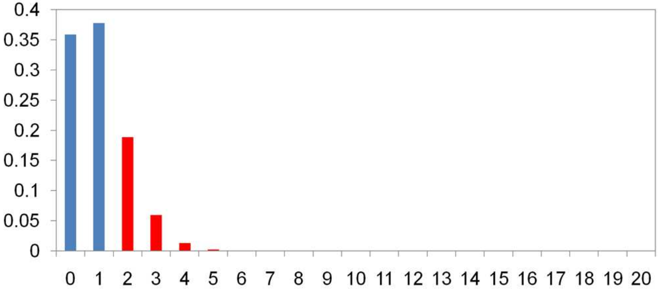


достигаемый уровень значимости:

$$p - value\,(t) = \begin{cases} binocdf\,(t, n, p), & H_1\colon p > p_0, \\ 1 - binocdf\,(t-1, n, p), & H_1\colon p < p_0, \\ \ldots, & H_1\colon p \neq p_0. \end{cases}$$

Точный критерий для доли

Тот же пример:



$H_0 : p = p_0$
$H_1 : p > p_0 \Rightarrow p - value = 0.26.$
$H_1 : p \neq p_0 \Rightarrow p - value = 0.26.$
$H_1 : p < p_0 \Rightarrow p - value = 0.92.$

Доверительные интервалы

$\frac{t-np}{\sqrt{np(1-p)}} \approx N(0,1)$.

$$P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \frac{t-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \approx 1-\alpha,$$

$$P\left(\frac{t}{n} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \le p \le \frac{t}{n} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \approx 1-\alpha;$$

подставим вместо p оценку $\hat{p} = \frac{t}{n}$, получим

$$\hat{p} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

— $100(1-\alpha)\%$ доверительный интервал Вальда (приближённый).

В примере 95% доверительный интервал Вальда
$CI_{Wald} = [-0.0315, 0.2315]$.

Доверительные интервалы

Более точный доверительный интервал Уилсона:

$$\frac{\hat{p} + \frac{1}{2n} z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} + \frac{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{4n^2}}}{1 + \frac{1}{n} z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}.$$

В примере 95% доверительный интервал Уилсона $CI_{Wilson} = [0.0279, 0.3010]$.

Z-критерий для двух долей

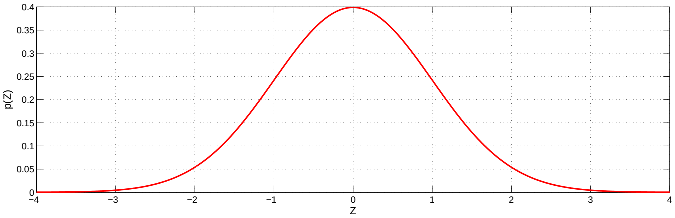
выборки: $X_1^{n_1} = (X_{11}, \dots, X_{1n_1}) \sim Ber(p_1),$
$X_2^{n_2} = (X_{21}, \dots, X_{2n_2}) \sim Ber(p_2);$

нулевая гипотеза: $H_0\colon p_1 = p_2;$

альтернатива: $H_1\colon p_1 <\neq> p_2;$

статистика: $Z\left(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}\right) = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{P(1-P)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}, \quad P = \frac{\hat{p}_1 n_1 + \hat{p}_2 n_2}{n_1+n_2};$

$Z\left(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}\right) \sim N(0,1)$ при H_0;



достигаемый уровень значимости:

$$p - value\,(z) = \begin{cases} 1 - ncdf\,(z, 0, 1)\,, & H_1\colon p_1 > p_2, \\ ncdf\,(z, 0, 1)\,, & H_1\colon p_1 < p_2, \\ 2 \cdot (1 - ncdf\,(|z|, 0, 1))\,, & H_1\colon p_1 \neq p_2. \end{cases}$$

Z-критерий для двух долей

Пример: (Кобзарь, 2006, Прикладная математическая статистика, задача 226) в двух партиях объёмами $n_1 = 100$ шт. и $n_2 = 200$ шт. обнаружено соответственно $t_1 = 3$ и $t_2 = 5$ дефектных приборов.
Необходимо проверить гипотезу о равенстве долей дефектных приборов в партиях.

$H_0 : p_1 = p_2.$
$H_1 : p_1 < p_2 \Rightarrow p = 0.6.$
$H_1 : p_1 \neq p_2 \Rightarrow p = 0.8.$
$H_1 : p_1 > p_2 \Rightarrow p = 0.4.$

Точный критерий Фишера для двух долей

Будет рассмотрен позже.

Прикладная статистика
2. Параметрическая проверка гипотез.

Рябенко Евгений
riabenko.e@gmail.com