ВМК МГУ

Задание 1. Байесовские рассуждения

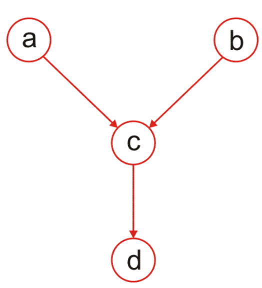
Курс: Байесовские методы в машинном обучении, 2016

Начало выполнения задания: 3 сентября
Срок сдачи: **17 сентября (суббота), 23:59.**
Среда для выполнения задания – PYTHON 2.

Содержание

Вероятностные модели посещаемости курса

Рассмотрим модель посещаемости студентами ВУЗа одной лекции по курсу. Пусть аудитория данного курса состоит из студентов профильного факультета, а также студентов других факультетов. Обозначим через a количество студентов, поступивших на профильный факультет, а через b – количество студентов других факультетов. Пусть студенты профильного факультета посещают лекцию с некоторой вероятностью p_1, а студенты остальных факультетов – с вероятностью p_2. Обозначим через c количество студентов, посетивших данную лекцию. Тогда случайная величина $c|a, b$ есть сумма двух случайных величин, распределённых по биномиальному закону $\text{Bin}(a, p_1)$ и $\text{Bin}(b, p_2)$ соответственно. Пусть далее на лекции по курсу ведётся запись студентов. При этом каждый студент записывается сам, а также, быть может, записывает своего товарища, которого на лекции на самом деле нет. Пусть студент записывает своего товарища с некоторой вероятностью p_3. Обозначим через d общее количество записавшихся на данной лекции. Тогда случайная величина $d|c$ представляет собой сумму c и случайной величины, распределённой по биномиальному закону $\text{Bin}(c, p_3)$. Для завершения задания вероятностной модели осталось определить априорные вероятности для a и для b. Пусть обе эти величины распределены равномерно в своих интервалах $[a_{min}, a_{max}]$ и $[b_{min}, b_{max}]$ (дискретное равномерное распределение). Таким образом, мы определили следующую вероятностную модель:

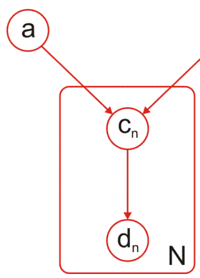


$$\begin{aligned}
&p(a, b, c, d) = p(d|c)p(c|a, b)p(a)p(b),\\
&d|c \sim c + \text{Bin}(c, p_3),\\
&c|a, b \sim \text{Bin}(a, p_1) + \text{Bin}(b, p_2),\\
&a \sim \text{Unif}[a_{min}, a_{max}],\\
&b \sim \text{Unif}[b_{min}, b_{max}].
\end{aligned} \tag{1}$$

Рассмотрим несколько упрощённую версию модели 1. Известно, что биномиальное распределение $\text{Bin}(n, p)$ при большом количестве испытаний и маленькой вероятности успеха может быть с высокой точностью приближено пуассоновским распределением $\text{Poiss}(\lambda)$ с $\lambda = np$. Известно также, что сумма двух пуассоновских распределений с параметрами λ_1 и λ_2 есть пуассоновское распределение с параметром $\lambda_1 + \lambda_2$ (для биномиальных распределений это неверно). Таким образом, мы можем сформулировать вероятностную модель, которая является приближённой версией модели 1:

$$\begin{aligned}
&p(a,b,c,d) = p(d|c)p(c|a,b)p(a)p(b),\\
&d|c \sim c + \mathrm{Bin}(c, p_3),\\
&c|a,b \sim \mathrm{Poiss}(ap_1 + bp_2),\\
&a \sim \mathrm{Unif}[a_{min}, a_{max}],\\
&b \sim \mathrm{Unif}[b_{min}, b_{max}].
\end{aligned} \tag{2}$$

Рассмотрим теперь модель посещений нескольких лекций курса. Будем считать, что посещения отдельных лекций являются независимыми. Тогда:



$$\begin{aligned}
&p(a,b,c_1,\dots,c_N,d_1,\dots,d_N) = p(a)p(b)\prod_{n=1}^{N} p(d_n|c_n)p(c_n|a,b),\\
&d_n|c_n \sim c_n + \mathrm{Bin}(c_n, p_3),\\
&c_n|a,b \sim \mathrm{Bin}(a, p_1) + \mathrm{Bin}(b, p_2),\\
&a \sim \mathrm{Unif}[a_{min}, a_{max}],\\
&b \sim \mathrm{Unif}[b_{min}, b_{max}].
\end{aligned} \tag{3}$$

По аналогии с моделью 2 можно сформулировать упрощённую модель для модели 3:

$$\begin{aligned}
&p(a,b,c_1,\dots,c_N,d_1,\dots,d_N) = p(a)p(b)\prod_{n=1}^{N} p(d_n|c_n)p(c_n|a,b),\\
&d_n|c_n \sim c_n + \mathrm{Bin}(c_n, p_3),\\
&c_n|a,b \sim \mathrm{Poiss}(ap_1 + bp_2),\\
&a \sim \mathrm{Unif}[a_{min}, a_{max}],\\
&b \sim \mathrm{Unif}[b_{min}, b_{max}].
\end{aligned} \tag{4}$$

Задание состоит из трёх вариантов.

Вариант 1

Рассматривается модель 2 с параметрами $a_{min} = 75$, $a_{max} = 90$, $b_{min} = 500$, $b_{max} = 600$, $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.01$, $p_3 = 0.3$. Провести на компьютере следующие исследования:

1. Найти математические ожидания и дисперсии априорных распределений для всех параметров a, b, c, d.

2. Пронаблюдать, как происходит уточнение прогноза для величины c по мере прихода новой косвенной информации. Для этого построить графики и найти мат.ожидание и дисперсию для распределений $p(c)$, $p(c|a)$, $p(c|b)$, $p(c|d)$, $p(c|a,b)$, $p(c|a,b,d)$ при параметрах a, b, d, равных мат.ожиданиям своих априорных распределений, округленных до ближайшего целого.

3. Определить, какая из величин a, b, d вносит наибольший вклад в уточнение прогноза для величины c (в смысле дисперсии распределения). Для этого убедиться в том, что $\mathbb{D}[c|d] < \mathbb{D}[c|b]$ и $\mathbb{D}[c|d] < \mathbb{D}[c|a]$ для любых допустимых значений a, b, d. Найти множество точек (a,b) таких, что $\mathbb{D}[c|b] < \mathbb{D}[c|a]$. Являются ли множества $\{\,(a,b) \mid \mathbb{D}[c|b] < \mathbb{D}[c|a]\,\}$ и $\{\,(a,b) \mid \mathbb{D}[c|b] \geq \mathbb{D}[c|a]\,\}$ линейно разделимыми?

4. Провести временные замеры по оценке всех необходимых распределений $p(c)$, $p(c|a)$, $p(c|b)$, $p(c|d)$, $p(c|a,b)$, $p(c|a,b,d)$, $p(d)$.

5. Провести исследования из пп. 1–4 для точной модели 1 и сравнить результаты с аналогичными для модели 2. Привести пример оценки параметра, для которого проявляется разница между моделью 1 и 2. Объяснить причины подобного результата.

Взять в качестве диапазона допустимых значений для величины c интервал $[0, a_{max} + b_{max}]$, а для величины d – интервал $[0, 2(a_{max} + b_{max})]$.

При оценке выполнения задания будет учитываться эффективность программного кода.

Вариант 2

Рассматривается модель 2 с параметрами $a_{min} = 75$, $a_{max} = 90$, $b_{min} = 500$, $b_{max} = 600$, $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.01$, $p_3 = 0.3$. Провести на компьютере следующие исследования:

1. Найти математические ожидания и дисперсии априорных распределений для всех параметров a, b, c, d.

2. Пронаблюдать, как происходит уточнение прогноза для величины b по мере прихода новой косвенной информации. Для этого построить графики и найти мат.ожидание и дисперсию для распределений $p(b)$, $p(b|a)$, $p(b|d)$, $p(b|a,d)$ при параметрах a, d, равных мат.ожиданиям своих априорных распределений, округленных до ближайшего целого.

3. Определить, при каких соотношениях параметров p_1, p_2 изменяется относительная важность параметров a, b для оценки величины c. Для этого найти множество точек $\{ (p_1, p_2) \mid \mathbb{D}[c|b] < \mathbb{D}[c|a] \}$ при a, b, равных мат.ожиданиям своих априорных распределений, округленных до ближайшего целого. Являются ли множества $\{ (p_1, p_2) \mid \mathbb{D}[c|b] < \mathbb{D}[c|a] \}$ и $\{ (p_1, p_2) \mid \mathbb{D}[c|b] \geq \mathbb{D}[c|a] \}$ линейно разделимыми?

4. Провести временные замеры по оценке всех необходимых распределений $p(c)$, $p(c|a)$, $p(c|b)$, $p(b|a)$, $p(b|d)$, $p(b|a,d)$, $p(d)$.

5. Провести исследования из пп. 1–4 для точной модели 1 и сравнить результаты с аналогичными для модели 2. Привести пример оценки параметра, для которого проявляется разница между моделью 1 и 2. Объяснить причины подобного результата.

Взять в качестве диапазона допустимых значений для величины c интервал $[0, a_{max} + b_{max}]$, а для величины d – интервал $[0, 2(a_{max} + b_{max})]$.

При оценке выполнения задания будет учитываться эффективность программного кода.

Вариант 3

Рассматривается модель 4 с параметрами $a_{min} = 75$, $a_{max} = 90$, $b_{min} = 500$, $b_{max} = 600$, $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.01$, $p_3 = 0.3$, $N = 50$. Провести на компьютере следующие исследования:

1. Найти математические ожидания и дисперсии априорных распределений для всех параметров a, b, c_n, d_n.

2. Реализовать генератор выборки $d_1, \ldots, d_N$ из модели при заданных значениях параметров a, b.

3. Пронаблюдать, как происходит уточнение прогноза для величины b по мере прихода новой косвенной информации. Для этого построить графики и найти мат.ожидание и дисперсию для распределений $p(b)$, $p(b|d_1), \ldots, p(b|d_1, \ldots, d_N)$, где выборка $d_1, \ldots, d_N$ 1) сгенерирована из модели при параметрах a, b, равных мат.ожиданиям своих априорных распределений, округленных до ближайшего целого и 2) $d_1 = \cdots = d_N$, где d_n равно мат.ожиданию своего априорного распределения, округленного до ближайшего целого. Провести аналогичный эксперимент, если дополнительно известно значение a. Сравнить результаты двух экспериментов.

4. Провести временные замеры по оценке всех необходимых распределений $p(c_n)$, $p(d_n)$, $p(b|d_1, \ldots, d_n)$, $p(b|a, d_1, \ldots, d_n)$.

5. Провести исследования из пп. 1–4 для точной модели 3 и сравнить результаты с аналогичными для модели 4.

Взять в качестве диапазона допустимых значений для величины c интервал $[0, a_{max} + b_{max}]$, а для величины d – интервал $[0, 2(a_{max} + b_{max})]$.

При оценке выполнения задания будет учитываться эффективность программного кода.

Оформление задания

Выполненное задание следует отправить письмом по адресу *bayesml@gmail.com* с заголовком письма

«[БММО15] Задание 1, Фамилия Имя, Номер варианта».

Убедительная просьба присылать выполненное задание только один раз с окончательным вариантом. Также убедительная просьба строго придерживаться заданных ниже прототипов реализуемых функций (для проверки задания используются, в том числе, автоматические процедуры, которые являются чувствительными к неверным прототипам).

Номер варианта вычисляется как $(s \; mod \; 3) + 1$, где s — сумма кодов букв своей фамилии в кодировке UTF-8. В питоне это выглядит так:

$$sum([ord(x) \; for \; x \; in \; u'\text{Фамилия}']) \,\% \, 3 + 1$$

Присланный вариант задания должен содержать в себе:

- Текстовый файл в формате PDF с указанием ФИО и номера варианта, содержащий описание всех проведённых исследований (вывод необходимых формул, графики, анализ и выводы). Файл должен называться surname.pdf, где surname – фамилия студента.

- Python модуль со всеми требуемыми функциями в соответствии с прототипами, приведенными ниже. Модуль должен называться surname.py, где surname – фамилия студента.

Требования к реализации

Все исходные коды должны располагаться в одном модуле surname.py. Распределения должны быть реализованы в виде **отдельных функций**. Прототип функции для оценки распределения $p(c|a, d)$ показан в таблице 1. Прототипы функций для других распределений выглядят аналогично. Если в распределении переменных до или после | несколько, то в названии функции они идут в алфавитном порядке. Функция для оценки распределения $p(b|a, d_1, \ldots, d_N)$ для модели 3 имеет название pb_ad, а входной параметр d является массивом длины N.

Таблица 1: Прототип функции для оценки распределения $p(c|a,d)$ для модели 1 и 2

p, c = pc_ad(a, d, params, model)
ВХОД a – значение параметра a; d – значение параметра d; *params* – набор параметров вероятностной модели, словарь с ключами 'amin', 'amax', 'bmin', 'bmax', 'p1', 'p2', 'p3'; *model* – номер модели;
ВЫХОД p – распределение вероятности, numpy array длины len(c); c – носитель распределения, numpy array.

Таблица 2: Прототип функции для генерации выборки из распределения $p(d_1, \ldots, d_N|a,b)$ для модели 3 и 4

d = generate(N, a, b, params, model)
ВХОД N – количество лекций; a – значение параметра a; b – значение параметра b; *params* – набор параметров вероятностной модели, словарь с ключами 'amin', 'amax', 'bmin', 'bmax', 'p1', 'p2', 'p3'; *model* – номер модели;
ВЫХОД d – значения $d_1, \ldots, d_N$, numpy array длины N.