# Алгоритмическая реализация методологии оценивания состава инвестиционных портфелей

Морозов Алексей Олегович[1] ao.morozov@phystech.edu
Моттль Вадим Вячеславович[2] vmottl@yandex.ru
Красоткина Ольга Вячеславовна[3] okrasotkina@markovprocesses.com
Медведев Алексей Владимирович[4] fortunato.mav@gmail.com

[1]Московский физико-технический институт
[2]ФИЦ "Информатика и управление" РАН
[3]Summit, NJ, USA, Markov Processes International
[4]Московский государственный университет

«Интеллектуализация обработки информации»
Гаэта, Италия
9 октября 2018

# Задача оценивания скрытого состава инвестиционного портфеля – Factor Search

Известные доходности портфеля: $y_t, t = 1, \ldots, T$
Доходности очень большого числа биржевых активов:
$\mathbf{x}_t = (x_{t,i}, i = 1, \ldots, n) \in \mathbb{R}^n$
Модель Шарпа:

$$\begin{cases} \sum\limits_{t=1}^{T} \left( y_t - \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i x_{t,i} \right)^2 \longrightarrow \min(\beta_1, \ldots, \beta_n) \\ \underbrace{\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i = 1}_{\substack{\text{долевое} \\ \text{распределение} \\ \text{капитала}}}, \ \underbrace{\beta_i \geqslant 0}_{\substack{\text{запрет} \\ \text{заемного} \\ \text{капитала}}}, \ i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

Найти относительно небольшое подмножество активов, из которых фактически состоит портфель: $\hat{\mathbb{I}} \subset \mathbb{I}$, $\hat{n} = |\hat{\mathbb{I}}| \ll n = |\mathbb{I}|$

# Регуляризация – использование априорной информации о возможном составе

Основная идея работы — мыслить как инвестор. Какой портфель он предпочел бы?

1. Диверсификация вложений капитала, предпочтение малокоррелированных активов:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{x}_i^{\mathsf{T}}\mathbf{x}_j)\beta_j\beta_i \to \min$$

2. Стремление увеличить доходность портфеля, предпочтение доходных активов:

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^{n}\beta_i\bar{x}_i \to \max$$

# Теория Марковица о выборе инвестиционного портфеля

Минимум риска при фиксированной доходности:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} (\boldsymbol{x}_i^{\mathsf{T}} \boldsymbol{x}_j) \beta_j \beta_i \to \min \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \bar{x}_i \beta_i = \text{const} \end{cases}$$

Максимум доходности при фиксированном риске:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \bar{x}_i \beta_i \to \min \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} (\boldsymbol{x}_i^{\mathsf{T}} \boldsymbol{x}_j) \beta_j \beta_i = \text{const} \end{cases}$$

Это два взаимно противоречивые требования. Risk Tolerance — индивидуальная характеристика каждого инвестора. Регуляризующая функция, обеспечивающая баланс Марковица:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\boldsymbol{x}_i^{\mathsf{T}} \boldsymbol{x}_j) \beta_j \beta_i - \mu \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i \beta_i \longrightarrow \min$$

# Задача о восстановлении состава портфеля с регуляризацией Марковица

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(\boldsymbol{x}_i^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x}_j)\beta_j\beta_i - \alpha\sum\limits_{i=1}^{n}\bar{x}_i\beta_i + c\sum\limits_{t=1}^{T}\left(y_t - \sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i x_{t,i}\right)^2 \longrightarrow \min \\
\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i = 1,\ \beta_i \geqslant 0,\ i = 1,\ldots,n
\end{cases}
$$

Очень селективный критерий, что противоречит диверсификации

Хотим соблюсти регуляризацию Марковица и при этом иметь возможность регулировать размер портфеля

# Специальный алгоритм решения задачи выпуклого программирования

Наша задача о восстановлении состава портфеля:

$$\begin{cases} \gamma \sum\limits_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} 2\mu\beta_i, & \beta_i \leqslant \mu \\ \mu^2 + \beta_i^2, & \beta_i > \mu \end{pmatrix} + \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} (\boldsymbol{x}_i^{\mathsf{T}} \boldsymbol{x}_j) \beta_j \beta_i - \alpha \sum\limits_{i=1}^{n} \bar{x}_i \beta_i + \\ +c \sum\limits_{t=1}^{T} \left( y_t - \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i x_{t,i} \right)^2 \longrightarrow \min \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i = 1,\ \beta_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

В векторной форме:

$$\begin{cases} \gamma \sum\limits_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} 2\mu\beta_i, & \beta_i \leqslant \mu \\ \mu^2 + \beta_i^2, & \beta_i > \mu \end{pmatrix} + \boldsymbol{\beta}^{\mathsf{T}} \mathbf{X}\mathbf{X}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{\beta} - \alpha \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{\beta} + \\ +c \big( \mathbf{y} - \mathbf{X}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{\beta} \big)^{\mathsf{T}} \big( \mathbf{y} - \mathbf{X}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{\beta} \big) \longrightarrow \min \\ \mathbf{1}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{\beta} = 1,\ \boldsymbol{\beta} \geqslant \mathbf{0} \end{cases}$$

Преобразуем критерий:

$$\begin{cases} \dfrac{\gamma}{c+1}\sum\limits_{i=1}^{n}\begin{pmatrix} 2\mu\beta_i, & \beta_i \leqslant \mu \\ \mu^2+\beta_i^2, & \beta_i > \mu \end{pmatrix} - \dfrac{\alpha}{c+1}\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\beta} + \\ +\left(\frac{c}{c+1}\mathbf{y} - \mathbf{X}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\beta}\right)^{\mathsf{T}}\left(\frac{c}{c+1}\mathbf{y} - \mathbf{X}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\beta}\right) \longrightarrow \min \\ \mathbf{1}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\beta} = 1,\ \boldsymbol{\beta} \geqslant \mathbf{0} \end{cases}$$

Переобозначим коэффициенты и введем дополнительное обозначение:

$$\frac{c}{c+1}\mathbf{y} \to \mathbf{y}, \quad \frac{\gamma}{c+1} \to \gamma, \quad \frac{\alpha}{c+1} \to \alpha, \quad \delta = \left(\mathbf{y} - \mathbf{X}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\beta}\right) \in \mathbb{R}^{T}$$

Будем решать эквивалентную задачу:

$$\begin{cases} \gamma\sum\limits_{i=1}^{n}\begin{pmatrix} 2\mu\beta_i, & \beta_i \leqslant \mu \\ \mu^2+\beta_i^2, & \beta_i > \mu \end{pmatrix} - \alpha\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\beta} + \delta^{\mathsf{T}}\delta \longrightarrow \min(\delta, \beta) \\ \delta = \left(\mathbf{y} - \mathbf{X}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\beta}\right),\ \mathbf{1}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\beta} = 1,\ \boldsymbol{\beta} \geqslant \mathbf{0} \end{cases}$$

Далее после введения функции Лагранжа, приходим к двойственной задаче

$$W(\delta) = \gamma \sum_{i:\alpha\bar{x}_i + \boldsymbol{x}_i^{\mathsf{T}}\delta > 2\mu} \left[\frac{1}{4}(\alpha\bar{x}_i + \boldsymbol{x}_i^{\mathsf{T}}\delta)^2 - \mu^2\right] + \frac{1}{2}(\delta - \mathbf{y})^{\mathsf{T}}(\delta - \mathbf{y}) \to \min(\delta \in \mathbb{R}^{T})$$

# Алгоритм

$\mathbb{I}_{\delta_k} = \{i : \ \alpha\bar{x}_i + \boldsymbol{x}_i^{\mathsf{T}}\delta > 2\mu\}$

**Data:** $\mathbf{X}, \mathbf{y}$

**Input:** $\delta_0$

$W(\delta_0), \mathbb{I}_{\delta_0}$

**while** $\mathbb{I}_{\delta_{k+1}} \neq \mathbb{I}_{\delta_k}$ **do**

$\quad \hat{\delta}_{k+1} := \delta_k - \left[\nabla^2_{\delta\delta} W(\delta_k)\right]^{-1}\left[\nabla_\delta W(\delta_k)\right];$

$\quad W(\hat{\delta}_{k+1})$ **if** $W(\hat{\delta}_{k+1}) < W(\delta_k)$ **then**

$\quad\quad \delta_{k+1} := \hat{\delta}_{k+1};$

$\quad$ **else**

$\quad\quad f(z) = W(z\delta_k + (1 - z)\hat{\delta}_{k+1});$

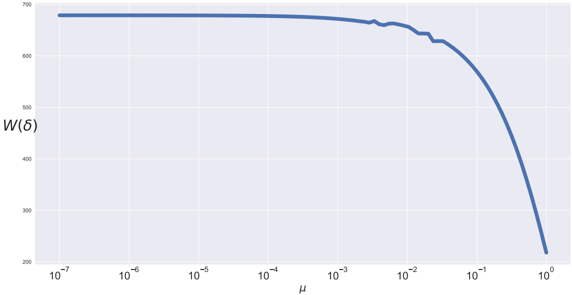
$\quad\quad z^* = \arg\min_{0 \leqslant z \leqslant 1} f(z);$

$\quad\quad \delta_{k+1} := z^*\delta_k + (1 - z^*)\hat{\delta}_{k+1};$

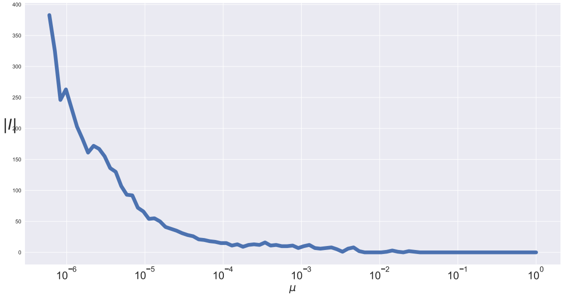
$\quad$ **end**

**end**

**Result:** $\delta, \mathbb{I}_\delta$




Оптимальные значения целевой функции с ростом параметра селективности




Уменьшение размера портфеля с увеличением параметра селективности $\mu$

# Эксперименты 1

$n = 650$ реальных биржевых активов месячной доходности
$T = 250$ временных измерений в месяцах
Модельные портфели, оптимальные по принципу баланса доходность-риск с разными коэффициентами селективности

| Selectivity | $\mu_1 = 10^{-6}$ | $\mu_2 = 10^{-4}$ | $\mu_3 = 10^{-2}$ | $\mu_4 = 10^{-1}$ | $\mu_5 = 10^{0}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert\mathbb{I}\rvert$ | $m_1 = 13$ | $m_2 = 11$ | $m_3 = 10$ | $m_4 = 7$ | $m_5 = 1$ |

Для каждого набора коэффициентов $\hat{\beta}_{\mu,i},\ i \in \hat{\mathbb{I}}_\mu$ мы вычислили временной ряд доходности $\mathbf{y}_\mu = (y_{\mu,t},\ t = 1, .., T) \in \mathbb{R}^T$, $y_{\mu,t} = \sum_{i\in\hat{\mathbb{I}}_\mu} \hat{\beta}_{\mu,i} x_{t,i} + \xi_t$, как последовательность случайных величин с 10%-ой дисперсией шума $\sigma^2(\xi_t) = 0.1\frac{1}{T}\sum\limits_{t=1}^{T}\left(y_t - \sum_{i\in\hat{\mathbb{I}}_\mu} \hat{\beta}_{\mu,i} x_{t,i}\right)^2$.

Слепой фактор-поиск:

$$\begin{cases} \sum\limits_{t=1}^{T} \left( y_t - \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i x_{t,i} \right)^2 \longrightarrow \min(\beta_1, \ldots, \beta_n) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i = 1, \ \beta_i \geqslant 0, \ i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

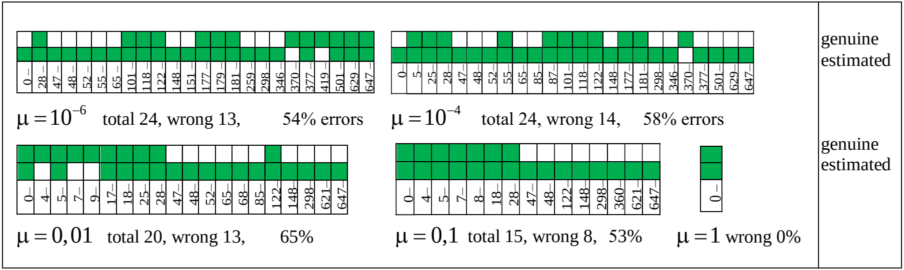



Рис.: Слепой фактор-поиск. Скрытые (верхняя строка) и наблюдаемые (нижняя) множества активных регрессоров для модельных портфелей с различным параметром селективности. Зеленые квадраты соответствуют активным регрессорам

Фактор-поиск с дополнительной регуляризацией:

$$\begin{cases} \gamma \sum\limits_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} 2\mu\beta_i, & \beta_i \leqslant \mu \\ \mu^2 + \beta_i^2, & \beta_i > \mu \end{pmatrix} + \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} (\boldsymbol{x}_i^{\mathsf{T}} \boldsymbol{x}_j) \beta_j \beta_i - \alpha \sum\limits_{i=1}^{n} \bar{x}_i \beta_i + \\ + c \sum\limits_{t=1}^{T} \left( y_t - \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i x_{t,i} \right)^2 \longrightarrow \min \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i = 1, \ \beta_i \geqslant 0, \ i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

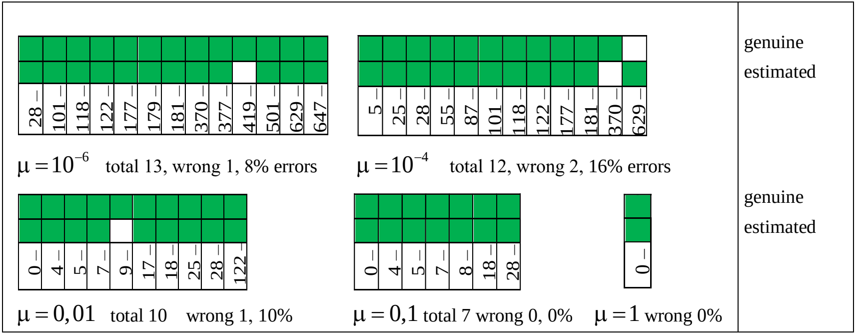



Рис.: Фактор-поиск на основе разумности портфелей

# Поиск подмножества активных регрессоров по принципу Beta Parity

Регуляризация Beta Parity — капитал вложен в выбранные активы в равных долях: $\beta_i \cong \mathrm{const}$, $i \in \hat{\mathbb{I}} \subset \mathbb{I}$
Регрессионный критерий Beta Parity:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i^2 \longrightarrow \min(\beta_1, \dots, \beta_n) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} (\boldsymbol{x}_i^{\mathsf{T}} \boldsymbol{x}_j) \beta_j \beta_i = d \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i = 1, \ \beta_i \geqslant 0, \ i = 1, \dots, n \end{cases}$$

$d$ — параметр риска, определяющий селективность

# Более сложное понимание диверсифицированности портфеля — Risk Parity

Дисперсия $D(\boldsymbol{\beta})$ доходности портфеля $\boldsymbol{\beta}$

$$D(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{x}_i^{\mathsf{T}}\mathbf{x}_j)\beta_j\beta_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{x}_i^{\mathsf{T}}\mathbf{x}_j)\beta_j\right)\beta_i}_{\text{доля } i\text{-го актива}}$$

$$D(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} D_i(\boldsymbol{\beta}),\ D_i(\boldsymbol{\beta}) = \left(\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{x}_i^{\mathsf{T}}\mathbf{x}_j)\beta_j\right)\beta_i$$

Risk Parity — равенство долей риска от всех выбранных активов: $D_i(\boldsymbol{\beta}) \cong \text{const},\ i \in \hat{\mathbb{I}} \subset \mathbb{I}$

# Предположение формировании инвестиционного портфеля по принципу Risk Parity

$$\begin{cases} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} (\boldsymbol{x}_i^{\mathsf{T}} \boldsymbol{x}_j) \beta_j \right) \beta_i}_{\text{общий риск}} \longrightarrow \min \\ \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1,\ \beta_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

Задача выпуклого программирования
Оптимальный портфель: минимум риска
Очень селективный критерий
Противоречит принципу диверсификации

Risk Parity — сочетание требований малого риска и диверсификации:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \left[ nD_i - \sum_{j=1}^{n} D_j \right]^2 \longrightarrow \min(\beta_1, \ldots, \beta_n) \\ D_i = \left( \sum_{j=1}^{n} (\boldsymbol{x}_i^{\mathsf{T}} \boldsymbol{x}_j) \beta_j \right) \beta_i,\ \beta_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, n,\ \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1 \end{cases}$$

Все активы вошли в портфель

Идея управления размером портфеля Risk Parity – параметр размера $d_{\min} \leqslant d \leqslant d_{\max}$, $d_{\max} = \max_i (\boldsymbol{x}_i^{\mathsf{T}} \boldsymbol{x}_i)$

# Параметрическое семейство портфелей Risk Parity

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} D_i^2 \longrightarrow \min(\beta_1, \dots, \beta_n) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} D_i = d, \; D_i = \left( \sum\limits_{j=1}^{n} (\boldsymbol{x}_i^{\mathsf{T}} \boldsymbol{x}_j) \beta_j \right) \beta_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i = 1, \; \beta_i \geqslant 0, \; i = 1, \dots, n \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} \underbrace{\mathbb{I} = \{i = 1, \dots, n\}}_{\text{все активы}} \\ \underbrace{\mathbb{I}_d = \{i : \hat{\beta}_i > 0\} \subseteq \mathbb{I}}_{\text{портфель с параметром } d} \end{array}$$

Меньше $d$ — меньше риск, больше портфель
Больше $d$ — больше риск, меньше портфель
Параметр $d$ — психологическая характеристика инвестора

# Оценивание состава наблюдаемого портфеля по принципу Risk Parity

$\mathbf{y} = (y_t, t = 1, \ldots, T)$ — наблюдаемый портфель,представленный временным рядом его доходностей
Однопараметрическое семейство моделей Risk Parity:

$$\mathbb{J} = \{\hat{\mathbb{I}}_d : \ d_{\min} \leqslant d \leqslant d_{\max}\}$$

Какая модель $d_{\min} \leqslant d \leqslant d_{\max}$ из семейства $\mathbb{J}$ наилучшим образом соответствует временному ряду $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^T$?
Критерий Leave-One-Out:

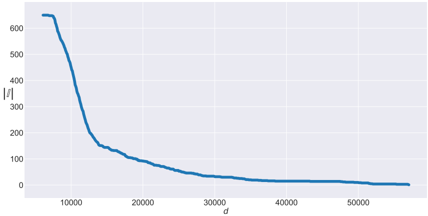
$$LOO(d) = \frac{1}{T} \sum_{t \in \mathbb{T}} \left( y_t - \sum_{i=1}^{n} \beta_{d,i}^{(t)} x_{t,i} \right)^2$$

# Эксперименты

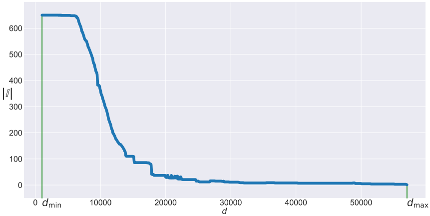
Таблица: Состав портфеля Risk Parity

| Размер портфеля | Номера активов |
|---|---|
| 1 | **7** |
| 2 | **3**, 7 |
| 3 | **2**, 3, 7 |
| 4 | **1**, 2, 3, 7 |
| 5 | 1, 2, 3, 7, **35** |
| 6 | 1, 2, 3, 7, **34**, 35 |
| 7 | 1, 2, 3, 7, **12**, **13**, 35 |
| 8 | 1, 2, 3, 7, 12, 13, **16**, 35 |
| 8 | 1, 2, 3, **4**, 7, **20**, **21**, **50** |
| 9 | 1, 2, 3, 4, 7, 20, 21, **31**, 50 |
| 10 | 1, 2, 3, 4, 7, 20, 21, 31, **41**, 50 |
| 11 | 1, 2, 3, 4, 7, 20, 21, 31, 41, 50,**92** |
| 12 | 1, 2, 3, 4, 7, 20, 21, 31, 41, 50,**62**,92 |

# Эксперименты




Размер портфеля Beta Parity при увеличении параметра $d$




Размер портфеля Risk Parity при увеличении параметра $d$

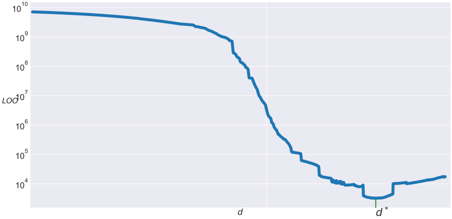



Рис.: $LOO(d)$

# Публикация по материалам работы

O. Krasotkina, M. Markov, V. Mottl, D. Babichev, I. Pugach, A. Morozov. Constrained Regularized Regression Model Search in Large Sets of Regressors. *Machine Learning and Data Mining in Pattern Recognition. Lecture Notes in Computer Science*, Springer, 2018
doi.org/10.1007/978-3-319-96133-0_30

Спасибо за внимание!