Конспект лекций по курсу

ПРИКЛАДНАЯ АЛГЕБРА

группы 320–328 (III поток)
осенний семестр 2016/17 уч. года

Лектор *С. И. Гуров*
ассистент *Д.А. Кропотов*

2016

Глава 1

Группы, кольца, поля

1.1 Группы

Определение 1.1. *Группой* называется тройка $\langle G, \circ, e \rangle$, где G — непустое множество (*носитель*), $e \in G$ — единица группы, а $\circ$ — такая бинарная операция на носителе, что для любых его элементов x, y, z выполняются следующие *законы* или *аксиомы группы*:

$[0)$ $x \circ y \in G$ — *устойчивость* (замкнутость) носителя;$]$

1) $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ — *ассоциативность*;

2) $e \circ x = x \circ e = x$ — *свойство единицы*;

3) $\forall\, x\ \exists!\, y : y \circ x = x \circ y = e$ — *существование обратного элемента* к x, символически $y = x^{-1}$.

Группы G со свойством $x \circ y = y \circ x$ называются *коммутативными* или *абелевыми*.

Если $|G| = n$, то G — *конечная группа* и n — её *порядок*.

В конечной группе операцию $\circ$ удобно задавать *таблицей умножения* (*таблицей Кэли*).

Пример 1.1 (Таблица умножения группы Клейна V_4).

$\circ$	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

$V_4 = \{ e, a, b, ab \}$
— четверная группа Клейна
ab — один элемент,
группа абелева.

Мультипликативная запись групповой операции:

$$x \cdot y \text{ или } xy,\ a^0 = e,\ a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}},\ n \in \mathbb{N},$$

и справедливы все обычные свойства степени:

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n,\ a^{m^n} = a^{mn},\ a^{-n} = (a^{-1})^n,\ \ldots.$$

Пример 1.2.

1. *Числовые группы* — все они абелевы:

- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — группы относительно *сложения*. Для них используют *аддитивную запись* $x + y$, единичный элемент называют *нулем* (0), обратный к x — *противоположным* $(-x)$.
- *Ненулевые* элементы $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — группы относительно *умножения*; 1 — нуль группы.

2. *Бинарные наборы*: $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B^n$ относительно $\oplus$. Аддитивная запись:

$$\widetilde{\alpha} \oplus \widetilde{\beta} = (\alpha_1 \oplus \beta_1, \ldots, \alpha_n \oplus \beta_n)$$

Нуль группы: $\widetilde{0} = (0, \ldots, 0)$.

3. *Симметрическая группа* S_n: все перестановки n-элементного множества $X = \{1, \ldots, n\}$ относительно композиции $*$. Нуль группы — единичная перестановка. Ясно, что $|S_n| = n!$.

Перестановки можно записывать в виде:

а) таблицы —

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & n \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_i & \ldots & t_n \end{pmatrix},$$

Например (сначала выполняется 2-я перестановка, потом — 1-я):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \neq$$
$$\neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

б) разложения на циклы —

$$\pi = \left(t_1^1 t_2^1 t_3^1 \ldots t_{k_1}^1\right)\left(t_1^2 t_2^2 t_3^2 \ldots t_{k_2}^2\right) \ldots \left(t_1^m t_2^m t_3^m \ldots t_{k_m}^m\right).$$

Внутри каждой пары скобок числа переставляются циклически:

$$\pi(t_1) = t_2,\ \pi(t_2) = t_3,\ \ldots,\ \pi(t_k) = t_1;$$

в перестановке π — m циклов.

Циклы длины 1 = вида (t) обычно опускают:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow (154)(26)$$

Каноническое представление цикла $(t_1 t_2 \ldots t_k)$:
t_1 — наименьшее из $\{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$.

Например, для предыдущей композиции перестановок:

$$(123) * (23) = (12) \neq (13) = (23) * (123).$$

Симметрическая группа S_n при $n > 1$ порождается транспозициями $(1,2), (1,3), \ldots, (1,n)$.

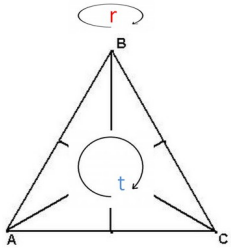
4. *Группы симметрии (самосовмещений) объекта — совокупность преобразований, совмещающих объект с самим собой.*

4.1. Группы *симметрии* правильного n-угольника — *группы диэдра* D_n

а) *У группы* D_{2k+1}, $k \in \mathbb{N}$ — *две* образующих:
(1) вращение вокруг центра на $\frac{360^\circ}{2k+1}$ в выбранном направлении — t и
(2) симметрия относительно оси, проходящей через выбранную вершину и середину противоположной стороны — r.

Например: группа симметрии правильного треугольника — перестановка его вершин

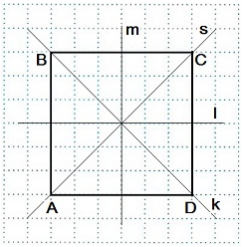
$$D_3 = \langle t, r \rangle = \{ e, (ABC), (ACB), (A)(BC), (B)(AC), (C)(AB) \} = S_3.$$



t — вращение на 120° в выбранном направлении,
r — симметрия относительно выбранной оси симметрии.
Любая перестановка вершин (сторон) описывается через образующие и имеет вид $t^m r^n$.

б) *У группы* D_{2k}, $k \in \mathbb{N}$ — *три* образующих: (1) вращение вокруг центра (в выбранном направлении) на $\frac{360^\circ}{2k}$ и две осевых симметрий — относительно фиксированных осей, проходящих через середины противоположных (2) сторон и (3) вершин.

Пример: группа симметрии квадрата

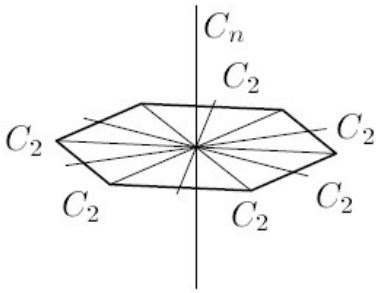


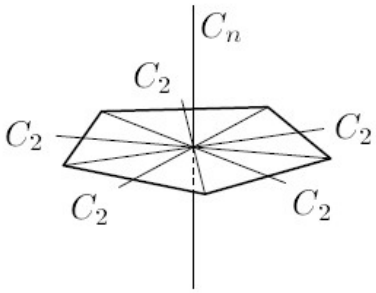
$D_4 = \langle t, r, f \rangle = \{ e, (ABCD), (AC)(BD), (ADCB), (AD)(BC), (AB)(CD), (BD), (AC) \}$.

t — вращение на 90° в выбранном направлении,
r — симметрия относительно оси m,
f — симметрия относительно оси симметрии A-C.

Любая перестановка вершин (сторон) описываться через образующие и имеет вид $t^m r^n f^k$.

Пример: группы диэдра D_6 и D_5.

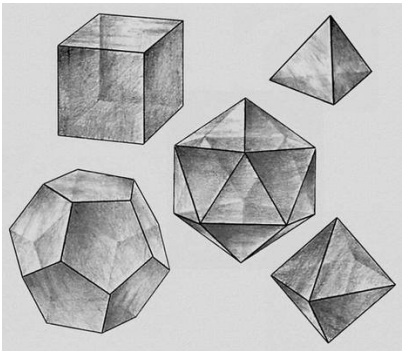




$|D_n| = 2n$: тождественная перестановка + $(n-1)$ поворотов вокруг оси C_n + n отражений вокруг осей C_2.

4.2. Группы *вращений* правильного многогранника — это не все симметрии многогранника, а только повороты, зеркальные отражения исключены.

Пять платоновых тел —



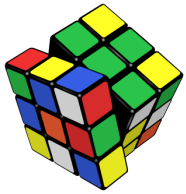
T — группа тетраэдра,

O — группа октаэдра (вращение октаэдра и куба),

Y — группа икосаэдра (вращение икосаэдра и додекаэдра).

Эти группы будут рассмотрены позже.

Ещё один пример: группа внутренних вращений *кубика Рубика*.



Порядок группы —

$$\frac{1}{2}\cdot 2^{11}\cdot 12!\cdot 3^{7}\cdot 8! = 43252003274489856000 \approx 4{,}3\cdot 10^{19}.$$

что является совсем небольшим числом по стандартам современной теории конечных групп ($\approx$ объём Мирового океана в кубометрах).

Подгруппы и смежные классы. Если $\langle G, \circ \rangle$ — группа, а H — подмножество G, само являющееся группой, то $\langle H, \circ \rangle$ — *подгруппа* G, символически $H \leqslant G$.

Определение левого и правого *смежные классы по подгруппе* H *(с представителем* x*)* соответственно:

$$H \leqslant G,\ x \in G \ \Rightarrow xH = \{\, xh \mid h \in H \,\},$$
$$Hx = \{\, hx \mid h \in H \,\},$$

при этом

$$h_1 \neq h_2,\ h_1, h_2 \in H \leqslant G \ni x \ \Rightarrow\ xh_1 \neq xh_2.$$

Утверждение 1.1. *Смежные классы с разными представителями либо не пересекаются, либо совпадают.*

$\forall\, x \in G:\ xH = Hx$, то подгруппа H — *нормальная*. Нормальность — ослабленное условие коммутативности: *в абелевой группе все подгруппы нормальны.*

Единичная группа $E = \{e\}$ — подгруппа любой группы.

Определение 1.2. Для групп $\langle\, G, *\,\rangle$ и $\langle\, G', \circ\,\rangle$ отображение $\varphi : G \to G'$ называется *изоморфизмом*, если оно

1) взаимно однозначно;
2) сохраняет операцию:

$$\forall\, a, b \in G:\ \varphi(a * b) = \varphi(a) \circ \varphi(b),$$

а такие группы — *изоморфными*, символически $G \cong G'$.

Свойства изоморфизма φ: $\varphi(e) = e'$ (сохранение единицы), $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$ (образ обратного элемента — обратный к его образу)...

Теорема 1.1 (Кэли). *Любая конечная группа порядка n изоморфна некоторой подгруппе симметрической группы S_n.*

Если в определении изоморфизма снять требование биективности φ, то получим определение *гомоморфизма групп.*

Например, всегда существует гомоморфизм произвольной группы в единичную E.

Циклические группы. В *циклических группах* есть *порождающий элемент* c (*образующий элемент, генератор*) такой, что каждый элемент группы может быть получен многократным (с учётом $c^0 = e$) применением к нему или к c^{-1} групповой операции:
C — циклическая группа, если

$$\underset{C}{\exists}\, c \; \underset{C}{\forall}\, x \; \underset{\mathbb{Z}}{\exists}\, k \;:\; c^k = x, \quad \text{символически } \langle c \rangle = C.$$

Для циклических групп возможны два случая.

1. Все степени порождающего элемента различны — группа состоит из элементов $\ldots, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, \ldots$, т.е. она изоморфна группе $\langle\, \mathbb{Z}, + \,\rangle$ целых чисел по сложению.

   Это — единственная бесконечная циклическая группа.

2. Две различные степени порождающего элемента совпадают: $a^{n+m} = a^n a^m = a^n \Rightarrow a^m = e$.
   $\operatorname{ord} a = \arg \min\limits_{m \in \mathbb{N}_0} \{a^m = e\}$ — порядок элемента a.

В этом случае получаем:

- конечную группу;
- изоморфность любой конечной циклической группы с числом элементов n группе
$$\mathbb{Z}_n = \langle \{0, 1, \ldots, n-1\}, +_{\mathrm{mod}\, n} \rangle .$$

Свойства циклических групп:

- Все циклические группы *абелевы*.
- Любая подгруппа циклической группы — циклическая.

  В применении к единственной бесконечной циклической группе $\mathbb{Z}$ это даёт, что любая нетривиальная подгруппа H группы $\mathbb{Z}$ имеет вид $H = \{ mn \mid n \in \mathbb{Z} \} = m\mathbb{Z}$, где m — наименьшее положительное число из H.

  Например:
  $H = \{ \ldots -6, -3, 0, 3, 6, \ldots \} = 3\mathbb{Z}$.
- Всякая циклическая группа является гомоморфным образом группы $\mathbb{Z}$.

У циклической группы порядка n существует ровно $\varphi(n)$ порождающих элементов (генераторов).

Определение 1.3. Значение *функции Эйлера* $\varphi(n)$ — количество чисел из интервала $[1, \ldots, n-1]$, взаимно простых с n.

$$\varphi(1) = 1 \text{ (по определению)}, \varphi(2) = 1, \varphi(3) = 2, \ldots,$$
$$\varphi(6) = \big|\{1, 5\}\big| = 2, \varphi(7) = 6, \varphi(8) = 4, \ldots$$

Свойства (p — простое число):

- $\varphi(p) = p - 1$;
- $\varphi(n^k) = n^{k-1}\varphi(n)$, откуда $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$,
- если m и n взаимно просты, то $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$.

Примеры: $\varphi(15) = \varphi(3 \cdot 5) = \varphi(3) \cdot \varphi(5) = 2 \cdot 4 = 8$
$\varphi(16) = \varphi(2^4) = 2^3 \cdot 1 = 8.$

$\varphi(n)$	+0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9
0+		1	1	2	2	4	2	6	4	6
10+	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18
20+	8	12	10	22	8	20	12	18	12	28
30+	8	30	16	20	16	24	12	36	18	24
40+	16	40	12	42	20	24	22	46	16	42
50+	20	32	24	52	18	40	24	36	28	58
60+	16	60	30	36	32	48	20	66	32	44
70+	24	70	24	72	36	40	36	60	24	78
80+	32	54	40	82	24	64	42	56	40	88
90+	24	72	44	60	46	72	32	96	42	60

Рис. 1.1. Первые 99 значений $\varphi(\cdot)$

- $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$, $\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \varphi(6) + +\varphi(12) = 12$;

В группе $\mathbb{Z}_6 = \langle \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, +_6 \rangle$ — $\varphi(6) = 2$ генератора.

сколько генераторов в $\mathbb{Z}$?

Ответ: два — 1 и -1.

Конкретный *Пример* циклической группы: группа $\left\langle \frac{2\pi}{n} \right\rangle$ вращений в плоскости вокруг центра правильного n-угольника, совмещающих его с собой.

Теорема Лагранжа и следствия из неё

Теорема 1.2 (Лагранжа). *Порядок подгруппы конечной группы делит порядок самой группы:*

$$|G| = |H| \cdot [G : H].$$

$[G : H]$ — *индекс* подгруппы H по группе G.

Следствия. *1. Порядок любого элемента конечной группы делит порядок группы.*

2. Группа G простого порядка p:

- *циклическая и любой её отличный от единицы элемент — порождающий;*
- *не имеет нетривиальных (отличных от E и G) подгрупп.*

1.2 Кольца и поля

Кольца: определение, основные свойства

Определение 1.4. Абелева группа $\langle R, +, 0 \rangle$ называется *кольцом*, символически $\langle R, +, \cdot, 0 \rangle$, если на ней определено умножение $\cdot$, связанное со сложением *дистрибутивными законами*

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \text{и} \quad (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x.$$

Обычно рассматривают *ассоциативные кольца* с ассоциативной операцией умножения:

$$(x \cdot y) \cdot z \;=\; x \cdot (y \cdot z).$$

Если в кольце имеется единичный элемент 1 по умножению $(x \cdot 1 \;=\; 1 \cdot x \;=\; x)$, то кольцо называется *кольцом с единицей* или *унитальным*, символически $\langle\, R,\, +,\, \cdot,\, 0,\, 1 \,\rangle$.

Тривиальное кольцо — $\{0\}$; в нём и только в нём $0 = 1$.

Если операция умножения кольца коммутативна, то и кольцо называется коммутативным.

Элемент a унитального кольца называется *обратимым*, если существует элемент b такой, что

$$a \cdot b \;=\; b \cdot a \;=\; 1.$$

Кольцо R *без делителей нуля* — со свойством
$\forall\, r_1, r_2 \in R : (r_1 \cdot r_2 = 0) \;\Rightarrow\; (r_1 = 0) \vee (r_2 = 0)$.

Важное для нас

Определение 1.5. *Целостным кольцом* называют нетривиальное унитальное ассоциативно-коммутативное кольцо без делителей нуля.

Пример 1.3.

1. Кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ с обычными операциями сложение и умножение на нём — целостное; обратимые элементы в нём — ± 1.
2. Пример кольца без единицы — кольцо чисел $2\mathbb{Z}$.
3. $\mathbb{Z}_n \;=\; \{\, 0,\, 1,\, \ldots,\, n-1 \,\}$ — *кольцо классов вычетов по модулю* n (*вычет* = *остаток*), результаты операции — по $\mod n$.
   Кольцо нецелостно при составном n: например в $\mathbb{Z}_6$ имеем $3 \cdot 2 = 0$.

Определение 1.6. Пусть $\langle R, +, \cdot \rangle$ и $\langle R', \oplus, \otimes \rangle$ — кольца. Отображение $\varphi : R \to R'$ называется *гомоморфизмом*, если

$$\varphi(r_1 + r_2) = \varphi(r_1) \oplus \varphi(r_2), \quad \varphi(r_1 \cdot r_2) = \varphi(r_1) \otimes \varphi(r_2).$$

Взаимно-однозначный гомоморфизм колец называется их *изоморфизмом*, символически $R \cong R'$.

Определение 1.7. Подмножество S кольца $\langle R, +, \cdot, 0 \rangle$ называется его *подкольцом*, если $a - b \in S$ (ясно, что тогда и $0 \in S$) и $a \cdot b \in S$ для всех $a, b \in S$.

Подкольцо *собственное*, если $S \neq R$.

Кстати, термин «*собственный*» не что иное, как неудачный перевод слова «*proper*», следовало бы говорить «*правильный*» или «*настоящий*», но это уже исторически сложилось и не исправить...

При $n < m$ кольцо $\mathbb{Z}_n$ не есть подкольцо $\mathbb{Z}_m$: например, в $\mathbb{Z}_5$ — $3 \cdot 3 = 4$, $3 + 3 = 1$, а в $\mathbb{Z}_8$ — $3 \cdot 3 = 1$, $3 + 3 = 6$. Элемент 3 в первом кольце отличается от элемента 3 во втором, как Вася Петров от Васи Иванова. Это *омонимы* — одинаково звучащие слова с разным смыслом.

Идеалы колец и факторкóльца

Определение 1.8. Подкольцо I коммутативного кольца[1] R называется его *идеалом*, символически $I \lhd R$, если

$$\forall\, i \in I \;\; \forall\, r \in R : \; ri \in I.$$

[1] Для некоммутативного кольца вводят понятия правых и левых идеалов, но они нам не понадобятся.

Само кольцо и его нуль 0 — *тривиальные идеалы* кольца. Идеалы, не совпадающие со всем кольцом — *собственные*.

Определение 1.9. Идеал I унитального коммутативного кольца R называется *главным* и *порождённым элементом* $a \in R$, если

$$I = \{ ar \mid r \in R \} = (a).$$

Целостные кольца, в которых все идеалы главные, называются *кольцами главных идеалов* (*КГИ*).

Пример 1.4. $(n) = n\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ — КГИ.

Пример правого неглавного идеала в кольце матриц порядка n: совокупность матриц, у которых все столбцы, кроме 1-го нулевые.

Свойства идеалов колец

- Бинарное отношение $\lhd$ на множестве идеалов кольца является *частичным порядком*.
- Если R — произвольное кольцо и $n \in \mathbb{Z}$, то
$$nR = \{ na \mid a \in R \} \lhd R.$$
- Если $I_1, I_2 \lhd R$, то

  пересечение идеалов $(I_1 \cap I_2) \lhd R$,

  сумма идеалов
  $$I_1 + I_2 = \{ x + y \mid x \in I_1,\ y \in I_2 \} \lhd R,$$

  произведение идеалов
  $$I_1 \cdot I_2 = \left\{ x_1 \cdot y_1 + \ldots + x_n \cdot y_n \mid x_1 \in I_1,\ y_1 \in I_2, \right. \\ \left. i = \overline{1, n},\ n \in \mathbb{N} \right\} \lhd R.$$

Классом вычетов по модулю идеала I *кольца* $\langle R, +, \cdot \rangle$ называется смежный класс по нормальной подгруппе $\langle I, + \rangle$ аддитивной группы кольца с некоторым фиксированным представителем $r \in R$:

$$\{ r + i \mid i \in I \}, \quad \text{символически } [r]_I.$$

Классы вычетов разных представителей по модулю данного идеала либо совпадают, либо не пересекаются и в объединении дают R, т.е. образуют *разбиение* R.

Множество классов вычетов — *факторкольцо кольца* R *по модулю идеала* I, символически R/I.

Пример 1.5.

- $I = 2\mathbb{Z} = (2) = \lhd\mathbb{Z}$;
- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{ [0]_I, [1]_I \}$, при этом $[0]_I = I$, $[1]_I = 2\mathbb{Z} + 1$.

Определение 1.10. Идеал I называется *максимальным* в кольце R, если не существует такого идеала I', что $I \subset I' \subset R$.

Пример 1.6. В $\mathbb{Z}$:

1) идеалы (2) и (3) максимальны;
2) идеал (6) не максимален: он содержится и в (2), и в (3): любое число, делящееся на 6 делится также и на 2, и на 3.

Ясно, что в $\mathbb{Z}$ максимальный идеалы имеют вид (p), где p — простое число.

Утверждение 1.2. *В ассоциативно-коммутативном унитальном кольце существует максимальный идеал.*

Евклидовы кольца

Определение 1.11. Целостное кольцо, в котором каждый ненулевой элемент x либо обратим, либо однозначно с точностью до перестановки сомножителей и умножения на обратимый элемент представляется в виде произведения неразложимых элементов, называется *факториальным*.

- $\mathbb{Z}$ — факториальное кольцо.
- Все КГИ — факториальны.
- Кольцо $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ является факториальным (и, следовательно, областью целостности), если и только если n — простое число.

Определение 1.12. Целостное кольцо $\langle R, +, \cdot \rangle$ называется *евклидовым*, если для каждого его ненулевого элемента x определена норма $N(x) \in \mathbb{N}_0$ со свойствами для любых элементов a и $b \neq 0$:

1) существуют такие его элементы q и r, что
$$a = q \cdot b + r \quad \text{и либо } r = 0, \quad \text{либо } N(r) < N(b);$$
2) $N(a \cdot b) \geqslant N(a)$ и $N(a \cdot b) \geqslant N(b)$.

Наличие у элементов нормы даёт возможность производить их деление друг на друга с остатком.

Пример 1.7. • *Классический пример евклидова кольца* — кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$; норма — абсолютная величина числа.

- *Кольцо многочленов* $\Bbbk[x]$ от формальной переменной x над полем $\Bbbk$:

$$\Bbbk[x] = \left\{ f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \mid a_n, \ldots, a_0 \in \Bbbk,\ n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

  — важный для нас пример евклидова кольца; здесь норма — степень $\deg f(x) = n$ многочлена.

Евклидовы кольца — КГИ.

Поле

Определение 1.13. Целостное кольцо $\langle R, +, \cdot, 0, 1 \rangle$, в котором каждый, кроме 0, элемент обратим, называется *полем*.

Подмножество поля K, само являющееся полем и устойчивое относительно сужения на него операций из K, называется *подполем*.

Примеры бесконечных полей и подполей: числовые поля $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Поле K, не обладающее никаким собственным подполем, называется *простым*.

Утверждение 1.3. *В каждом поле содержится только одно простое подполе, которое изморфно либо* $\mathbb{Q}$, *либо* $\mathbb{Z}_p$, p — *простое.*

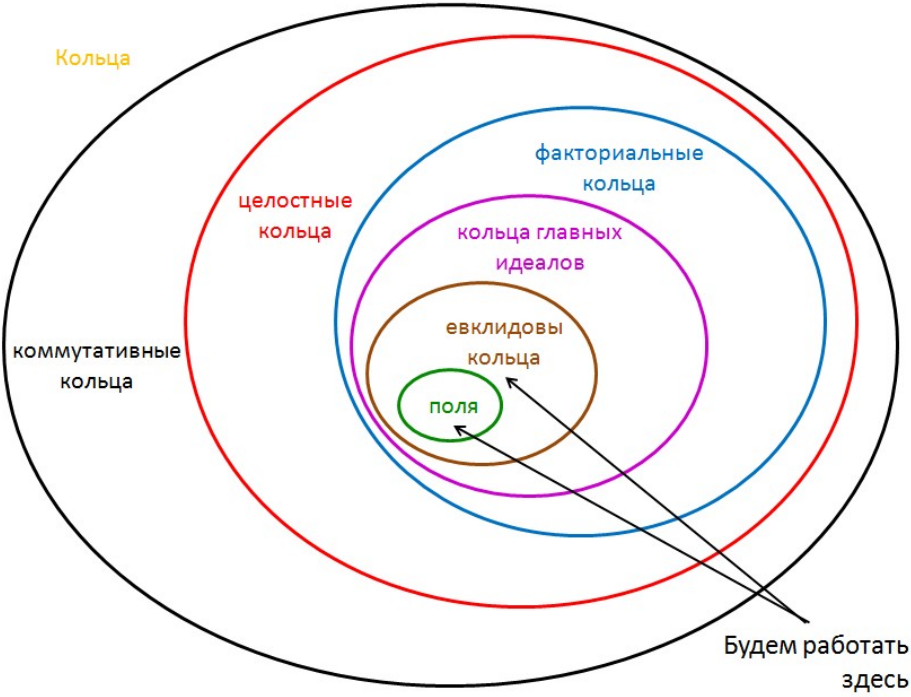


Рис. 1.2. От колец к полям

1.3 Задачи с решениями

Задача 1.1. *Выяснить, образуют ли группы следующие множества при указанной операции над элементами:*

1. Целые числа относительно сложения? Да
2. Четные числа относительно сложения? Да
3. Целые числа, кратные данному натуральному числу n, относительно сложения? Да
4. Степени данного действительного числа a, $a \neq 0, \pm 1$, с целыми показателями относительно умножения? Да

5. Неотрицательные целые числа относительно сложения? Нет (противоположного элемента)
6. Нечетные целые числа относительно сложения? Нет (устойчивости)
7. Целые числа относительно вычитания? Нет (ассоциативности)
8. Рациональные числа относительно сложения? Да
9. Рациональные числа относительно умножения? Нет (обратного у 0)
10. Рациональные числа, отличные от нуля, относительно умножения? Да
11. Положительные рациональные числа относительно умножения? Да
12. Положительные рациональные числа относительно деления? Нет (ассоциативности)
13. Корни n-й степени из единицы (как действительные, так и комплексные) относительно умножения? Да
14. Матрицы порядка n с действительными элементами относительно умножения? Нет (обратных у всех)
15. Невырожденные матрицы порядка n с действительными элементами относительно умножения? Да
16. Матрицы порядка n с целыми элементами и определителем, равным 1 относительно умножения?

Да

17. Матрицы порядка n с целыми элементами и определителем, равным ± 1 относительно умножения? Да

18. Матрицы порядка n с действительными элементами относительно сложения? Да

19. Перестановки чисел $1, 2, \ldots, n$ относительно композиции перестановок? Да

20. Взаимно однозначные отображения множества натуральных чисел на себя, каждое из которых перемещает (отображает не в себя) лишь конечное число чисел, если за произведение отображений s и t принята композиция $s \circ t$ отображений (последовательное выполнение отображений t , затем s)? Да

21. Преобразования множества M , т.е. взаимно однозначные отображения этого множества на себя, относительно ком- позиции отображений? Да

22. Элементы n-мерного векторного пространства $\mathbb{R}^n$ относительно сложения? Да

23. Параллельные переносы трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ относительно композиции движений? Да

24. Повороты трехмерного пространства $\mathbb{R}^n$ вокруг прямых, проходящих через данную точку O относительно композиции движений? Да

25. Все движения трехмерного пространства $\mathbb{R}^n$ относительно композиции движений? Да

26. Действительные многочлены степени не выше n от неизвестного x и нулевой многочлен относительно сложения? Да

27. Действительные многочлены любых степеней (включая 0) от переменной x относительно сложения? Да

Задача 1.2. *Найти степени и порядки всех элементов абелевой группы порядка* 6.
Какие из них являются порождающими?

Решение. $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1 \ldots, 6\}$, 0 — единица группы.

$\operatorname{ord} 0 = 1 \mid 6;$

$1 = 1,\ 1+1 = 2,\ \ldots = 6 \cdot 1 = 6 \equiv_6 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \operatorname{ord} 1 = 6 \mid 6;$

$2 = 2,\ 2+2 = 4,\ 2+2+2 = 0 \Rightarrow \operatorname{ord} 2 = 3;$

$3 = 3,\ 3+3 = 0 \Rightarrow \operatorname{ord} 3 = 2 \mid 6;$

$4 = 4,\ 4+4 = 2,\ 4+4+4 = 0 \Rightarrow \operatorname{ord} 4 = 3;$

$5 = 5,\ 5+5 = 4,\ 5+5+5 = 3,\ \ldots,\ 6 \cdot 5 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \operatorname{ord} 5 = 6.$

Порождающие элементы — 1 и 5.

Задача 1.3. *Показать, что*

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right),$$

если $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ *— примарное разложение* n.

Решение.

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= \varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(p_k^{\alpha_k}\right) = p_1^{\alpha_1-1}\varphi(p_1)\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k-1}\varphi(p_k) = \\ &= p_1^{\alpha_1-1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k-1}\varphi(p_1)\cdot\ldots\cdot\varphi(p_k) = \\ &= \frac{n}{p_1\cdot\ldots\cdot p_k}(p_1-1)\cdot\ldots\cdot(p_k-1) = \\ &= n\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right).\end{aligned}$$

Задача 1.4. *Найти все подгруппы циклической группы порядка* 24.

Решение. Циклическая 24-элементная группа $C = \{a^0 = 1, a^1, a^2, \ldots, a^{23}\}$ имеет (циклические) подгруппы, генераторами которых будут элементы a^m, где $m \mid n$, т.е. $m = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 22$.
Порядок соответствующей подгруппы — n/m.

$m = 1 : \{1, a^1, a^2, \ldots, a^{24}\} = \langle a^1\rangle = C \cong \mathbb{Z}_{24}$;

$m = 2 : \{1, a^2, a^4, a^6, \ldots, a^{22}\} = \langle a^2\rangle \cong \mathbb{Z}_{12}$;

$m = 3 : \{1, a^3, a^6, a^9, \ldots, a^{21}\} = \langle a^3\rangle \cong \mathbb{Z}_8$;

$m = 4 : \{1, a^4, a^8, a^{12}, \ldots, a^{20}\} = \langle a^4\rangle \cong \mathbb{Z}_6$;

$m = 6 : \{1, a^6, a^{12}, a^{18}\} = \langle a^6\rangle \cong \mathbb{Z}_4$;

$m = 8 : \{1, a^8, a^{16}\} = \langle a^8\rangle \cong \mathbb{Z}_3$;

$m = 12 : \{1, a^{12}\} = \langle a^{12}\rangle \cong \mathbb{Z}_2$;

$m = 24 : \{1\} = \langle 1\rangle \cong E$ — единичная.

Задача 1.5. *Выяснить, какие из следующих множеств являются кольцами, но не полями, и какие полями относительно указанных операций.*

Если операции не указаны, то подразумеваются сложение и умножение чисел.

1. Целые числа $\mathbb{Z}$? Кольцо.
2. Чётные целые числа? Кольцо.
3. Целые $n\mathbb{Z}$, $n > 0$? Кольцо.
4. Рациональные числа $\mathbb{Q}$? Поле.
5. Действительные числа $\mathbb{R}$? Поле.
6. Комплексные числа $\mathbb{C}$? Поле.
7. Квадратные матрицы порядка n с *целыми* элементами относительно сложения и умножения матриц?
   Кольцо (обратной матрицы может не быть).
8. Квадратные матрицы порядка n с *действительными* элементами относительно сложения и умножения матриц?
   Кольцо (обратной матрицы может не быть).
9. Многочлены от одного неизвестного x с целыми коэффициентами относительно обычных операций сложения и умножения?
   Кольцо (многочлены $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ в случае $a_0 = 0$ необратимы).
10. Многочлены от одного неизвестного x с действительными коэффициентами относительно обычных операций?

Кольцо (многочлены $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ в случае $a_0 = 0$ необратимы).

Задача 1.6. *Является ли отображение* $f : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$, $f(x) = 2x$ *гомоморфизмом колец?*

Решение. Нет!
Хотя $f(x + y) = 2(x + y) = 2x + 2y = f(x) + f(y)$, но $f(xy) = 2xy \neq (2x) \cdot (2y) = f(x) \cdot f(y)$.

Задача 1.7. *Является ли поле* $\mathbb{Z}_2$ *подполем поля* $\mathbb{Z}_5$*?*

Решение. Нет!
В $Z_2 : 1 + 1 = 0$, а в $Z_5 -$ $1 + 1 = 2$,
т.е. операция сложения в Z_5 неустойчива при переходе к своему подмножеству $\{0, 1\}$.

Глава 2

Конечные поля

2.1 Поля вычетов

- $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел евклидово, возможно *деление с остатком*.
- p — простое число.
- $(p) = \{ np \mid n \in \mathbb{Z} \} = p\mathbb{Z} = \{ 0, \pm p, \pm 2p, \ldots \}$ — *идеал*, порождённый числом p.
- $\mathbb{Z}/(p) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{ \overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{p-1} \}$ — *кольцо вычетов по модулю этого идеала* = классы остатков от деления на p:

$$\left.\begin{array}{ll} \overline{0} & = 0 + (p)\,, \\ \overline{1} & = 1 + (p)\,, \\ \ldots & \ldots\ldots \\ \overline{p-1} & = p - 1 + (p) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{Z} = \overline{0} \cup \overline{1} \cup \ldots \cup \overline{p-1}.$$

Черту над символами классов вычетов часто не ставят.

Поскольку p — простое, то $\mathbb{Z}/(p)$ — не просто кольцо, а *поле*, и в нём возможно деление без остатка на любой ненулевой элемент.

Это *конечное поле*, точнее *простое поле Галуа*, обозначение — $\mathbb{F}_p$ или $GF(p)$; все операции в нём — по $\bmod\ p$.

Примеры: поле $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ и фактор-кольцо $\mathbb{Z}/(4)$ —

$\mathbb{F}_3$:

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\times$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

$\mathbb{Z}/(4)$:

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\times$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	**0**	2
3	0	3	2	1

В $\mathbb{Z}/(4)$ дважды два равно нулю!
Однако поле из 4 элементов существует...

Характеристика поля. Пусть $\Bbbk$ — произвольное поле, 1 — его единица.
Складываем единицы: $1 = 1\,, \quad 1+1 = 2\,, \quad \ldots$.

В конечном поле всегда найдётся первое k такое, что

$$\underbrace{1+\ldots+1}_{k \text{ раз}} = 0.$$

Тогда k — *порядок аддитивной группы поля* $\Bbbk$ $=$

$=$ *характеристика поля* $\Bbbk$, символически $\operatorname{char}\Bbbk$.

Если все суммы вида $1+\ldots+1$ различны, то полагают $\operatorname{char}\Bbbk = 0$ (а не ∞;)).
$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ — поля нулевой характеристики.
$\{0, 1, 2, \ldots, \operatorname{char}\Bbbk - 1\}$ — минимальное подполе поля $\Bbbk$.

Пример 2.1 (Бесконечное поле с положительной характеристикой). Пусть $\Bbbk$ — некоторое поле. Построим:

1. $\Bbbk[x]$ — *кольцо многочленов* (от *формальной* переменной x) над полем $\Bbbk$:

$$\left\{ P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \mid a_0, \ldots, a_n \in \Bbbk \right\};$$
$$\Bbbk[x] \leftrightarrow \left\{ (a_0, \ldots, a_n) \in \Bbbk^n \mid n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

2. $\Bbbk(x)$ — поле рациональных функций над $\Bbbk$; в нём:

   элементы — "дроби" P/Q (если $Q \neq 0$), где $P, Q \in \Bbbk[x]$;

   умножение — $(P/Q) \cdot (U/V) = (PU)/(QV)$;

   эквивалентность — $P_1/Q_1 = P_2/Q_2$, если $P_1 Q_2 = P_2 Q_1$;

   сложение — дроби можно приводить к общему знаменателю и складывать: $P/Q + U/V = (PV + QU)/(QV)$;

   включение — поскольку $\Bbbk[x] \subset \Bbbk(x)$, то каждый многочлен P отождествляется с $P/1$.

   Если в качестве $\Bbbk$ взять $\mathbb{F}_p$, то $\mathbb{F}_p(x)$ — *бесконечное поле положительной характеристики* p.

Лемма 2.1 (тождество Фробениуса, сильное упрощение вычислений в конечном поле). *В поле характеристики* $p > 0$ *выполнено тождество*

$$(a + b)^p = a^p + b^p.$$

Доказательство. В любом коммутативном кольце верна формула для бинома

$$(a+b)^p = a^p + \underbrace{C_p^1 a^{p-1}b + \ldots + C_p^{p-1}ab^{p-1}}_{=0} + b^p,$$

а при $i = 1, \ldots, p-1$ числитель коэффициента $C_p^i = \frac{p!}{i!(p-i)!}$ делится на p, а знаменатель — нет, откуда $C_p^i \equiv_p 0$. □

Следствие. В поле характеристики $p > 0$ справедливо $(a+b)^{p^n} = a^{p^n} + b^{p^n}$.

Мультипликативная группа и примитивный элемент конечного поля. $\mathbb{F}_p^* = \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$ — *мультипликативная группа поля* $\mathbb{F}_p$.

Утверждение 2.1. *$\mathbb{F}_p^*$ — циклическая по умножению группа порядка $p-1$.*

Как любая конечная циклическая группа, $\mathbb{F}_p^*$ содержит генератор = примитивный элемент α:

- любой элемент $\beta \in \mathbb{F}_p^*$ является некоторой его натуральной степенью: $\beta = \alpha^i$, $i \in \{1, \ldots, p-1\}$;
- причём $1 = \alpha^{p-1}$ и $\alpha^i \neq 1$ для $1 \leqslant i \leqslant p-2$.
- $\mathbb{F}_p^*$ имеет $\varphi(p-1)$ примитивных элементов.

Рассмотрим поле $\mathbb{F}_{11}$. Его мультипликативная группа есть $\mathbb{F}_{11}^* \cong \langle \{1, 2 \ldots, 10\}, \times \rangle$ и она имеет $\varphi(10) = 4$ примитивных элемента.

1 — не генератор, проверяем 2:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^k	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1

— т.е. 2 — генератор $\mathbb{F}_{11}^*$, $\operatorname{ord} 2 = 10$.

Проверяем 3:

k	1	2	3	4	5
3^k	3	9	5	4	1

— т.е. $\operatorname{ord} 3 = 5$ и 3 — не генератор, и т.д.

Как ускорить процесс?
Если примарное разложение $p-1$
— *известно* $\Rightarrow$ элемент $\alpha \in \mathbb{F}_p$ примитивен iff

$$\alpha^{\frac{p-1}{q}} \not\equiv_p 1 \text{ для каждого простого } q \mid (p-1)$$

(т.к. $\alpha^{k \operatorname{ord} \alpha} = 1$, $k \in \mathbb{N}$).

Пример: 1) $p = 11$ (наш случай), $p-1 = 10 = 2 \cdot 5$,
$q \in \left\{ \frac{10}{2} = 5, \frac{10}{5} = 2 \right\}$

$2^2 = 4 \neq 1$, $2^5 = 32 \equiv_{11} 10 \neq 1 \Rightarrow 2$ — *примитивный*,

$3^2 = 9 \neq 1$, $3^5 = 243 \equiv_{11} 1 \Rightarrow 3$ — не примитивный.

2) $p = 37$, $p-1 = 36 = 2^2 \cdot 3^2$. Находим: $\frac{36}{2} = 18$, $\frac{36}{3} = 12$; поэтому для выяснения, является ли $\alpha \in \mathbb{F}_p^*$ генератором, нужно проверить не более двух равенств: $\alpha^{12} = 1$ и $\alpha^{18} = 1$.

— *неизвестно* $\Rightarrow$ эффективного алгоритма не найдено; используют таблицы, вероятностные алгоритмы...

Однако, если найден один примитивный элемент α поля $\mathbb{F}_p$, то любой другой его примитивный элемент может быть получен как степень α^k, где k — взаимно просто с $p-1$.

Пример (наш): $p = 11$, 2 — примитивный элемент $\mathbb{F}_{11}$ $k \in \{1, 3, 7, 9\}$ — взаимно простые с 10, получим

$$2^1 = 2, \qquad 2^3 = 8,$$
$$2^7 = 128 \equiv_{11} 7, \qquad 2^9 = 512 \equiv_{11} 6,$$

т.е. 6, 7 и 8 — также примитивные элементы $\mathbb{F}_{11}$.

Заметим, что

$$0 \neq \alpha \in \mathbb{F}_p \;\Rightarrow\; \alpha^{p-1} = 1 \;\Rightarrow\; \alpha^{p-2} = \alpha^{-1}.$$

Например, найдём обратный элемент к 4 в поле $\mathbb{F}_{11}$:

$$4^{-1} = 4^{11-2} = 4^9 = 262144 = 23831 \cdot 11 + 3 \equiv_{11} 3\,.$$

Действительно, $3 \cdot 4 \equiv_{11} 1$.

Деление в кольце многочленов. Кольцо многочленов $\Bbbk[x]$ над полем $\Bbbk$ — евклидово, — значит многочлены можно делить друг на друга с остатком.

Например, поделим «уголком» x^4 на x^2+1 в кольце $\mathbb{Z}_2[x]$:

$$\begin{array}{l|l} x^4 & x^2+1 \\ \underline{x^4+x^2} & \underline{} \\ \quad x^2 & x^2+1 \\ \quad \underline{x^2+1} & \\ \quad\quad 1 & \end{array} \qquad \text{т.е. } x^4 = (x^2+1)^2 + 1.$$

Самостоятельно: делением многочленов «уголком» покажите, что частное от деления многочлена $2x^5 + x^4 + 4x + 3$ на многочлен $3x^2 + 1$ в кольце $\mathbb{F}_5[x]$ есть $4x^3 + 2x^2 + 2x + 1$, а остаток — $2x + 2$.

Пример 2.2. В кольце $\mathbb{Z}_2[x]$ разделим многочлен $f(x) = x^7 + x^4 + x^2 + 1$ на $g(x) = x^3 + x + 1$ с остатком:

$$
\begin{array}{l|l}
-x^7+\quad x^4+x^2+1 & x^3+x+1 \\
\underline{x^7+x^5+x^4} & \hline x^4+x^2+1 \\
\quad -x^5+\quad x^2+1 & \\
\quad \underline{x^5+x^3+x^2} & \\
\quad\quad -x^3+\quad 1 & \\
\quad\quad \underline{x^3+x+1} & \\
\quad\quad\quad x &
\end{array}
$$

Итак, $f(x) = g(x)(x^4 + x^2 + 1) + x$.

Неприводимые многочлены. Кольцо многочленов $\Bbbk[x]$ над полем $\Bbbk$ — евклидово $\Leftrightarrow$ оно факториального $\Leftrightarrow$ каждый его элемент однозначно с точностью до перестановок разлагается в произведение простых (неразложимых).

Простые (неразложимые) элементы колец $\Bbbk[x]$ называют *неприводимыми многочленами*, они не имеют нетривиальных делителей.

Свойство «неприводимости» зависит от поля: многочлен x^4+1 неприводим в над $\mathbb{Q}[x]$, но приводим над $\mathbb{F}_2[x]$: $\quad x^4 + 1 = (x^3 + x^2 + x + 1) \cdot (x + 1)$.

Вопросы для кольца многочленов над данным полем:

1) какие многочлены неприводимы?
2) как их находить?

Неприводимые многочлены над $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}$:

поле $\mathbb{C}$ — только многочлены 1-й степени;

поле $\mathbb{R}$ — 1) многочлены 1-й степени,

— 2) многочлены 2-й степени с отрицательным дискриминантом;

поле $\mathbb{Q}$ — существуют неприводимые многочлены произвольной степени.

Далее нас будут интересовать неприводимые (и чаще — нормированные) многочлены в конечных полях.

Ясно, что количество нормированных многочленов степени n над полем $\mathbb{F}_p$ — вида

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \;\; a_i \in \mathbb{F}_p, \; i = \overline{0, n-1}$$

— равно p^n.

Неприводимые многочлены кольца $\mathbb{F}_2[x]$. Найдём в $\mathbb{F}_2[x]$ все неприводимые многочлены степеней $2, \ldots, 5$.

Вторая степень: $x^2 + ax + b$.
Ясно, что $b = 1$, иначе $x^2 + ax = x(x + a) \;\Rightarrow$ ищем неприводимый многочлен в виде $x^2 + ax + 1$.
Если $a = 0$, то $x^2 + 1 = (x + 1)^2$;
$a = 1$, то получаем *единственный* неприводимый многочлен степени 2 над $\mathbb{F}_2$: $x^2 + x + 1$.

Третья степень: $x^3 + ax^2 + bx + 1$.
(почему свободный член не равен нулю?)

Исключая, как сделано ранее, делимость на $x + 1$, получаем условие $a + b \neq 0$, т.е.

$$\left[\begin{array}{l} a = 0, \; b = 1\,, \\ a = 1, \; b = 0\,. \end{array} \right.$$

Следовательно над $\mathbb{F}_2$ существует два неприводимых многочлена степени 3:

$$x^3 + x^2 + 1 \quad \text{и} \quad x^3 + x + 1\,.$$

Четвёртая степень: $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$.
Исключение делимости на $x + 1$ приводит к условию $a + b + c = 1$, т.е. имеется 4 варианта, которые дают 3 решения:

a	b	c	многочлен	
0	0	1	$x^4 + x + 1$	
0	1	0	$x^4 + x^2 + 1$	— *приводимый*
1	0	0	$x^4 + x^3 + 1$	
1	1	1	$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$	

Найдены многочлены, у которых нет линейных делителей. Но многочлен 4-й степени может разлагаться в произведение двух неприводимых многочленов 2-й степени:

$$x^4 + x^2 + 1 \;=\; (x^2 + x + 1)^2.$$

Пятая степень: $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 1$.
Исключение делимости на $x + 1$ приводит к условию: число ненулевых коэффициентов a, b, c, d должно быть нечётным, т.е. либо 1, либо 3, что даёт 8 многочленов.

Далее необходимо исключить делимость на многчлены 2-й и 3-й степени, но неприводимых многочленов 2-й степени один, а 3-й — два, и их произведение даёт два многочлена.

Итого: существует 6 неприводимых многочленов 5-й степени. Для справки: вот они —

$$x^5 + x^2 + 1, \qquad x^5 + x^3 + 1,$$
$$x^5 + x^3 + x^2 + x + 1, \qquad x^5 + x^4 + x^2 + x + 1,$$

$$x^5 + x^4 + x^3 + x + 1, \qquad x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1.$$

Неприводимые многочлены из $\mathbb{F}_3[x]$.

Линейные многочлены 1:

x	$x+1$	$x+2$
$2x$	$2x+1$	$2x+2$

Какие из них неприводимы? *Все!* (шутка).

Вот неприводимые многочлены *степени* 2 в $\mathbb{F}_3[x]$ (они не имеют корней 0, 1, 2):

x^2+1	$2x^2+2$
x^2+x+2	$2x^2+x+1$
x^2+2x+2	$2x^2+2x+1$

Для всех ли p *и* n *существуют неприводимые многочлены в* $\mathbb{F}_p$*?*

Теорема 2.1 (о существовании неприводимых многочленов). *Для любых простого* p *и натурального* n *в* $\mathbb{F}_p[x]$ *существует неприводимый многочлен степени* n.

— докажем позже.

Итак, в кольцах $\mathbb{F}_p[x]$ *есть неприводимые многочлены любой степени, но как их найти?*

Ответ: *нет эффективных алгоритмов* (из таблиц, алгоритм Берлекэмпа...)

Зачем нужны неприводимые многочлены?
С помощью неприводимых многочленов можно строить новые конечные поля — *расширения* простых полей $\mathbb{F}_p$:

1. Выбираем простое p — фиксируем поле $\mathbb{F}_p$.

2. Рассматриваем кольцо $\mathbb{F}_p[x]$ многочленов над $\mathbb{F}_p$.
3. Выбираем натуральное n и неприводимый многочлен
$$a(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{F}_p[x],\ a_n \neq 0.$$
4. Идеал $(a(x))$ порождает фактор-кольцо $\mathbb{F}_p[x]/(a(x))$, элементы которого суть совокупности $\overline{r(x)}$ многочленов, дающих при делении на $a(x)$ остаток $r(x)$:
$$\overline{r(x)} = \left\{ f(x) \in \mathbb{F}_p[x] \mid f(x) = a(x)\cdot q(x) + r(x) \right\}.$$

Иногда говорят, что элементы $f, g \in \overline{r(x)}$ *сравнимы по двойному двойному модулю* — p и $a(x)$:
$$a(x) \in \mathbb{F}_p[x], \quad f(x) \equiv_{a(x)} g(x).$$

Расширения простых полей

Утверждение 2.2. *Множество* $\left\{ \overline{r(x)} \right\}$ *является полем Галуа* $GF(p^n)$.

Доказательство.

1. Кольцо многочленов $\mathbb{F}_p[x]$ евклидово, идеал $(a(x))$ — максимальный $\Rightarrow$ $\left\{ \overline{r(x)} \right\}$ — поле.
2. Его мощность $\left| \left\{ \overline{r(x)} \right\} \right|$ = число многочленов над $\mathbb{F}_p$ степени не выше $n-1$, т.е. p^n.

□

Поле $\left\{ \overline{r(x)} \right\} = GF(p^n)$ называется *расширением n-й степени* простого поля $\mathbb{F}_p$; альтернативное обозначение — $\mathbb{F}_p^n$.

Почему в обозначении $\mathbb{F}_p^n$ не используется многочлен $a(x)$, с помощью которого построено поле?

Теорема 2.2. *Любое конечное поле изоморфно какому-нибудь полю Галуа $\mathbb{F}_p^n$.*

Пример 2.3 (построение поля $\mathbb{F}_3^2$). Выберем в $\mathbb{F}_3[x]$ неприводимый многочлен: пусть это будет x^2+1.
Тогда искомое поле 9-элементное поле есть

$$\mathbb{F}_3^2 \cong \mathbb{F}_3[x]/\big(x^2+1\big) = \\ = \big\{\,\overline{0},\,\overline{1},\,\overline{2},\,\overline{x},\,\overline{x+1},\,\overline{x+2},\,\overline{2x},\,\overline{2x+1},\,\overline{2x+2}\,\big\}.$$

Можно составить таблицы сложения и умножения в этом поле с учётом $x^2 = -1 \equiv_3 2$.
Например:

$$\overline{x+1}+\overline{x+2} = \overline{2x}, \qquad \overline{x}\cdot\overline{2x} = \overline{1},$$
$$\overline{2x+1}+\overline{x} = \overline{1}, \qquad \overline{2x+1}\cdot\overline{x} = \overline{x+1},$$

и т.д.

Черту над элементами поля $\mathbb{F}_p[x]/(a(x))$ обычно не ставят и называют их «многочленами».
Но надо помнить, что это *совокупности* многочленов, дающих при делении на $a(x)$ один и тот же остаток...

Заметим, что

$$(x+1)^1 = x+1, \qquad (x+1)^5 = 2x+2,$$
$$(x+1)^2 = 2x, \qquad (x+1)^6 = x,$$
$$(x+1)^3 = 2x+1, \qquad (x+1)^7 = x+2,$$
$$(x+1)^4 = 2, \qquad (x+1)^8 = 1.$$

Это значит, что $x+1$ — примитивный элемент поля $\mathbb{F}_3^2$ (а x — нет, поскольку $x^4 = 4 \equiv_3 1$).

А что будет, если при построении поля вместо x^2+1 взять другой неприводимый в $\mathbb{F}_3[x]$ многочлен? Например, $2x^2+x+1$?

Ответ: получится поле, *изоморфное построенному*.

Пример 2.4 (вычисления в конечном поле). Опередить, является ли:

1) многочлен $a(x) = x^3+2x+4 \in \mathbb{F}_5[x]$ — неприводимым?

2) элемент $4x^2+2$ — корнем $a(x)$ в факторкольце/поле $\mathbb{F}_5[x]/\big(x^3+2x+4\big)$?

Решение. 1. Перебором элементов из $GF(5) = \{0,1,2,3,4\}$:

$$a(0) = 4,\ f(1) = 2,\ a(2) = 1,\ a(3) = 2,\ a(4) = 1$$

убеждаемся $a(x)$ — неприводимый многочлен (а если бы это был многочлен 4-й степени?).

Следовательно, фактор-кольцо $\mathbb{F}_5[x]/\big(x^3+2x+4\big)$ *является полем* и в нём $x^3 = -2x-4 = 3x+1$.

2. $a(4x^2+1) = \big(2(2x^2+2)\big)^3 + 2\cdot 2(2x^2+1) + 4 = 3(3x^6+2x^4+x^2+1) + 3x^2 + 3 = 4x^6+x^4+x^2+1 = 4(3x+1)^2 + 3x^2 + x + x^2 + 1 = x^2+4x+4+3x^2+x+x^2+1 = 0$.

Как найти примитивные элементы поля $\mathbb{F}_p^n$?

α — примитивный элемент поля $F = \mathbb{F}_p^n$, если при изменении $k = 1, 2, \ldots, p^n-1$ значение α^k пробегает значения всех элементов F^*. Как следствие:

- $\alpha^{p^n-1} = 1$;

- если k взаимно просто с $p^n - 1$, то α^k — *другой примитивный элемент* поля F.
  Так могут быть получены *все* примитивные элементы F: их $\varphi(p^n-1)$ штук = количество взаимно простых с $p^n - 1$ чисел.

Например, в рассмотренном 9-элементном поле $\mathbb{F}_3^2$ имеется $\varphi(8) = 4$ примитивных элемента, образованных степенями 1, 3, 5, 7 (взаимно просты с 8) уже найденного генератора:

$$x+1,\ (x+1)^3 = 2x+1,\ (x+1)^5 = 2x+2,$$
$$(x+1)^7 = x+2.$$

Я что-то не понимаю: неприводимые многочлены — это примитивные элементы?
Ведь было: для поиска и тех, и других нет эффективных алгоритмов...

- *Неприводимые многочлены* ищут в *кольце многочленов* $\mathbb{F}_p[x]$ над простым полем $\mathbb{F}_p$ — например, чтобы построить расширение поля.
- *Примитивные элементы* ищут в *мультипликативной группе* поля — например, чтобы иметь удобное представление ненулевых элементов поля через степени примитивного элемента.

Замечание. В *поле* понятие «неприводимый многочлен» не имеет смысла: там любой многочлен делится на любой ненулевой. Например, в $\mathbb{F}_3[x]/\big(x^2+1\big)$:

$$\frac{x+1}{2x+1} = x.$$

Может ли приводимый многочлен быть примитивным элементом?

1. Возьмём поле $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$.
2. Возьмём неприводимый над $\mathbb{F}_2$ многочлен $x^3 + x + 1$.
3. Построим поле $F = \mathbb{F}_2[x]/(x^3 + x + 1) \cong \mathbb{F}_2^3$; оно содержит все полиномы из $\mathbb{F}_2[x]$ степени $\leqslant 2$.
4. Многочлен $b(x) = x^2 + x = x(x+1)$ — приводим в любом кольце, в т.ч. — в $\mathbb{F}_2[x]$, и он принадлежит F.
5. Является ли $b(x)$ — примитивным элементом поля F?

Мультипликативная группа поля F содержит $2^3 - 1 = 7$ элементов, это простое число $\Rightarrow$ в мультипликативная группе все $\varphi(7) = 6$ неединичных элеметов — генераторы $\Rightarrow$ ответ на оба вопроса — ДА!

Удостоверимся, что $\alpha = x^2 + x = x(x+1)$ — примитивный элемент поля $F = \mathbb{F}_2[x]/(x^3 + x + 1)$.
В F $x^3 = x + 1$ и

$$
\begin{aligned}
\alpha &= x^2 + x,\\
\alpha^2 &= x^4 + x^2 = \not{x}^2 + x + \not{x}^2 = x,\\
\alpha^3 &= \alpha \cdot \alpha^2 = x^3 + x^2 = x^2 + x + 1,\\
\alpha^4 &= (\alpha^2)^2 = x^2,\\
\alpha^5 &= \alpha^2\alpha^3 = x^3 + x^2 + x = \not{x} + 1 + x^2 + \not{x} = x^2 + 1,\\
\alpha^6 &= x^4 + x^2 + 1 = x^2 + x + x^2 + 1 = x + 1,\\
\alpha^7 &= x^2(x^2 + x + 1) = x^4 + x^3 + x^2 =\\
&= \not{x}^2 + \not{x} + \not{x} + 1 + \not{x}^2 = 1.
\end{aligned}
$$

Всегда ли неприводимый многочлен есть примитивный элемент?

1. Возьмём поле $\mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
2. Возьмём неприводимый над $\mathbb{F}_5$ многочлен $x^2 + x + 1$.
3. Построим поле $F = \mathbb{F}_5[x]/(x^2 + x + 1) \cong \mathbb{F}_5^2$; оно содержит только полиномы 0-й и 1-й степеней из $\mathbb{F}_5[x]$.
4. Все многочлены 1-й степени неприводимы, имеют вид $ax + b$ и их — 20 шт.
   Все ли они — примитивные элементы поля F?

Мультипликативная группа поля F содержит $5^2 - 1 = 24$ элемента из которых $\varphi(24) = 8$ примитивных $\Rightarrow$ не все многочлены 1-й степени — генераторы $\Rightarrow$ ответ на оба вопроса — НЕТ!

Удостоверимся, что $\alpha = x$ *не есть* примитивный элемент поля $F = \mathbb{F}_5[x]/(x^2 + x + 1)$.

В F: $x^2 = -x - 1 = 4x + 4$ и

$$\begin{aligned} \alpha &= x \\ \alpha^2 &= 4x + 4, \\ \alpha^3 &= 4x^2 + 4x = 16x + 16 + 4x = 1. \end{aligned}$$

Вопрос: когда корень x (сам неприводимый многочлен!) неприводимого над $\mathbb{F}_p$ многочлена $a(x)$ будет примитивным элементом поля $\mathbb{F}_p[x]/(a(x))$?

Ответ: это будет если и только если многочлен $a(x)$ *примитивен* для x, т.е. $m = p^n - 1$ — наименьший показатель, при котором $a(x) \mid x^m - 1$.

Пример 2.5. 1. Неприводимый над $\mathbb{F}_2$ многочлен x^3+x+1 *примитивен*:

$$x^{2^3-1}-1 \;=\; x^7+1 \;=\; (x^3+x+1)\cdot(x^4+x^2+x+1)$$

и $x^t-1 \;\dot{\not}\; x^3+x+1$ ни при каком $1 \leqslant t < 7 = m$.

Поэтому

$$\mathbb{F}_2^*[x]/\big(x^3+x+1\big) \;=\; \big\{\, x^0=1,\, x^1,\, x^2,\, x^3=x+1,\\ x^4=x^2+x,\, x^5=x^2+x+1,\, x^6=x^2+1 \,\big\}$$

— все многочлены степени не выше 2.

2. Неприводимый над $\mathbb{F}_2$ многочлен $x^4+x^3+x^2+x+1$ *не примитивен*: он делит не только бином $x^{2^4-1}-1 = x^{15}-1$, но и бином x^5-1:

$$x^5-1 \;=\; x^5+1 \;=\; (x^4+x^3+x^2+x+1)\cdot(x+1),$$

или, что тоже, $\operatorname{ord} x = 5 \neq 15$:

$$x^5 \;=\; \underbrace{(x^4+x^3+x^2+x+1)\cdot(x+1)}_{=0}+1 \;=\; 1.$$

2.2 Вычисление в конечных полях

Алгоритм Евклида — применяют для нахождения НОД(a,b) *натуральных* чисел a и b.

Наблюдение: общий делитель пары чисел (a,b), то остаётся им и для пары $(a-b,b)$ (считаем, что $a \geqslant b$).

Отсюда:

- пары чисел (a,b) и $(a-kb,b)$ имеет одинаковые общие делители;

- вместо $a - kb$ (для «ускорения») можно взять остаток r_0 от деления нацело a на b: $a = bq + r_0$, $q \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant r_0 < b$;
- затем, переставив числа в паре, можно повторить процедуру; она закончится, т.к. числа в паре уменьшаются, но остаются неотрицательными.

В результате: за конечное число шагов образуется пара $(r_n, 0)$ и ясно, что $\text{НОД}(a, b) = r_n$ (НОД — англ. gcd).

Алгоритм Евклида: общая схема ($a \geqslant b$)

Шаг (-2): $r_{-2} = a$ — полагаем для удобства;

Шаг (-1): $r_{-1} = b$ — полагаем для удобства;

Шаг 0: $r_{-2} = r_{-1}q_0 + r_0$ — делим r_{-2} на r_{-1}, остаток r_0;

Шаг 1: $r_{-1} = r_0q_1 + r_1$ — делим r_{-1} на r_0, остаток r_1;

... всегда делим с остатком большее число на меньшее, на следующем шаге меньшее число оно становится большим, а остаток — меньшим;

Шаг n: $r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$ — делим r_{n-2} на r_{n-1}, остаток r_n;

Шаг $n+1$: $r_{n-1} = r_nq_{n+1}$ — *деление нацело* $\Rightarrow$ *ОСТАНОВ.*

$\text{НОД}\,(a, b) = r_n$

Всегда $r_{-2} \geqslant r_{-1} > r_0 > r_1 > \ldots > r_n \geqslant 1$.

Пример 2.6. По алгоритму Евклида найдём НОД $(252, 105)$.

Шаг (-2): $r_{-2} = 252$;

Шаг (-1): $r_{-1} = 105 \quad \Rightarrow (252, 105)$;

Шаг 0: $252 = 105 \cdot 2 + 42 \quad \Rightarrow (105, 42)$;

Шаг 1: $105 = 42 \cdot 2 + 21 \quad \Rightarrow (42, 21)$;

Шаг 2: $42 = 21 \cdot 2 + 0 \quad \Rightarrow (\mathbf{21}, 0)$.

Ясно, что

$$\text{НОД}\,(a, b, c) = \text{НОД}\,(a, (\text{НОД}\,(b, c))$$

Утверждение 2.3 (соотношение Безу; открыто за 106 лет до рождения Э. Безу). *Для любых натуральных a, b и $d = НОД\,(a, b)$ найдутся целые коэффициенты Безу x, y такие, что $d = ax + by$.*

Доказательство. Рассматриваем алгоритм Евклида с конца к началу: $d = r_n = r_{n-2} - r_{n-1}q_n$, затем, подставляя сюда значение $r_{n-1} = r_{n-3} - r_{n-2}q_{n-1}$, получаем

$$d = -q_n r_{n-3} + (1 + q_n q_{n-1}) r_{n-2} = \alpha r_{n-3} + \beta r_{n-2}$$

для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ и т.д. □

Замечание: коэффициенты Безу определены неоднозначно:

$$\text{НОД}\,(12, 30) = 6 = 3 \cdot 12 + (-1) \cdot 30 = (-2) \cdot 12 + 1 \cdot 30.$$

Расширенный алгоритм Евклида — находит по двум *натуральным числам* a *и* b их *натуральный НОД* d и два *целых* x, y коэффициента Безу (таких, что $|x| < |b/d|$, $|y| < |a/d|$).

Расширенный алгоритм Евклида повторяет схему (простого) алгоритма Евклида, в котором на каждом шаге:

1) дополнительно вычисляются x_i и y_i по формулам

$$x_i = x_{i-2} - q_i x_{i-1},\ y_i = y_{i-2} - q_i y_{i-1},\ i = 0, 1, ...;$$
$$x_{-2} = y_{-1} = 1,\ x_{-1} = y_{-2} = 0;$$

2) справедливо соотношение

$$\begin{aligned} r_i &= r_{i-2} - q_i r_{i-1} = \\ &= (ax_{i-2} + by_{i-2}) - q_i(ax_{i-1} + by_{i-1}) = \\ &= a(x_{i-2} - q_i x_{i-1}) + b(y_{i-2} - q_i y_{i-1}) = ax_i + by_i. \end{aligned}$$

Пример 2.7. Расширенным алгоритмом Евклида найдём натуральное d и целые x и y такие, что

$$d = \text{НОД}\,(252, 105) = 252x + 105y.$$

Имеем $x_i = x_{i-2} - q_i x_{i-1}$, $y_i = y_{i-2} - q_i y_{i-1}$. Сведём все вычисления в таблицу:

шаг i	r_{i-2}	r_{i-1}	q_i	r_i	x_i	y_i
-2				252	1	0
-1				105	0	1
0	252	105	2	42	1	-2
1	105	42	2	21	-2	5
2	42	21	2	0		

Ответ: $d = 21$, $x = -2$, $y = 5$, т.е.

$$21 \;=\; 252 \cdot (-2) + 105 \cdot 5.$$

Пример 2.8. В поле $\mathbb{Z}/(101)$ решить уравнение

$$4x \;=\; 1. \qquad (*)$$

Решение.

1. $4x \;=\; 1 + k \cdot 101 \;=\; 102,\, 203,\, \mathbf{304}$
   $x \;=\; 304/4 \;=\; 76.$
   Это решение перебором.

2. Поскольку $101y \equiv_{101} 0$, вместо $(*)$ можно расширенным алгоритмом Евклида решать уравнение

   $$4x + 101y \;=\; 1\,.$$

   В результате работы алгоритма получим:

   $$4 \cdot 76 + 101 \cdot (-3) \;=\; 1.$$

Аналогично решаются уравнения

$$ax \;=\; c \qquad \text{и} \qquad ax + by \;=\; c$$

(a, b и c надо поделить на их общий НОД).

Алгоритм Евклида и его расширенная версия остаются справедливыми в любом *евклидовом кольце*, следовательно, и в любом *поле Галуа*.

Поэтому обратный элемент $y(x)$ элемента $b(x)$ в поле $\mathbb{F}_p[x]/\big(a(x)\big)$, определяемый соотношением

$$\underbrace{a(x) \cdot \chi(x)}_{=0} + b(x) \cdot y(x) \;=\; 1$$

для пары многочленов $\big(a(x),\, b(x)\big)$, *может быть найден расширенным алгоритмом Евклида.*

Решение данных соотношений существует *всегда*: т.к. $a(x)$ — неприводимый многочлен и $\deg b(x) < \deg a(x)$, то НОД $(a(x),\, b(x)) = 1$.

Пример 2.9. Найдём $(x^2+x+3)^{-1}$ в поле

$$\mathbb{F}_7[x]/\left(x^4+x^3+x^2+3\right).$$

Для этого расширенным алгоритмом Евклида решим соотношение

$$(x^4+x^3+x^2+3)\cdot\chi(x) + (x^2+x+3)\cdot y(x) = 1. \quad (*)$$

Шаг 0: $r_{-2}(x) = x^4+x^3+x^2+3,$
$r_{-1}(x) = x^2+x+3,$
$y_{-2}(x) = 0,$
$y_{-1}(x) = 1$ — задание начальных значений.

Шаг 1: $r_{-2}(x) = r_{-1}(x)q_0(x) + r_0(x),$
$q_0(x) = x^2+5,$
$r_0(x) = 2x+2,$
$y_0(x) = y_{-2}(x) - y_{-1}(x)q_0(x) = -q_0(x) = -x^2-5.$

Шаг 2: $r_{-1}(x) = r_0(x)q_1(x) + r_1(x),$
$q_1(x) = 4x,$
$r_1(x) = 3, \quad \deg r_1(x) = 0$
$y_1(x) = y_{-1}(x) - y_0(x)q_1(x) = 1 + 4x(x^2+5) = 4x^3+6x+1.$

Алгоритм заканчивает свою работу на шаге 2, т.к.

$$\deg r_1(x) = \deg 1 = 0$$

(1 — *многочлен* в правой части $(*)$).

Замечание: при итерациях алгоритма нет необходимости вычислять $\chi_i(x)$, т.к. нас интересует только значения $y_i(x)$, $i = 0,\, 1,\, \ldots$.

Остаток $r_1(x) = 3$, отличается от 1 на множитель-константу. Чтобы получить решение уравнения $(*)$ вычисляем элемент $3^{-1} \equiv_7 5$ и домножаем на него y_1:

$$5y_1(x) \;=\; 5(4x^3 + 6x + 1) \;\equiv_7\; 6x^3 + 2x + 5.$$

Ответ: в поле $\mathbb{F}_7[x]/\big(x^4 + x^3 + x^2 + 3\big)$ имеем

$$(x^2 + x + 3)^{-1} \;=\; 6x^3 + 2x + 5.$$

2.3 Алгебра векторов над конечным полем

Векторное пространство

Определение 2.1. *Абстрактным векторным пространством* над полем $\Bbbk = \{\,1,\, \alpha,\, \beta,\, \ldots\,\}$ называется двухосновная алгебраическая система $\mathcal{V} = \langle\, V,\, \Bbbk;\, +,\, \cdot\,\rangle$, где

- $V = \{\,0,\, v,\, \ldots\,\}$ — произвольное множество *векторов*,
- $+$ — бинарная операция сложения над V:
  $$V \times V \xrightarrow{+} V,$$
- $\cdot$ — бинарная операция умножения элемента («числа́») из $\Bbbk$ на вектор из V: $\Bbbk \times V \xrightarrow{\cdot} V$,

причём операции $+$ и $\cdot$ удовлетворяют следующим аксиомам:

1) V — коммутативная группа по сложению $+$, 0 — её нейтральный элемент;

2) $\alpha\cdot(v_1+v_2) = \alpha\cdot v_1+\alpha\cdot v_2,\ (\alpha_1+\alpha_2)\cdot v = \alpha_1\cdot v+\alpha_2\cdot v;$
3) $\alpha\cdot(\beta\cdot v) = (\alpha\beta)\cdot v\,;$
4) $1\cdot v = v\,.$

Пример 2.10. Пусть $V = \Bbbk^n$ — *множество конечных последовательностей длины* n элементов поля $\Bbbk$.
'Сложение' и 'умножение на число из $\Bbbk$' элементов из V определяются покомпонентно.

Получившаяся структура — векторное пространство, его называют *n-мерным координатным пространством* над полем $\Bbbk$.

Дистрибутивность относительно вычитания $(\alpha-\beta)\cdot v = \alpha\cdot v-\beta\cdot v$:

$$(\alpha-\beta)\cdot v+\beta\cdot v = (\alpha-\beta+\beta)\cdot v = \alpha\cdot v$$

Отсюда получаем, что

- $0\cdot v = 0$, так как $0\cdot v = (1-1)\cdot v = v-v = 0$,
- и $-v = (-1)\cdot v$, так как
  $v+(-1)\cdot v = 1\cdot v+(-1)\cdot v = (1-1)\cdot v = 0\cdot v = 0.$

Утверждение 2.4. *Поле характеристики $p > 0$ есть векторное пространство над $GF(p)$ (p — простое).*

Доказательство. В рассматриваемом поле $GF(q)$, $q \geqslant p$:
сложение — наследуется операция сложения в $GF(q)$;
умножение — поскольку

$$GF(p) = \left\{\overline{0},\overline{1},\ldots,\overline{p-1}\right\} \subseteq GF(q),$$

то при умножении «чисел» из поля $GF(p)$ на векторы из $GF(q)$ можно заменять на умножение элементов $GF(q)$;

аксиомы векторного пространства — выполняются в силу свойств арифметических операций в поле $GF(q)$.

□

Следствие. *Поле Галуа* $GF(q)$ *характеристики* p *как векторное пространство состоит из* p^n *элементов:* $q = p^n$.

Представление элементов конечных полей. Поле $\mathbb{F}_p^n$ с элементами $\mathcal{M}_{p,n}(x) =$

$$= \left\{ b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1} x^{n-1} \mid b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{F}_p \right\},$$

можно рассматривать как

1) *фактор-кольцо* $\mathbb{F}_p[x]/\big(a(x)\big)$ вычетов $\mathbb{F}_p[x]$ по идеалу некоторого неприводимого многочлена

$$a(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,\ a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}_p$$

или как

2) n-*мерное координатное пространство* над $\mathbb{F}_p$:

$$\left\langle \mathcal{M}_{p,n}(x), \mathbb{F}_p; +, \cdot \right\rangle$$

(все операции — по $\bmod p$) и в обоих случаях можно определить операцию деления на ненулевой элемент.

Теорема 2.3. *Базис* $\mathbb{F}_p^n$ *образуют элементы* $\overline{1}, \overline{x}, \ldots, \overline{x^{n-1}}$.

Доказательство. 1. Любой элемент $\mathbb{F}_p^n$ представим в виде линейной комбинации указанных векторов:

$$\overline{b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}} = b_0\overline{1} + b_1\overline{x} + \ldots + b_{n-1}\overline{x^{n-1}}$$

2. Пусть

$$c(x) = c_0\overline{1} + c_1\overline{x} + \ldots + c_{n-1}\overline{x^{n-1}} = \overline{0}.$$

Это означает, что многочлен $c(x)$ степени $n-1$ делится на некоторый многочлен n-й степени, что возможно лишь при $c_0 = c_1 = \ldots = c_{n-1} = 0$, т.е. система $\left\{ \overline{1}, \overline{x}, \ldots, \overline{x^{n-1}} \right\}$ *линейно независима.* □

Замечание. Построение поля с помощью вычетов по модулю некоторого неприводимого многочлена и аналоги доказанных теорем справедливы *не только в случае конечных полей.*

Например:

1) рассмотрим поле действительных чисел $\mathbb{R}$ и кольцо многочленов $\mathbb{R}[x]$ над ним;
2) в $\mathbb{R}[x]$ возьмём неприводимый многочлен $x^2 + 1$;
3) построим поле F как фактор-кольцо: $F = \mathbb{R}[x]/\big(x^2+1\big)$;
4) F также и векторное пространство над $\mathbb{R}$; его базис — $\left\{ \overline{1}, \overline{x} \right\}$ и каждый его элемент $z \in F$ можно представить в виде $z = a\overline{1} + b\overline{x},\ a, b \in \mathbb{R}$;
5) поле F изоморфно полю *комплексных чисел*

$$\mathbb{C} = \left\{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R},\, i^2 = -1 \right\},$$

изоморфизм задаётся соответствием

$$\overline{1} \mapsto 1,\ \overline{x} \mapsto i.$$

Лемма 2.2. *Поле* $\mathbb{F}_p^n$ *содержит подполе* $\mathbb{F}_p^k$ *iff* $k \mid n$.

Доказательство. Если поле $\Bbbk_1$ содержится в поле ($\Bbbk_1 \subset \Bbbk_2$), то элементы $\Bbbk_2$ можно умножать на элементы из $\Bbbk_1$, а результаты складывать.

Поэтому поле $\Bbbk_2$ является векторным пространством над полем $\Bbbk_1$ некоторой размерности d — значит, в нём $|\Bbbk_1|^d$ элементов.

Наш случай: $p^n = (p^k)^d$, что и означает $k \mid n$.

Обратное следует из существования и единственности (с точностью до изоморфизма) полей Галуа. □

Ясно, что $\mathbb{F}_p$ — всегда подполе $\mathbb{F}_p^n$ (случай $k = 1$).

Наиболее употребимы два представления элементов конечного поля $F = \mathbb{F}_p^n$:

векторное — каждый элемент F записывается как вектор в базисе $\left\{ \overline{1}, \overline{x^1}, \overline{x^2}, \ldots, \overline{x^{n-1}} \right\}$;

степенное — каждый ненулевой элемент F записывается как некоторая степень генератора мультипликативной группы F^*.

Кстати, что такое $\overline{x}$ *?*
В поле $\mathbb{F}_p^n = \mathbb{F}_p[x]/\big(a(x)\big)$

- $\overline{x}$ есть совокупность всех многочленов из $\mathbb{F}_p[x]$, дающих при делении на $a(x)$ остаток x;
- $\overline{x} = (0, 1, 0, \ldots, 0) \in (\mathbb{F}_p)^n$.

В дальнейшем, как принято, вместо $\overline{x}$ обычно пишем просто x.

Замечание. Переход от степенного представления к векторному достаточно прост, а обратный переход — очень сложен, т.к. связан с вычислением *дискретного логарифма* (натурального z в равенстве $\alpha^z = b$).

На сложности этой задачи (известны не более, чем субэкспоненциальные алгоритмы её решения) базируются методы криптографии с отрытым ключом.

2.4 Корни многочленов над конечным полем

Минимальный многочлен. Рассмотрим элемент β конечного поля и будем интересоваться многочленами, для которых он является *корнем*.

Определение 2.2. *Минимальным многочленом (м.м.)* элемента $\beta \in GF(p^n)$ называется приведённый многочлен $m_\beta(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ наименьшей степени, для которого β является корнем.

Докажем далее, что м.м. для каждого элемента β:

1) существует,
2) единственен,
3) неприводим.

Сразу заметим, что *минимальный многочлен можно получить из неприводимого.*
Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_p[x]/\big(a(x)\big)$, порождаемое неприводимым многочленом

$$a(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

и убедимся, что многочлен $a_n^{-1}a(x)$ — минимальный для элемента $\overline{x} = (0, 1, 0, \ldots, 0) \in F$.

Ясно, что

$$\overline{x}^2 = \overline{x^2} = (0,0,1,0,\ldots,0), \quad \ldots, \quad \overline{x^{n-1}} = (0,\ldots,0,1)$$

Далее, с одной стороны $\overline{x}$ — корень $a(x)$, т.к.

$$a_0 + a_1\overline{x} + \ldots + a_n(\overline{x})^n = \overline{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n} = \overline{0},$$

а значит и $a_n^{-1}a(x)$.

С другой —

$$\text{если } \exists\, b(x) = b_0 + b_1\overline{x} + \ldots + b_{n-1}(\overline{x})^{n-1} = \overline{0},$$
$$\text{то } b_0\overline{1} + b_1\overline{x} + \ldots + b_{n-1}\overline{x^{n-1}} = \overline{0},$$

т.е. имеем линейную зависимость между элементами $\left\{\overline{1}, \overline{x}, \ldots, \overline{x^{n-1}}\right\}$ — базиса поля F как векторного пространства над $\mathbb{F}_p$, что возможно только при $b_0 = b_1 = \ldots = b_{n-1} = 0$.

Примитивные многочлены

Пример 2.11.

1. Многочлен $a(x) = x^3 + x + 1$ неприводим в $\mathbb{F}_2[x]$, следовательно $F = \mathbb{F}_2[x]/(a(x))$ — поле и по доказанному ранее $a(x)$ — *минимальный многочлен для* x.

   Примитивен ли этот элемент $x \in F^*$?

   Проверяем, что в $F = GF(2^3)$ $a(x) \nmid (x^t - 1)$ при $t = 3, 4, 5, 6$ (а делимость $x^7 - 1$ на $a(x)$ всегда будет иметь место: $x^7 + 1 = (x^3 + x + 1)(x^4 + x^2 + x + 1)$).

Это означает, что x — *примитивный элемент* поля $F \Leftrightarrow$ генератор $F^* \Leftrightarrow \operatorname{ord} x = 7$.

2. Многочлен $a(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ неприводим в $\mathbb{F}_2[x]$, следовательно $F = \mathbb{F}_2[x]/(a(x))$ — поле и по доказанному ранее $a(x)$ — минимальный многочлен для x.

   Примитивен ли элемент x?

   Имеем в $F = GF(2^4)$:
   $a(x) \mid (x^5-1) : x^5+1 = (x^4+x^3+x^2+x+1)(x+1)$.
   Или: $|F^*| = 15 = 3 \cdot 5$, $x^3 \neq 1$, но
   $$x^5 = x \cdot x^4 = x \cdot (x^3 + x^2 + x + 1) = 1.$$
   Это означает, что x — *не есть примитивный многочлен* и x — не генератор F^*, т.к. $\operatorname{ord} x = 5 \neq 15$.

Определение 2.3 (эквивалентное данному ранее). Минимальный многочлен примитивного элемента поля называется *примитивным многочленом.*

Свойства минимальных многочленов

Утверждение 2.5. *Минимальные многочлены неприводимы.*

Доказательство. Пусть $m_\beta(x)$ — м.м. степени m для β и $m_\beta(x) = m_1(x) \cdot m_2(x)$.

Тогда
$$m_\beta(\beta) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m_1(\beta) = 0 \\ m_2(\beta) = 0 \end{array} \right. ,$$
но степени многочленов $m_1(x)$ и $m_2(x)$ меньше m, и поэтому β не может быть их корнем. $\square$

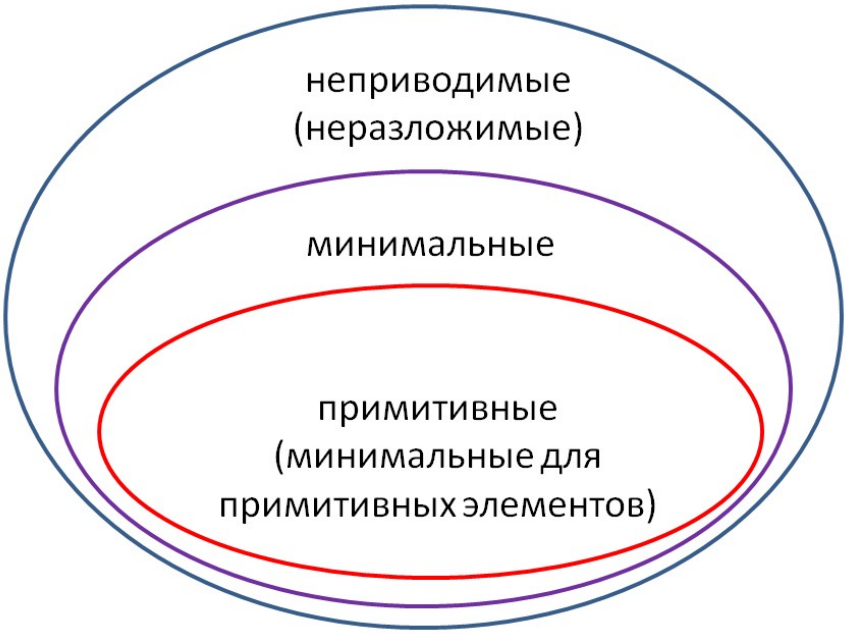


Рис. 2.1. Соотношение множеств неприводимых, минимальных и примитивных многочленов

Утверждение 2.6. *Пусть в некотором поле Галуа* $m_\beta(x)$ *— м.м. для элемента* β*, а* $f(x)$ *— многочлен такой, что* $f(\beta) = 0$*. Тогда* $f(x)$ *делится на* $m_\beta(x)$*.*

Доказательство. Разделим $f(x)$ на $m_\beta(x)$ с остатком:

$$f(x) = u(x) \cdot m_\beta(x) + v(x), \quad 0 \leqslant \deg v < \deg m_\beta(x).$$

Подставляя в это равенство β вместо x, получаем

$$0 = f(\beta) = u(\beta) \underbrace{m_\beta(\beta)}_{=0} + v(\beta) = v(\beta),$$

т.е. β — корень $v(x)$, что противоречит минимальности $m_\beta(x)$ и поэтому $v(x) \equiv 0$. □

Следствие. *Для каждого элемента поля существует не более одного м.м.*

Доказательство. Пусть минимальных многочленов два. Они взаимно делят друг друга, а значит, различаются на обратимый множитель-константу.

Поскольку минимальный многочлен нормирован, эта константа равна 1, т.е. данные многочлены совпадают. □

Утверждение 2.7. *Для каждого элемента β поля $\mathbb{F}_p^n$ существует м.м. $m_\beta(x)$ и его степень не превосходит n:* $\deg m_\beta(x) \leqslant n$.

Доказательство. Рассмотрим следующие элементы поля $\mathbb{F}_p^n$: $1, \beta, \beta^2, \ldots, \beta^n$ — их $n+1$ штук, а размерность $\mathbb{F}_p^n$ как векторного пространства равна n $\Rightarrow$ эти элементы линейно зависимы, т.е. существуют такие не все равные 0 коэффициенты $c_0, \ldots, c_n$, что

$$c_0 1 + c_1\beta + \ldots + c_n\beta^n = 0,$$

$\Rightarrow$ β — корень многочлена $f(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$.

Минимальным многочленом для β будет некоторый нормированный неприводимый делитель $f(x)$. □

Далее будут доказаны ещё два свойства м.м. $m_\beta(x)$ элемента β поля $\mathbb{F}_p^n$:

1. $m_\beta(x) \mid \left(x^{p^n} - x\right)$.
2. Многочлен $m_\beta(x)$ — минимальный для $\left\{ \beta, \beta^p, \beta^{p^2}, \ldots, \beta^{p^{\deg m_\beta(x)-1}} \right\}$ — *сопряжённых* с β элементов $\mathbb{F}_p^n$.

Свойства многочленов над конечным полем

Поле разложения многочлена $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ — наименьшее $\mathbb{F}_p^n$, $n = \min$ расширение поля $\mathbb{F}_p$, над которым $f(x)$ разлагается в произведение линейных множителей.

Теорема 2.4 (о поле разложения). *Любой ненулевой элемент поля* $F = \mathbb{F}_p^n$ *является корнем многочлена* $x^{p^n-1} - 1$*:*

$$x^{p^n-1} - 1 = (x - \beta_1) \cdot \ldots \cdot (x - \beta_{p^n-1})$$

где $\{\beta_1, \ldots, \beta_{p^n-1}\} = F^*$*, т.е.* F *— поле разложения данного многочлена.*

Доказательство. F^* — циклическая группа по умножению порядка $p^n - 1$.

Порядок $\operatorname{ord}\alpha$ любого её элемента (= порядок циклической подгруппы $\langle\alpha\rangle$ — по теореме Лагранжа) делит порядок группы.

Поэтому $p^n - 1 = q \cdot \operatorname{ord}\alpha$ и

$$\alpha^{p^n-1} - 1 = \alpha^{q \operatorname{ord}\alpha} - 1 = (\alpha^{\operatorname{ord}\alpha})^q - 1 = 1^q - 1 = 0,$$

т.е. α — корень $x^{p^n-1} - 1$. □

Следствие (теорема Ферма). *Все элементы поля* $\mathbb{F}_p^n$*, не исключая нуля, являются корнями многочлена* $x^{p^n} - x$.

Доказательство. Вынесем x за скобку:

$$x^{p^n} - x = x\left(x^{p^n-1} - 1\right).$$

У второго сомножителя корнями будут все ненулевые элементы поля, а у первого — 0. □

Иными словами, $\mathbb{F}_p^n$ — поле разложения многочлена $x^{p^n} - x$.

Теорема 2.5. *В кольце многочленов над конечным полем*

$$(x^n - 1) \vdots (x^m - 1) \Leftrightarrow n \vdots m.$$

Доказательство.

- Пусть $n = mk$. Сделаем замену $x^m = y$, тогда $x^n - 1 = y^k - 1$ и $x^m - 1 = y - 1$.
  Делимость очевидна, т.к. 1 — корень $y^k - 1$.

- Предположим, что $n \not\vdots m$, т.е. $n = km + r$, $0 < r < m$, тогда

$$x^n - 1 = \frac{x^r(x^{mk} - 1)(x^m - 1)}{x^m - 1} + x^r - 1 = \\ = \frac{x^r(x^{mk} - 1)}{x^m - 1}(x^m - 1) + x^r - 1.$$

Последнее выражение задает результат деления $x^n - 1$ на $x^m - 1$ с остатком, поскольку $x^{mk} - 1$ делится на $x^m - 1$ по доказанному выше.
Остаток $x^r - 1 \neq 0$ в силу сделанных предположений. Следовательно $x^n - 1$ *не делится* на $x^m - 1$. □

Теорема даёт возможность раскладывать многочлены $x^n - 1$ *при составных* n.

Пример 2.12. Многочлен $x^{15} + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ (где $-1 = +1$) должен делиться на $x^3 + 1$ и $x^5 + 1$.

Действительно,

$$x^{15} + 1 = (x^3 + 1)(x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1) = \\ = (x^5 + 1)(x^{10} + x^5 + 1).$$

Теорема 2.6. *Все неприводимые многочлены n-й степени из $\mathbb{F}_p[x]$ делят многочлен $x^{p^n} - x$.*

Доказательство.

$n = 1$. Убеждаемся, что $(x - a) \mid (x^p - x)$, где $a \in \mathbb{F}_p$: поскольку $a^p = a$, оба данных многочлена имеют корень a.

$n > 1$. Выбираем неприводимый нормированный многочлену $f(x)$ степени n из $\mathbb{F}_p[n]$ (*пока не доказано!*[1]) и строим поле $\mathbb{F}_p[x]/\big(f(x)\big)$.
В нём x — корень и своего м.м. $f(x)$, и $x^{p^n-1} - 1$.
По свойствам м.м. $x^{p^n-1} - 1$ делится на $f(x)$.

□

Пример 2.13 (продолжение *Примера* 2.12). Продолжаем разложение $x^{15} + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$.

Поскольку $15 = 2^4 - 1$, все неприводимые многочлены 4-й степени будут делителями $x^{16} - x$ и, следовательно, $x^{15} + 1$. Таких многочленов 3:

$$x^4 + x + 1, \quad x^4 + x^3 + 1 \quad \text{и} \quad x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Имеем

$$x^{15}+1 \;=\; (x^3+1)(x^4+x+1)(x^4+x^3+1)(x^4+x^3+x^2+x+1).$$

Замечаем, что $3 = 2^2 - 1$, и поэтому все неприводимые многочлены 2-й степени будут делителями $x^4 - x$ и, следовательно, x^3+1. Такой многочлен только один: $x^2 + x + 1$.

Окончательно получаем разложение $x^{15}+1$ на неразложимые над $\mathbb{F}_2$ многочлены:

[1] Теорема 2.1

$$x^{15}+1 = (x+1)(x^2+x+1)\times \\ \times (x^4+x+1)(x^4+x^3+1)(x^4+x^3+x^2+x+1).$$

Теорема 2.7. *Любой неприводимый делящий* $x^{p^n}-x$ *многочлен имеет степень, не превосходящую* n.

Доказательство. Пусть φ — неприводимый делитель $x^{p^n}-x$ степени k.

Тогда $F \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{F}_p/(\varphi)$ — поле, которое рассмотрим как векторное пространство над $\mathbb{F}_p$ с базисом $\left\{\overline{1}, \overline{x}, \ldots, \overline{x^{k-1}}\right\}$.

Обозначим $\overline{x}=\alpha$. Поскольку $(x^{p^n}-x) \vdots \varphi$, то в F имеем $\alpha^{p^n}-\alpha=0$.

Любой элемент F выражается через базис:

$$\beta = \sum_{i=0}^{k-1} a_i\alpha^i.$$

Возведя обе части этого равенства в степень p^n, получим

$$\beta^{p^n} = \left(\sum_{i=0}^{k-1} a_i\alpha^i\right)^{p^n} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i\alpha^i = \beta,$$

т.е. β — корень уравнения

$$x^{p^n}-x = 0 \qquad (*)$$

Итак, каждый элемент поля F является корнем $(*)$, но у $(*)$ не более p^n различных корней, а $|F|=p^k$; поэтому $n \geqslant k$. □

Итак, *вопрос*: какие неприводимые многочлены $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ делят $x^{p^n} - x$?
Ответ: либо (1) любой — степени n, либо (2) некоторый — степени $< n$ и (3) других нет.

Следующая теорема позволяет находить все корни многочлена, если известен какой-либо корень известен: достаточно возводить его последовательно в степени p.

Теорема 2.8 (свойство корней неприводимого многочлена). *Если β — корень неприводимого многочлена $f(x)$ степени n из $\mathbb{F}_p[x]$, то элементы β, β^p, β^{p^2}, …, $\beta^{p^{n-1}}$ исчерпывают список всех n его корней.*

Доказательство. 1. Покажем, что если β — корень $f(x)$, то β^p — тоже корень.

Поскольку $a^p = a$ для всех $a \in \mathbb{F}_p$, то справедливо

$$\begin{aligned}\big(a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k\big)^p \;&= \\ = \; a_0^p + a_1^p x^p + a_2^p x^{2p} + \ldots + a_k^p x^{kp} \;&= \\ = \; a_0 + a_1 (x^p) + a_2 (x^p)^2 + \ldots + a_k (x^p)^k,&\end{aligned}$$

т.е. для любого многочлена $\varphi(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ выполняется равенство

$$\big(\varphi(x)\big)^p \;=\; \varphi(x^p). \qquad (*)$$

Отсюда $f(\beta) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(\beta)^p = 0 \;\Leftrightarrow\; f(\beta^p) = 0$ и β, β^p, …, $\beta^{p^{n-1}}$ — корни многочлена $f(x)$.

2. Осталось доказать, что все β, β^p, …, $\beta^{p^{n-1}}$ различны, и тогда (многочлен степени n имеет не более n корней) можно утверждать, что найдены *все* корни многочлена $f(x)$.

Предположим, что $\beta^{p^l} = \beta^{p^k}$, считая $l \leqslant k$. Далее, поскольку

$$\beta = \beta^{p^n} = \beta^{p^k \cdot p^{n-k}} = \left(\beta^{p^k}\right)^{p^{n-k}} = \left(\beta^{p^l}\right)^{p^{n-k}} = \beta^{p^{n-k+l}},$$

то β — корень уравнения $x^{p^{n-k+l}-1} - 1 = 0$.

По *Теореме* 2.6 получаем $n - k + l \geqslant n \;\Rightarrow\; l \geqslant k$, т.е. $l = k$ и все вышеописанные корни различны. □

Корни β, β^p, β^{p^2}, …, $\beta^{p^{n-1}}$ неприводимого многочлена $f(x)$ степени n называют *сопряжёнными* и ясно, что они лежат в поле $\mathbb{F}_p[x]/\big(f(x)\big)$.

Нахождение корней неприводимого многочлена

Пример 2.14. 1. Найти корни неприводимого над $\mathbb{F}_2$ многочлена

$$f(x) = x^4 + x^3 + 1.$$

Решение. Один корень получаем немедленно: это x.

По только что доказанной теореме можно выписать остальные корни в поле $\mathbb{F}_2[x]/(f(x))$:

$$x^2, \quad x^4 = x^3 + 1, \quad x^8 = x^6 + 1 = x^3 + x^2 + x.$$

Покажем, что, например, x^2 — действительно корень $f(x)$: поскольку $f(x^2) = x^4 + x^3 + 1\big|_{x \mapsto x^2} = x^8 + x^6 + 1$ и $x^8 = x^6 + 1$, то $f(x^2) = 0$.

2. Решить уравнение

$$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0, \quad f(x) \in \mathbb{F}_2[x].$$

Решение. Убеждаемся, что многочлен $f(x)$ неприводим в $\mathbb{F}_2[x]$. Поэтому один его корень — x, и по доказанной теореме выписываем остальные в поле $\mathbb{F}_2[x]/(f(x))$:

$$x^2,\ \ x^4 = x^3 + x^2 + x + 1,\ \ x^8 = x^6 + x^4 + x^2 + 1 = \ldots = x^3.$$

Покажите самостоятельно, что x^3 — действительно корень $f(x)$, т.е. что

$$f(x^3) \ = \ x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1 \ = \ 0.$$

3. Решить уравнение

$$f(x) \ = \ x^2 + 2x - 1 \ = \ 0, \text{ где } \ f(x) \in \mathbb{F}_3[x].$$

Решение. Перебором элементов $x \in \mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ убеждаемся $f(x)$ — неприводимый многочлен.
Но тогда в поле $\mathbb{F}_3[x]/\left(x^2 + 2x + 2\right)$ он имеет корни x и x^3.

Поскольку $x^2 = -2x + 1 = x + 1$, то

$$x^3 \ = \ x^2 + x \ = \ 2x + 1.$$

Убедимся, что $2x + 1$ — корень $f(x)$:

$$f(x^2 + x) \ = \ (2x + 1)^2 + x + 1 \ = \\ = \ x^2 + x + 1 + x + 1 \ = \ 3 \cdot (x + 1) \ = \ 0.$$

Ответ: многочлен $f(x) = x^2 + 2x - 1 \in \mathbb{F}_3[x]$ имеет корни x и $2x + 1$ в поле $\mathbb{F}_3[x]/\left(x^2 + 2x + 2\right)$.

Алгоритм нахождения всех корней многочлена $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$.

1. Разложить $f(x)$ на *неприводимые* произведение неприводимых многочленов:
$$f(x) = g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot \ldots \cdot g_k(x).$$
2. Для каждого многочлена $g_i(x)$, $i = \overline{1,k}$ рассмотреть расширение $\mathbb{F}_p[x]/\big(g_i(x)\big)$, в котором он будет иметь $\deg g_i$ корней
$$\alpha,\ \alpha^p,\ \alpha^{p^2},\ \ldots,\ \alpha^{p^{\deg g_i - 1}}.$$
3. Объединить все корни в одном общем расширении $\mathbb{F}_p^n$, где $n = \text{НОК}\,(n_1, \ldots, n_k)$.

Пример 2.15. 1. Решить уравнение
$$f(x) = 2x^4 + x^3 + 4x^2 + 4 = 0, \text{ где } f(x) \in \mathbb{F}_5[x].$$

Решение. Вычисляем значения $f(x)$ для всех $x \in \mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$: $f(0) = 4$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$ и т.о. $x = 2$ — корень $f(x)$.

Деля «уголком» $f(x)$ на $f_1(x) = x - 2 = x + 3$, получим $2x^4 + x^3 + 4x^2 + 4 = (x+3) \cdot (2x^3 + 4x + 3)$.

Для удобства нормируем частное $2x^3 + 4x + 3$: т.к. $2^{-1} = 3$, то вместо уравнения $2x^3 + 4x + 3 = 0$ можно решать уравнение
$$f_2(x) = 3 \cdot (2x^3 + 4x + 3) = x^3 + 2x + 4 = 0.$$

Перебором элементов $x \in \mathbb{F}_5$ —

$f(0) = 4,\ f(1) = 2,\ f(2) = 1,\ f(3) = 2,\ f(4) = 1,$

убеждаемся, что $f_2(x) = x^3 + 2x + 4$ — неприводимый многочлен[2].

В поле $\mathbb{F}_5[x]/\big(x^3 + 2x + 4\big)$ корнями многочлена $f_2(x) = 0$ будут $x,\ x^5,\ x^{25}$.

Вычисляем — с учётом $x^3 = -2x - 4 = 3x + 1$:

$$\begin{aligned} x^5 &= x^2(3x+1) = 3x^3 + x^2 = 4x + 3 + x^2 = \\ &= x^2 + 4x + 3; \\ x^{25} &= \big(x^5\big)^5 = \big(x^2 + 4x + 3\big)^5 = x^{10} + 4^5 x^5 + 3^5 = \\ &= x^{10} + 4(x^2 + 4x + 3) + 3 = x^{10} + 4x^2 + x. \end{aligned}$$

(поскольку $4^5 = 2^{10} = 102\underline{4}$ и $3^5 = 81 \cdot 3 = 24\underline{3}$).

Найдём отдельно x^{10}:

$$\begin{aligned} x^{10} &= \big(x^5\big)^2 = \big(x^2 + 4x + 3\big)^2 = \\ &= x^4 + x^2 + 3^2 + 3x^3 + 4x + x^2 = \\ &= x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 4x + 4 = \\ &= \cancel{3}x^2 + \cancel{x} + \cancel{4}x + 3 + \cancel{2}x^2 + 4x + 4 = 4x + 2. \end{aligned}$$

Продолжаем:

$$x^{25} = x^{10} + 4x^2 + x = \cancel{4}x + 2 + 4x^2 + \cancel{x} = 4x^2 + 2.$$

Ответ: уравнение $f(x) = 2x^4 + x^3 + 4x^2 + 4 = 0$, где $f(x) \in \mathbb{F}_5[x]$ имеет корни $2,\ x,\ x^2{+}4x{+}3,\ 4x^2{+}2$ в поле $F = \mathbb{F}_5[x]/\big(x^3 + 2x + 4\big)$ (поскольку корень $2 \in F$).

2. Решить уравнение

$$f(x) = x^8 + x^4 + x^2 + x + 1 = 0, \text{ где } f(x) \in \mathbb{F}_2[x].$$

[2] а если бы это был многочлен 4-й степени?

Решение. В таблицах неприводимых многочленов данный многочлен отсутствует.

Подбором находим, что $f(x)$ разлагается в произведение двух неприводимых над $\mathbb{F}_2$ многочленов:

$$x^8+x^4+x^2+x+1 = \underbrace{(x^4+x^3+1)}_{f_1(x)} \cdot \underbrace{(x^4+x^3+x^2+x+1)}_{f_2(x)}.$$

Уравнения $f_1(x)=0$ и $f_2(x)=0$ ранее были решены: их корни соответственно суть

x, x^2, x^3+1, x^3+x^2+x в поле $F_1 = \mathbb{F}_2[x]/\big(x^4+x^3+1\big)$

и

x, x^2, x^3, x^3+x^2+x+1

в поле $F_2 = \mathbb{F}_2[x]/\big(x^4+x^3+x^2+x+1\big)$.

Степени обоих расширений поля $GF(2)$ совпадают ($=4$) и поля F_1 и F_2 изморфны (*пока не доказано!*), т.о. все 8 корней уравнения $f(x)=0$ лежат в поле $GF(2^4)$.

Для записи данных корней выберем представление F_1 поля $GF(2^4)$. Тогда запись корней $f_1(x)=0$ останется без изменений, а корни $f_2(x)=0$ надо представить как элементы F_1.

Приравнивая многочлены, порождающие данные поля, получим

$$x^4+x^3+1 = x^4+x^3+x^2+x+1 \;\Rightarrow\; x^2+x = x(x+1) = 0.$$

Ясно, что при подстановке $x \mapsto x+1$ полученное равенство останется справедливым. Применим данную постановку для изоморфного преобразования полей $F_1 \leftrightarrow F_2$.

Находим представления корней многочлена $f_2(x)$ в поле F_1:

$$\begin{aligned} x &\mapsto x+1, \\ x^2 &\mapsto (x+1)^2 = x^2+1, \\ x^3 &\mapsto (x+1)^3 = x^3+x^2+x+1, \\ x^3+x^2+x+1 &\mapsto (x^3+x^2+x+1)+(x^2+1)+ \\ &\quad +(x+1)+1 = x^3. \end{aligned}$$

Удостоверимся, что, например, x^2+1 — корень $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x^2+1) &= (x^2+1)^8+(x^2+1)^4+(x^2+1)^2+(x^2+1)+1 = \\ &= (x^{16}+1)+(x^8+1)+(x^4+1)+x^2. \end{aligned}$$

Очевидно $x^{16} = x$, $x^4 = x^3+1$ и $x^8 = (x^3+1)^2 = x^6+1$. Поскольку $x^5 = x^4+x = x^3+x+1$, то
$x^6 = x^4+x^2+x = x^3+x^2+x+1$ и $x^8 = x^3+x^2+x$.

Подставляя в выражение для $f(x^2+1)$ полученные полиномиальные представления степеней x, получим

$$f(x^2+1) = (x+1)+(x^3+x^2+x+1)+x^3+x^2 = 0.$$

Ответ: многочлен $f(x) = x^8+x^4+x^2+x+1 \in \mathbb{F}_2[x]$ имеет корни x, x^2, x^2+1, x^3, x^3+1, x^3+x^2+x, $x+1$, x^3+x^2+x+1 в поле $\mathbb{F}_2[x]/\left(x^4+x^3+1\right)$.

3. Найти корень многочлена

$$f(x) = x^4+2x+2 = 0 \in \mathbb{F}_3[x].$$

Решение. Выясним сначала разложимость $f(x)$. Поскольку $f(0) = f(1) = 2$, $f(2) = 1$, то $f(x)$ линейных делителей не имеет.

Проверим существование квадратичных делителей:

$$f(x) = x^4 + 2x + 2 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) =$$
$$= x^4 + cx^3 + dx^2x + ax^3 + acx^2 + adx + bx^2 + bcx + bd =$$
$$= x^4 + (a + c)x^3 + (b + ac + d)x^2 + (ad + bc)x + bd.$$

Отсюда

1) $c = -a$ и коэффициент при x^2 есть $b - a^2 + d = 0$;
2) из $bd = 2$ следует, что либо $b = 1$ и $d = 2$, либо $b = 2$ и $d = 1$, т.е. в любом случае $b + d = 3 = 0$;
3) но тогда из п. (1) $a^2 = 0$, т.е. $a = c = 0$ и коэффициент при x равен $0 \Rightarrow$ противоречие.

Т.о. полином $f(x) = x^4 + 2x + 2 = 0$ над $\mathbb{F}_3$ *неприводим*.

Теперь рассмотрим поле $\mathbb{F}_3[x]/\left(x^4 + 2x + 2\right)$.

В нём $f(x) = x^4 + 2x + 2 = 0$, т.е. $x^4 = x + 1 = 0$, и корни $f(x)$ суть x, x^3, x^{3^2}, x^{3^3}.

Вычислим x^9 и x^{27}:

$$x^9 = \left(x^4\right)^2 x = (x + 1)^2 x = x^3 + 2x^2 + x;$$
$$x^{27} = \left(x^9\right)^3 = (x^3 + 2x^2 + x)^3 = x^9 + 2x^6 + x^3 =$$
$$= (x^3 + 2x^2 + x) + 2x^2x^4 + x^3 =$$
$$= x^3 + 2x^2 + x + 2x^3 + 2x^2 + x^3 =$$
$$= x^3 + x^2 + x.$$

Ответ: в поле $\mathbb{F}_3[x]/\left(x^4 + 2x + 2\right)$ уравнение

$$f(x) = x^4 + 2x + 2 = 0$$

имеет корни x, x^3, $x^3 + 2x^2 + x$, $x^3 + x^2 + x$.

4. Решить уравнение $f(x) = x^5 + x^2 + 1 = 0$, где $f(x) \in \mathbb{F}_2[x]$.

Решение. Поскольку $f(0) = f(1) = 1$, полином $f(x)$ линейных делителей не имеет. Кроме того, легко устанавливается, что

$$x^5 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 + x^2) + 1,$$

т.е. полином $f(x)$ не имеет и (единственного) квадратичного неразложимого делителя и, поскольку его степень равна 5, то он *неприводим*.

Рассмотрим теперь поле $\mathbb{F}_2[x]/\big(x^5 + x^2 + 1\big)$. В нём $f(x) = x^5 + x^2 + 1 = 0$, т.е. $x^5 = x^2 + 1 = 0$ и корни $f(x)$ суть $x,\ x^2,\ x^{2^2},\ x^{2^3},\ x^{2^4}$.

Вычислим x^8 и x^{16}:

$$\begin{aligned} x^8 &= x^5x^3 = (x^2+1)x^3 = x^5 + x^3 = x^3 + x^2 + 1; \\ x^{16} &= \big(x^8\big)^2 = (x^3 + x^2 + 1)^2 = x^6 + x^4 + 1 = \\ &= x^5x + x^4 + 1 = (x^3 + x) + x^4 + 1 = \\ &= x^4 + x^3 + x + 1. \end{aligned}$$

Ответ: в поле $\mathbb{F}_2[x]/\big(x^5 + x^2 + 1\big)$ уравнение

$$f(x) = x^5 + x^2 + 1 = 0$$

имеет корни $x,\ x^2,\ x^4,\ x^3 + x^2 + 1,\ x^4 + x^3 + x + 1$.

5. Решить уравнение $f(x) = x^2 + x + 1 = 0$, если

(1) $f(x) \in \mathbb{F}_2[x]$; (2) $f(x) \in \mathbb{F}_3[x]$; (3) $f(x) \in \mathbb{F}_5[x]$.

Решение. $\deg f(x) = 2$ и поэтому $f(x)$ имеет 2 корня.

(1) Полином $f(x)$ неприводим над $\mathbb{F}_2 \Rightarrow$ его корни x и x^2.

(2) Полином $f(x)$ приводим над $\mathbb{F}_3$:

$$x^2 + x + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2,$$

поэтому $f(x)$ над $\mathbb{F}_3$ имеет корень 1 степени 2.

(3) Полином $f(x)$ неприводим над $\mathbb{F}_5 \Rightarrow$ его корни x и x^5.

2.5 Существование и единственность поля $GF(p^n)$

Вычисления в мультипликативной группе расширения поля Построим поле $\mathbb{F}_2^4$. Его можно представить как факторкольцо $\mathbb{F}_2/\big(a(x)\big)$ по любому (*пока не доказано!*) из трех неприводимых над $\mathbb{F}_2$ многочленов 4-й степени:

$$x^4 + x + 1, \quad x^4 + x^3 + 1, \quad x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Сделаем это, взяв многочлен $a(x) = x^4 + x + 1$.

Будем задавать элементы $\mathbb{F}_2^4$ наборами коэффициентов многочлена-остатка при делении на $a(x)$, записывая их в порядке возрастания степеней.

Порождающим является элемент $\alpha = x$, который записывается как $(0,1,0,0)$.

Вычислим степени α, сведя результаты в таблицу.

$\alpha^4 = \alpha + 1$ степень α	1	x	x^2	x^3
α	(0,	1,	0,	0)
α^2	(0,	0,	1,	0)
α^3	(0,	0,	0,	1)
$1 + \alpha = \alpha^4$	(1,	1,	0,	0)
$\alpha + \alpha^2 = \alpha^5$	(0,	1,	1,	0)
$\alpha^2 + \alpha^3 = \alpha^6$	(0,	0,	1,	1)
$\alpha^3 + \alpha + 1 = \alpha^3 + \alpha^4 = \alpha^3\alpha^4 = \alpha^7$	(1,	1,	0,	1)
$1 + \alpha^2 = \alpha + 1 + \alpha^2 + \alpha = \alpha^8$	(1,	0,	1,	0)
$\alpha + \alpha^3 = \alpha^9$	(0,	1,	0,	1)
$\alpha^2 + 1 + \alpha = \alpha^2 + \alpha^4 = \alpha^{10}$	(1,	1,	1,	0)
$\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 = \alpha^{11}$	(0,	1,	1,	1)
$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 = \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = \alpha^{12}$	(1,	1,	1,	1)
$1 + \alpha^2 + \alpha^3 = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = \alpha^{13}$	(1,	0,	1,	1)
$1 + \alpha^3 = \alpha + \alpha^3 + \alpha^4 = \alpha^{14}$	(1,	0,	0,	1)
$1 = \alpha + \alpha^4 = \alpha^{15}$	(1,	0,	0,	0)

Имея такую таблицу, можно очень просто производить умножение.

Пример 2.16. Как найти $P = (x^3 + x + 1) \cdot (x^2 + x + 1)$?

1. Перемножить, учитывая $x^4 = x + 1$ — можно, но сложно...
2. С помощью таблицы:
   - представляем многочлены в векторной форме и по ней — в виде степеней α:

$$x^3 + x + 1 \longleftrightarrow (1, 1, 0, 1) \longleftrightarrow \alpha^7,$$

$$x^2+x+1 \longleftrightarrow (1,1,1,0) \longleftrightarrow \alpha^{10}$$

- перемножая, с учётом $\alpha^{15}=1$, получаем:

$$P = \alpha^7\alpha^{10} = \alpha^{17} = \alpha^2 = x^2.$$

Нахождение минимальных многочленов. Пусть $a(x)$ — неприводимый многочлен над $\mathbb{F}_p$.

Для нахождения м.м. $m_\beta(x)$ элемента β поля $\mathbb{F}_p[x]/\big(a(x)\big)$ вычисляем сопряжённые с ним элементы β^p, β^{p^2}, ..., пока на некотором шаге d окажется, что

1) $\beta^d = \beta$, тогда

$$m_\beta(x) = (x-\beta)\cdot(x-\beta^p)\cdot\ldots\cdot\left(x-\beta^{p^{d-1}}\right),$$

случай $m_\beta(x)\equiv 0$ эквивалентен 2).

2) $\beta^d = x$, тогда $m_\beta(x) = a(x)$.

Пример 2.17. Найдём минимальные многочлены для элементов x^2+x, x^2 поля

$$F = \mathbb{F}_2[x]/\big(x^4+x+1\big).$$

В этом поле $x^4 = x+1$.

1. $\underline{\beta = x^2+x.}$ Вычисляем элементы, сопряжённые с β:

$$\beta^2 = (x^2+x)^2 = x^4+x^2 = x^2+x+1,$$
$$\beta^4 = (x^2+x+1)^2 = x^4+x^2+1 = x+\cancel{1}+x^2+\cancel{1} = x^2+x = \beta.$$

Т.о. м.м. $m_\beta(x)$ имеет 2 корни β, β^2, его степень равна 2 и

$$m_\beta(x) = (x-\beta)(x-\beta^2) = x^2 + (\beta^2+\beta)\,x + \beta^3.$$

Вычисляем коэффициенты полинома:

$$\begin{aligned}\beta^2+\beta &= (x^2+x+1)+(x^2+x) = 1,\\ \beta^3 &= (x^2+x+1)(x^2+x) = \\ &= x^4 + \cancel{x^3} + \cancel{x^3} + \cancel{x^2} + \cancel{x^2} + x = \\ &= (x+1)+x = 1,\end{aligned}$$

т.е. $m_\beta(x) = x^2+x+1$.

Заметим, что

- коэффициенты перед степенями x могут оказаться только константы 0 или 1, иначе — ошибка в вычислениях;
- в данном случае вычислений коэффициентов можно было не проводить, т.к. x^2+x+1 — единственный неприводимый многочлен 2-й степени над $\mathbb{F}_2$.

2. $\underline{\beta = x+1.}$ Элементы, сопряжённые с β:

$$\begin{aligned}\beta^2 &= x^2+1,\\ \beta^4 &= x^4+1 = x+1+1 = x.\end{aligned}$$

Заметим, что многочлен $a(x) = x^4+x+1$ примитивен, т.е. является м.м. для x. Поэтому $a(x)$ будет м.м. и для элемента $\beta = x+1$: $m_\beta(x) = a(x) = x^4+x+1$.

Ясно, что $a(x)$ является м.м. также и для сопряжённых с x элементов x^2, x^4, x^8 (выразите их через β самостоятельно).

Существование поля $GF(p^n)$ для всех n. Мы уже показали, что любое конечное поле имеет p^n элементов (p — простое, n — натуральное).

Теперь установим существование неприводимого нормированного многочлена f степени n над $GF(p)$, откуда последует существование поля из $GF(p^n)$ как факторкольца по идеалу (f).

Для таких многочленов над конечным полем справедлив аналог основной теоремы арифметики: *каждый нормированный многочлен разлагается на произведение неприводимых многочленов однозначно* с точностью до порядка сомножителей.

Доказательство. Действительно:

- разложение на множители в евклидовом кольце однозначно;
- в случае кольца многочленов над полем обратимые элементы — ненулевые константы;
- выбор старшего коэффициента 1 однозначно определяет сомножители.

□

Символом $((n))$ обозначим число нормированных неприводимых многочленов степени n над полем $\mathbb{F}_p$.

Лемма 2.3. $\sum\limits_{d|n} d \cdot ((d)) = p^n$.

Доказательство. Занумеруем $i = 1, \ldots, ((n))$ все неприводимые нормированные многочлены степени n и сопоставим им формальную переменную $f_{i,n}$ $\Rightarrow$ произвольному многочлену однозначно сопоставлен моном (многочлен степени n_j берётся в степени s_j):

$$f_{i_1,n_1}^{s_1} \cdot \ldots \cdot f_{i_r,n_r}^{s_r}, \quad \text{причем} \quad \sum_{j=1}^{r} n_j s_j = n.$$

Поэтому все нормированные многочлены перечисляются формальным бесконечным произведением

$$\prod_{i,n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_{i,n}^{k} \right) = \sum f_{i_1,n_1}^{s_1} \cdot \ldots \cdot f_{i_r,n_r}^{s_r} \qquad (*)$$

(раскрыты скобки и бесконечное произведение записано в виде формального ряда).

Сделаем замену переменных $f_{i,n} = t^n$, которая делает *все многочлены одной степени неразличимыми.*

Приведение подобных приведёт к тому, что:

в правой части $(*)$ будет ряд от переменной t.

Коэффициент при t^n в этом ряде равен числу нормированных многочленов степени n, т.е. p^n:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n t^n.$$

в левой части все неприводимые многочлены степени n дадут одинаковый множитель (сумму бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем t^n) и $(*)$ превращается в

$$\prod_{n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^{nk} \right)^{((n))} = \sum_{n=0}^{\infty} p^n t^n.$$

По формуле суммы бесконечной геометрической прогрессии:

$$\prod_n \frac{1}{(1-t^n)^{((n))}} \;=\; \frac{1}{1-pt}\,.$$

Прологарифмируем («$-$» в обеих частях равенства сокращаются, $n \mapsto d$):

$$\sum_d ((d)) \ln(1-t^d) \;=\; \ln(1-pt)\,.$$

Продифференцируем по t («$-$» в обеих частях равенства сокращаются):

$$\sum_d ((d)) \frac{dt^{d-1}}{1-t^d} \;=\; \frac{p}{1-pt}\,.$$

Снова воспользуемся формулой суммой геометрической прогрессии:

$$\sum_{d,k} ((d)) d t^{d-1} t^{dk} \;=\; \sum_n p^{n+1} t^n.$$

Умножаем на t обе части равенства:

$$\sum_{d,k} d((d)) t^{d(k+1)} \;=\; \sum_n p^n t^n.$$

Равенство коэффициентов при одинаковых степенях t и есть утверждение леммы. □

Следствия.

1. *Существование неприводимых многочленов.*

Доказательство. Простая оценка

$$n((n)) \;=\; p^n - \sum_{k|n} k \cdot ((k)) \;\geqslant\; p^n - \sum_{k=0}^{n-1} p^k \;=$$

$$= p^n - \frac{p^n - 1}{p - 1} > 0\,.$$

доказывает, что $((n)) > 0 \;\Rightarrow$ существует *хотя бы один* неприводимый (и нормированный) многочлен степени n; более точная оценка — $\frac{p^n}{2n} \leqslant ((n))$. □

2. Среднее число неприводимых нормированных многочленов: $((n)) \sim p^n/n$.

Доказательство. Переход к пределу при $n \to \infty$ в полученной формуле. □

Т.о. *неприводимые нормированные* многочлены составляют приблизительно $1/n$-ю часть всех многочленов степени n над полем $\mathbb{F}_p$.

Ещё одна формула для числа $((n))$ *неприводимых нормированных многочленах степени* n *над* $\mathbb{F}_p$.

Функция Мёбиуса $\mu(n)$ определена для всех $n \in \mathbb{N}$:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{если примарное разложение } n \text{ состоит} \\ & \quad \text{из } \textit{чётного числа различных} \\ & \quad \text{сомножителей;} \\ -1, & \text{если примарное разложение } n \text{ состоит} \\ & \quad \text{из } \textit{нечётного числа различных} \\ & \quad \text{сомножителей;} \\ 0, & \text{иначе (примарное разложение} \\ & \quad \text{не свободно от квадратов).} \end{cases}$$

Например:

$$\mu(1) = 1 \text{ (по определению)}, \qquad \mu(6) = 1,$$

$$\mu(2) = -1, \qquad \mu(7) = -1,$$
$$\mu(3) = -1, \qquad \mu(8) = 0,$$
$$\mu(4) = 0, \qquad \mu(9) = 0,$$
$$\mu(5) = -1, \qquad \mu(10) = 1.$$

Основное свойство функции Мёбиуса:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n > 1. \end{cases}.$$

Теорема 2.9 (формула Гаусса).

$$((n)) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d)\, p^{\frac{n}{d}}.$$

Например:

$$p = 2,\ ((4)) = \tfrac{1}{4}\left[\mu(1)2^4 + \mu(2)2^2 + \mu(4)2\right] = \\ = \tfrac{1}{4}\left[2^4 - 2^2 + 0\right] = 3;$$
$$p = 2,\ ((5)) = \tfrac{1}{5}\left[\mu(1)2^5 + \mu(5)2\right] = \tfrac{1}{5}\left[32 - 2\right] = 6;$$
$$p = 3,\ ((6)) = \tfrac{1}{6}\left[\mu(1)3^6 + \mu(2)3^3 + \mu(3)3^2 + \mu(6)3\right] = \\ = 116.$$

Докажем теперь, что *любые два поля с одинаковым числом элементов изоморфны.*

Теорема 2.10. *Пусть* $m_\alpha(x)$ — *минимальный многочлен элемента* $\alpha \in \mathbb{F}_p^n$ *и* d — *его степень.*

Тогда поле $\mathbb{F}_p[x]/\big(m_\alpha(x)\big)$ *изоморфно подполю* $\mathbb{F}_p^d$, *порожденному степенями* α.

Доказательство. Степени α принадлежат d-мерному пространству с базисом $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{d-1}$, которое является подполем поля $\mathbb{F}_p^n$, поскольку замкнуто относительно сложения и умножения и содержит 0 и 1. $\square$

2.6 Циклические пространства

Далее будем рассматривать кольцо многочленов $R = \mathbb{F}_p[x]/(f)$ по модулю главного идеала (f) *возможно приводимого* многочлена $f \in \mathbb{F}_p[x]$.

Если f неприводим, то R — поле и этот случай уже рассмотрен. Но в любом случае R — векторное пространство над $\mathbb{F}_p$ т.е. совокупность многочленов степени меньшей $\deg f$.

$$
\begin{aligned}
(f) &= \{\, t \cdot f \,\},\ t \in \mathbb{F}_p[x];\\
\mathbb{F}_p[x]/(f) &= \left\{\, (f), \overline{g}, \overline{h}, \ldots \right\}, \quad \deg \overline{g}, \ldots < \deg f.\\
\overline{g} &= (f) + g, \ldots .
\end{aligned}
$$

Нормированный делитель порождающего элемента идеала

Теорема 2.11. *Пусть φ — неприводимый нормированный многочлен, который делит f. Тогда*

1) *совокупность всех вычетов, кратных φ, образует идеал в кольце классов вычетов по модулю f:*

$$I_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{\, t \cdot \varphi \,\} \lhd \mathbb{F}_p[x]/(f)\,.$$

2) *φ — единственный в I_φ нормированный многочлен минимальной степени.*

Доказательство.

$$u, v, \varphi \in \mathbb{F}_p[x], \quad k = \deg\varphi \leqslant \deg f$$
$$\varphi = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k, \quad f = \psi\varphi.$$

1. Проверим, что I_φ — идеал в кольце $\mathbb{F}_p[x]/(f)$.

1.

$$\begin{cases} \overline{g} \in I_\varphi \\ \overline{h} \in \mathbb{F}_p[x]/(f),\ \overline{h} \subseteq \overline{g} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{g} = u\varphi \\ \overline{h} = vg = vu\varphi \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overline{h} \in I_\varphi.$$

2.

$$\overline{g},\ \overline{h} \in I_\varphi \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{g} = u\varphi \\ \overline{h} = v\varphi \end{cases} \Rightarrow \overline{g} + \overline{h} = (u+v)\varphi \in I_\varphi.$$

2. Покажем, что в I_φ нет других, кроме

$$\varphi = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k$$

нормированных многочленов степени, меньшей $k = \deg\varphi$.

Пусть

$$g = b_0 + b_1 x + \ldots + x^m.$$

Тогда:

$$\overline{g} \in I_\varphi \Leftrightarrow g = u\varphi \Rightarrow \deg g = m \geqslant \deg\varphi = k.$$

□

Теорема 2.12. *Пусть* φ — *неприводимый нормированный делитель многочлена* $f \in \mathbb{F}_p[x]$ *и* $\deg \varphi = k < \deg f = n$.

Тогда идеал (φ) — *векторное пространство размерности* $n - k$.

Доказательство. Без доказательства. □

Циклическое пространство. Будем изучать кольцо вычетов по модулю $x^n - 1$.

- Пусть V — n-мерное векторное пространство над некоторым полем F.
- Фиксируем некоторый базис V.
- Тогда $V \cong F^n = \{ (a_0, \ldots, a_{n-1}) \mid a_i \in F,\ i = 0, 1, \ldots, n-1 \}$ — координатное пространство.

Определение 2.4. Подпространство координатного пространства F^n называется *циклическим*, если вместе с набором $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ оно содержит циклический сдвиг вправо этого набора, т.е. набор $(a_{n-1}, a_0, \ldots, a_{n-2})$ (а следовательно и все циклические сдвиги на произвольное число позиций влево и вправо).

В кольце $\mathbb{F}_p[x]/(x^n - 1)$, рассматриваемом как векторное пространство над полем $\mathbb{F}_p$ имеется базис $\left\{ \overline{1}, \overline{x}, \ldots, \overline{x^{n-1}} \right\}$.

Циклический сдвиг координат в этом базисе равносилен умножению на $\overline{x}$:

$$\overline{a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1}} \cdot \overline{x} = \\ = \overline{a_0 x + a_1 x^2 + \ldots + a_{n-2}x^{n-1} + a_{n-1}x^n} = \\ = \overline{a_{n-1} + a_0 x + a_1 x^2 + \ldots + a_{n-2}x^{n-1}},$$

т.к. в этом кольце $x^n = 1$.

Теорема 2.13. *Пусть I — подпространство кольца $\mathbb{F}_p[x]/(x^n - 1)$. Тогда*

$$I \text{ — циклическое } \Leftrightarrow I \lhd \mathbb{F}_p[x]/(x^n - 1)$$

Доказательство.

- Если подпространство I — идеал, то оно замкнуто относительно умножения на $\overline{x}$, а это умножение и есть циклический сдвиг $\Rightarrow$ I — циклическое.
- Пусть I — циклическое подпространство кольца $\mathbb{F}_p/(x^n - 1)$ и $g \in I$.
  Тогда $g \cdot \overline{x}$, $g \cdot \overline{x^2}$, ... — циклические сдвиги, т.е. также принадлежат I.
  Значит, $g \cdot \overline{f} \in I$ для любого многочлена f, поэтому I — идеал.

□

Примитивные корни (т.е. корни из 1)

Было показано: *любой многочлен с коэффициентами из $\mathbb{F}_p$ разлагается на линейные множители в некотором поле (разложения) $GF(q) = \mathbb{F}_p^n$ характеристики p, $q = p^n$.*

Пусть $\mathbb{F}_q$ — поле характеристики p, в котором разлагается бином $x^n - 1$. Справедливо:

- Поскольку в $\mathbb{F}_q$ справедливо $x^{kp} - 1 = (x^k - 1)^p$, интересен случай, когда n взаимно просто с p: тогда у многочлена $x^n - 1$ *кратных* корней нет. Иначе корни $x^n - 1$ суть все корни $x^k - 1$, но p-й кратности.
- Равенство $x^n = 1$ означает, что $\operatorname{ord} x \mid n$ в циклической группе $\mathbb{F}_q^*$.

Вывод: корни бинома $x^n - 1 = 0$ образуют *группу корней степени n из единицы* — подгруппу в $\mathbb{F}_q^*$.

Эта подгруппа также циклическая; её порождающие элементы называются *примитивными корнями степени n*.

Подгруппа в циклической группе существует iff её порядок делит порядок циклической группы $\Rightarrow$ поле $\mathbb{F}_q$ содержит группу корней из единицы степени n iff $n \mid (q-1)$.

Чтобы вернуться от разложения $x^n - 1$ на *линейные* множители в поле $GF(q) = \mathbb{F}_p^n$ (корни из 1) к разложению на *неприводимые* множители в поле $\mathbb{F}_p$, нужно понять, *какие корни из единицы будут входить в неприводимый делитель $f(x)$*.

Если β — корень $f(x)$, то β^p, β^{p^2} и т.д. — также его (*сопряжённые*) корни $\Rightarrow$ количество и степени многочленов-неприводимых делителей $x^n - 1$ можно найти, разбив $\mathbb{F}_p$ на *орбиты* отображения

$$\omega \mapsto p\omega \mod n.$$

Пример 2.18. 1. Рассмотрим ещё раз разложение многочлена $x^{15}-1$ над $\mathbb{F}_2$. Относительно умножения на 2 вычеты по модулю 15 — $\{0, 1, \ldots, 14\}$ разбиваются на орбиты:

$$\{\overline{0}\},\ \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{8}\},\ \{\overline{3}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{9}\},\ \{\overline{5}, \overline{10}\},$$
$$\{\overline{7}, \overline{14}, \overline{13}, \overline{11}\}$$

Поэтому $x^{15}-1$ разлагается в произведение

- одного неприводимого многочлена степени 1,
- одного неприводимого многочлена степени 2,
- трех неприводимых многочленов степени 4.

Конкретно (разложение было раньше):

$$x^{15}+1 = (x+1)\cdot(x^2+x+1)\cdot(x^4+x+1)\cdot$$
$$\cdot(x^4+x^3+1)\cdot(x^4+x^3+x^2+x+1).$$

2. Рассмотрим разложение многочлена $x^{23}-1$ над $\mathbb{F}_2$. Относительно умножения на 2 вычеты по модулю 23 разбиваются на три орбиты:

$$\{\overline{0}\},\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{16}, \overline{9}, \overline{18}, \overline{13}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{12}\},$$
$$\{\overline{5}, \overline{10}, \overline{20}, \overline{17}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{21}, \overline{19}, \overline{15}, \overline{7}, \overline{14}\}$$

Поэтому $x^{23}-1$ разлагается в произведение одного неприводимого многочлена степени 1 и двух неприводимых многочленов степени 11.

Кольца многочленов $\mathbb{F}_p[x]$ и конечные поля: резюме

- Любое конечное целостностное кольцо является полем.
- Характеристика конечного поля — простое число.
- Любое конечное поле характеристики p состоит из $q = p^n$ элементов $n \in \mathbb{N}$.
- $\alpha \in \big\{GF(q) \setminus 0\big\} \Rightarrow \operatorname{ord}\alpha \mid q-1$.
- Мультипликативная группа поля $GF(q)$ является циклической: в ней существует $\varphi(q-1)$ примитивных элементов (генераторов, элементов порядка $q-1$).

  Для нахождения самих примитивных элементов нет эффективных алгоритмов.
- Любые два конечных поля, содержащих одинаковое количество элементов, изоморфны.
- $GF\left(p^m\right)$ — подполе $GF\left(p^n\right) \Leftrightarrow m \mid n$.
- Одночлены $\left\{\overline{1}, \overline{x}, \overline{x^2}, \ldots \overline{x^{n-1}}\right\}$ — базис в векторном пространстве над кольцом $\mathbb{F}_p[x]/\big(a(x)\big)$, $\deg a(x) = n$.
- Для каждого натурального n в кольце многочленов $\mathbb{F}_p[x]$ над простым полем $\mathbb{F}_p$ имеются неприводимые (не имеющие несобственных делителей) многочлены.

Кольцо $\mathbb{F}_p[x]$ — кольцо с однозначным разложением многочленов на неприводимые. Для нахождения неприводимых многочленов нет эффективных алгоритмов.

- Идеал $\big(a(x)\big)$, порождённый многочленом $a(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ составляют многочлены, кратные $a(x)$.
- Фактор-кольцо $\mathbb{F}_p[x]/(a(x))$ является полем, если и только если $a(x)$ — неприводимый многочлен в кольце $\mathbb{F}_p[x]$.

  Если при этом $\deg a(x) = n$, то элементы $\mathbb{F}_p[x]/\big(a(x)\big)$ — классы многочленов степени $< n$ (их всего p^n элементов).
- Минимальный многочлен элемента β расширенного поля есть нормированный многочлен минимальной степени, для которого β является корнем. Минимальные многочлены неприводимы и единственны для каждого β.
- Любой элемент поля $F = \mathbb{F}_p^n$ является корнем многочлена $x^{p^n} - x$:
$$x^{p^n} - x = \prod_{a \in F} (x - a).$$
- Для того, чтобы векторное подпространство V кольца $R = \mathbb{F}_p[x]/(x^n - 1)$ было циклическим, необходимо и достаточно, чтобы оно было идеалом R.

  Многочлен $g(x)$ порождает идеал R, если он является делителем $x^n - 1$.

2.7 Задачи с решениями

Задача 2.1. *Сумму ненулевых элементов поля* $\mathbb{F}_p$.

Решение. Все элементы $\mathbb{F}_p^*$ — корни уравнения

$$x^{p-1} - 1 = 0,$$

их *сумма* по теореме Виета есть коэффициент при x^{p-2} в этом уравнении), т.е. 0.

Задача 2.2 (Теорема Вильсона). *Доказать, что*

$$(p-1)! \equiv_p -1$$

для простого p.

Решение. При $p = 2$ — утверждение тривиально.

При $p > 2$ порядки всех элементов мультипликативной циклической группы $\mathbb{F}_p^* = \{1, \ldots, p-1\}$ делят её порядок т.е. все они являются корнями уравнения

$$x^{p-1} - 1 = 0. \qquad (*)$$

Других корней у этого уравнения нет (многочлен степени $p-1$ имеет не больше $p-1$ корней). По теореме Виета их произведение равно свободному члену многочлена $(*)$, т.е. -1.

Ещё одно Решение. При $p > 2$ обозначим

$$P = 1 \cdot \underbrace{\overbrace{2 \cdot \ldots \cdot (p-2)}^{=\pi}}_{\text{чётное число сомножителей}} \cdot (p-1) = (p-1)!$$

и заметим, что $(p-1)^2 = p^2 - 2p + 1 \equiv_p 1$.

Легко видеть, что $\pi = 1$: каждый из элементов $2, \ldots, p-2$ поля $\mathbb{F}_p$ имеет обратный, но это не $p-1$ — он обратен сам к себе. Поэтому $P = p-1$.

Или, что то же, $(p-1)! \equiv_p -1$.

Задача 2.3. *Построить поле из 4-х элементов.*

Решение. Это поле $\mathbb{F}_2^2$, оно может быть построено как фактор-кольцо $\mathbb{F}_2[x]/(a(x))$, где $a(x)$ — неприводимый многочлен из $\mathbb{F}_2[x]$ степени 2. Но такой многочлен только один: $x^2 + x + 1$.

Следовательно, $\mathbb{F}_2^2 = \{0, 1, x, x+1\}$ и $x^2 = x+1$ (черту над элементами не пишем).

Таблицы сложения и умножения в построенном поле[3]:

$+$	1	x	$x+1$
1	0	$x+1$	x
x	$x+1$	0	1
$x+1$	x	1	0

$\times$	1	x	$x+1$
1	1	x	$x+1$
x	x	$x+1$	1
$x+1$	$x+1$	1	x

Альтернативная запись поля:

$$\mathbb{F}_2^2 = \{0, 1, x, x^2\},\ x^2 = x+1.$$

[3] операции с 0 опускаем

Задача 2.4. *Доказать, что если производная ненулевого многочлена над полем характеристики p тождественно равна 0, то он приводим.*

Решение. Имеем:

- производная монома $(x^n)' = nx^{n-1}$ тождественно равна 0 iff $n \equiv_p 0 \Leftrightarrow p \mid n$;
- $f' = 0 \Rightarrow$ показатели степеней всех мономов многочлена f делятся на p;
- поэтому $f(x) = g(x^p) = g^p(x)$.

Задача 2.5. *Найти НОД* $\left(x^5 + x^2 + x + 1,\ x^3 + x^2 + x + 1\right)$ *над* $\mathbb{Z}_2[x]$.

Решение. Воспользуемся алгоритмом Евклида:

$$x^5 + x^2 + x + 1 = (x^2 + x)(x^3 + x^2 + x + 1) + (x^2 + 1),$$
$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1) + 0.$$

Ответ: НОД $\left(x^5 + x^2 + x + 1,\ x^3 + x^2 + x + 1\right) = x^2 + 1$.

Задача 2.6. *Перечислить все подполя поля* $GF\left(2^{30}\right)$.

Решение. Поле $\mathbb{F}_p^n$ содержит подполе $\mathbb{F}_p^k$ iff $k \mid n$, поэтому подполями $GF\left(2^{30}\right)$ будут поля $GF\left(2\right)$, $GF\left(2^2\right)$, $GF\left(2^5\right)$, $GF\left(2^6\right)$, $GF\left(2^{10}\right)$, $GF\left(2^{15}\right)$ и само поле $GF\left(2^{30}\right)$.

Задача 2.7. *Многочлен* $f(x) = x^5 + x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ *разложить на неприводимые множители.*

Решение. В поле $\mathbb{F}_2$ имеем $x-1 = x+1$.

1. $f(1) = 0 \Rightarrow 1$ — корень f.
2. Делим $f(x)$ на $x+1$, получаем

$$x^4 + x^3 + x + 1 = f_1(x).$$

3. $f_1(1) = 0 \Rightarrow 1$ — корень f_1; $\frac{f_1}{x+1} = x^3+1 = f_2(x)$.
4. $f_2(1) = 0 \Rightarrow 1$ — корень f_2; $\frac{f_2}{x+1} = x^2 + x + 1$.
5. Многочлен $x^2 + x + 1$ неприводим.

Ответ: $x^5 + x^3 + x^2 + 1 = (x+1)^3(x^2+x+1)$.

Задача 2.8. *Многочлен* $f(x) = x^3+2x^2+4x+1 \in \mathbb{F}_5[x]$ *разложить на неприводимые множители.*

Решение.

1. $f(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^2 + 1 = 25 \equiv_5 0$,

$$(x-2) \equiv_5 (x+3)$$

2.

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 + 4x + 1 & x+3 \\ \cline{2-2} x^3 + 3x^2 & x^2 + 4x + 2 \\ \cline{1-1} \quad 4x^2 + 4x & \\ \quad 4x^2 + 2x & \\ \cline{1-1} \quad\quad 2x + 1 & \\ \quad\quad 2x + 1 & \\ \cline{1-1} \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

3. Перебором убеждаемся, что многочлен x^2+4x+2 неприводим в $\mathbb{F}_5$.

Задача 2.9. *Многочлен* $f(x) = x^4 + x^3 + x + 2 \in \mathbb{F}_3[x]$ *разложить на неприводимые множители.*

Решение.

1. 0, 1, 2 — не корни $f(x) \Rightarrow f(x)$ линейных делителей не содержит.
2. Неприводимые многочлены над $\mathbb{F}_3$ степени 2:
$$x^2 + 1, \quad x^2 + x + 2, \quad x^2 + 2x + 2.$$
3. Подбором получаем: $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 + x + 2)$.

Ответ: $x^4 + x^3 + x + 2 = (x^2 + 1)(x^2 + x + 2)$.

Задача 2.10. *Многочлен*
$$f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 4 \in \mathbb{F}_5[x]$$
разложить на неприводимые множители.

Решение. 1. $f(x) \neq 0$ ни при каком $x = 0, 1, 2, 3, 4$, т.е. $f(x)$ не имеет линейных делителей.

2. Перебирая неприводимые многочлены степени 2 над $\mathbb{F}_5$, получаем

Ответ: $f(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 + 2x + 4)$.

Задача 2.11. *Разложить на неприводимые множители все нормированные многочлены 3-й степени из* $\mathbb{F}_2[x]$.

Решение. Вычисляя значения многочленов при $x = 0, 1$, приходим к выводу, что

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= x^3 = x \cdot x \cdot x,\\
f_2(x) &= x^3 + 1 = (x+1)(x^2+x+1),\\
f_3(x) &= x^3 + x = x(x+1)^2,\\
f_4(x) &= x^3 + x^2 = x^2(x+1),\\
f_5(x) &= x^3 + x + 1 \text{ — неприводим},\\
f_6(x) &= x^3 + x^2 + 1 \text{ — неприводим},\\
f_7(x) &= x^3 + x^2 + x = x(x^2+x+1),\\
f_8(x) &= x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)^3.
\end{aligned}
$$

Задача 2.12. *Найти все нормированные неприводимые многочлены 2-й степени над* $GF(3)$.

Решение. Должно быть: $f(0) \neq 0,\ f(1) \neq 0,\ f(2) \neq 0$.

Перебором коэффициентов $b, c \in \{\,0,\,1,\,2\,\}$ в выражении $x^2 + bx + c$, находим подходящие многочлены:

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= x^2 + 1,\\
f_2(x) &= x^2 + x + 2,\\
f_3(x) &= x^2 + 2x + 2.
\end{aligned}
$$

Задача 2.13. *Найти все нормированные многочлены 3-й третьей степени, неприводимые над полем вычетов по модулю 3.*

Решение. Должно быть: $f(0) \neq 0,\ f(1) \neq 0,\ f(2) \neq 0.$

$$f_1(x) = x^3 + 2x + 1,$$
$$f_2(x) = x^3 + 2x + 2,$$
$$f_3(x) = x^3 + x^2 + 2,$$
$$f_4(x) = x^3 + 2x^2 + 1,$$
$$f_5(x) = x^3 + x^2 + x + 2,$$
$$f_6(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1,$$
$$f_7(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1,$$
$$f_8(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 2.$$

Задача 2.14. *1. Проверить, что*

$$F = \mathbb{F}_7[x]/\big(x^2 + x - 1\big)$$

является полем.

2. Выразить обратный к $1 - x$ *в* F.

Решение. 1. $a(x) = x^2 + x - 1,\ a(0) = 6,\ a(1) = 1,\ a(2) = 5,\ a(3) = 4,\ a(4) = 6,\ a(5) = 1,\ a(6) = 6,$ т.е. многочлен $a(x)$ — *неприводим* в $\mathbb{F}_7$ и F — поле ($\cong \mathbb{F}_7^2$).

2. $\mathbb{F}_7^2 = \big\{\, ax + b \mid a, b \in \mathbb{F}_7,\ x^2 = 1 - x = 6x + 1 \,\big\}$

$$(ax + b) \cdot (6x + 1) = \ldots = (2a + 6b)x + (6a + b) = 1$$

$$\begin{cases} 6a + b &= 1 \\ a + 3b &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Ответ: $(1 - x)^{-1} = x + 2$ в F.

Задача 2.15. *Найти порядок элемента* $\beta = x + x^2$ *в мультипликативной группе*

1. *поля* $F_1 = \mathbb{F}_2[x]/\big(x^4 + x + 1\big)$;
2. *поля* $F_2 = \mathbb{F}_2[x]/\big(x^4 + x^3 + 1\big)$.

Решение. $\beta = x + x^2 = x(x+1)$.
Мультипликативная группа указанных полей состоит из $2^4 - 1 = 15$ элементов.
Примарное разложение 15: $15 = 3 \cdot 5$, поэтому равенство $\beta^d = 1$ нужно проверить для $d = \frac{15}{5} = 3$ и $d = \frac{15}{3} = 5$.

1. $x^4 = x + 1$

$$
\begin{aligned}
(x^2+x)^2 &= x^4 + x^2 = x^2 + x + 1,\\
(x^2+x)^3 &= x(x+1)(x^2+x+1) = x(x^3+1) =\\
&= x^4 + x = x + 1 + x = 1.
\end{aligned}
$$

Ответ. В поле F_1 $\operatorname{ord}\beta = 3$.

2. $x^4 = x^3 + 1$

$$
\begin{aligned}
(x^2+x)^2 &= x^4 + x^2 = x^3 + x^2 + 1,\\
(x^2+x)^3 &= x(x+1)(x^3+x^2+1) =\\
&= x(x^4 + x^2 + x + 1) = x(x^3 + x^2 + x) =\\
&= x^4 + x^3 + x^2 = x^2 + 1 \neq 1,\\
(x^2+x)^5 &= x^2x^3 = (x^3+x^2+1)(x^2+1) =\\
&= (x^5 + x^4 + x^2 + x^3 + x^2 + 1) = \ldots\\
&\ldots = (x^3+1)\,x = x^4 + x = x^3 + x + 1 \neq 1.
\end{aligned}
$$

Ответ. В поле F_2 $\operatorname{ord}\beta = 15$.

Задача 2.16. *Найти количество нормированных неприводимых многочленов*

1) *степени* 7 *над полем* $\mathbb{F}_2$;
2) *степени* 6 *над полем* $\mathbb{F}_5$.

Решение.
$$\sum_{d|n} d \cdot ((d)) = p^n.$$

1. ((7)) над $\mathbb{F}_2$

$$\sum_{d|7} d((d)) = 2^7 = 1 \cdot ((1)) + 7 \cdot ((7)) = 128.$$

$((1)) = 2$: это x и $x+1$, отсюда $((7)) = \dfrac{128-2}{7} = 18$.

2. ((6)) над $\mathbb{F}_5$

$$((6)) = \frac{1}{6} \sum_{d|6} \mu(d)\, 5^{\frac{6}{d}} = \frac{1}{6} \left[\mu(1)5^6 + \mu(2)5^3 + \right.$$

$$\left. + \mu(3)5^2 + \mu(6)5 \right] = \frac{1}{6} \left[15625 - 125 - 25 + 5 \right] = 2\,580.$$

Задача 2.17. *Для поля* $F = \mathbb{F}_3[x]/\left(-2x^2 + x + 2\right)$ *построить таблицу соответствий между полиномиальным и степенным представлением его ненулевых элементов.*

С помощью данной таблицы вычислить выражение
$$S = \frac{1}{2x+1} - \frac{2(2x)^7}{(x)^9(x+2)}.$$

Решение. $\operatorname{char} F = 3$, поэтому
$-2x^2 + x + 2 \equiv_3 x^2 + x + 2 = a(x)$.

$F = \mathbb{F}_3^2$, F^* содержит $3^2 - 1 = 8$ элементов и все они могут быть представлены как степени $\alpha^i, i = \overline{1,8}$ примитивного элемента α.

Если элемент x окажется примитивным, то положим $\alpha = x$ и, поскольку вычисления в $\mathbb{F}_3^2$ проводятся по $\bmod a(x)$, будем иметь

$$x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -x - 2 = 2x + 1.$$

Найдём порядок элемента x: т.к. $8 = 2^3$, $\frac{8}{2} = 4$, проверим равенство $x^4 = 1$:

$$x^4 = (x^2)^2 = (2x+1)^2 = x^2 + x + 1 = \cancel{2}x + 1 + \cancel{x} + 1 = 2 \neq 1,$$

т.е. x — примитивный элемент F: $\operatorname{ord} x = 8$, $x^8 = 1$.

Повезло: $a(x) = x^2 + x + 2$ оказался примитивным многочленом над $\mathbb{F}_3$, иначе генератор F пришлось бы искать.

Теперь вычислим значение заданного выражения. Имеем $2^8 = 256 \equiv_3 1$, $x + 2 = -x^2$, $x^4 = 2$ и далее:

$$S = \frac{1}{2x+1} - \frac{(2x)^7(2)}{(x)^9(x+2)} = \frac{1}{x^2} + \frac{x^7}{x^9 x^2} = \frac{x^8}{x^2} + \frac{x^7 x^8}{x^{11}} =$$
$$= x^6 + x^4 = (x^2)^3 + 2 = (2x+1)^3 + 2 = 2x^3 + \cancel{1} + \cancel{2} =$$
$$= 2x(2x+1) = x^2 + 2x = 2x + 1 + 2x = x + 1.$$

Задача 2.18. *Для поля* $F = \mathbb{F}_3[x]/(x^2+1) \cong \mathbb{F}_3^2$ *построить таблицу соответствий между полиномиальным и степенным представлением для всех ненулевых элементов поля.*

Решение. В данном 9-элементном поле $x^2+1=0 \Rightarrow x^2 = -1 \equiv_3 2$.

1. Найдём порядок элемента x, для чего проверим равенство $x^4 = 1$ (т.к. $9-1 = 8 = 2^3$, $\frac{8}{2} = 4$):

$$x^4 = (x^2)^2 = 4 \equiv_3 1.$$

Следовательно $\operatorname{ord} x = 4 \neq 8$ и элемент x не является генератором группы F^* (и x^2+1 — не есть примитивный многочлен над $\mathbb{F}_3$: $x^4 - 1 = x^4 + 2 = (x^2+1)(x^2+2)$).

2. Проверим на примитивность элемент $x+1$:

$$(x+1)^4 = (x+1)(x+1)^3 = (x+1)(x^3+1) =$$
$$= (x+1)(2x+1) = 2x^2 + \not{x} + \not{2}x + 1 = 4+1 = 2 \neq 1$$

т.е. $\alpha = x+1$ оказался примитивным элементом. Его степени:

$$\alpha^1 = x+1, \qquad \alpha^5 = 2(x+1) = 2x+2,$$
$$\alpha^2 = x^2+2x+1 = 2x, \qquad \alpha^6 = \alpha^2 \cdot \alpha^4 = 4x = x,$$
$$\alpha^3 = 2x(x+1) = 2x+1, \qquad \alpha^7 = x(x+1) = x+2,$$
$$\alpha^4 = 2, \qquad \alpha^8 = (\alpha^4)^2 = 1.$$

Замечание: вычисление очередной степени α^{i+j} часто бывает удобным провести как $\alpha^i \cdot \alpha^j$, а не как $\alpha \cdot \alpha^{i+j-1}$.

Задача 2.19. *В факторкольце* $R = \mathbb{F}_3[x]/\big(x^4+1\big)$ *найти все элементы главного идеала* $\big(x^2+x+2\big)$.

Решение. 1. Сначала проверим, является ли многочлен $f(x) = x^2+x+2$ делителем x^4+1?

$$x^4+1 \;=\; (x^2+x+2)\cdot(x^2+2x+2) \quad \text{— да, является}$$

Поэтому искомый идеал составят многочлены из R, кратные $f(x)$:

$$\big(x^2+x+2\big) = \big\{\,(x^2+x+2)(ax+b) \mid a,b\in\mathbb{F}_3, x^4=1\,\big\}.$$

2. Проведём умножение:

$$(x^2+x+2)(ax+b) \;=\; ax^3+(a+b)\,x^2+(2a+b)\,x+2b.$$

Теперь, перебирая все возможные значения $a,b\in\mathbb{F}_3$, найдём все элементы идеала $\big(x^2+x+2\big)$:

a	b	$ax^3+(a+b)x^2+(2a+b)x+2b$
0	0	0
0	1	x^2+x+2
0	2	$2x^2+2x+1$
1	0	x^3+x^2+2x
1	1	x^3+2x^2+2
1	2	x^3+x+1
2	0	$2x^3+2x^2+x$
2	1	$2x^3+2x+2$
2	2	$2x^3+x^2+1$

А если бы $f(x) \not| a(x)$? Тогда кратные $f(x)$ составят в R идеал $(\text{НОД}(f(x),a(x)))$.

Задача 2.20. *В поле* $F = \mathbb{F}_7[x]/\left(x^4+x^3+x^2+3\right)$ *найти элемент, обратный к* x^2+x+3.

Решение. Обратный элемент к x^2+x+3 находим, решая соотношение Безу

$$\underbrace{(x^4+x^3+x^2+3)\cdot\chi(x)}_{=0}+(x^2+x+3)\cdot y(x) = 1 \quad (*)$$

с помощью расширенного алгоритма Евклида: им будет полином $y(x)$. Вычислять полином $\chi_i(x)$ нет необходимости.

Шаг 0. // *Инициализация*

$$\begin{aligned} r_{-2}(x) &= x^4+x^3+x^2+3,\\ r_{-1}(x) &= x^2+x+3,\\ y_{-2}(x) &= 0,\\ y_{-1}(x) &= 1. \end{aligned}$$

Шаг 1. // *Делим* $r_{-2}(x)$ *на* $r_{-1}(x)$ *с остатком*

$$\begin{aligned} r_{-2}(x) &= r_{-1}(x)q_0(x)+r_0(x),\\ q_0(x) &= x^2+5,\\ r_0(x) &= 2x+2,\\ y_0(x) &= y_{-2}(x)-y_{-1}(x)q_0(x) =\\ &= -q_0(x) = -x^2-5. \end{aligned}$$

Шаг 2. // *Делим* $r_{-1}(x)$ *на* $r_0(x)$ *с остатком*

$$\begin{aligned} r_{-1}(x) &= r_0(x)q_1(x)+r_1(x),\\ q_1(x) &= 4x,\\ r_1(x) &= 3,\\ y_1(x) &= y_{-1}(x)-y_0(x)q_1(x) =\\ &= 1+4x(x^2+5) = 4x^3+6x+1. \end{aligned}$$

Алгоритм заканчивает свою работу на Шаге 2, т.к. степень 0 очередного остатка $r_1(x) = 3$ равна степени многочлена в правой части $(*)$: 1 — многочлен 0-й степени.

В результате работы алгоритма получено:

$$(x^2 + x + 3)(\underbrace{4x^3 + 6x + 1}_{= y_1(x)}) = r_1(x) = 3.$$

Чтобы найти $y(x)$, нужно домножить $y_1(x)$ на $3^{-1} \equiv_7 5$:

$$y(x) = 5y_1(x) = 5 \cdot (4x^3 + 6x + 1) = 6x^3 + 2x + 5.$$

Задача 2.21. *В поле* $F = \mathbb{F}_5[x]/\big(x^2 + 3x + 3\big)$ *найти обратную к матрице*

$$M = \begin{pmatrix} 3x + 4 & x + 2 \\ x + 3 & 3x + 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для матриц размера 2×2 обратная матрица записывается в виде

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

1. Сначала вычислим $\det M = ad - bc$ с учётом $x^2 = 2x + 2$:

$$\begin{aligned} \det M &= (3x + 4)(3x + 2) - (x + 2)(x + 3) = \\ &= 4x^2 + 3x + 3 - x^2 - 1 = \end{aligned}$$

$$= 3x^2 + 3x + 2 = 3(2x + 2) + 3x + 2 = 4x + 3.$$

2. Найдём обратный к $4x + 3$ элемент, решая соотношение

$$(x^2 + 3x + 3)a(x) + (4x + 3)b(x) = 1$$

с помощью расширенного алгоритма Евклида:

Шаг 0. // *Инициализация*
$r_{-2}(x) = x^2 + 3x + 3,$
$r_{-1}(x) = 4x + 3,$
$y_{-2}(x) = 0,$
$y_{-1}(x) = 1.$

Шаг 1. // *Делим* $r_{-2}(x)$ *на* $r_{-1}(x)$ *с остатком*
$r_{-2}(x) = r_{-1}(x)q_0(x) + r_0(x),$
$q_0(x) = 4x + 4,$
$r_0(x) = 1,$ // $\deg r = 0 \Rightarrow$ *ОСТАНОВ*
$y_0(x) = y_{-2}(x) - y_{-1}(x)q_0(x) =$
$= -q_0(x) = -4x - 4 = x + 1.$

3. Вычислим обратную матрицу

$$M^{-1} = (x + 1)\begin{pmatrix} 3x + 2 & 4x + 3 \\ 4x + 2 & 3x + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3 & 1 \\ 4x & 3x \end{pmatrix}.$$

Задача 2.22. *Разложить на неприводимые множители многочлен*

$$f(x) = x^{11} + x^9 + x^8 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[x].$$

Решение. 1. Сначала пытаемся найти корни $f(x)$ в $\mathbb{F}_2$: получим $f(0) = f(1) = 1$, и значит $f(x)$ не имеет корней в $\mathbb{F}_2$ т.е. не имеет линейных множителей.

2. Далее ищем делители $f(x)$ среди неприводимых многочленов степени 2.

Таковых над $\mathbb{F}_2$ только один — $x^2 + x + 1$.

При делении $f(x)$ на $x^2 + x + 1$, получаем

$$f(x) = (x^2 + x + 1)\times \\ \times (\underbrace{x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}_{g(x)}).$$

Делим частное $g(x)$ на $x^2 + x + 1$:

$$g(x) = x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \\ = (x^2 + x + 1)(x^7 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)+x,$$

не делится нацело, т.е. x^2+x+1 — делитель $f(x)$ кратности 1.

3. Неприводимых многочленов 3-й степени над $\mathbb{F}_2$ только два: $x^3 + x + 1$ и $x^3 + x^2 + 1$.
Пробуем поделить $g(x)$ на $x^3 + x + 1$:

$$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \\ = (x^3 + x + 1)(\underbrace{x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1}_{h(x)})$$

— делится!

Производя далее попытки деления $h(x)$ на неприводимые многочлены 3-й степени, получаем

$$x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1 =$$

$$= (x^3+x+1)\cdot(x^3+x^2+x+1)+x^2,$$
$$x^6+x^5+x^3+x^2+1 = (x^3+x^2+1)\cdot x^3+x^2+1.$$

Поскольку многочлен $h(x)$ 6-ой степени не имеет делителей 3-й и меньших степеней, то он является неприводимым.

Ответ: В $\mathbb{F}_2[x]$ справедливо разложение

$$f(x) = x^{11}+x^9+x^8+x^4+x^3+x^2+1 =$$
$$= (x^2+x+1)(x^3+x+1)(x^6+x^5+x^3+x^2+1).$$

Задача 2.23. *Найти поле характеристики* 3, *в котором многочлен* $f(x) = x^3+x+2 \in \mathbb{F}_3[x]$ *раскладывается на линейные множители и найти в нём все корни данного многочлена.*

Решение. 1. Найдём разложение многочлена $f(x)$ на *неприводимые* множители над $\mathbb{F}_3$.

- Ищем корни: $f(0) = 2$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$. Поскольку $x-2 \equiv_3 x+1$, то $f(x) = (x+1)(x^2+2x+2)$.
- Пробуем разложить многочлен $g(x) = x^2+2x+2$: он не имеет корней в $\mathbb{F}_3$, его степень $= 2 \Rightarrow$ он неприводим.
- Окончательно: $f(x) = (x+1)(x^2+2x+2) \in \mathbb{F}_3[x]$.

2. Известно, что если $g(x)$ — неприводимый многочлен степени n над $\mathbb{F}_p$, то он:

- в поле своего расширения $F = \mathbb{F}_p[x]/(g(x))$ раскладывается на n линейных множителей — $g(x) = (x-\alpha)\cdot(x-\alpha^p)\cdot\left(x-\alpha^{p^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(x-\alpha^{p^{n-1}}\right)$, где α – произвольный корень $g(x)$ в F;
- не имеет корней ни в каком конечном поле, содержащим менее, чем p^n элементов.

3. Рассмотрим поле $\mathbb{F}_3[x]/(g(x))$ расширения многочлена $g(x) = x^2 + 2x + 2$.

В этом поле если α — корень $g(x)$, то и α^3 — тоже его корень. Вычисляем:

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= -2\alpha - 2 = \alpha + 1,\\ \alpha^3 &= \alpha(\alpha+1) = \alpha^2 + \alpha = 2\alpha + 1\end{aligned}$$

Построенное поле $\mathbb{F}_3[x]/\left(x^2+2x+2\right)$ — содержит найденный ранее корень 2, поэтому многочлен $f(x)$ в этом поле раскладывается на следующие линейные множители:

$$\begin{aligned}f(x) = x^3 + x + 2 &= (x-2)(x-\alpha)(x-2\alpha-1) =\\ &= (x+1)(x+2\alpha)(x+\alpha+2).\end{aligned}$$

4. Определить корни многочлена

$$g(x) = (x-\alpha)(x-2\alpha-1)$$

в поле $\mathbb{F}_3[x]/\left(x^2+2x+2\right)$ легко: всегда можно взять $\alpha = x$, откуда второй корень $\alpha^3 = 2\alpha + 1 = 2x + 1$.

Ответ: многочлен $f(x) = x^3 + x + 2$ имеет корни 2, x, $2x+1$ в поле $\mathbb{F}_3[x]/\left(x^2+2x+2\right) = GF(3^2)$.

Задача 2.24. *Найти м.м. для всех элементов β поля* $F = \mathbb{F}_2[x]/\big(x^4 + x + 1\big)$.

Решение. $\beta \in \{\, 0,\, 1,\, \alpha,\, \ldots,\, \alpha^{14} \,\} \,=\, F, \quad x^4 = x + 1.$

$\beta = 0$: $m_0(x) = x$.

$\beta = 1$: $m_1(x) = x + 1$.

$\beta = \alpha$: сопряжённые с α элементы — α^2, α^4, α^8 и

$$(x-\alpha)(x-\alpha^2)(x-\alpha^4)(x-\alpha^8) \,=\, \ldots$$
$$\ldots \,=\, x^4 + x + 1 \,=\, 0.$$

Это означает, что x^4+x+1 — примитивный многочлен и $m_\alpha(x) \,=\, x^4 + x + 1$.

$\beta = \alpha^3$: сопряжённые с α^3 элементы суть α^6, α^{12}, $\alpha^{24} = \alpha^9$, их м.м. —

$$m_{\alpha^3}(x) \,=\, (x-\alpha^3)(x-\alpha^6)(x-\alpha^9)(x-\alpha^{12}) \,=$$
$$= \, x^4 + \big(\alpha^3 + \alpha^6 + \alpha^9 + \alpha^{12}\big)\, x^3 +$$
$$+ \, \big(\alpha^3\alpha^6 + \alpha^3\alpha^9 + \alpha^3\alpha^{12} + \alpha^6\alpha^9 + \alpha^6\alpha^{12} + \alpha^9\alpha^{12}\big)\, x^2 +$$
$$+ \, \big(\alpha^3\alpha^6\alpha^9 + \alpha^3\alpha^6\alpha^{12} + \alpha^3\alpha^9\alpha^{12} + \alpha^6\alpha^9\alpha^{12}\big)\, x +$$
$$+ \, \big(\alpha^3\alpha^6\alpha^9\alpha^{12}\big) \,=\, x^4 + \big(\alpha^3 + (\alpha^3 + \alpha^2) + (\alpha^3 + \alpha) +$$
$$+ \, (\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1)\big)\, x^3 + (\ldots)\, x^2 + (\ldots)\, x + \alpha^{30} \,=$$
$$= \, x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

$\beta = \alpha^5$: единственный сопряжённый с α^5 элемент — α^{10} (т.к. $\alpha^{20} = \alpha^5$), их м.м. —

$$m_{\alpha^5}(x) \,=\, (x-\alpha^5)(x-\alpha^{10}) \,=\, x^2 + x + 1.$$

$\beta = \alpha^7$: сопряжённые с α^7 элементы — α^{14}, $\alpha^{28} = \alpha^{13}$, $\alpha^{56} = \alpha^{11}$, их м.м. —

$$m_{\alpha^7}(x) = (x-\alpha^7)(x-\alpha^{11})(x-\alpha^{13})(x-\alpha^{14}) = \\ = x^4+x^3+1.$$

Задача 2.25. *Найти минимальный многочлен элемента* α^3, *где* α — *примитивный элемент поля*

$$F = \mathbb{F}_5[x]/\left(x^2+x+2\right).$$

Решение. 1. Любой многочлен в поле характеристики 5 вместе с корнем α^3 содержит все сопряжённые с ним $(\alpha^3)^5=\alpha^{15}$, $(\alpha^3)^{5^2}=\alpha^{75}$, $(\alpha^3)^{5^3}=\alpha^{375}$ и т.д.

2. В поле F имеем $\alpha^{5^2-1}=\alpha^{24}=1$, и сопряжённым с α^3 будет только элемент α^{15}, т.к. $\alpha^{75}=\alpha^{24\cdot3+3}=\alpha^3$. Поэтому минимальный многочлен элемента α^3 — квадратный:

$$m_{\alpha^3}(x) = (x-\alpha^3)(x-\alpha^{15}) = x^2-(\alpha^3+\alpha^{15})x+\alpha^{18}.$$

3. Найдём коэффициенты данного многочлена, учитывая $\alpha^2=-\alpha-2=4\alpha+3$:

$$\alpha^3 = \alpha\cdot\alpha^2 = \alpha(4\alpha+3) = 4\alpha^2+3\alpha = \\ = 4(4\alpha+3)+3\alpha = 4\alpha+2,$$
$$\alpha^{15} = (\alpha^3)^5 = (4\alpha+2)^5 = 4\alpha^5+2 = \\ = 4\alpha^2\alpha^3+2 = 4(4\alpha+3)(4\alpha+2)+2 = \\ = 4(\alpha^2+1)+2 = 4(4\alpha+4)+2 = \alpha+3,$$
$$\alpha^3+\alpha^{15} = 4\alpha+2+\alpha+3 = 0,$$
$$\alpha^{18} = \alpha^3\alpha^{15} = (4\alpha+2)(\alpha+3) = \\ = 4(4\alpha+3)+4\alpha+1 = 3.$$

Ответ: $m(x) = x^2 + 3$.

Задание: убедитесь, что x — примитивный элемент поля F.

Задача 2.26. *Найти корни многочлена*

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 4 \in \mathbb{F}_5[x].$$

Решение. Вычисляем значения $f(x)$ для $x \in GF(5) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$:

$$f(0) = 4, \ f(1) = 2, \ f(2) = 1, \ f(3) = 0.$$

Таким образом, $x = 3$ — корень $f(x)$.

Деля «уголком» $f(x)$ на $f_1(x) = x - 3$ (или на $x+2$), получим $x^3+3x^2+4x+4 = (x-3)\cdot(x^2+x+2)$.

Перебором элементов $x \in GF(5)$ убеждаемся $f_2(x) = x^2 + x + 2$ — неприводимый многочлен.

В поле $\mathbb{F}_5[x]/\left(x^2 + x + 2\right)$ корни многочлена $f_2(x) = 0$ суть $\left\{x, x^5\right\}$ и $x^2 = -x - 2 = 4x + 3$.

Вычисляем:

$$\begin{aligned} x^5 = \left(x^2\right)^2 x = x(4x+3)^2 = x(x^2+4x+4) = \\ = x(4x+3+4x+4) = x(3x+2) = 3x^2+2x = \\ = 2x+4+2x = 4x+4. \end{aligned}$$

Ответ: $\{3, x, 4x + 4\}$.

Задача 2.27. *Является ли многочлен*

$$f(x) = x^2 + x + 2 \in \mathbb{F}_5[x]$$

примитивным?

Решение. Подстановкой в $f(x)$ всех элементов $0, \ldots, 4$ поля $\mathbb{F}_5$ убеждаемся, что данный многочлен 2-й степени не имеет линейных делителей и, следовательно, *неприводим*.

Порядок мультипликативной группы $GF(5^2)$ есть $25-1=24=2^3\cdot 3$. Определим порядок элемента её x, для которого $x^2 = -x-2 = 4x+3$.

Поскольку простые делители 24 суть 2 и 3, проверим равенство $x^d = 1$ для $d \in \left\{ \frac{24}{2}=12,\ \frac{24}{3}=8 \right\}$. Имеем:

$$\begin{aligned} x^4 =&(x^2)^2 = (4x+3)^2 = x^2+4x+4 = \ldots \\ &\ldots = 3x+2 \neq 1, \\ x^8 =&(x^4)^2 = (3x+2)^2 = -x^2+2x+4 = \ldots \\ &\ldots = 3x+1 \neq 1. \\ x^{12} =&x^8x^4 = (3x+1)(3x+2) = -x^2+4x+2 = \ldots \\ &\ldots = 4 \neq 1. \end{aligned}$$

Следовательно $\operatorname{ord} x = 24$ и рассматриваемый многочлен *примитивен* в поле $\mathbb{F}_5[x]/\big(x^2+x+2\big)$.

Задача 2.28. *Для бинома $x^{40}-1 \in \mathbb{F}_5[x]$ определить количество и степени неприводимых сомножителей-многочленов.*

В каком минимальном поле расширения $\mathbb{F}_5[x]$ данный бином раскладывается на линейные множители?

Решение. Поскольку $n = 40 = 5\times 8$, то корни бинома $x^{40}-1$ суть все[4] корни x^8-1, но 5-й кратности.

[4] они все различны

Рассмотрим разложение многочлена x^8-1 над $\mathbb{F}_5$. Относительно умножения на 5 вычеты $\{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{7}\}$ по модулю 8 разбиваются на орбиты:

$$\{\overline{0}\}, \{\overline{1}, \overline{5}\}, \{\overline{2}\}, \{\overline{3}, \overline{7}\}, \{\overline{4}\}, \{\overline{6}\}.$$

Пояснение: $5 \cdot 5 = 25 \equiv_8 1$, $2 \cdot 5 = 10 \equiv_8 2$ и т.д.

Поэтому:

- бином $x^8 - 1 \in \mathbb{F}_5[x]$ разлагается в произведение 4-х линейных и 2-х неприводимых квадратных многочленов;
- бином $x^{40} - 1$ разлагается в произведение 20-и многочленов степени 1 (4-х линейных кратности 5 каждый) и 10-и неприводимых многочленов степени 2 (2-х квадратных кратности 5 каждый);
- максимальная степень неприводимых делителей-многочленов есть 2, следовательно полем расширения данного бинома будет $\mathbb{F}_5^2$.

Замечание. В данном случае разложение бинома $x^8 - 1 \in \mathbb{F}_5[x]$ на неприводимые множители легко находится:

$$\begin{aligned}
x^8 - 1 &= (x^4 - 1)(x^4 + 1),\\
x^4 - 1 &= (x^2 - 1)(x^2 + 1),\\
x^2 - 1 &= (x - 1)(x + 1),\\
x^2 + 1 &\equiv_5 x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2),\\
x^4 + 1 &\equiv_5 x^4 - 4 = (x^2 + 2)(x^2 + 2),
\end{aligned}$$

итого:

$$x^8 - 1 = (x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2)(x^2 + 2)(x^2 - 2).$$

Глава 3

Коды, исправляющие ошибки

3.1 Блоковое кодирование. Коды Хэмминга

Задача помехоустойчивого кодирования. По каналу с шумом проходит поток *битовой* информации (или хранимая информация искажается), вследствие чего возникают ошибки.

- *Модель ошибок*: биты случайно, независимо и с равными вероятностями могут оказаться инвертированными (*двоичный симметричный канал*), вставки/выпадения битов нет.
- *Задача*: обеспечить автоматическое исправление ошибок.

Подход к решению (один из возможных!):

1) входной поток информации разбить на *сообщения* — непересекающиеся блоки фиксированной длины k;
2) каждый блок *кодировать* (модифицировать) —
   а) независимо от других — *блоковое кодирование*;
   б) в зависимости от предыдущих — *свёрточное* или *потоковое кодирование* (турбо-коды и др.).

Далее рассматривается исключительно *блоковое кодирование*:

- есть набор всех *сообщений* $S_1, \ldots, S_t$, длины k каждое ($t = 2^k$), которые нужно передать по каналу связи с шумом;
- для обеспечения помехозащищённости вместо этих сообщений передают *кодовые слова*, каждое длины $n > k$, т.е. вводят *избыточность* при передаче информации.

Более формально:

код — инъективное отображение
$\varphi : \{0,1\}^k \to \{0,1\}^n,\ k < n$;

кодовые слова — область значений
$C = Im\,\varphi \subset \{0,1\}^n$ кода.

Чем меньше избыточность $m = n - k$ и чем больше число ошибок, которые может исправить код, тем он лучше.

Ясно, что эти требования противоречат друг другу и одно достигается за счёт другого.

Понятия, связанные с булевым кубом — напоминание из дискретной математики.

- *Норма* или *вес* $\|\widetilde{\gamma}\|$ = число единичных координат в наборе $\widetilde{\gamma} \in B^n$.

- *Метрика* (вспоминаем, что это такое) на множестве бинарных наборов — *хэммингово расстояние* ($+$ — сумма по $\bmod 2$):

$$\rho\left(\widetilde{\alpha},\,\widetilde{\beta}\right) \;=\; \left\|\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}\right\|.$$

- *Шар Хэмминга с центром в* $\widetilde{\alpha}$ *и радиусом* $r>0$:

$$S_r\left(\widetilde{\alpha}\right) \;=\; \left\{\,\widetilde{\beta}\in B^n \;\mid\; \rho\left(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\right)\leqslant r\,\right\}.$$

Ричард Уэсли Хэмминг (Richard Wesley Hamming, 1915–1998) — американский математик, работы которого в сфере теории информации оказали существенное влияние на компьютерные науки и телекоммуникации. В 1950 г. опубликовал способ построения кода, исправляющего одну ошибку и названный впоследствии его именем.

Кодовое расстояние

Определение 3.1. Минимальное расстояние между словами кода C называется его *кодовым расстоянием*, символически d.

Утверждение 3.1. *Множество* C *образует код с исправлением не менее* r *ошибок, если*

$$\forall\,\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\in C:\;\widetilde{\alpha}\neq\widetilde{\beta}\;\Rightarrow\;S_r(\widetilde{\alpha})\cap S_r(\widetilde{\beta})=\varnothing.$$

Доказательство. Если при передаче сообщения $\widetilde{\alpha}$ сделано не более r ошибок, то набор останется в шаре $S_r(\widetilde{\alpha})$. Если шары не пересекаются, то искомое кодовое слово α — ближайшее к полученному набору. □

Следствие. У кода, исправляющего r ошибок, кодовое расстояние d должно быть не менее $2r+1$.

Определение кодового расстояния произвольного кода C — *трудоёмкая задача*: требуется перебрать все $\frac{2^k(2^k-1)}{2}$ пар кодовых слов, что практически невозможно уже начиная с $k = 50$.

Поэтому при помехоустойчивом кодировании на первый план выходит проблема построения кодов *с заданным кодовым расстоянием*. Она решается при использовании, например, БЧХ-кодов, которые будут рассмотрены далее.

Блоковое кодирование и декодирование

Блоковое кодирование — взаимно-однозначное преобразование сообщений длины k в кодовые слова длины $n > k$.

Декодирование — определение сообщения по принятому слову.

Пример 3.1 (тривиальный код-повторение $k = 1$, $n = 3$, $d = 3$). Информация разбивается на блоки по одному биту, т.е. передаются $t = 2$ сообщения: $S_0 = 0$ и $S_1 = 1$.

Кодирование $0 \mapsto 000, \quad 1 \mapsto 111$ *исправляет одну ошибку*. Однако такое кодирование крайне неэффективно: длина сообщения *утраивается*.

Тривиальный код-повторение $a \mapsto \underbrace{a \ldots a}_{2r+1}$, очевидно, исправит r ошибок.

Кодирование. Будем обозначать каждое сообщение вектором-столбцом $\boldsymbol{u} \in \{0,1\}^k$:

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \cdots \\ u_k \end{bmatrix}.$$

Определение 3.2.

- $\boldsymbol{v}$ — кодовое слово длины $n = k + m$.

  В случае *разделимого блокового кодирования* кодовое слово содержит сообщение $\boldsymbol{u}$ в своих *информационных битах* и, кроме того, ещё m *проверочных бит*.

- Множество $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_t\}$ всех $t = 2^k$ кодовых слов длины n — (n,k)-*код*, или, с кодовым расстоянием — (n,k,d)-*код*.

- $R = k/n$ — *скорость*, $m/n = 1 - R$ — *избыточность кода*.

Блоковое кодирование всегда можно осуществить с использованием таблицы размера $2^k \times n$. Однако такое «табличное» кодирование весьма неэффективно: значения n и k могут достигать *десятков и сотен тысяч*.

При передаче по каналу с шумом кодовое слово $\boldsymbol{v}$ превращается в принятое слово $\boldsymbol{w}$ той же длины n:

$$\boldsymbol{v} \;\to\; \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{e},$$

где $\boldsymbol{e} \in \{0,1\}^n$ — *вектор ошибок*:

$$e_i = \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-ом бите произошла ошибка.} \\ 0, & \text{если ошибки нет.} \end{cases}$$

Декодирование кодов *обычно значительно сложнее* кодирования[1]. Декодирование (n,k,d)-кода основано на:

- разбиении единичного куба B^n на k областей, содержащих шары радиуса $r = \lfloor (d-1)/2 \rfloor$ с центрами в кодовых словах;
- предположении, что произошло $\leqslant r$ ошибок.

Декодирование блокового разделимого (n,k) *кода* проводится в два этапа:

$$\boldsymbol{u} \xrightarrow[\text{избыточность}]{\text{кодирование}} \boldsymbol{v} \xrightarrow[+\boldsymbol{e}]{\text{ошибка}} \boldsymbol{w} \xrightarrow[\text{ближ. код. слово}]{\text{декод.-1}} \widehat{\boldsymbol{v}} \xrightarrow[\text{удаление избыт.}]{\text{декод.-2}} \widehat{\boldsymbol{u}}$$

1-й этап: *Восстановление переданного кодового слова* $\widehat{\boldsymbol{v}}$ как ближайшего к $\boldsymbol{w}$ в метрике Хэмминга — нахождение центра соответствующего шара.
Для этого надо, вообще говоря, перебрать все 2^n строк в $2^n \times k$-таблице кодовых слов.

Если расстояние до ближайшего центра шара превышает $\lfloor (d-1)/2 \rfloor$, то произошло больше ошибок, чем может исправить код и при декодировании необходимо выдать *отказ*.

[1] Известны, однако, т.н. *экспандерные* коды с линейной сложностью декодирования, для которых неизвестны субквадратичные алгоритмы кодирования, но это — исключение. Экспандерные коды дают лучший из известных компромиссов между скоростью кода k/n, кодовым расстоянием d и быстротой декодирования.

2-й этап: *Восстановление исходного сообщения* $\widehat{\boldsymbol{u}}$ по кодовому слову $\widehat{\boldsymbol{v}}$ путём удаления проверочных бит — элементарная процедура.

Вывод: декодирование блокового (n, k)-кода *общего вида* — очень ресурсоёмкий процесс, поэтому его использование таких кодов возможно лишь при *небольших значениях* n и k.

Однако, приняв дополнительные ограничения на множество кодовых слов, можно перейти от *экспоненциальных* требований по памяти и по сложности алгоритмов кодирования/декодирования к *линейным* по n и k. Эти ограничения приводят к использованию блоковых кодов специального вида: *групповых*, а из групповых — *циклических*.

Чтобы построить код максимального размера, исправляющий r ошибок, нужно вложить в единичный куб B^n максимально возможное число непересекающихся шаров радиуса r — *задача плотной упаковки*.

Вопрос: При каких n и r в куб B^n можно уложить непересекающиеся шары радиуса r «плотно», «без зазоров»?

Ответ: Такое удаётся в (нетривиальных) случаях:

1) $n = 2^q - 1$, $r = 1$ — *коды Хэмминга*, у них $m = q$ и
2) $n = 23$, $r = 3$ — *код Голея*, к него $m = 11$.

Это *совершенные* или *экстремальные коды*.

Тривиальные коды: $(n, 0, 0)$ — с 2^n кодовыми словами; $(2r+1, 1, r)$ — с повторением нечётной длины и $(n, 0, n)$.

Теорема 3.1 (Хэмминга). *При* $2r < n$ *максимальное число* t *кодовых слов находится в пределах*

$$\frac{2^n}{C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{2r}} \leqslant t \leqslant \frac{2^n}{C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^r}.$$

Доказательство. t есть максимальное число непересекающихся шаров радиуса r, помещающихся в кубе B^n.

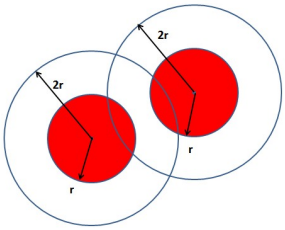
Верхняя оценка (граница Хэмминга) — шар радиуса r содержит точки: сам центр + все точки с одной, двумя, ..., r измененными координатами, т.е. всего $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^r$ штук и шары не пересекаются.

Для *оценки снизу* построим негрупповой код:

1) берем произвольную точку B^n и строим вокруг неё шар радиуса $2r$;
2) берем произвольную точку вне построенного шара и строим вокруг неё шар радиуса $2r$;
3) и т.д., каждая новая точка выбирается вне построенных шаров.

В результате:

- шары, возможно, пересекаются, но каждый шар занимает $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{2r}$ точек $\Rightarrow$ шаров не менее $2^n / \left(C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{2r}\right)$;
- шары радиуса r с центрами в выбранных точках не пересекаются.



□

Построение кода Хэмминга $n = 2^q - 1$, $r = 1$.

Покажем, что в случае $n = 2^q - 1$ получим $t = \frac{2^n}{1+n}$, т.е. верхняя оценка теоремы Хэмминга достигается.

Построим код, а потом определим его кодовое расстояние. Рассмотрим таблицу:

$$k = 2^q - (q+1) \left\{ \begin{array}{ll} 100\ldots000 & 1100\ldots000 \\ 010\ldots000 & 1010\ldots000 \\ 001\ldots000 & 1001\ldots000 \\ \ldots & \ldots \\ 000\ldots100 & 1111\ldots101 \\ 000\ldots010 & 1111\ldots110 \\ 000\ldots001 & 1111\ldots111 \end{array} \right.$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{k = 2^q - (q+1)} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{q = m}$$

Слева — единичная матрица порядка $2^q - 1 - q$), справа — все бинарные наборы длины q, содержащие *не менее двух* единиц.

Просуммировав всевозможные совокупности строк таблицы, получим $t = 2^k = 2^{2^q-(q+1)}$ различных кодовых слов, но

$$t = 2^{2^q-(q+1)} = \frac{2^{2^q-1}}{2^q} = \frac{2^n}{1+n}.$$

Найдём кодовое расстояние построенного кода:

- в каждой строке таблицы — не менее 3 единиц;
- если сложить

  две строки — в левой части будет 2 единицы, а в правой — хотя бы 1,

  не менее трёх строк — в левой части будет не менее 3 единиц.

  Т.е. всегда $\rho\left(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\right) \geqslant 3 \;\Rightarrow$ шары единичного радиуса с центрами в полученных наборах не пересекаются.

Пример 3.2 (код Хэмминга длины 7). Имеем $q = 3$, $n = 2^3 - 1 = 7$, $k = 2^3 - (3+1) = 4$.
Для данного параметра $q = 3$ составим таблицу кода Хэмминга:

1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1

Складывая по $\bmod 2$ все совокупности (включая пустую) приведённых 4-х строк, получаем $2^4 = 16$ различных бинарных слов длины 7, которыми можно закодировать 16 сообщений.

Этот код содержит по 1 слову веса 0 и 7, по 7 слов веса 3 и 4; исправляет 1 ошибку, обнаруживает 2-, 5-, 6-кратные ошибки и 80% 3- и 4-кратных.

Число кодовых слов кода Хэмминга с различными весами есть коэффициенты *производящего полнома*

$$W(z) = \frac{1}{n+1}\left[(1+z)^n + n(1+z)^{\frac{n-1}{2}}(1-z)^{\frac{n+1}{2}}\right].$$

Например, для $n = 7$ получим

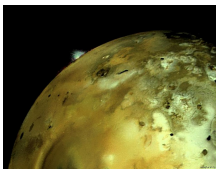
$$W(z) = \frac{1}{8}\left[(1+z)^7 + n(1+z)^3(1-z)^4\right] = \\ = 1 + 7z^3 + 7z^4 + z^7,$$

т.е. уже известные значения 1, 7, 7 и 1 для числа кодовых слов веса 0, 3, 4 и 7 соответственно.

Является ли кодом Хемминга тривиальный $(3,1)$-код?

Марсель Голей
(Marcel J. E. Golay, 1902–1989) — швейцарский математик и физик. В своей единственной работе по теории информации (1949) предложил совершенный двоичный код, исправляющий три ошибки.

В ходе космической программы США *Вояджер* (1979-81) для передачи цветных изображений Юпитера и Сатурна использовался код Голея.



Код Голея — (23, 12, 7)-код. М. Голей обнаружил, что

$$\underbrace{C_{23}^0 + C_{23}^1 + C_{23}^2 + C_{23}^3}_{\text{объём шара радиуса 3}} = 2^{11}.$$

Это позволило предположить, что существует содержащий

$$t = \frac{2^{23}}{2^{11}} = 2^{12} = 4096$$

кодовых слов совершенный $(23, 12, 7)$-код, исправляющий до 3-х ошибок, и М. Голей в своей статье указал такой код.

Доказано, что других пар (n, r), удовлетворяющих условию

$$\frac{2^n}{C_n^0 + \ldots + C_n^r} \quad \text{— целое,}$$

кроме $(2^q - 1, 1)$ — код Хэмминга и тривиальных случаев[2] не существует.

3.2 Линейные коды

Линейные коды: определение, свойства

Бóльшая часть теории блокового кодирования построена на *линейных* кодах, позволяющих реализовывать эффективные алгоритмы кодирования/декодирования. В двоичном случае их называют *групповыми*, т.к. они образуют *группу относительно операции «сумма по* $\bmod 2$*»*.

[2] см. с. 118

Утверждение 3.2. *Устойчивая относительно операции* $+$ *суммы по* $\bmod 2$ *совокупность кодовых слов* C *образует группу.*

Доказательство.

Устойчивость (*предполагается*): для любых кодовых слов $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in C$ выполняется $\widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta} = \widetilde{\gamma} \in C$;

Ассоциативность: свойство операции $+$;

Существование 0: $\widetilde{\alpha} + \widetilde{\alpha} = (0, \ldots, 0) = \widetilde{0} \in C$;

Противоположные элементы: $-\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}$ — см. выше.

□

Теорема 3.2 (свойство кодового расстояния группового кода). *Кодовое расстояние* d *группового кода равно*

$$d = \min_{\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{\beta}} \rho\left(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\right) = \min_{\widetilde{\gamma} \neq \widetilde{0}} \|\widetilde{\gamma}\|,$$

где $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ *и* $\widetilde{\gamma}$ *— кодовые слова из* C.

Доказательство. Для произвольных кодовых слов $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ всегда существует их сумма — кодовое слово γ:

$$\rho\left(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\right) = \left\|\widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta}\right\| = \|\widetilde{\gamma}\|,$$

причем $\widetilde{\gamma} \neq \widetilde{0}$ при $\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{\beta}$.

Отсюда получаем оценку $\min\limits_{\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{\beta}} \rho\left(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\right) \geqslant \min\limits_{\widetilde{\gamma} \neq \widetilde{0}} \|\widetilde{\gamma}\|$, которая достигается, например, при $\widetilde{\beta} = \widetilde{0}$. □

Следствие. *Для вычисления кодового расстояния группового кода достаточно перебрать* $2^k - 1$ *кодовых слов.*

$\{0,1\}^n = B^n$ есть n-мерное координатное векторное пространство над конечным полем $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$.

Определение 3.3. Блоковый (n,k)-код C называется *линейным*, если он образует *векторное подпространство* размерности k координатного пространства B^n.

Это означает, что в *линейном* коде C —

1) сумма любых кодовых слов — кодовое слово, т.е. это *групповой* код;
2) кодовое расстояние $d = \min\limits_{\widetilde{\gamma} \in C} \|\widetilde{\gamma}\|$;
3) существует базис $\{\boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_{k-1}\}$ из k векторов $\boldsymbol{g}_i \in B^n$, $i = 0, \ldots, k-1$, и любой вектор $\boldsymbol{v} \in C$ может быть представлен как

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=0}^{k-1} u_i \boldsymbol{g}_i, \quad u_i \in \{0,1\}.$$

Порождающая и проверочная матрицы. *Линейный код: матричное представление*

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=0}^{k-1} u_i \boldsymbol{g}_i = G\boldsymbol{u}\,, \text{ где } G_{n\times k} = [\,\boldsymbol{g}_0\, \boldsymbol{g}_1\, \ldots\, \boldsymbol{g}_{k-1}\,]$$

— *порождающая матрица* кода.

Пример 3.3 ((7, 4)-код Хэмминга). Ранее была получена таблица, сложением строк которой получаются все $2^4 = 16$ кодовых слов. Порождающая матрица получается транспонированием этой таблицы:

$$G_{7\times4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

— порождающая матрица в *систематической форме*: при кодировании исходные сообщения помещаются в первые 4 бита кодового слова

Проверочная матрица $H_{m\times n}$, $m = n - k$ для линейного (n, k)-кода обладает свойством $H\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ для любого *кодового слова* $\boldsymbol{v}$.

Пусть I_k и I_m — единичные матрицы порядков k и m соответственно. Тогда если порождающая матрица имеет вид $G = \begin{bmatrix} I_k \\ P_{m\times k} \end{bmatrix}$, то матрица $H = \begin{bmatrix} P_{m\times k} & I_m \end{bmatrix}$ будет проверочной.

Пример 3.3 (продолжение — (7, 4)-код Хэмминга). Для построенной порождающей матрицы $G_{7\times4}$ проверочной будет

$$H_{3\times7} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Упражнение: *Закодируйте матрицей G какое-нибудь 4-битное сообщение, получив код $\boldsymbol{v}$, и убедитесь, что $H\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.*

Характеристики кода Хэмминга

- Код содержащий $q = m$ проверочных бит, длины $n = 2^m - 1$, исправляющий одну ошибку.

- *Совершенный код* — осуществляет плотную упаковку: куб B^{2^m-1} разбивается на $t = \frac{2^n}{n+1} = 2^{2^m-(m+1)}$ шаров единичного радиуса с центрами в кодовых словах.
- *Скорость кода* — $R = 1 - m/(2^m - 1)$.
- *Столбцы проверочной матрицы* — все ненулевые векторы из 2^m.
- *Историческая справка.* Первой ЭВМ, в которой использовался код Хэмминга, была IBM 7030, построенная в 1960 г., через 10 лет после появления кода Хэмминга. До этого использовался лишь простейший способ повышения надежности — *проверка на чётность*.

3.3 Кодирование линейными кодами

$$\underset{\text{избыточность}}{\boldsymbol{u}} \xrightarrow{\textit{кодирование}} \boldsymbol{v} = G\boldsymbol{u}$$

Систематическое или *разделимое* кодирование упрощает декодирование: при нём биты сообщения копируются в заранее *фиксированные позиции* кодового слова.

Возможность разделимого кодирования основана на том, что матрица G определена с точностью до эквивалентных преобразований *столбцов*, при котором осуществляется переход к другому базису того же кода.

Пример 3.4 (систематического кодирования). Пусть линейный код задан порождающей матрицей G.

С помощью эквивалентных преобразований столбцов матрица G может быть приведена к виду, в котором *первые* k строк образуют единичную матрицу I_k:

$$G_{n\times k} \longrightarrow \widetilde{G}_{n\times k} = \begin{bmatrix} I_k \\ P_{m\times k} \end{bmatrix}$$

Тогда кодирование $\boldsymbol{v} = \widetilde{G}\boldsymbol{u}$ будет систематическим: первые k бит кодового слова $\boldsymbol{v}$ являются битами исходного сообщения $\boldsymbol{u}$.

Что произойдёт при перестановке *строк* кодирующей матрицы? Будет задан *другой линейный код* — другие наборы из B^n будут кодовыми словами.

Ортогональное дополнение к подпространству кода. Итак, C — k-мерное подпространство $\{0,1\}^n = B^n$. Элементы B^n, ортогональные ко всем элементам C, образуют *ортогональное подпространство* $C^\perp$:

$$\underset{C}{\forall}\boldsymbol{v}\ \ \underset{C^\perp}{\forall}\boldsymbol{w}:\ \boldsymbol{v}^T\times\boldsymbol{w} = 0.$$

Замечания:

- $\dim B^n = n = \underbrace{\dim C}_{k} + \underbrace{\dim C^\perp}_{m=n-k}$;
- $C \cup C^\perp \neq B^n$, т.е. B^n — *не есть прямая сумма* подпространств C и $C^\perp$;
- произвольный вектор из B^n может либо не разлагаться, либо разлагаться неоднозначно в сумму векторов из C и $C^\perp$.

Определение 3.4. Пусть $\{\boldsymbol{h}_0, \ldots, \boldsymbol{h}_{m-1}\}$ — базис $C^\perp$, $\boldsymbol{h}_i \in B^n$, $i = 0, \ldots, m-1$. Тогда матрица

$$H_{m\times n} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{h}_0^T \\ \boldsymbol{h}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{h}_{m-1}^T \end{bmatrix}$$

называется *проверочной матрицей* кода C.

Ясно, что

- $\forall\, \boldsymbol{v} \in C\colon\ H\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ — нулевой m-мерный вектор;
- $HG = O$ — нулевая $(m \times k)$-матрица;
- проверочная матрица определена с точностью до эквивалентных преобразований *строк*.

Например, если линейный код C задан исходной порождающей матрицей G и построена матрица

$$\widetilde{G}_{n\times k} = \begin{bmatrix} I_k \\ P_{m\times k} \end{bmatrix},$$

то проверочной матрицей H кода C будет

$$H_{m\times n} = \begin{bmatrix} P_{m\times k} & I_m \end{bmatrix}$$

Действительно, в этом случае

$$H\boldsymbol{v} = H\widetilde{G}\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} P_{m\times k} & I_m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_k \\ P_{m\times k} \end{bmatrix} = (P+P)\boldsymbol{u} = \\ = O\boldsymbol{u} = O.$$

Таким образом, линейный код для сообщений длины k имеет длину $n = k + m$ и задаётся

либо *порождающей* матрицей H размера $n \times k$,
либо *проверочной* матрицей G размера $m \times n$.

Эти матрицы определены с точностью до эквивалентных преобразований *столбцов и строк соответственно*, что соответствует выбору *различных базисов* в пространствах C и $C^{\perp}$, однако *фиксирование позиций информационных бит при систематическом кодировании* задаёт порождающую и проверочную матрицу *однозначно*.

Увеличение m ведёт к увеличению кодового расстояния d (как конкретно — очень трудный вопрос) и, следовательно, к увеличению количества ошибок, которые может исправить код.

Пример 3.5 (кодирования блоковым линейным кодом). Пусть дан линейный $(6, 3)$-код C задан порождающей матрицей

$$G_{6\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Требуется:

1) с использованием данного кода осуществить
   (а) *несистематическое* и
   (б) *систематическое* кодирование
   векторов $\boldsymbol{u}_1 = [0\ 1\ 1]^T$ и $\boldsymbol{u}_2 = [1\ 0\ 1]^T$;
2) построить проверочную матрицу H;
3) определить кодовое расстояние d данного кода.

1 (а). Несистематическое кодирование находим непосредственно (только 3-й бит сообщения перейдёт в 1-й бит кодового слова):

$$[\,\boldsymbol{v}_1^n\,\boldsymbol{v}_2^n\,] = G\times[\,\boldsymbol{u}_1\,\boldsymbol{u}_2\,] = \begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&1\\1&0&0\\1&1&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1\\1&0\\0&1\\0&0\\1&1\\0&1\end{bmatrix}.$$

1 (б). Для систематического кодирования с помощью эквивалентных преобразований *столбцов* выделим в матрице G единичную подматрицу размера 3×3 (над стрелкой указано проводимое преобразование столбцов):

$$\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&1\\1&0&0\\1&1&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{(1)+(2)\mapsto(1)}\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&1\\1&0&0\\0&1&1\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix} = \widetilde{G}.$$

В последней матрице в строках 3, 5 и 1 стоит единичная подматрица — это приведёт к тому, что 1, 2 и 3-й биты исходного сообщения последовательно перейдут в 3, 5 и 1-й биты кодового слова.

Найдём систематическое кодирование $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$:

$$[\,\boldsymbol{v}_1^s\,\boldsymbol{v}_2^s\,] = \widetilde{G}\times[\,\boldsymbol{u}_1\,\boldsymbol{u}_2\,] = \begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&1\\1&0&0\\0&1&1\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1\\1&0\\0&1\\0&1\\1&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

2. Находим проверочную матрицу H, формируя матрицу $P_{3\times3}$ из строк $\widetilde{G}$, отличных от строк единичной подматрицы:

$$P_{3\times3} = \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

Для построения проверочной матрицы H нужно

- последовательно разместить *столбцы* P в 3, 5 и 1-м её столбцах соответственно,
- остальные 2, 4 и 6-й столбцы H должны образовывать единичную подматрицу.

В итоге получим проверочную матрицу

$$H_{3\times6} = \begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\1&0&0&1&1&0\\1&0&1&0&1&1\end{bmatrix}.$$

Базис C суть столбцы матрицы G (или $\widetilde{G}$), а базис $C^\perp$ — строки матрицы H:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad H^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Убедитесь, что $HG = H\widetilde{G} = \mathbf{0}$ — нулевая (3×3)-матрица.

Проверим, что в результате как систематического, так и несистематического кодирований были действительно найдены кодовые слова:

$$H \times [\, \boldsymbol{v}_1^n \, \boldsymbol{v}_2^n \, \boldsymbol{v}_1^s \, \boldsymbol{v}_2^s \,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Найдем кодовое расстояние d. Для этого закодируем все $2^3 = 8$ сообщений и найдем минимальный ненулевой хэммингов вес кодового слова:

$$C = [\boldsymbol{v}_1 \, \ldots \, \boldsymbol{v}_8] = \widetilde{G} \times [\boldsymbol{u}_1 \, \ldots \, \boldsymbol{u}_8] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_8$ — все 8 возможных сообщений, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_8$ — все 8 возможных кодовых слов. Оказалось $d = 3$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.4 Декодирование линейных кодов

Методы декодирования линейных кодов основаны на предположении о минимальном числе произошедших ошибок.

Тривиальный метод. Пусть передано кодовое слово $\boldsymbol{v}$, а принято слово

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{e}.$$

Хотя в этом равенстве известно только $\boldsymbol{w}$, но $\boldsymbol{v} \in C$ и, по предположению, вес вектора ошибок $\boldsymbol{e}$ минимален. Поэтому перебирая все кодовые слова можно вычислять векторы ошибок $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_i$, $i = \overline{1, 2^k}$ и выбрав $\boldsymbol{e}_0$ минимального веса, восстановить слово $\widehat{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{e}_0$.

Ясно, что такой метод требует хранения таблицы всех кодовых слов размера $n \times 2^k$ и реализации алгоритма нахождения вектора ошибки минимального веса.

Известны более эффективные методы декодирования линейных кодов, основанные на использовании понятия синдрома[3].

Синдром. Декодирование линейных кодов

Определение 3.5. *Синдромом слова* $\boldsymbol{w} \in \{0,1\}^n$, принятого при передаче сообщения, закодированного линейным (n,k)-кодом и, возможно, содержащего ошибки, назовём вектор $\boldsymbol{s} = H\boldsymbol{w} \in \{0,1\}^m$, где H — проверочная матрица, $m = n - k$.

Свойства синдрома:

- $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{w}$ — кодовое слово, ошибок нет[4];
- $\boldsymbol{s} = H\boldsymbol{w} = H(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{e}) = \underbrace{H\boldsymbol{v}}_{=0} + H\boldsymbol{e} = H\boldsymbol{e}$.

Отсюда ясно, что вектор ошибок $\boldsymbol{e}$ удовлетворяет неоднородной недоопределенной СЛАУ

$$H\boldsymbol{e} = \boldsymbol{s}, \qquad (*)$$

а кодовые слова являются решениями соответствующей однородной системы

$$H\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0},$$

[3] *Синдром* — совокупность явлений, вызванных отклонением от нормы.

[4] Точнее, $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}$ означает отсутствие ошибок определённого типа, а не их отсутствие вообще; это замечание относится и к декодированию всех рассматриваемых далее кодов.

(или, иными словами — ядром линейного преобразования $H : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$).

Таким образом, вектор $\boldsymbol{e}$ может быть представлен как частное решение $\widehat{\boldsymbol{e}}$ неоднородной системы $(*)$ и общее решение $G\boldsymbol{u}$ соответствующей однородной —

$$\boldsymbol{e} = \widehat{\boldsymbol{e}} + G\boldsymbol{u}.$$

и среди всех возможных векторов $\widehat{\boldsymbol{e}}$ необходимо выбрать имеющий минимальный вес.

Схема декодирования:

$$\boldsymbol{w} \longrightarrow \boldsymbol{s} = H\boldsymbol{w} \xrightarrow[H\boldsymbol{e}=\boldsymbol{s}]{} \boldsymbol{e} = \widehat{\boldsymbol{e}} + G\boldsymbol{u} \xrightarrow[\|\boldsymbol{e}\|\to\min]{} \widehat{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{e}$$

Декодирование по синдрому. Поскольку и принятый вектор $\boldsymbol{w}$, и соответствующий ему вектор ошибок $\boldsymbol{e}$ имеют одинаковые синдромы, можно попытаться восстановить неизвестный вектор $\boldsymbol{e}$, используя тот факт, что он является решением системы $(*)$.

Для этого нужно составить *словарь синдромов* — таблицу, строки которой соответствуют всем возможным синдромам $\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_{2^m}$, а каждая строка содержит *наиболее вероятный вектор ошибок*, данному синдрому соответствующий. Этот вектор должен иметь наименьший вес среди возможных решений системы $(*)$ для данного $\boldsymbol{s}$ и его называют *лидером* класса векторов ошибок, имеющих общий синдром $\boldsymbol{s}$. Если таких векторов минимального веса несколько, то в качестве лидера может быть выбран любой из них.

Таким образом, данный метод потребует хранения проверочной матрицы размера $m \times n$, словаря синдромов размера $2^m \times n$, но не требует нахождения векторов

ошибок минимального веса (они уже найдены на этапе проектирования декодирующего устройства).

Однако в любом случае алгоритм декодирования остаётся *экспоненциально трудоёмким* и по памяти, и по числу операций.

Пример 3.6 (декодирования линейного кода). Рассмотрим линейный $(6,3)$-код из *Примера* 3.5.

1. Закодируем сообщения $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 = [0\ 1\ 1]^T$.

Систематическое кодирование для него было уже получено: $\boldsymbol{v} = [1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0]^T$.

Пусть при передаче происходит ошибка во 2-м бите, т.е. принят вектор $\boldsymbol{w} = [1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0]^T$.

Найдём синдром принятого слова $\boldsymbol{w}$:

$$H\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{s}\,.$$

Заранее, при проектировании устройства декодирования, должны быть найдены лидеры классов векторов ошибок для всех возможных синдромов.

Для полученного синдрома этот класс составляют столбцы матрицы всех кодовых слов C (уже полученной в п. 3 *Примера* 3.5), сложенные, например, с вектором $\boldsymbol{w}$. В этом случае для синдрома $\boldsymbol{s} = [1\ 0\ 0]^T$ был получен класс

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Наименьший вес в этой матрице имеет 4-й столбец, и, таким образом, лидером интересующего нас класса является вектор $\boldsymbol{e} = [0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$. Он-то и помещается в словарь синдромов.

Складывая найденный по словарю синдромов данный лидер с принятым словом, получаем

$$\widehat{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{e} = [1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0]^T + [0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T = \\ = [1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0]^T = \boldsymbol{v},$$

и переданное кодовое слово восстановлено верно.

Пусть передаётся сообщение $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_2 = [1\ 0\ 1]^T$; оно кодируется словом $\boldsymbol{v} = [1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0]^T$. Пусть также ошибка опять возникла во втором разряде.

Вычисляем синдром принятого слова $\boldsymbol{w} = [1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0]^T$:

$$H\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{s},$$

т.е. синдром остаётся прежним. Ему соответствует тот же лидер $\boldsymbol{e} = [0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ и кодовое слово также верно восстанавливается.

Декодирование кода Хэмминга. В случае кода Хэмминга декодирование можно существенно упростить.

Особенностью проверочной матрицы $H_{m\times(2^m-1)}$ кода Хэмминга является то, что её столбцы представляют собой двоичные коды чисел от 1 до 2^m-1. Например, в *Примере* 3.3 получена матрица

$$H_{3\times 7} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Хэмминг предложил использовать коды, у которых расположение столбцов проверочной матрицы H было такое, чтобы *синдром являлся двоичным представлением позиции ошибки в принятом сообщении.*

Для этого столбцы H должны *последовательно* быть двоичными представлениями чисел от 1 до 2^m-1. Тогда любой синдром есть соответствующий столбец H, т.е. двоичное представление своего номера = позиция ошибки. Заметим, что единичную подматрицу такой матрицы будут образовывать столбцы с номерами, являющимися степенью 2: 1, 2, ..., 2^{m-1}.

Например, для $q=3$ это матрица

$$\widetilde{H}_{3\times 7} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда порождающая матрица есть

$$G_{7\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Она помещает сообщение последовательно в 3, 5, 6 и 7-ю позиции кодового слова, а остальные биты являются проверочными: подматрица образованная 1, 2 и 4-й строками является подматрицей H, оставшейся после удаления из неё единичной подматрицы. Тогда, как легко проверить, $HG = O$ — нулевая (3×4)-матрица.

Линейные коды (n, k): резюме

- Линейные коды могут иметь произвольные параметры n и $k < n$.
- Требование линейности производить позволяет упростить кодирование и декодирование.

    1. *Кодирование* осуществляется особенно просто — умножением вектора сообщения на порождающую матрицу.

       Но вопрос «*как найти порождающую матрицу для получения кода с хорошими характеристиками?*» остаётся открытым.
    2. *Декодирование* осуществляется с помощью легко вычисляемых синдромов, а этап 2 при систематическом кодировании элементарен.

Однако процесс декодирования остаётся трудоёмким.

3.5 Циклические коды

Определение и построение циклических кодов

Определение 3.6. Код C называется *циклическим (сдвиговым)*, если он инвариантен относительно циклических сдвигов, т.е. для любого $0 \leqslant s \leqslant n-1$ справедливо

$$(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\alpha_s, \alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_0, \ldots, \alpha_{s-1}) \in C.$$

Ранее было показано:

- В кольце $R = \mathbb{F}_p[x]/(x^n - 1)$, рассматриваемом как n-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{F}_p$, имеется базис
$$\left\{ \overline{1}, \overline{x}, \ldots, \overline{x^{n-1}} \right\}.$$
Циклический сдвиг координат в этом базисе равносилен умножению на $\overline{x}$.
- Векторное подпространство I кольца R является циклическим iff I — идеал R.

Поэтому построить циклический (n, k)-код длины можно следующим образом.

1. Выбираем любой делитель $g(x)$ бинома $x^n - 1$. Многочлен $g(x)$ называют *порождающим* или *образующим*.

2. Найденный полином порождает идеал $(g(x))$ в кольце $R = \mathbb{F}_p[x]/(x^n - 1)$, а *коэффициенты многочленов из этого идеала* будут кодовыми словами. Тогда $m = \deg g(x)$ и $k = n - m$.
3. При удачном выборе порождающего полинома будут получен код с приемлемым значением d.

Однако:

- есть только несколько конструкций циклических кодов с хорошими параметрами;
- в общем случае определение кодового расстояния циклического кода — чрезвычайно трудоёмкая задача.

Избыточный циклический код — англ. CRC, Cyclic Redundancy Code. Из всех *линейных* (n, k)-кодов будем далее рассматривать *циклические*.

Полиномиальное представление слов. Установим соответствие векторов сообщения $\boldsymbol{u} \in \{0,1\}^k$ и кодового слова $\boldsymbol{v} \in \{0,1\}^n$ с их полиномиальными представлениями $u(x),\ v(x) \in \mathbb{F}_2[x]$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= [\,u_0,\, u_1,\, \ldots,\, u_{k-1}\,]^T \ \leftrightarrow \\
&\leftrightarrow\ u(x) = u_0 + u_1 x + \ldots + u_{k-1}x^{k-1}, \\
\boldsymbol{v} &= [\,v_0,\, v_1,\, \ldots,\, v_{n-1}\,]^T \ \leftrightarrow \\
&\leftrightarrow\ v(x) = v_0 + v_1 x + \ldots + v_{n-1}x^{n-1}.
\end{aligned}$$

Любое кодовое слово $v(x)$ представляется в виде

$$v(x) \in (g(x)) = \{\, g(x)q(x) \mid q(x) \in \mathbb{F}_2[x],\ x^n = 1 \,\}.$$

Коды Хэмминга могут быть циклическими. Построенная *Примере* 3.2 таблица 4×7 для кода Хэмминга *не порождает циклического кода.*

Однако если переставить 3-элементные окончания двух последних строк, то полученная таблица

1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1

уже *порождает циклический код* (проверьте!).

Пример 3.7 (построения циклического кода). Построим *циклический код длины* $n = 23$.

Для определения порождающего полинома кода находим разложение бинома $x^{23} - 1$ на неприводимые многочлены.

Один корень находится сразу: это 1 и имеем разложение

$$x^{23} + 1 \;=\; (x+1)(\underbrace{x^{22} + x^{21} + \ldots + x^2 + x + 1}_{f(x)}).$$

Перебором неприводимых над $\mathbb{F}_2$ полиномов находим

$$f(x) \;=\; (\underbrace{x^{11} + x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x + 1}_{f_1(x)}) \times \\ \times\, (\underbrace{x^{11} + x^{10} + x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + 1}_{f_2(x)})$$

Поскольку $\deg f_1(x) = \deg f_2(x) = 11 = m$, любой из полиномов $f_1(x)$, $f_2(x)$ может быть выбран порождающим[5] для построения $(23, 12)$-кода.

Можно показать, что в обоих случаях кодовое расстояние оказывается равным 7. Например, при выборе порождающим полинома $g(x) = f_2(x)$ и несистематическом кодировании сообщения $[100000000000]^T$ получаем кодовое слово $[10101110001100000000000]^T$ веса 7.

Ясно, что построен *код Голея.*

Заметим, что делители бинома $x^{23} - 1$ пришлось искать перебором.

Кодирование циклическими кодами. Пусть определён порождающий полином $g(x)$: $g(x) \mid x^n - 1$, $\deg g(x) = m < n$, задающий код C.

Несистематическое кодирование осуществляется путём умножения кодируемого полинома на порождающий:

$$u(x) \mapsto v(x) = g(x)u(x).$$

Систематическое кодирование осуществляется путём приписыванием к кодовому слову *слева (в младшие разряды)* остатка $r(x)$ от деления $x^m u(x)$ на $g(x)$.

Поскольку

$$x^m u(x) = g(x)q(x) + r(x) \quad \text{и} \quad \deg r(x) < m,$$

[5] При выборе $g(x) = x+1$ получим код с проверкой на чётность ($m = 1$), при $g(x) = (x+1)(f_1(x))$ или $g(x) = (x+1)(f_2(x))$ получим *расширенный* код Голея с $m = 12$.

то $x^m u(x) + r(x) = g(x)q(x) \in C$ и систематическое кодирование может быть задано как

$$u(x) \mapsto v(x) = x^m u(x) + r(x),$$

при котором полином $v(x)$ содержит k коэффициентов полинома $u(x)$ в k *крайних правых позициях* (при старших степенях x).

Пример 3.8. 1. Построим циклический код длины $n = 7$.

Сначала нужно найти какой-либо делитель бинома $x^7 - 1$, для чего необходимо разложить его на неприводимые множители.

Заметим, что $7 = 2^3 - 1$. Но $F = \mathbb{F}_2^3$ — поле разложения бинома $x^{2^3-1} - 1$ и поэтому его корнями являются все ненулевые элементы поля F.

Делаем вывод: *выбор длины кода* $n = 2^q - 1$ *очень удобен*, т.к. легко определяются число и степени неприводимых делителей бинома $x^n - 1 = x^{2^q-1} - 1$.

Пусть α — произвольный примитивный элемент поля $F = \mathbb{F}_2^3$. Тогда с учетом $\alpha^7 = 1$ находим разбиение корней $x^7 - 1$ (= всех элементов F^*) на орбиты:

$$\{1\}, \{\alpha, \alpha^2, \alpha^4\}, \{\alpha^3, \alpha^6, \alpha^5\}.$$

Таким образом, многочлен $x^7 + 1$ имеет один неприводимый делитель 1-й степени и два неприводимых делителя 3-й степени (их вообще всего два).

В результате получаем разложение

$$x^7 - 1 = x^7 + 1 = (x + 1)(x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1).$$

В качестве порождающего полинома $g(x)$ можно выбрать любой из вышеуказанных полиномов 3-й степени. Тогда $m = 3,\ k = 4$ и будет построен *циклический* $(7,4)$-*код*[6]. Выберем конкретно $g(x) = x^3 + x + 1$.

2. Закодируем несистематическим и систематическим кодам сообщение $\boldsymbol{u} = [0\,0\,1\,1]^T \leftrightarrow u(x) = x^3 + x^2$.

Несистематическое кодирование.

$$v(x) = u(x)g(x) = (x^3 + x^2)(x^3 + x + 1) = \\ = x^6 + x^5 + x^4 + x^2 \leftrightarrow [0\,0\,1\,0\,1\,1\,1]^T = \boldsymbol{v}.$$

Систематическое кодирование. Находим остаток $r(x)$ от деления многочлена $x^3u(x)$ на $g(x)$:

$$x^3(x^3 + x^2) = x^6 + x^5 = (x^3 + x^2 + x)(x^3 + x + 1) + \underline{x},$$

поэтому

$$v(x) = x^3u(x) + r(x) = x^6 + x^5 + x \leftrightarrow [0\,1\,0\,\underbrace{\underline{0\,0\,1\,1}}_{=\boldsymbol{v}}]^T = \boldsymbol{v}.$$

Декодирование циклических кодов

Определение 3.7. *Синдромом полинома* $w(x)$, принятого при передаче сообщения закодированного циклическим кодом и, возможно, содержащего ошибки, назовём остаток $s(x)$ от деления $w(x)$ на порождающий код многочлен $g(x)$.

Определение синдрома для циклического кода, очевидно, есть перефразировка в терминах полиномов определения синдрома для линейных кодов.

Свойства синдрома-полинома $w(x)$:

[6] Ясно, это код Хэмминга!

- $0 \leqslant \deg s(x) < m = n - k$;
- $s(x) \equiv 0 \Leftrightarrow w(x)$ — кодовое слово;
- $s(x) \equiv_{g(x)} w(x) \equiv_{g(x)} (v(x) + e(x)) \equiv_{g(x)} e(x)$.

Декодирование циклического кода проходит по общей схеме декодирования линейного кода:

1) *вычисляется синдром* $s(x)$ принятого слова $w(x)$;
2) вычисляются полиномы $e(x) = s(x) + g(x)u(x)$ для всех 2^k возможных сообщений $u(x)$.
3) определяется *полином ошибок* $e_0(x)$ как решение с минимальным числом мономов.
4) восстанавливается *переданное сообщение* $u(x) = w(x) + e_0(x)$.

Примеры декодирования циклических кодов будут даны при рассмотрении БЧХ-кодов[7].

Циклические линейные коды (n, k): резюме

- Линейный код будет циклическим, только если он *принадлежит идеалу* $(g(x))$ в кольце многочленов $\mathbb{F}_2[x]/(x^n - 1)$.
- Порождающий полином $g(x)$ циклического (n, k)-кода является делителем бинома $x^n - 1$; $\deg g(x) = m$ — число проверочных бит кода.

[7] Существуют и альтернативные методы декодирования циклических кодов общего вида (декодеры Меггита, Касами-Рудольфа, пороговый, мажоритарный, ...) также экспоненциальной по k трудоёмкости.

Можно выбрать любой делитель, однако нахождение $g(x)$, порождающего код с большим кодовым расстоянием d — *сложная задача* (оценка сверху: d не превосходит числа мономов в $g(x)$).

- *Циклические коды* общего вида могут иметь произвольную длину n, но, в отличие от *линейного кода общего вида*, его параметры $m = \deg g(x)$ и, следовательно, $k = n - m$ уже не произвольны.

- *Кодирование* и *декодирование* сводится к выполнению операций умножения и деления полиномов, *легко реализуемые* на регистрах сдвига с обратными связями.

  Однако алгоритмы декодирования по-прежнему имеют *экспоненциальную сложность* по k.

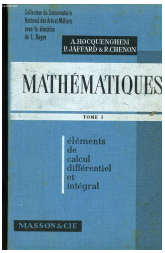
3.6 Коды Боуза-Чоудхури-Хоквингема

Определение и основные свойства БЧХ-кодов Коды Боуза-Чоудхури-Хоквингема (БЧХ, BCH) — подкласс циклических кодов, исправляющих не менее заранее заданного числа ошибок. Предложены Р.Ч. Боузом и Д.К. Рей-Чоудхури в 1960 г. независимо от опубликованной на год ранее работы А. Хоквингема.

Теоретически коды БЧХ могут исправлять произвольное количество ошибок, но при этом значительно увеличивается длина кодового слова с уменьшением его скорости R.

Радж Чандра Боуз
(Raj Chandra Bose, 1901–1987) — индийский математик, работавший в США.

Двайджендра Камар Рей-Чоудхури
(Dwijendra Kumar Ray-Chaudhuri, 1933) — индийский математик, работающий в США. Обладатель медали Эйлера за вклад в развитие комбинаторики.



Алексис Хоквингем[8]
(Alexis Hocquenghem, 1908?–1990) — французский математик. В его работе 1959 г. содержится первое описание линейных циклических кодов, исправляющих кратные ошибки.

Основные свойства минимальных многочленов (напоминание).

1. $\forall\, \beta \in \mathbb{F}_p^n \quad \exists!\, m_\beta(x)$, м.м. $m_\beta(x)$ неприводим и $\deg m_\beta(x) \leqslant n$;
2. Если $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ и $f(\beta) = 0$, то $m_\beta(x) \mid f(x)$.
3. Минимальный многочлен примитивного элемента поля называется *примитивным многочленом.*

[8] Hocquenghem является галицинизированной формой германской или фламандской фамилии, правильное её чтение — *О́кенгем.*

Циклотомический класс элемента поля. Напомним, что если β — корень неприводимого многочлена $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ степени n, то

$$\left\{ \beta,\, \beta^p,\, \beta^{p^2},\, \ldots,\, \beta^{p^{n-1}} \right\}$$

— *все* n различных (сопряжённых) корней $f(x)$.

Определение 3.8 (для полей характеристики 2). Пусть $n \mid N$. *Циклотомическим классом* (или *классом сопряжённости*) элемента $\alpha \in \mathbb{F}_2^N$ над подполем $\mathbb{F}_2^n$, называется множество всех различных элементов $\mathbb{F}_2^N$, являющихся 2^n-ми степенями α: $\alpha^{2^{nt}}$, $t = 0, 1, \ldots$.

Свойства циклотомических классов.

1. Циклотомические классы различных элементов либо совпадают, либо не пересекаются $\Rightarrow$ циклотомические классы всех элементов поля $\mathbb{F}_2^N$ образуют *разбиение* его мультипликативной группы.
2. Если α — *примитивный элемент* поля $\mathbb{F}_2^{qn}$, то циклотомический класс α над подполем $\mathbb{F}_2^n$ *содержит ровно* q *элементов*, т.е. это класс
$$\left\{ \alpha^{2^{0\cdot n}} = \alpha,\, \alpha^{2^{1\cdot n}} = \alpha^{2^n},\, \alpha^{2^{2n}},\, \ldots,\, \alpha^{2^{(q-1)\cdot n}} \right\}.$$
3. Если α — *примитивный элемент* поля $\mathbb{F}_2^{qn}$ и циклотомический класс α^k над подполем $\mathbb{F}_2^n$ содержит m элементов, то полином
$$m_\beta(x) = \prod_{t=0}^{m-1} \left(x - (\alpha^k)^{2^t} \right) = \\ = x^{m-1} + \lambda_{m-2} x^{m-2} + \ldots + \lambda_1 x + \lambda_0$$

является м.м. *для всех элементов, входящих в данный циклотомический класс.*

Пример 3.9. Приведём примеры разложения *мультипликативных групп* полей $\mathbb{F}_2^{qn}$ на циклотомические классы над $\mathbb{F}_2^n$.

1. $n = 1$, $q = 3$ и α — примитивный элемент поля $\mathbb{F}_2^3 = F$. Тогда $\alpha^7 = 1$ и разложение F^* над $\mathbb{F}_2$ есть (каждый элемент циклотомического класса последовательно умножаем на $2^n = 2$) —
$$\{1\},\ \{\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^4\},\ \{\alpha^3,\ \alpha^6,\ \alpha^5\}.$$

2. $n = 2$, $q = 2$ и α — примитивный элемент поля $\mathbb{F}_2^4 = F$. Тогда $\alpha^{15} = 1$ и разложение F^* над $\mathbb{F}_2^2$ есть (каждый элемент циклотомического класса последовательно умножаем на $2^n = 4$) —
$$\{1\},\ \{\alpha,\ \alpha^4\},\ \{\alpha^2,\ \alpha^8\},\ \{\alpha^3,\ \alpha^{12}\},\ \{\alpha^5\},$$
$$\{\alpha^{10}\},\ \{\alpha^6,\ \alpha^9\},\ \{\alpha^7,\ \alpha^{13}\},\ \{\alpha^{11},\ \alpha^{14}\}.$$

3. $n = 1$, $q = 4$ и α — примитивный элемент поля $\mathbb{F}_2^4 = F$. Тогда $\alpha^{15} = 1$ и разложение F^* над $\mathbb{F}_2$ есть (умножение на $2^n = 2$) —
$$\{1\},\ \{\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^4,\ \alpha^8\},\ \{\alpha^3,\ \alpha^6,\ \alpha^{12},\ \alpha^{24} = \alpha^9\},$$
$$\{\alpha^5,\ \alpha^{10}\},\ \{\alpha^7,\ \alpha^{14},\ \alpha^{28} = \alpha^{13},\ \alpha^{26} = \alpha^{11}\}.$$

БЧХ-коды: определение (простейший случай) и основное свойство

Пусть выбраны параметр q, определяющий длину кода $n = 2^q - 1$ и *конструктивное расстояние* $d_c < n$.

Код БЧХ есть циклический (n, k)-код, в котором делящий $x^n - 1$ порождающий многочлен $g(x)$ является полиномом минимальной степени, имеющим корнями *нули кода* α, α^2, α^3, $\ldots$, α^{d_c-1}, где α — примитивный элемент поля $\mathbb{F}_2^q$, $m = \deg g(x)$ и $k = n - m$.

Кодовое расстояние d построенного БЧХ-кода оказывается не менее выбранного конструктивного расстояния d_c.

Коды БЧХ: синдромы. Поскольку все кодовые слова циклического кода C делятся на полином $g(x)$ с корнями α, α^2, $\ldots$, α^{d-1}, то эти корни — одновременно и корни любого кодового слова:

$$v(x) \in C \;\Leftrightarrow\; v(\alpha^i) = 0, \quad i = 1, \ldots, d-1.$$

Определение 3.9. *Синдромами полинома* $w(x)$, принятого при передаче сообщения, закодированного БЧХ-кодом с нулями α^i, $i = 1, \ldots, d-1$ и, возможно, содержащего ошибки, назовём значения $w(x)$ в нулях кода: $s_i = w(\alpha^i)$.

Ясно, что

- определение синдрома для БЧХ-кода, очевидно, есть *перефразировка в терминах нулей кода полиномов* синдрома для циклического кода;
- поскольку
$$w(x) = v(x) + e(x), \quad \text{то} \quad s_i = w(\alpha^i) = e(\alpha^i);$$
- «*все синдромы равны нулю*» $\Leftrightarrow$ $w(x)$ — кодовое слово.

3.7 Построение БЧХ-кодов

Алгоритм построения БЧХ-кода. БЧХ (n, k)-код, как и любой циклический, задаётся порождающим полиномом $g(x)$ — делителем бинома $x^n - 1$, $k = n - \deg g(x)$.

Для его нахождения нужно:

1) задать величину q, определяющую длину кода $n = 2^q - 1$;
2) задать величину конструктивного расстояния $d_c = 2r + 1 < n$, если предполагается исправлять до r ошибок;
3) определить поле $\mathbb{F}_2^q = \mathbb{F}_2[x]/(a(x))$, выбрав неприводимый полином $a(x) \in \mathbb{F}_2[x]$ степени q и примитивный элемент поля α;
4) определить циклотомические классы элемента $\alpha \in \mathbb{F}_2^q$ над полем $\mathbb{F}_2$, в которые попадают нули кода α, α^2, …, α^{d_c-1}; пусть таких классов h;
5) найти h минимальных многочленов $g_1(x)$, $g_2(x)$, …, $g_h(x)$ для каждого циклотомического класса;
6) вычислить порождающий полином
$$g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot \ldots \cdot g_h(x).$$

Пример 3.10 (построения кодов БЧХ). Выберем $q = 3$ и построим различные БЧХ-коды длины $n = 2^3 - 1 = 7$.

Для получения разложения бинома $x^7 - 1$ рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_2[x]/(a(x)) \cong \mathbb{F}_2^3$, $\deg a(x) = q = 3$.

Тогда F^*, как показано ранее, разбивается на следующие циклотомические классы над $\mathbb{F}_2$:

$$\{1\},\ \{\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^4\},\ \{\alpha^3,\ \alpha^6,\ \alpha^5\}.$$

Конкретно в качестве порождающего многочлена возьмём примитивный многочлен $a(x) = x^3 + x + 1$, который является м.м. для примитивного элемента $\alpha = x$ и всего класса $\{\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^4\}$.

Для построения кодов, исправляющих разное количество ошибок, необходимо определить соответствующий порождающий полином.

1. *Код БЧХ длины $n = 7$, исправляющий $r = 1$ ошибку* (код Хэмминга).

В этом случае $d_c - 1 = 2r = 2$ и нули кода α, α^2 попадают в *один* циклотомический класс.

Минимальный многочлен для обоих элементов этого класса — $a(x)$, поэтому порождающий полином $g(x) = a(x)$, $m = \deg g(x) = 3$ и в результате получаем уже известный $(7, 4, 3)$-код Хэмминга.

2. *Код БЧХ длины $n = 7$, исправляющий не менее $r = 2$ ошибок.*

Теперь $d_c - 1 = 2r = 4$. Нули строящегося кода α, α^2, α^3, α^4 входят в *два* циклотомических класса: $\{\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^4\}$ и $\{\alpha^3,\ \alpha^6,\ \alpha^5\}$, порождаемых α и α^3 соответственно, поэтому

$$g(x) = g_\alpha(x) \cdot g_{\alpha^3}(x),$$

где $g_\alpha(x)$ и $g_{\alpha^3}(x)$ — м.м. для α и α^3.

М.м. для α известен: $g_\alpha(x) = a(x) = x^3 + x + 1$.

Найдем м.м. для $\alpha^3 = \alpha + 1$:

$$g_{\alpha^3}(x) = \left(x - \alpha^3\right)\left(x - \alpha^5\right)\left(x - \alpha^6\right) = \\ = x^3 + \left(\alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6\right) x^2 + \left(\alpha^8 + \alpha^9 + \alpha^{11}\right) x + \alpha^{14}.$$

Вычислим коэффициенты полинома $g_{\alpha^3}(x)$ с учётом $\alpha^7 = 1$ и $\alpha^3 = \alpha + 1$:

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6 &= (\alpha+1) + \alpha^2(\alpha+1) + (\alpha+1)^2 = \\ &= \alpha + 1 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha^2 + 1 = 1\,, \\ \alpha^8 + \alpha^9 + \alpha^{11} &= \alpha^2 + \alpha + \alpha^4 = \alpha^2 + \alpha + \alpha(\alpha+1) = 0\,, \\ \alpha^{14} &= 1\,. \end{aligned}$$

Т.о. $g_{\alpha^3}(x) = x^3 + x^2 + 1$ (что можно было определить сразу: это второй из двух неприводимых многочленов степени 3) и

$$g(x) = g_\alpha(x) \cdot g_{\alpha^3}(x) = (x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1) = \\ = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Получаем $\deg g(x) = 6$ и $k = 1$, т.е. построен тривиальный код с 7-кратным повторением, исправляющий 3 ошибки и содержащий всего два кодовых слова: $[0\,0\,0\,0\,0\,0\,0]^T$ и $[1\,1\,1\,1\,1\,1\,1]^T$.

Код получился очень плохой: хотя он и исправляет больше ошибок, чем планировалось, его скорость $R = 1/7$ чрезвычайно мала.

Попытаемся построить лучший код для исправления 2 ошибок, взяв бóльшую его длину.

Пример 3.11. Выберем $q = 4$, т.е. длина кода будет $n = 2^q - 1 = 15$.

Для получения разложения бинома $x^{15}-1$ рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_2[x]/(a(x)) \cong \mathbb{F}_2^4$, $\deg a(x) = q = 4$. Тогда F^* разбивается на следующие циклотомические классы над $\mathbb{F}_2$:

$$\{1\},\ \left\{\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^4,\ \alpha^8\right\},\ \left\{\alpha^3,\ \alpha^6,\ \alpha^{12},\ \alpha^9\right\},$$
$$\left\{\alpha^5,\ \alpha^{10}\right\},\ \left\{\alpha^7, \alpha^{14}, \alpha^{13}, \alpha^{11}\right\}.$$

Конкретно в качестве порождающего многочлена возьмём примитивный многочлен

$$a(x) = x^4 + x + 1,$$

который является м.м. для примитивного элемента $\alpha = x$ и всего класса $\left\{\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^4,\ \alpha^8\right\}$.

1. *Код БЧХ длины* $n = 15$, *исправляющий* $r = 2$ *ошибки.*

В этом случае $d_c - 1 = 2r = 4$ и нули α, α^2, α^3, α^4 конструируемого кода располагаются в двух циклотомических классах — для элементов α и α^3.

М.м. для (всех) элементов этих классов:
первого (α): $g_\alpha(x) = a(x)$.
второго (α^3): $g_{\alpha^3}(x) =$

$$= (x-\alpha^3)(x-\alpha^6)(x-\alpha^9)(x-\alpha^{12}) = \ldots$$
$$\ldots = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Тогда порождающий полином кода есть

$$g(x) = g_\alpha(x) \cdot g_{\alpha^3}(x) = x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1.$$

Получено $m = 8$, $k = 7$ и, как можно показать, $d = d_c = 5$, т.е. построен БЧХ $(15, 7, 5)$-код со скоростью уже $R = 7/15 > 1/7$.

Построим теперь

2. *Код БЧХ длины* $n = 15$, *исправляющий* $r = 3$ *ошибки.*

Теперь нужно найти полином, являющийся м.м. для нулей α, α^2, $\ldots$, α^6, которые попадают в 3 циклотомических класса:

$$\left\{ \alpha, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^8 \right\}, \left\{ \alpha^3, \alpha^6, \alpha^9, \alpha^{12} \right\}, \left\{ \alpha^5, \alpha^{10} \right\}$$

(имеются ещё 1- и 4-х элементный классы).

Пусть поле разложения бинома $x^{15} - 1$ то же, тогда м.м. для α и α^3 уже найдены.

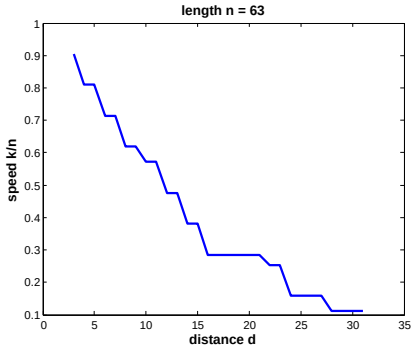
Очевидно $g_{\alpha^5}(x) = x^2 + x + 1$ и порождающий полином полученного кода есть

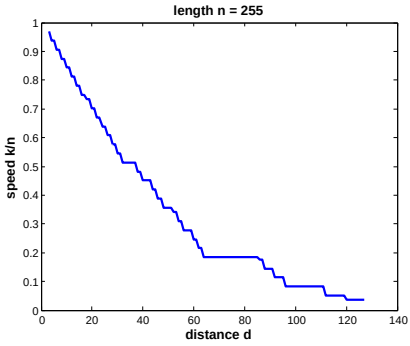
$$g(x) = g_\alpha(x) \cdot g_{\alpha^3}(x) \cdot g_{\alpha^5}(x) = \\ = x^{10} + x^8 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1.$$

Получено $m = 10$, $k = 5$ и можно показать, что $d = d_c = 7$.

Этот $(15, 5, 7)$-код БЧХ при той же длине, что и предыдущий, исправляет больше ошибок, но имеет меньшую скорость $R = 1/3$.

Зависимости скорости БЧХ-кодов от кодового расстояния





«Ступеньки» на графиках соответствуют ситуации, когда реальное кодовое расстояние оказалось больше, чем выбранное конструктивное.

Декодирование кодов БЧХ

Декодирование кода Хэмминга как линейного кода с помощью проверочной матрицы и вычисляемого с её помощью вектора-синдрома было уже рассмотрено в Разделе 3.4. Опишем ещё один метод декодирования кодов Хэмминга как простейших кодов БЧХ.

В этом случае $d = 3$, и поэтому нулями кода являются α и α^2, где α — примитивный элемент поля $\mathbb{F}_2^n$, $n = 2^q - 1$.

Для декодирования принятого слова $w(x)$ вычисляем синдром $s_1 = w(\alpha) = s$ (синдром $s_2 = w(\alpha^2)$ нам не потребуется).

- При $s = 0$ считаем, что ошибок не произошло.

- Если $s \neq 0$, то определяем значение j, для которого $\alpha^j = s$ и считаем, что произошла единичная ошибка в j-м разряде для $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Пример 3.12 (декодирование кода Хэмминга). Рассматриваем $(7,4)$-код Хэмминга, построенный в *Примере* 3.8 для циклических кодов.

Там был выбран порождающий полином $g(x) = x^3 + x + 1$ и найдено систематическое кодирование $v(x)$ сообщения $u(x) = x^3 + x^2 \leftrightarrow [0\ 0\ 1\ 1]^T$:

$$v(x) = x^6 + x^5 + x \leftrightarrow [0\ 1\ 0\ \underline{0\ 0\ 1\ 1}]^T.$$

Пусть при передаче сообщения $u(x)$ произошла ошибка в 5-й позиции, т.е. принято слово

$$[0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1]^T \leftrightarrow w(x) = x^6 + x\,.$$

Для декодирования $w(x)$ найдем синдром, учитывая, что $\alpha^3 = \alpha + 1$ (и $\alpha^7 = 1$):

$$s = w(\alpha) = \alpha^6 + \alpha = \left(\alpha^3\right)^2 + \alpha = (\alpha+1)^2 + \alpha = \\ = \alpha^2 + \alpha + 1 \neq 0\,.$$

Определим теперь значение $j \in \{0, \ldots, 6\}$, для которого $\alpha^j = s$:

$$\begin{aligned} \alpha^0 &= 1, & \alpha^3 &= \alpha + 1, \\ \alpha^1 &= \alpha, & \alpha^4 &= \alpha(\alpha+1) = \alpha^2 + \alpha, \\ \alpha^2 &= \alpha^2, & \alpha^5 &= \alpha^3 + \alpha^2 = \alpha^2 + \alpha + 1 = s. \end{aligned}$$

Т.о. 5-я позиция ошибки определена верно[9].

Если же произошло *две ошибки*, например, в 5 и 4-й позициях, то

$$w(x) = x^6 + x^4 + x, \quad s = 1,\ j = 0,$$
$$\widehat{v}(x) = x^6 + x^4 + x + 1 \leftrightarrow [1\ 1\ 0\ \underline{0\ 1\ 0\ 1}]^T$$

и будет раскодировано сообщение $[0\ 1\ 0\ 1]^T$ вместо посланного $[0\ 0\ 1\ 1]^T$.

Декодирование кодов БЧХ в общем случае. Рассмотрим (n, k, d)-код БЧХ длины $n = 2^q - 1$ при построении которого для определения порождающего полинома использовалось поле $F = \mathbb{F}_2^q = \mathbb{F}[x]/(a(x)),\ \deg a(x) = q$ и α — некоторый примитивный элемент F, нуль кода.

Пусть при передаче закодированного сообщения произошло ν ошибок.

Тогда

$$e(x) = x^{j_1} + x^{j_2} + \cdots + x^{j_\nu}, \quad \nu \leqslant r = \lfloor (d-1)/2 \rfloor,$$

где степени $j_1, \ldots, j_\nu$ — позиции ошибок.

Запишем равенства для синдромов $s_i = w(\alpha^i) = e(\alpha^i),\ i = 1, 2, \ldots, 2r$ как систему

$$\begin{cases} s_1 = \alpha^{j_1} + \alpha^{j_2} + \ldots + \alpha^{j_\nu}, \\ s_2 = (\alpha^{j_1})^2 + (\alpha^{j_2})^2 + \ldots + (\alpha^{j_\nu})^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{2r} = (\alpha^{j_1})^{2r} + \ldots + (\alpha^{j_\nu})^{2r}. \end{cases}$$

Решение $(j_1, \ldots, j_\nu)$ данной системы для некоторого $\nu \leqslant r$ определит искомые позиции ошибок[10].

---

[9] Альтернативный метод декодирования кода Хэмминга см. на с. 177.

[10] Такое решение всегда существует и единственно, т.к. код по построению способен исправлять до r ошибок.

Введём обозначения $\beta_i = \alpha^{j_i}$, $i = 1, \ldots, \nu$; эти величины называют *локаторами ошибок*.

Перепишем систему:

$$\begin{cases} s_1 = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu, \\ s_2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots + \beta_\nu^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{2r} = \beta_1^{2r} + \beta_2^{2r} + \ldots + \beta_\nu^{2r}. \end{cases} \qquad (*)$$

Определим *полином локаторов ошибок*

$$\sigma(x) = \prod_{i=1}^{\nu}(1 + \beta_i x) = 1 + \sigma_1 x + \sigma_2 x^2 + \cdots + \sigma_\nu x^\nu,$$

корнями которого являются величины $\beta_i^{-1} = \alpha^{-j_i}$, $i = 1, \ldots, \nu$.

Связь между σ_k и β_i определяет теорема Виета:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu, \\ \sigma_2 = \beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_3 + \beta_1\beta_3 + \ldots + \beta_{\nu-1}\beta_\nu, \\ \sigma_3 = \sum\limits_{i_1<i_2<i_3} \beta_{i_1}\beta_{i_2}\beta_{i_3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma_\nu = \beta_1\beta_2\ldots\beta_\nu. \end{cases} \qquad (**)$$

Введённые системы задают величины синдромов и коэффициентов полинома локаторов ошибок соответственно как значения *симметрических полиномов*:

$(*)$ — суммы k-х степеней локаторов ошибок;

$(**)$ — элементарных.

Соотношения между этими двумя типами симметрических полиномов задаются *тождествами Ньютона-Жирара*, которые в двоичной арифметике записываются как

$$
\begin{aligned}
& s_1 + \sigma_1 = 0, \\
& s_2 + \sigma_1 s_1 + 2\sigma_2 = 0, \\
& s_3 + \sigma_1 s_2 + \sigma_2 s_1 + 3\sigma_3 = 0, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& s_\nu + \sigma_1 s_{\nu-1} + \ldots + \sigma_{\nu-1} s_1 + \nu\sigma_\nu = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
& s_{\nu+1} + \sigma_1 s_\nu + \ldots + \sigma_{\nu-1} s_2 + \sigma_\nu s_1 = 0, \\
& s_{\nu+2} + \sigma_1 s_{\nu+1} + \ldots + \sigma_{\nu-1} s_3 + \sigma_\nu s_2 = 0, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& s_{2r} + \sigma_1 s_{2r-1} + \ldots + \sigma_{\nu-1} s_{2r-\nu+1} + \sigma_\nu s_{2r-\nu} = 0.
\end{aligned}
\right\}
$$

Последние $2r - \nu$ равенств данной системы являются СЛАУ относительно $\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu$. В литературе по кодам она получила название *ключевого уравнения*. Её решение позволяет найти полином локаторов ошибок $\sigma(x)$.

Основная трудность в решении данной СЛАУ состоит в том, что *значение ν неизвестно*. Её решатели называют *декодерами*.

Декодер PGZ (Peterson-Gorenstein-Zierler) состоит в последовательном решении ключевого уравнения для $\nu = r, r-1, \ldots$ до тех пор, пока матрица очередной СЛАУ не окажется невырожденной (при переходе от r к $r-1$ полагаем $\sigma_r = 0$).

Алгоритм BMA (Berlekamp-Messey) наиболее эффективен для не слишком длинных кодов БЧХ; его здесь не рассматриваем.

Декодер на основе расширенного алгоритма Евклида — рассмотрен ниже.

После нахождения $\sigma(x)$ полным перебором можно отыскать все его корни α^{-j_i}, а по ним — позиции ошибок $(j_1, \ldots, j_\nu)$.

Алгоритм декодирования БЧХ-кода

Рассмотрим (n, k, d)-код БЧХ, $n = 2^q - 1$, исправляющий $r = \lfloor (d-1)/2 \rfloor$ ошибок и α — нуль кода — примитивный элемент мулитипликативной группы поля $\mathbb{F}_2^q = \mathbb{F}_2[x]/(a(x))$, порождённого полиномом $a(x)$, $\deg a(x) = q$. Пусть принято слово $w(x)$, которое, возможно, не является кодовым, поскольку может содержать ошибки.

1. Для слова $w(x)$ найти все синдромы $s_i = w(\alpha^i)$, $i = 1, \ldots, d-1$.
2. Найти полином локаторов ошибок $\sigma(x)$, используя тот или иной декодер.
3. Найти все корни $\sigma(x)$ полным перебором всех ненулевых элементов поля[11] $\mathbb{F}_2^q$; пусть найденные корни суть $\alpha^{k_1}, \ldots, \alpha^{k_\nu}$.
4. Найти позиции ошибок $j_i \equiv_n -k_i$, $i = 1, \ldots, \nu$.
5. Исправить ошибки, получив слово
$$\widehat{v}(x) = w(x) + x^{j_1} + \ldots + x^{j_\nu}.$$

[11] их $2^q - 1 = n$, т.е. этот этап алгоритма линеен по n

6. Найти все значения $\widehat{v}(\alpha^i)$, $i = 1, \ldots, \nu$ и если не все они равны нулю, то выдать отказ от декодирования.

Мы будем использовать *декодер на основе расширенного алгоритма Евклида*. Опишем его.

Для нахождения полинома локаторов ошибок $\sigma(x)$, а затем и его корней, рассмотрим вспомогательный *синдромный полином*

$$s(x) = 1 + s_1 x + s_2 x^2 + \ldots + s_{2r} x^{2r},$$

где $s_i = w(\alpha^i)$, $i = 1, \ldots, 2r$ — синдромы и формально $s_0 = 1$.

Если перемножить полиномы — синдромный и локаторов ошибок, получим *полином значений ошибок*:

$$s(x)\sigma(x) = 1 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_{2r+\nu} x^{2r+\nu}.$$

Коэффициенты этого полинома определяются соотношением для произведения многочленов —

$$\lambda_i = \sum_{j=0}^{i} s_j \sigma_{i-j}, \quad i = 1, \ldots, 2r + \nu.$$

Замечаем, что значения λ_i по данной формуле для $i = \nu+1, \ldots, 2r$ суть левые части равенств ключевого уравнения, т.е. все они равны 0.

Таким образом, полином значений ошибок имеет нулевую «среднюю часть». Обозначим первую часть $\lambda(x)$, а из заключительной части вынесим за скобку x^{2r+1}:

$$s(x)\sigma(x) = \underbrace{\left(1 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_\nu x^\nu\right)}_{=\lambda(x)} +$$

$$+\ x^{2r+1}\left(\lambda_{2r+1}+\ldots+\lambda_{2r+\nu}x^{\nu-1}\right),\quad \nu\geqslant 1.$$

Это означает, что

$$s(x)\sigma(x)\ \equiv_{x^{2r+1}}\ \lambda(x).$$

Таким образом, некоторый многочлен $\lambda(x)$ степени $\nu\leqslant r$ и полином локаторов ошибок $\sigma(x)$ удовлетворяют соотношению Безу

$$s(x)\sigma(x)+x^{2r+1}a(x)\ =\ \lambda(x)$$

(напоминание: работаем в поле $\mathbb{F}_2^q\cong\mathbb{F}_2[x]/(a(x))$).

Это соотношение может быть решено относительно $\sigma(x)$ помощью расширенного алгоритма Евклида, при этом:

- условие остановки — степень очередного полученного остатка $\leqslant r$;
- количество совершенных ошибок $\nu=\deg\sigma(x)$;
- при решении не требуется знать сам многочлен $\lambda(x)$.

Пример 3.13 (декодирования БЧХ-кода на основе расширенного алгоритма Евклида).

Рассмотрим БЧХ $(15,5,7)$-код $15=2^q-1=2^4-1$, исправляющий до $r=3$ ошибок. Пусть при построении кода в качестве поля разложения бинома $x^{15}-1$ использовалось поле $\mathbb{F}_2^4\cong\mathbb{F}_2[x]/\left(x^4+x+1\right)$ и α — нуль кода.

Пусть также передаётся сообщение

$$[0\ 1\ 1\ 0\ 1]^T\ \leftrightarrow\ u(x)\ =\ x^4+x^2+x\,.$$

При систематическом кодировании (опустим этот этап) кодовое слово есть

$$v(x) = x^{14} + x^{12} + x^{11} + x^8 + x^4 + x^3 + x^2 + x \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow [0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ \underline{0\ 1\ 1\ 0\ 1}]^T.$$

Пусть ошибки произошли в 0, 6 и 12-й позициях, т.е. принятое слово —

$$w(x) = x^{14} + x^{11} + x^8 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow [\underline{1}\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ \underline{1}\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ \underline{0}\ 0\ 1]^T.$$

Для дальнейших вычислений нам понадобится представление ненулевых элементов поля $\mathbb{F}_2[x]/\left(x^4 + x + 1\right)$ как степеней его генератора α (дублируем таблицу со с. 72):

α^1	α
α^2	α^2
α^3	α^3
α^4	$\alpha + 1$
α^5	$\alpha^2 + \alpha$
α^6	$\alpha^3 + \alpha^2$
α^7	$\alpha^3 + \alpha + 1$
α^8	$\alpha^2 + 1$
α^9	$\alpha^3 + \alpha$
α^{10}	$\alpha^2 + \alpha + 1$
α^{11}	$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha$
α^{12}	$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$
α^{13}	$\alpha^3 + \alpha^2 + 1$
α^{14}	$\alpha^3 + 1$
α^{15}	1

1. Поскольку $d-1=2r=6$, найдём все 6 синдромов для принятого слова:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= w(\alpha) = \\
&= (\alpha^3+1)+(\alpha^3+\alpha^2+\alpha)+(\alpha^2+1)+(\alpha^3+\alpha^2)+ \\
&+(\alpha+1)+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1 = \alpha, \\
s_2 &= w(\alpha^2) = (w(\alpha))^2 = \alpha^2, \\
s_3 &= w(\alpha^3) = \underbrace{\alpha^{42}}_{=\alpha^{12}}+\underbrace{\alpha^{33}}_{=\alpha^3}+\underbrace{\alpha^{24}}_{=\alpha^9}+\underbrace{\alpha^{18}}_{=\alpha^3}+\alpha^{12}+\alpha^9+ \\
&+\alpha^6+\alpha^3+1 = \alpha^3+\alpha^6+1 = \cancel{\alpha^3}+\alpha^2+\cancel{\alpha^3}+1 = \\
&= \alpha^2+1 = \alpha^8, \\
s_4 &= w(\alpha^4) = (w(\alpha^2))^2 = \alpha^4, \\
s_5 &= w(\alpha^5) = \alpha^{70}+\alpha^{55}+\alpha^{40}+\alpha^{30}+\alpha^{20}+\alpha^{15}+ \\
&+\alpha^{10}+\alpha^5+1 = \\
&= \alpha^{10}+\alpha^{10}+\alpha^{10}+1+\alpha^5+1+\alpha^{10}+\alpha^5+1 = 1, \\
s_6 &= w(\alpha^6) = (w(\alpha^3))^2 = (\alpha^2+1)^2 = \alpha^4+1 = \alpha.
\end{aligned}
$$

Таким образом, синдромный полином есть

$$s(x) = \alpha x^6+x^5+\alpha^4x^4+\alpha^8x^3+\alpha^2x^2+\alpha x+1\,.$$

2. По декодеру на базе *расширенного алгоритма Евклида* необходимо по $a(x)$ и $s(x)$ решить соотношение Безу

$$x^7a(x)+s(x)\sigma(x)=\lambda(x)$$

относительно $\sigma(x)$.

Решаем:

Шаг 0. // *Инициализация*
$$r_{-2}(x) = x^7,$$
$$r_{-1}(x) = s(x) = \alpha x^6 + x^5 + \alpha^4 x^4 + \\ + \alpha^8 x^3 + \alpha^2 x^2 + \alpha x + 1,$$
$$\sigma_{-2}(x) = 0,$$
$$\sigma_{-1}(x) = 1.$$

Шаг 1. // *Делим с остатком $r_{-2}(x)$ на $r_{-1}(x)$*
$$r_{-2}(x) = r_{-1}(x)q_0(x) + r_0(x),$$
$$q_0(x) = \alpha^{14}x + \alpha^{13},$$
$$r_0(x) = \alpha^8 x^5 + \alpha^{12} x^4 + \alpha^{11} x^3 + \alpha^{13},$$
$$\deg r_0(x) = 5 > 3,$$
$$\sigma_0(x) = \sigma_{-2}(x) + \sigma_{-1}(x)q_0(x) = \\ = q_0(x) = \alpha^{14}x + \alpha^{13}.$$

Шаг 2. // *Делим с остатком $r_{-1}(x)$ на $r_0(x)$*
$$r_{-1}(x) = r_0(x)q_1(x) + r_1(x),$$
$$q_1(x) = \alpha^8 x + \alpha^2,$$
$$r_1(x) = \alpha^{14} x^4 + \alpha^3 x^3 + \alpha^2 x^2 + \alpha^{11} x,$$
$$\deg r_1(x) = 4 > 3,$$
$$\sigma_1(x) = \sigma_{-1}(x) + \sigma_0(x)q_1(x) = \\ = \alpha^7 x^2 + \alpha^{11} x.$$

Шаг 3. // *Делим с остатком $r_0(x)$ на $r_1(x)$*
$$r_0(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x),$$
$$q_2(x) = \alpha^9 x,$$
$$r_2(x) = \alpha^5 x + \alpha^{13},$$
$$\deg r_2(x) = \mathbf{1} \leqslant 3,$$
$$\sigma_2(x) = \sigma_0(x) + \sigma_1(x)q_2(x) = \\ = \sigma(x) = \alpha x^3 + \alpha^5 x^2 + \alpha^{14} x + \alpha^{13}.$$

Это последний шаг алгоритма Евклида, т.к. степень остатка $r_2(x)$ не превосходит $r = 3$.

Таким образом, полином локаторов ошибок найден:

$$\sigma(x) = \sigma_2(x) = \alpha x^3 + \alpha^5 x^2 + \alpha^{14} x + \alpha^{13}.$$

и $\nu = \deg \sigma(x) = 3$.

3. Найдём корни $\sigma(x)$ полным перебором[12], используя построенную ранее таблицу степеней α:

$$\begin{aligned}
\sigma(\alpha) &= \alpha^4 + \alpha^7 + 1 + \alpha^{13} = \alpha^2,\\
\sigma(\alpha^2) &= \alpha^7 + \alpha^9 + \alpha + \alpha^{13} = \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha,\\
\sigma(\alpha^3) &= \alpha^{10} + \alpha^{11} + \alpha^2 + \alpha^{13} = \mathbf{0},\\
\sigma(\alpha^4) &= \alpha^{13} + \alpha^{13} + \alpha^3 + \alpha^{13} = \alpha^2 + 1,\\
\sigma(\alpha^5) &= \alpha + 1 + \alpha^4 + \alpha^{13} = \alpha^{13},\\
\sigma(\alpha^6) &= \alpha^4 + \alpha^2 + \alpha^5 + \alpha^{13} = \alpha^3 + \alpha^2,\\
\sigma(\alpha^7) &= \alpha^7 + \alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^{13} = \alpha^3 + 1,\\
\sigma(\alpha^8) &= \alpha^{10} + \alpha^6 + \alpha^7 + \alpha^{13} = \alpha^3 + \alpha^2 + 1,\\
\sigma(\alpha^9) &= \alpha^{13} + \alpha^8 + \alpha^8 + \alpha^{13} = \mathbf{0},\\
\sigma(\alpha^{10}) &= \alpha + \alpha^{10} + \alpha^9 + \alpha^{13} = \alpha,\\
\sigma(\alpha^{11}) &= \alpha^4 + \alpha^{12} + \alpha^{10} + \alpha^{13} = \alpha^2 + \alpha,\\
\sigma(\alpha^{12}) &= \alpha^7 + \alpha^{14} + \alpha^{11} + \alpha^{13} = 1,\\
\sigma(\alpha^{13}) &= \alpha^{10} + \alpha + \alpha^{12} + \alpha^{13} = \alpha^2 + \alpha + 1,\\
\sigma(\alpha^{14}) &= \alpha^{13} + \alpha^3 + \alpha^{13} + \alpha^{13} = \alpha^2 + 1,\\
\sigma(\alpha^{15}) &= \alpha + \alpha^5 + \alpha^{14} + \alpha^{13} = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

[12] ясно, что корней всего 3

4. По найденным корням α^3, α^9, α^{15} вычисляем позиции ошибок:

$$\begin{aligned} j_1 &= -3 \equiv_{15} 12, \\ j_2 &= -9 \equiv_{15} 6, \\ j_3 &= -15 \equiv_{15} 0. \end{aligned}$$

5. Т.о. полином ошибок $e(x) = x^{12} + x^6 + 1$ определён правильно и

$$\widehat{v}(x) = w(x) + e(x) = v(x)$$

и кодовое слово восстановлено.

6. Проверка $\widehat{v}(\alpha) = \widehat{v}(\alpha^2) = \ldots = \widehat{v}(\alpha^6) = 0$ говорит от том, что восстановление верное[13].

БЧХ-коды: исторические сведения. Первым практически реализованным БЧХ-кодом был $(127, 92, 11)$-код, исправляющий 5 ошибок.

В системах передачи данных широко используется двоичный БЧХ $(255, 231, 7)$-код ($255 = 2^8 - 1$) со свойствами:

- степень порождающего код многочлена $g(x)$ — $m = 24$;
- в общем количестве слов длины 255 доля кодовых — $2^{-24} \approx 17 \cdot 10^{-6}$;
- все шары радиуса 3 с центрами в кодовых словах занимают $\approx 16,5\%$ объёма куба B^{255}.

В течении многих лет не было случая, чтобы ошибка передачи прошла незамеченной.

[13] с учётом замечания на с. 134.

БЧХ (n, k, d)-коды: резюме

- БЧХ-коды являются *подклассом циклических*.
- *Самое ценное свойство* — возможность построения кода с кодовым расстоянием не меньше заданного.
- *Кодирование* осуществляется с помощью порождающего полинома, имеющего корнями степени некоторого примитивного элемента поля.
- *Декодирование* может быть проведено с помощью эффективных алгоритмов (Форни, Берлекэмпа-Мэсси, Питерсона-Горенстейна-Цирлера, Евклидов алгоритм, ...).
- Теоретически коды БЧХ могут исправлять *произвольное количество ошибок*, но при этом существенно увеличивается длина кодового слова n, что приводит к уменьшению скорости передачи данных и усложнению приёмно-передающей аппаратуры, и поэтому при больших длинах приходится использовать другие коды.
- При небольших n среди кодов БЧХ существуют хорошие (но, как правило, не лучшие из известных) коды.

Коды Рида–Соломона: общие сведения. Широко используемым частным случаем кодов БЧХ являются *коды Рида-Соломона* (Reed–Solomon codes), которые позволяют исправлять пакеты ошибок.

Пакет ошибок (error burst) — группа битов, в которой два последовательных ошибочных бита всегда разделены правильными битами, число которых менее установленного.

Коды Рида–Соломона:

- небинарные (в частности, очень распространены коды, работающие с *байтами*);
- часто используются в устройствах *цифровой записи звука*, в том числе на компакт-диски.

Пример 3.14 (негруппового блокового кода). Пусть по двоичному симметричному каналу с шумом требуется передавать $t = 4$ битовых сообщения S_1, S_2, S_3, S_4 длины 2.

Блоковый разделимый негрупповой код C, исправляющий 1 ошибку задаётся таблицей

S	C
00	00110
01	01101
10	10011
11	11000

«Зазор»: $2^5 - 4 \cdot (1 + 5) = 8$ слов; граница Плоткина достигается (проверьте)

Кодовое расстояние построенного кода C равно 3 и построен систематический $(5, 2, 3)$-код, содержащий исходное сообщение в первых двух позициях.

Помехоустойчивое кодирование применяется:

- для получения *надежной связи*, когда мощность принимаемого сигнала близка к мощности тепловых шумов;

- для *защиты против шума, намеренно организованного противником* в военных приложениях;
- при передаче данных *в вычислительных системах*;
- для защиты данных во внутренних и внешних ЗУ (ленты, диски...);
- при *синтезе отказоустойчивых дискретных устройств* (например, БИС, ПЛМ, ...);
- для получения *устойчивых признаков из биометрических характеристик* (сетчатка глаза, отпечатки пальцев, ...).

Для выбора минимальных многочленов при построении БЧХ-кодов *составлены специальные таблицы.*

Коррекции ошибок может требоваться не всегда: многие современные каналы связи обладают хорошими характеристиками, и принимающей стороне часто достаточно лишь проверить, успешно ли прошла передача и в случае наличия ошибок повторить её.

Также при синтезе сбоеустойчивых ИМС часто требуется лишь зафиксировать наличие ошибки, которая исчезает при повторном вычислении выходного вектора.

В этих случаях применяются коды специально предназначенные для *обнаружения ошибок*, а не для их исправления.

Вся математика делится на три раздела: небесная механика, гидродинамика и теория кодирования.

В. И. Арнольд

3.8 Задачи с решениями

Задача 3.1. *Для линейного кода, заданного своей проверочной матрицей*

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

требуется

1) *построить порождающую матрицу G кода для систематического кодирования, при котором биты исходного сообщения переходят в последние биты кодового слова;*

2) *найти такое кодирование для сообщений*

$$\boldsymbol{u}_1 = [1\ 1\ 0\ 1]^T,\ \boldsymbol{u}_2 = [1\ 0\ 0\ 1]^T.$$

Решение. Проверочная матрица H имеет размерность 3×7, следовательно код при длине $n = 7$ содержит $m = 3$ проверочных и $k = 7 - 3 = 4$ информационных бит.

Порождающая матрица кода G, обеспечивающая требуемое систематическое кодирование, должна иметь вид $\begin{bmatrix} P \\ I_4 \end{bmatrix}$.

Матрицу P можно получить, если привести проверочную матрицу H к виду $\begin{bmatrix} I_3 & P \end{bmatrix}$, преобразуя *строки*:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{(1)+(3)\mapsto(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Теперь можно построить требуемую порождающую матрицу и осуществить кодирование для $\boldsymbol{u}_1 = [1101]^T$, $\boldsymbol{u}_2 = [1001]^T$:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] = G \times [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Очевидно был задан $(7, 4, 3)$-код Хэмминга, помещающий информационные биты в последние 4, а проверочные — в первые 3 позиции кода.

Задача 3.2. *Циклический $(9, 3)$-код задан своим порождающим полиномом*

$$g(x) = x^6 + x^3 + 1.$$

Требуется определить его кодовое расстояние d, а также осуществить систематическое кодирование полинома

$$u(x) = x^2 + x \leftrightarrow [0\ 1\ 1]^T.$$

Решение. Для определения кодового расстояния найдём все кодовые слова:

$$v(x) = g(x)(ax^2+bx+c) = (x^6+x^3+1)(ax^2+bx+c) = \\ = ax^8 + bx^7 + cx^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + ax^2 + bx + c, \\ a, b, c \in \mathbb{F}_2.$$

В векторном виде все кодовые слова представляются как

$$[\, c,\, b,\, a,\, c,\, b,\, a,\, c,\, b,\, a\,]. \qquad (\star)$$

Очевидно, что минимальный хэммингов вес ненулевого кодового слова равен 3 и, следовательно, $d = 3$.

Проводим систематическое кодирование сообщения $u(x)$:

$$u(x) \mapsto v(x) = x^6 u(x) + r(x),$$
$$x^6 u(x) = x^6(x^2 + x) = x^8 + x^7.$$

Находим остаток $\deg r(x)$ от деления $x^6 u(x)$ на $g(x)$:

$$\begin{array}{l|l} x^8 + x^7 & x^6 + x^3 + 1 \\ \cline{2-2} x^8 \quad + x^5 \quad + x^2 & x^2 + x \\ \cline{1-1} \quad x^7 + x^5 \quad + x^2 & \\ \quad x^7 \quad + x^4 \quad + x & \\ \cline{1-1} \quad x^5 + x^4 + x^2 + x & \end{array}$$

Т.о. $r(x) = x^5 + x^4 + x^2 + x$ и

$$v(x) = x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x \leftrightarrow [0\,1\,1\,0\,1\,1\,\underline{0\,1\,1}]^T.$$

Замечание. Очевидно задан тривиальный код утроения: кодовое слово есть трижды повторенное сообщение. Поэтому кодирование будет только систематическим и вид $v(x)$ сразу определён в $(\star)$.

Задача 3.3. *Рассмотрим код Хэмминга систематического кодирования с порождающим примитивным полиномом* $a(x) = x^3 + x + 1$.

Требуется декодировать полиномы

1. $w_1(x) = x^6 + x^2 + x$,
2. $w_2(x) = x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x$,
3. $w_3(x) = x^6 + x^3 + x^2 + x$.

Решение. Очевидно, имеем $(7, 4, 3)$-код Хэмминга, в котором сообщение есть коэффициенты перед степенями $3, \ldots, 6$ формальной переменной x кодового полинома.

Для декодирования необходимо вычислить синдром $s = w(\alpha)$ с учётом $\alpha^3 = \alpha + 1$, где α — генератор поля $\mathbb{F}_2[x]/(a(x))$.

Если $s = 0$, то считаем, что ошибок при передаче не произошло; иначе необходимо найти такое k, что $\alpha^k = s$ и перед восстановлением сообщения инвертировать k-й разряд $w(\alpha)$ (что, очевидно, имеет смысл при $k \in \{3, \ldots, 6\}$).

1. $\underline{w_1(x) = x^6 + x^2 + x} \leftrightarrow [0\ 1\ 1\ \underline{0\ 0\ 0\ 1}]$

$$s = w(\alpha) = \alpha^6 + \alpha^2 + \alpha = (\alpha^3)^2 + \alpha^2 + \alpha =$$
$$= (\alpha + 1)^2 + \alpha^2 + \alpha = \alpha^2 + 1 + \alpha^2 + \alpha = \alpha + 1 \neq 0.$$

Очевидно, $\alpha + 1 = \alpha^3$, т.е. $k = 3$, ошибка произошла в 3-м разряде и $\widehat{v}(x) = w(x) + e(x) = x^6 + x^3 + x^2 + x \leftrightarrow [0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1]$, $u(x) \leftrightarrow [1\ 0\ 0\ 1]$.

2. $\underline{w_2(x) = x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x} \leftrightarrow [0\ 1\ 1\ \underline{1\ 0\ 1\ 1}]$

$$s = w(\alpha) = \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha =$$

$$= (\alpha+1)^2 + (\alpha+1)\alpha^2 + \alpha + 1 + \alpha^2 + \alpha =$$
$$= \alpha^2+1+\alpha^3+\alpha^2+\alpha^2+1 = \alpha^3+\alpha^2 = \alpha^2+\alpha+1 \neq 0.$$

Очевидно, $\alpha^3+\alpha^2 = (\alpha+1)\alpha^2 = \alpha^5$, т.е. $k=5$, ошибка произошла в 5-м разряде и снова $u(x) \leftrightarrow [1\ 0\ 0\ 1]$.

3. $\underline{w_3(x) = x^6+x^3+x^2+x} \leftrightarrow [0\ 1\ 1\ \underline{1\ 0\ 0\ 1}]$.

Убеждаемся, что в этом случае $s=0$, т.е. ошибок не произошло и $u(x)=v(x) \leftrightarrow [1\ 0\ 0\ 1]$.

Замечание. Декодирование систематического кода Хэмминга можно провести делением принятого полинома на порождающий: остаток от деления есть синдром s:

$$w(x) = q(x)\cdot g(x) + r(x), \quad r(x) = s.$$

В нашем случае:

1. $x^6+x^2+x = (x^3+x+1)^2 + \underbrace{x+1}_{=s}$;
2. $x^6+x^5+x^3+x^2+x =$
$= (x^3+x^2+x+1)(x^3+x+1) + \underbrace{x^2+x+1}_{=s}$;
3. $x^6+x^3+x^2+x = (x^3+x)(x^3+x+1) + \underbrace{0}_{=s}$.

Задача 3.4. *Пусть α — примитивный элемент поля $F = \mathbb{F}_2[x]/\big(x^4+x+1\big)$. Для кода БЧХ с нулями α, α^2, α^3 и α^4 и принятого слова*

$$w(x) = x^{14}+x^{10}+x^5+x^4.$$

найти полином локаторов ошибок $\sigma(x)$.

Решение. Для удобства вычислений продублируем таблицу соответствий между степенным и полиномиальным представлением элементов данного поля, уже ранее использованную нами (см. с. 72).

α^1	α	(0010)
α^2	α^2	(0100)
α^3	α^3	(1000)
α^4	$\alpha+1$	(0011)
α^5	$\alpha^2+\alpha$	(0110)
α^6	$\alpha^3+\alpha^2$	(1100)
α^7	$\alpha^3+\alpha+1$	(1011)
α^8	α^2+1	(0101)
α^9	$\alpha^3+\alpha$	(1001)
α^{10}	$\alpha^2+\alpha+1$	(0111)
α^{11}	$\alpha^3+\alpha^2+\alpha$	(1110)
α^{12}	$\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1$	(1111)
α^{13}	$\alpha^3+\alpha^2+1$	(1101)
α^{14}	α^3+1	(1001)
α^{15}	1	(0001)

С помощью этой таблицы вычислим синдромы:

$$\begin{aligned}
s_1 &= w(\alpha) = \alpha^{14}+\alpha^{10}+\alpha^5+\alpha^4 = \\
&= (\alpha^3+1)+(\alpha^2+\alpha+1)+(\alpha^2+\alpha)+(\alpha+1) = \\
&= \alpha^3+\alpha+1 = \alpha^7, \\
s_2 &= w(\alpha^2) = \left(w(\alpha)\right)^2 = \alpha^{14}, \\
s_3 &= w(\alpha^3) = \alpha^{12}+1+1+\alpha^{12} = 0, \\
s_4 &= w(\alpha^4) = \left(w(\alpha^2)\right)^2 = \alpha^{28} = \alpha^{13}.
\end{aligned}$$

Синдромный полином —

$$s(x) = \alpha^{13}x^4+\alpha^{14}x^2+\alpha^7x+1.$$

Синдромов всего четыре, следовательно число возникших ошибок ν не более 2.

Полином локаторов ошибок $\sigma(x)$ удовлетворяет соотношению Безу

$$x^{2r+1}a(x) + s(x)\sigma(x) \;=\; \lambda(x), \quad \deg\lambda(x) \leqslant r.$$

Решаем с данное соотношение помощью расширенного алгоритма Евклида:

Шаг 0. $r_{-2}(x) \;=\; x^5,$ // *Инициализация*
$r_{-1}(x) \;=\; \alpha^{13}x^4 + \alpha^{14}x^2 + \alpha^7 x + 1,$
$\sigma_{-2}(x) \;=\; 0,$
$\sigma_{-1}(x) \;=\; 1.$

Шаг 1. $r_{-2}(x) \;=\; r_{-1}(x)q_0(x) + r_0(x),$
// *Делим* $r_{-2}(x)$ *на* $r_{-1}(x)$ *с остатком*
$q_0(x) \;=\; \alpha^2 x,$
$r_0(x) \;=\; \alpha x^3 + \alpha^9 x^2 + \alpha^2 x,$
$\sigma_0(x) \;=\; \sigma_{-2}(x) - \sigma_{-1}(x)q_0(x) \;=$
$\;=\; -q_0(x) \;=\; \alpha^2 x.$

Шаг 2. $r_{-1}(x) \;=\; r_0(x)q_1(x) + r_1(x),$
// *Делим* $r_{-1}(x)$ *на* $r_0(x)$ *с остатком*
$q_1(x) \;=\; \alpha^{12}x + \alpha^5,$
$r_1(x) \;=\; \alpha^{14}x^2 + 1, \quad \deg r_1(x) = 2 \leqslant r,$
$\sigma_1(x) \;=\; \sigma_{-1}(x) - \sigma_0(x)q_1(x) \;=$
$\;=\; 1 + \alpha^2 x(\alpha^{12}x + \alpha^5) \;=$
$\;=\; \underbrace{\alpha^{14}x^2 + \alpha^7 x + 1}_{\text{полином локаторов ошибок}} \;=\; \sigma(x).$

Задача 3.5. *Рассмотрим код БЧХ, нули которого опре-*

деляются степенями α, где α — примитивный элемент поля $\mathbb{F}_2[x]/\big(x^4+x+1\big)$.

Пусть для некоторого принятого слова $w(x)$ полином локаторов ошибок есть

$$\sigma(x) = \alpha^2 x^2 + \alpha^6 x + 1.$$

Требуется определить позиции ошибок в $w(x)$.

Решение. Найдём корни (их 2, полином квадратный) полинома локаторов ошибок полным перебором.

Для вычислений удобно пользоваться таблицей соответствий между степенным и полиномиальным представлением элементов поля, вычисленной в предыдущей задаче.

$$\begin{aligned}
\sigma(\alpha) &= \alpha^4 + \alpha^7 + 1 = \alpha^3,\\
\sigma(\alpha^2) &= \alpha^6 + \alpha^8 + 1 = \alpha^3,\\
\sigma(\alpha^3) &= \alpha^8 + \alpha^9 + 1 = \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha,\\
\sigma(\alpha^4) &= \alpha^{10} + \alpha^{10} + 1 = 1,\\
\sigma(\alpha^5) &= \alpha^{12} + \alpha^{11} + 1 = \mathbf{0},\\
\sigma(\alpha^6) &= \alpha^{14} + \alpha^{12} + 1 = \alpha^2 + \alpha + 1,\\
\sigma(\alpha^7) &= \alpha^{16} + \alpha^{13} + 1 = \alpha^3 + \alpha^2 + 1,\\
\sigma(\alpha^8) &= \alpha^{18} + \alpha^{14} + 1 = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Дальше можно не вычислять: оба корня $\sigma(x)$ найдены. Итак, данный полином локаторов ошибок имеет корни α^5 и α^8.

Определяем позиции ошибок:

$$-5 \equiv_{15} 10, \qquad -8 \equiv_{15} 7.$$

Задача 3.6. *Построить 31-разрядный БЧХ-код для исправления не менее $r = 3$ ошибок.*

Решение. Имеем $n = 31 = 2^5 - 1$, $q = 5$, $d_c - 1 = 2r = 6$.

Порождающий многочлен $g(x)$ конструируемого кода должен иметь корни α, α^2, α^3, α^4, α^5, α^6, где α — примитивный элемент поля $F = \mathbb{F}_2^5$.

При разбиении F^* на циклотомические классы всегда будет присутствовать пятиэлементный класс $\{\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^8, \alpha^{16}\}$.

Остальные рассматриваемые степени α будут входить в циклотомические классы

$$\{\alpha^3, \alpha^6, \dots\} \quad \text{и} \quad \{\alpha^5, \dots\}.$$

Нетрудно установить, что эти классы также будут пятиэлементными:

$$\{\alpha^3, \alpha^6, \alpha^{12}, \alpha^{24}, \alpha^{48} = \alpha^{17}\}, \quad (\text{т.к. } 34 \equiv_{31} 3);$$
$$\{\alpha^5, \alpha^{10}, \alpha^{20}, \alpha^{40} = \alpha^9, \alpha^{18}\}, \quad (\text{т.к. } 36 \equiv_{31} 5).$$

Ранее[14] были приведены неприводимые многочлены 5-й степени над $\mathbb{F}_2$: их шесть —

1) $x^5 + x^2 + 1$,
2) $x^5 + x^3 + 1$,
3) $x^5 + x^3 + x^2 + x + 1$,
4) $x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$,
5) $x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$,
6) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$.

Во многих монографиях[15] есть соответствующие таблицы. Все эти многочлены, как указано в таблицах, явля-

[14] см. с. 34

[15] Например, *Лидл Р., Нидеррайтер Г.* Конечные поля, Том 1, Таблица С.

ются примитивными (корень $\alpha = x$ — генератор мультипликативной группы соответствующего поля) и все они могут быть выбраны в качестве порождающего поле полинома $a(x)$.

Положим $a(x) = x^5+x^3+1$ (многочлен № 2) и тогда $g_\alpha(x) = a(x),\ \alpha^5 = \alpha^3+1,\ \alpha^{31} = 1$.

Определим, какие из остальных многочленов соответствуют циклотомическим классам для α^3 и α^5.

Имеем:

для многочлена № 3 —

$$(x^5+x^3+x^2+x+1)\big|_{x=\alpha^3} = \alpha^{15}+\alpha^9+\alpha^6+\alpha^3+1 =$$
$$= (\alpha^3+1)^3+\alpha^4(\alpha^3+1)+\alpha(\alpha^3+1)+\alpha^3+1 = \ldots = 0,$$

для многочлена № 5 —

$$(x^5+x^4+x^3+x+1)\big|_{x=\alpha^5} = \alpha^{25}+\alpha^{20}+\alpha^{15}+\alpha^5+1 =$$
$$= (\alpha^3+1)^5+(\alpha^3+1)^4+(\alpha^3+1)^3+\alpha^5+1 = \ldots = 0.$$

Таким образом,

$g_{\alpha^3}(x) = x^5+x^3+x^2+x+1,\ g_{\alpha^5}(x) = x^5+x^4+x^3+x+1$

и порождающий многочлен для $(31, 16, 7)$-кода БЧХ есть $g(x) = g_\alpha(x)\cdot g_{\alpha^3}(x)\cdot g_{\alpha^5}(x) =$

$$= x^{15}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^5+x^3+x^2+x+1,$$
$$\deg g(x) = m = 15,\ k = n-m = 16.$$

Задача 3.7. *Рассмотрим БЧХ-код, нули которого определяются степенями примитивного элемента α поля $F = \mathbb{F}_2[x]/\big(x^4+x+1\big)$.*

Пусть для некоторого принятого слова полином локаторов ошибок есть $\sigma(x) = \alpha^6 x + \alpha^{15}$. *Определить позиции ошибок в данном слове.*

Решение. Для вычислений в поле F нам понадобится таблица, уже построеная[16] в начале раздела *Существование и единственность поля* $GF(p^n)$ и в Задаче 3.4.

α^1	α
α^2	α^2
α^3	α^3
α^4	$\alpha + 1$
α^5	$\alpha^2 + \alpha$
α^6	$\alpha^3 + \alpha^2$
α^7	$\alpha^3 + \alpha + 1$
α^8	$\alpha^2 + 1$
α^9	$\alpha^3 + \alpha$
α^{10}	$\alpha^2 + \alpha + 1$
α^{11}	$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha$
α^{12}	$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$
α^{13}	$\alpha^3 + \alpha^2 + 1$
α^{14}	$\alpha^3 + 1$
α^{15}	1

Перебором найдём корни полинома ошибок

$$\sigma(x) = \alpha^6 x + \alpha^{15} = (\alpha^3 + \alpha^2)\, x + 1 :$$

$$\sigma(\alpha) = \alpha^4 + \alpha^3 + 1 = \alpha + 1 + \alpha^3 \neq 0;$$

$$\sigma(\alpha^2) = \alpha^5 + \alpha^4 + 1 = \alpha^2 + \alpha + \alpha + 1 + 1 = \alpha^2 \neq 0;$$

[16] см. с. 71 и 177

$$\cdots\cdots$$

$$\sigma(\alpha^9) = \alpha^{12} + \alpha^{11} + 1 =$$
$$= (\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) + (\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha) + 1 = \mathbf{0}.$$

Линейный полином $\sigma(x)$ имеет один корень — α^9, и поэтому позиция единственной ошибки есть $-9 \equiv_{15} 6$.

Глава 4

Теория перечисления Пойа

4.1 Действие группы на множестве

- Группа $\mathcal{G} = \langle G, \circ, e \rangle$, $|G| = n$.
- Множество T, $|T| = N > 0$.
  - $Bij(T)$ — множество всех биекций (перестановок) элементов T.
  - $Sym(T)$ — симметрическая группа множества T: $Sym(T) = \langle Bij(T), *, 1_T \rangle$.

Определение 4.1 (I). $\alpha \in \mathrm{Hom}\,(\mathcal{G}, Sym(T))$.

Действие α группы $\mathcal{G}$ на множестве T: символически — $\underset{\alpha}{\mathcal{G} : T}$.

Определение 4.2 (II). $\alpha = \langle \mathcal{G}, T, \circ, *, e, 1_T \rangle$, где

$G \times G \xrightarrow{\circ} G$ — групповая операция;

$G \times T \xrightarrow{\star} T$ — новая операция.

Аксиомы для операций:

- $e \star t = t$;
- $(g \circ h) \star t = h * (g \star t)$.

Запись операции $\star$: $g(t) = t'$.

Аксиомы: $e(t) = t$ и $(g \circ h)(t) = h(g(t))$.

Т.е. элементы g группы G порождают перестановки на T, обладающие вышеуказанными свойствами.

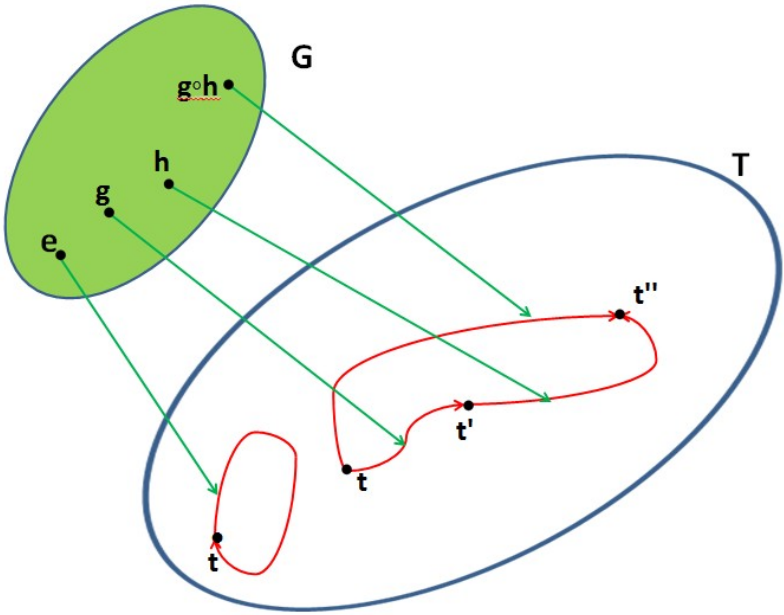


Рис. 4.1. К определению действия группы на множестве

Для данной перестановки g:

Введём отношение эквивалентности $\sim_g$ на T —

$$t \sim_g t' \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : g^k(t) = t'$$

Рефлексивность (R), *симметричность* (S) и *транзитивность* (T) отношения $\sim_g$ легко показывается.

Смежные классы эквивалентности $\sim_g$ называются *g-циклами*: элементы этих классов образуют циклы:

$t \xrightarrow{g} t' \xrightarrow{g} \ldots \xrightarrow{g} t$, *и у каждого элемента — по единственной входящей и исходящей стрелке.*

Обозначения:

- $\langle\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N \,\rangle = Type(g)$ — *тип перестановки* g — упорядоченная совокупность числа циклов длины $1, 2, \ldots, N$ соответственно;
- $C(g)$ — число всех g-циклов.

Понятно, что $\sum\limits_{k=1}^{N} \nu_k(g) = C(g)$ и $\sum\limits_{k=1}^{N} k \cdot \nu_k(g) = N$.

Пример 4.1. Пусть $T = \{\, 1, \ldots, 10 \,\}$ и

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 6 & 1 & 8 & 5 & 2 & 7 & 10 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= (1,9,3)(2,6)(4,8,10)(5)(7) = (1,9,3)(2,6)(4,8,10).$$

Тогда $Type(g) = \langle\, 2, 1, 2, 0, \ldots, 0 \,\rangle$ и

$$C(g) = 2+1+2 = 5, \quad \big|\, T \,\big| = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 10.$$

По всей группе $\mathcal{G}$:

Отношение эквивалентности $\sim_{\mathcal{G}}$ на T —

$$t \sim_{\mathcal{G}} t' \stackrel{\text{def}}{=} \exists\, g \in G : g(t) = t'.$$

Свойства (R), (S) и (T) отношения $\sim_{\mathcal{G}}$ очевидны.

- Классы этой эквивалентности называют *орбитами*; они образуют разбиение множества T.
- Класс эквивалентности, в которую попадает элемент t обозначаем $\mathrm{Orb}\,(t)$.
- Число получившихся орбит — $C(\mathcal{G})$.

Если $C(\mathcal{G}) = 1$ (любой элемент T может быть переведён в любой), то действие $\mathcal{G} \underset{\alpha}{:} T$ называют *транзитивным*.

Фиксатор перестановки и стабилизатор элемента множества. Рассмотрим равенство

$$g(t) = t.$$

При его выполнении можно полагать постоянным либо t, либо g.

1. Фиксируем g, т.е. находим все элементы множества T, которые перестановка g оставляет на месте — это *фиксатор перестановки* $g \in \mathcal{G}$:

$$\left\{ t \in T \mid g(t) = t \right\} = \mathrm{Fix}\,(g) \subseteq T.$$

2. Фиксируем t, т.е. находим все перестановки g, которые оставляют данный элемент неподвижным — это *стабилизатор элемента* $t \in T$:

$$\left\{ g \in G \mid g(t) = t \right\} = \mathrm{Stab}\,(t) \subseteq G.$$

Очевидно $\forall\, t \in T : e \in \mathrm{Stab}\,(t)$, т.е. $\mathrm{Stab}\,(t) \neq \varnothing$.
Более того, стабилизатор есть подгруппа группы $\mathcal{G}$:

Утверждение 4.1. $\mathrm{Stab}\,(t) \leqslant \mathcal{G}$.

Доказательство. Для $t \in T$ рассмотрим $g,\, h \in \mathrm{Stab}\,(t)$. Тогда $g(t) = h(t) = t$ и $h^{-1}(t) = t$. Следовательно

$$(g \circ h^{-1}) \star t = t \;\Rightarrow\; g \circ h^{-1} \in \mathrm{Stab}\,(t)\,.$$

□

Поэтому стабилизатор $\mathrm{Stab}\,(t)$ называют ещё *стационарной подгруппой*[1] *элемента* t.

$\mathrm{Stab}\,(t)$ будем также обозначать G_t.

[1] или *изотопической подгруппой*

Утверждение 4.2. *При действии группы G на множество T между множеством левых смежных классов G по стационарной подгруппе G_t элемента $t \in T$ и его орбитой $\mathrm{Orb}\,(t)$ существует взаимно однозначное соответствие.*

Доказательство. Левые смежные классы G по G_t обозначаем gG_t, $g \in G$, считая при этом, что на элементы T сначала действует некоторая перестановка из G_t, а затем — фиксированная перестановка g.

Но тогда любая перестановка $h \in gG_t$ одинаково подействует на $t \in T$: $h(t) = g(t) = t' \in \mathrm{Orb}\,(t)$ (т.к. все элементы G_t оставляют t на месте). С учётом того, что смежные классы либо совпадают, либо не пересекаются, утверждение доказано. □

Из этого утверждения вытекает важное

Следствие. *Длина орбиты $\mathrm{Orb}\,(t)$ равна индексу стационарной подгруппы $\mathrm{Stab}\,(t)$ в группе $\mathcal{G}$:*

$$\big|\,\mathrm{Orb}\,(t)\big| \;=\; \frac{\big|G\big|}{\big|\,\mathrm{Stab}\,(t)\big|} \;=\; [G : \mathrm{Stab}\,(t)]\,.$$

Доказательство. По теореме Лагранжа

$$H \leqslant G \;\Rightarrow\; \big|\,G\,\big| = \big|\,H\,\big| \cdot [\,G : H\,]$$

число смежных классов группы G по её подгруппе $H \leqslant G$ равно индексу $[\,G : H\,]$. □

4.2 Лемма Бёрнсайда

Лемма 4.1 («не-Бёрнсайда», или Коши-Фробениуса). *Если группа* $\mathcal{G}$ *действует на множестве* T, *то*

$$C(\mathcal{G}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\Big|\operatorname{Fix}(g)\Big| = \frac{1}{|G|}\sum_{t\in T}\Big|\operatorname{Stab}(t)\Big|;$$

при этом первое равенство называется леммой Бёрнсайда.

Доказательство. Пусть $|G| = n$, $|T| = N$ и действие $\mathcal{G} \underset{\alpha}{:} T$ задаётся $n \times N$ матрицей $A = \|g_i(t_j)\|$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,N}$.

Подсчитаем двумя различными способами мощность множества $M = \big\{(g,t) \in G \times T \mid g(t) = t\big\}$: по столбцам и по строкам матрицы A. Получим

$$\sum_{g\in G}\Big|\operatorname{Fix}(g)\Big| = \big|M\big| = \sum_{t\in T}\Big|\operatorname{Stab}(t)\Big|.$$

Если x и y принадлежат одному классу эквивалентности по $\sim_{\mathcal{G}}$, то $\operatorname{Orb}(x) = \operatorname{Orb}(y)$ и их стационарные подгруппы имеют одинаковую мощность:

$$\big|\operatorname{Stab}(x)\big| = \frac{|G|}{|\operatorname{Orb}(x)|} = \frac{|G|}{|\operatorname{Orb}(y)|} = \big|\operatorname{Stab}(y)\big|.$$

Выберем по представителю $t_1, \ldots, t_{C(\mathcal{G})}$ из всех $C(\mathcal{G})$ орбит. Тогда

$$\big|M\big| = \sum_{t\in T}\Big|\operatorname{Stab}(t)\Big| = \sum_{i=1}^{C(\mathcal{G})}\big|\operatorname{Stab}(t_i)\big|\cdot\big|\operatorname{Orb}(t_i)\big| =$$

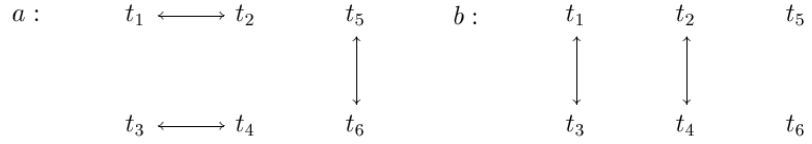
$$= \sum_{i=1}^{C(\mathcal{G})} \frac{|G|}{\left|\operatorname{Orb}(t_i)\right|} \cdot \left|\operatorname{Orb}(t_i)\right| = |G| \cdot C(\mathcal{G}).$$

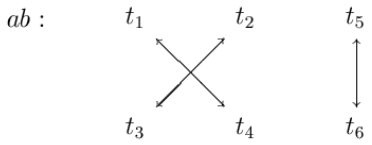
□

Пример 4.2. Действие четверной группы Клейна V_4 на множестве $T = \{t_1, \ldots, t_6\}$:

$\circ$	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

$g * t$	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
e	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
a	t_2	t_1	t_4	t_3	t_6	t_5
b	t_3	t_4	t_1	t_2	t_5	t_6
ab	t_4	t_3	t_2	t_1	t_6	t_5





$$Type(e) = \langle 6,0,0,0,0,0\rangle, \quad Type(a) = \langle 0,3,0,0,0,0\rangle,$$
$$Type(b) = \langle 2,2,0,0,0,0\rangle, \quad Type(ab) = \langle 0,3,0,0,0,0\rangle.$$
$$C(e) = 6,\ C(a) = C(ab) = 3,\ C(b) = 4.$$
$$\operatorname{Stab}(t_1) = \operatorname{Stab}(t_2) = \operatorname{Stab}(t_3) = \operatorname{Stab}(t_4) = e \leqslant V_4,$$
$$\operatorname{Stab}(t_5) = \operatorname{Stab}(t_6) = \langle e, b\rangle \leqslant V_4.$$
$$\operatorname{Fix}(a) = \operatorname{Fix}(ab) = \varnothing,\ \operatorname{Fix}(b) = \{t_5, t_6\},\ \operatorname{Fix}(e) = T.$$
$$\left|\operatorname{Orb}(t_1)\right| = \frac{4}{1} = 4, \quad \left|\operatorname{Orb}(t_5)\right| = \frac{4}{2} = 2.$$

$$\frac{1}{4}\sum_{g\in G}\bigl|\operatorname{Fix}(g)\bigr| = \frac{6+2}{4} = 2,$$
$$\frac{1}{4}\sum_{t\in T}\bigl|\operatorname{Stab}(t)\bigr| = \frac{4\cdot 1+2\cdot 2}{4} = 2.$$

Как применять лемму Бёрнсайда?

Для определения числа классов эквивалентности надо представить *отождествляемые элементы множества* T *как классы эквивалентности* действия $\mathcal{G} \underset{\alpha}{:} T$ некоторой группы $\mathcal{G}$ на T и по лемме Бёрнсайда определить $C(\mathcal{G})$.

Задача 4.1 (про слова). *Составляются слова длины* $l \geqslant 2$ *из алфавита* $A = \{a_1, \ldots, a_q\}$.

Слова считаются эквивалентными, если они получаются одно из другого перестановкой крайних букв.

Определить число S *неэквивалентных слов.*

Решение (прямым использованием леммы Бёрнсайда). Пусть T — множество слов длины l в алфавите A, $|T| = N = q^l$.

Надо представить эквивалентности как орбиты некоторого действия подходящей группы G на T.

Очевидно, двукратная перестановка не меняет ничего, и поэтому подходит $\mathcal{G} \cong \mathbb{Z}_2 = \{e, f\}$. Действие f: переставляет в слове крайние буквы.

Число неэквивалентных слов = число классов эквивалентности действия $\mathbb{Z}_2 \underset{\alpha}{:} T$ —

$$\bigl|\operatorname{Fix}(e)\bigr| = \bigl|T\bigr| = q^l, \qquad \bigl|\operatorname{Fix}(f)\bigr| = q^{l-2}\cdot q = q^{l-1}.$$

$$S = C(\mathbb{Z}_2) = \frac{1}{2}\sum_{g\in G}\bigl|\operatorname{Fix}(g)\bigr| = \frac{q^l + q^{l-1}}{2} = \frac{q^{l-1}(q+1)}{2}.$$

Для $l = 3$, $q = 2$ имеем $|T| = 8$ и $S = \frac{4\cdot 3}{2} = 6$. Пусть $A = \{a, b\}$, тогда слова и классы —

	aaa		(1)
aab		baa	(2)
	aba		(3)
abb		bba	(4)
	bab		(5)
	bbb		(6)

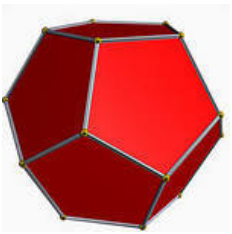
Платоновы тела — правильные 3-мерные многогранники. Рассматриваем их группы вращений (самосовмещений).

Платоновы тела	*Группа* вращения	*Порядок* группы
тетраэдр	T (тетраэдра)	$4 \cdot 3 = 12$
куб и октаэдр	O (октаэдра)	$8 \cdot 3 = 24$
икосаэдр и додекаэдр	Y (икосаэдра)	$12 \cdot 5 = 60$

Икосаэдр имеет 20 граней, 30 рёбер и 12 вершин.

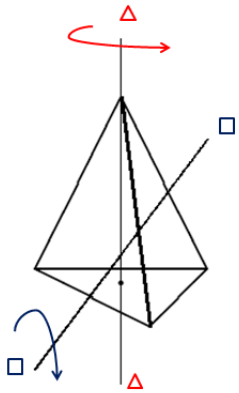
Октаэдр

Икосаэдр



Додекаэдр

T — группа вращения тетраэдра



$T = \langle t, f \rangle$, $t^3 = f^2 = e$, где:

t — вращение на $120°$ вокруг оси, проходящей через вершину и центр тетраэдра (△—△); таких осей 4.

f — вращение на $180°$ вокруг оси, проходящей через центры двух противоположных рёбер (□—□); таких осей 3.

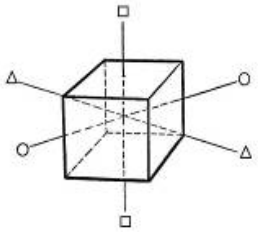
$|T| = (3-1)\cdot 4 + (2-1)\cdot 3 + 1 = 12.$

Действие T на грани (или вершины) тетраэдра: типы перестановок

$$\square: \ Type(t) = Type(t^2) = \langle 1,0,1,0\rangle;$$
$$\triangle: \ Type(f) = \langle 0,2,0,0\rangle.$$

Тетраэдр двойственен самому себе $\Rightarrow$ действие на грани $=$ действие на вершины.

O — группа вращения октаэдра ($=$ куба)



$O = \langle t, f, r\rangle, t^4 = f^2 = r^3 = e$, где:
t — вращение на $90°$ вокруг оси, проходящей через середины двух противоположных граней (□—□), таких осей 3;
f — вращение на $180°$ вокруг оси, проходящей через середины двух противоположных рёбер (○—○), таких осей 6;

r — вращение на 120° вокруг оси, проходящей через две противоположные вершины ($\triangle$—$\triangle$) таких осей 4.

$$|O| = 3 \cdot 3 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 1 = 24.$$

Пример 4.3 (Действие O на вершины куба: типы перестановок).

$$\begin{aligned}
\square: \ Type(t) &= Type(t^3) = \langle 0,0,0,2,0,\ldots\rangle;\\
Type(t^2) &= \langle\, 0,4,0,\ldots\,\rangle;\\
\circ: \ Type(f) &= \langle\, 0,4,0,\ldots\,\rangle;\\
\triangle: \ Type(r) &= Type(r^2) = \langle\, 2,0,2,0,\ldots\,\rangle.
\end{aligned}$$

Поскольку $|G| = |G_x| \cdot [G : G_x]$, то число элементов в группе вращения правильного многогранника есть $\big|E_0\big| \cdot \big|V\big|$, где $\big|E_0\big|$ — число рёбер, выходящих из одной вершины и $\big|V\big|$ — число вершин многогранника.

Цикловой индекс. Существует универсальный способ вычисления числа $C(\mathcal{G})$ — количества классов эквивалентности (= орбит).

Сопоставим каждой перестановке $g \in \mathcal{G}$ вес $w(g)$ по правилу:

$$Type(g) = \langle \nu_1, \ldots, \nu_N \rangle \ \Rightarrow \ w(g) = \underbrace{x_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot x_N^{\nu_N}}_{\text{моном}}.$$

Определение 4.3. Средний вес подстановок в группе называется *цикловым индексом* действия $\mathcal{G} \underset{\alpha}{:} T$:

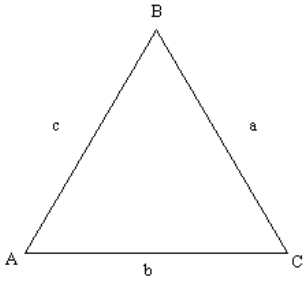
$$P(\mathcal{G} \underset{\alpha}{:} T, x_1, \ldots, x_N) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} w(g) =$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot x_N^{\nu_N}.$$

Будем также использовать обозначения $P_{\mathcal{G}}(x_1, \ldots, x_N)$ и $P_{\mathcal{G}},\ P(\mathcal{G})$.

Пример 4.4. Вычислим цикловой индекс действия группы всех преобразований правильного треугольника в себя (т.е. оставляющих его неподвижным), на его стороны.

Решение. T — стороны треугольника, $N = 3$.
$\mathcal{G} \cong S_3$ — все перестановки сторон, $n = 3! = 6$.



$\mathcal{G} \underset{\alpha}{:} T$ — самодействие группы S_3
Треугольник — самодвойственная фигура $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ действие на стороны $=$
$=$ действие на вершины

$$\mathcal{G} \underset{\alpha}{:} T = \langle t, f \rangle =$$

$$= \{ e, \underbrace{(abc)}_{t}, \underbrace{(acb)}_{t^2}, \underbrace{((a)(bc))}_{f}, \underbrace{((b)(ac))}_{tf}, \underbrace{((c)(ab))}_{t^2 f} \}.$$

$g \in S_3$	$Type(g)$	$w(g)$	# мономов
$e = (a)(b)(c)$	$\langle 3, 0, 0 \rangle$	x_1^3	1
$t,\ t^2$	$\langle 0, 0, 1 \rangle$	x_3^1	2
$f,\ tf,\ t^2 f$	$\langle 1, 1, 0 \rangle$	$x_1^1 x_2^1$	3
Всего			6

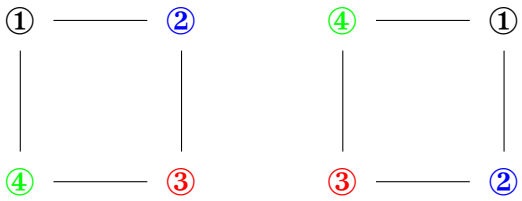
$$P(S_3) = \frac{1}{6}\left[\, x_1^3 + 2x_3^1 + 3x_1^1 x_2^1 \,\right],$$

— цикловой индекс *самодействия группы* S_3, или, что то же, *группы симметрии треугольника*.

Зачем нужен цикловой индекс?
Пусть заданы множество T, группа $\mathcal{G}$ и действие $\mathcal{G} \underset{\alpha}{:} T$.

1. Припишем каждому элементу T одно из r значений (неформально: покрасим в один из r цветов). Всего, очевидно, имеется r^N раскрасок.

2. Не будем различать раскраски, если при преобразовании $g : t \to t'$ t' раскрашен также как и t. Например, поворот на $90°$ — не даёт нового раскрашивания вершин квадрата:



Вопрос: Сколько существует *неэквивалентных раскрасок = классов эквивалентности*?
Ответ: Это значение вычисляется через цикловой индекс. Имеем —

1. Каждый класс эквивалентности — это g-цикл; их $C(g) = \nu_1 + \ldots + \nu_N$ штук.

2. Каждая перестановка $g \in \mathcal{G}$ с типом $\langle \nu_1, \ldots, \nu_N \rangle$ будет иметь $|\operatorname{Fix}(g)| = r^{C(g)}$ неподвижных точек: каждый класс эквивалентности это g-цикл, их $C(g)$ и

$$\big|\operatorname{Fix}(g)\big| \;=\; x_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot x_N^{\nu_N}\Big|_{x_1=\ldots=x_N=r} \;=\; r^{C(g)}.$$

Отсюда, по лемме Бёрсайда, число полученных классов эквивалентности = неэквивалентных раскрасок:

Теорема 4.1.

$$C(\underset{\alpha}{\mathcal{G}} : T) \;=\; P(\underset{\alpha}{\mathcal{G}} : T,\, x_1,\, \ldots,\, x_N)\Big|_{x_1=\ldots=x_N=r}.$$

Например, $P_{\mathcal{G}}(1, \ldots, 1) = 1$: если все элементы покрасить в один цвет, то таких раскрасок одна.

Задачи на применение циклового индекса

Задача 4.1 (про слова). *Определить число S неэквивалентных слов длины $l \geqslant 2$ в q-буквенном алфавите, если эквивалентными считаются слова, получающиеся друг из друга перестановкой крайних букв.*

Было решение: $S = \frac{q^l+q^{l-1}}{2}$.
Решение (новое, использующее цикловой индекс):
$\mathcal{G} = \{\, e,\, g \,\} \cong \mathbb{Z}_2$; $\quad T$: $\underbrace{\bigcirc\overbrace{\bigcirc\ldots\bigcirc}^{l-2}\bigcirc}_{l}$.

$g \in \mathcal{G}$	$Type(g)$	$w(g)$	# мономов
e	$\langle l, 0, \ldots, 0 \rangle$	x_1^l	1
g	$\langle l-2, 1, 0, \ldots, 0 \rangle$	$x_1^{l-2}x_2^1$	1

Цикловой индекс: $P(x_1, \ldots, x_l) = \dfrac{1}{2}\left[x_1^l + x_1^{l-2}x_2^1\right]$.

$$S = P(q, \ldots, q) = \frac{q^l + q^{l-1}}{2}.$$

Классическая комбинаторная задача об ожерельях

- *Ожерелье* — окружность, на которой на равных расстояниях по дуге (в вершинах правильного многоугольника) располагаются «бусины».
- *Задача об ожерельях*: сколько различных ожерелий можно составить из N бусин r цветов?
- Какие ожерелья считать неразличимыми?

  Варианты: если одно получается из другого *самосовмещением* —

  1) только *поворотом* в плоскости (бусины плоские, окрашены с одной стороны = *карусель*) — самодействие группы $\mathbb{Z}_N$;
  2) *поворотом* и *переворотом в пространстве* (бусины круглые) — самодействие *группы диэдра*[2] D_N.

[2] двойной пирамиды

Задача 4.2 (об ожерельях $N = 5$, $r = 3$; 1-й вариант). *Сколько разных ожерелий можно составить из* 5 *бусин* 3 *цветов?*

1. Ожерелья одинаковы, если одно получается из другого *поворотом*.

Решение. $\mathcal{G} \cong \mathbb{Z}_5 = \langle t \rangle$, $t^5 = e$, $n = 5$.

Элемент $\mathbb{Z}_5$	$Type(g)$	$w(g)$	# мономов
e	$\langle 5, 0, 0, 0, 0 \rangle$	x_1^5	1
t, t^2, t^3, t^4	$\langle 0, 0, 0, 0, 1 \rangle$	x_5	4

Цикловой индекс: $P(x_1, \ldots, x_5) = \dfrac{1}{5}\left[x_1^5 + 4x_5\right]$.

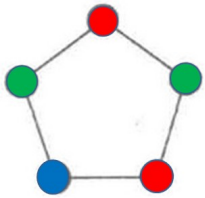
$$\#Col(3) \quad = \quad P(3, \ldots, 3) \quad = \quad \frac{3^5 + 4 \cdot 3}{5} \quad = \quad 51.$$

Задача 4.3 (Олимпиады «*Покори Воробьёвы горы – 2009*»). *Для* 50 *детей детского сада закуплены* 50 *одинаковых тарелок. По краю каждой тарелки равномерно расположено* 5 *белых кружочков. Воспитатели хотят перекрасить какие-либо из этих кружочков в другой цвет так, чтобы все тарелки стали различными.*

Какое наименьшее число дополнительных цветов потребуется им для этого?

Как должны были решать школьники.

Пусть требуется r цветов. Отбросим r вариантов раскраски в один цвет. Число остальных вариантов — *без учёта* возможности поворота тарелки: $r^5 - r$;



с учётом поворота: $\dfrac{r^5-r}{5}$ (каждый вариант повторяется 5 раз).

Итого: $\#Col(r) = \dfrac{r^5-r}{5} + r = \dfrac{r^5+4r}{5}$ и при 2 дополнительных цветах $\#Col(3) = 51$.

Задача 4.2 (об ожерельях $N = 5$, $r = 3$; 2-й вариант).

2. Ожерелья одинаковы, если одно получается из другого *поворотом и/или переворотом*.

Решение. $\mathcal{G}$ — *группа диэдра* $D_5 = \langle t, f \rangle$, $t^5 = f^2 = e$, $n = |D_5| = 10$.

Элемент D_5	$Type(g)$	$w(g)$	# мономов
e	$\langle 5, 0, 0, 0, 0 \rangle$	x_1^5	1
t, t^2, t^3, t^4	$\langle 0, 0, 0, 0, 1 \rangle$	x_5	4
f, tf, …, t^4f	$\langle 1, 2, 0, 0, 0 \rangle$	$x_1x_2^2$	5
Всего			10

Цикловой индекс: $P = \dfrac{1}{10}\left[x_1^5 + 4x_5 + 5x_1x_2^2\right]$.

$$\#Col(3) = P(x_1, \ldots, x_5)\Big|_{x_1 = \ldots = x_5 = 3} = \frac{3^5 + 4\cdot 3 + 5\cdot 3^3}{10} = 39.$$

Задача 4.4 (о раскраске сторон квадрата). *Сколько существует различно окрашенных квадратов, если их стороны раскрашивают в r цветов?*

Решение. Группа самосовмещения квадрата в пространстве — группа диэдра $D_4 = \langle t, f, s \rangle$, $|D_4| = 8$, которая порождается тремя образующими:

t : вращение на 90° вокруг центра в выбранном направлении;

f : симметрия относительно оси, проходящей через середины противоположных *сторон* — 2 оси;

s : симметрия относительно оси, проходящей через середины противоположных *вершин* — 2 оси.

При самодействии группы D_4 $(N = 4)$ её элементы будут иметь следующие веса:

e : единичная перестановка оставит все стороны на месте, т.е. имеются 4 цикла длины 1, вес x_1^4 (1 перестановка);

t, t^3 : стороны циклически переходят друг в друга по и против часовой стрелке, длина цикла 4, вес x_4^1 (2 перестановки);

t^2 : стороны переходят в противоположные, что даёт два цикла длины 2, вес — x_2^2 (1 перестановка);

f : две противоположные стороны на месте, остальные две меняются местами, т.е. имеются два единичных цикла и один длины 2, вес — $x_1^2 x_2^1$ (1 перестановка, 2 оси);

s : в двух парах смежных сторон элементы меняются местами, что даёт два цикла длины 2, вес — x_2^2 (1 перестановка, 2 оси).

Цикловой индекс самодействия D_4:

$$P_{D_4}(x_1, \ldots, x_4) = \frac{1}{8}\left[\, x_1^4 + 2x_4 + 3x_2^2 + 2x_1^2 x_2 \,\right].$$

Число раскрасок квадрата в r цветов:

$$P_{D_4}(r, \ldots, r) = \frac{1}{8}\left[\, r^4 + 2r + 3r^2 + 2r^3 \,\right].$$

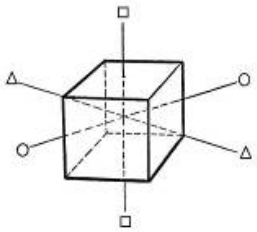
В частности, в два и три цвета:

$$\#Col(2) = \frac{2^4 + 4 \cdot 2^2 + 2^4}{2^3} = 2 + 2 + 2 = 6,$$
$$\#Col(3) = \frac{3^4 + 2 \cdot 3 + 3^4}{8} = 21.$$

Задача 4.5 (раскраска граней куба в два цвета). *Грани куба раскрашивают в 2 и 3 цвета.*

Сколько существует различно окрашенных кубов?

Решение. Напоминание: $\mathcal{G} = O = \langle\, t,\, f,\, r \,\rangle$, $|O| = 24$.



$O = \langle t, f, r\rangle, t^4 = f^2 = r^3 = e$, где:
t — вращение на $90°$ вокруг оси, проходящей через середины двух противоположных граней (□—□), таких осей 3;
f — вращение на $180°$ вокруг оси, проходящей через середины двух противоположных рёбер (○—○), таких осей 6;

r — вращение на 120° вокруг оси, проходящей через две противоположные вершины ($\triangle$—$\triangle$) таких осей 4.

Обозначим через F множество граней куба; $|F| = N = 6$. Выберем некоторую грань куба (квадрат) и обозначим её ①, а параллельную ей — ②. Перенумеруем последовательно вершины грани ① числами $1, \ldots, 4$, а вершины грани ② — числами $5, \ldots, 8$ так, что вершина с номером i смежна с вершиной с номером $i+4$, $i = 1, 2, 3, 4$.

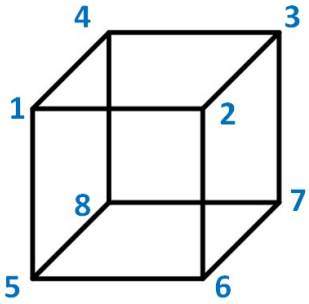
Перестановки далее указаны для случая, когда ось вращения

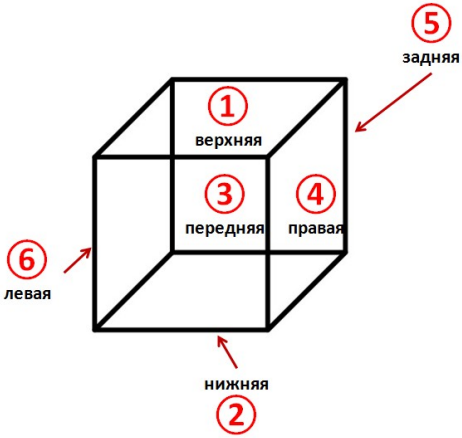
$\langle t \rangle$ проходит через середины граней ① и ②,

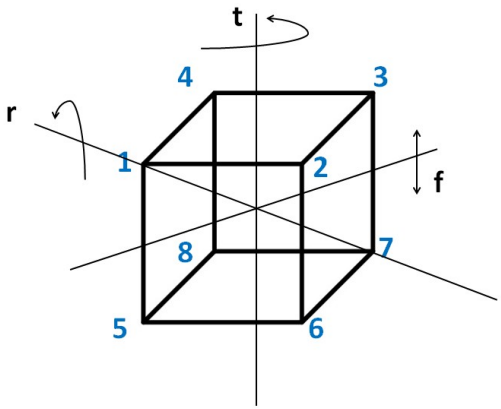
$\langle f \rangle$ проходит через середины рёбер (3-7) и (1-5),

$\langle s \rangle$ проходит через вершины (1) и (7),

а грани обозначены: (1-2-6-5) через ③, параллельная ей грань — ⑤, грань (2-3-7-6) — через ④, параллельная ей грань — ⑥.







$g \in O$	перестановка	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	(①)…(⑥)	$\langle 6,\, 0,\, \ldots \rangle$	x_1^6	1
t, t^3	(①)(②)(③④⑤⑥)	$\langle 2,\, 0,\, 0,\, 1,\, 0,\, \rangle$	$x_1^2 x_4$	6
t^2	(①)(②)(③⑤)(④⑥)	$\langle 2,\, 2,\, 0,\, \ldots \rangle$	$x_1^2 x_2^2$	3
f	(①②)(③⑥)(④⑤)	$\langle 0,\, 3,\, 0,\, \ldots \rangle$	x_2^3	6
r, r^2	(①③⑥)(②④⑤)	$\langle 0,\, 0,\, 2,\, 0,\, \ldots \rangle$	x_3^2	8
Всего				24

$$P(x_1,\, \ldots,\, x_6) \;=\; \frac{1}{24}\left[\, x_1^6 + 6x_1^2x_4 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_2^3 + 8x_3^2 \,\right].$$

$$\#Col(2) \;=\; \frac{1}{24}\left[2^6 + 12\cdot 2^3 + 3\cdot 2^4 + 8\cdot 2^2\right] \;=\; 10,$$
$$\#Col(3) \;=\; \frac{1}{24}\left[3^6 + 12\cdot 3^3 + 3\cdot 3^4 + 8\cdot 3^2\right] \;=\; 48.$$

Цикловой индекс действия группы октаэдра на множестве R рёбер куба ($|R| = N = 12$):

$g \in O$	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$\langle 12,\, 0,\, \ldots \rangle$	x_1^{12}	1
t, t^3	$\langle 0,\, 0,\, 0,\, 3,\, 0,\, 0 \rangle$	x_4^3	$3 \cdot 2 = 6$
t^2	$\langle 0,\, 6,\, 0,\, \ldots \rangle$	x_2^6	3
f	$\langle 2,\, 5,\, 0,\, \ldots \rangle$	$x_1^2 x_2^5$	6
r, r^2	$\langle 0,\, 0,\, 4,\, 0,\, \ldots \rangle$	x_3^4	$4 \cdot 2 = 8$

$$P(O \underset{\alpha}{:} R) \;=\; \frac{1}{24}\left[\, x_1^{12} + 6x_4^3 + 3x_2^6 + 6x_1^2 x_2^5 + 8x_3^4 \,\right].$$

Цикловой индекс действия группы октаэдра на множестве V вершин куба ($|V| = N = 8$):

$g \in O$	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$\langle 8,\, 0,\, \ldots \rangle$	x_1^8	1
t, t^3	$\langle 0,\, 0,\, 0,\, 2,\, 0,\, 0 \rangle$	x_4^2	$3 \cdot 2 = 6$
t^2	$\langle 0,\, 4,\, 0,\, \ldots \rangle$	x_2^4	3
f	$\langle 0,\, 4,\, 0,\, \ldots \rangle$	x_2^4	6
r, r^2	$\langle 2,\, 0,\, 2,\, 0,\, \ldots \rangle$	$x_1^2 x_3^2$	$4 \cdot 2 = 8$

$$P(O \underset{\alpha}{:} V) \;=\; \frac{1}{24}\left[\, x_1^8 + 6x_4^2 + 9x_2^4 + 8x_1^2 x_3^2 \,\right].$$

Цикловые индексы самодействия S_n, $\mathbb{Z}_n$, D_n и действия O на элементы куба (F — грани, R — рёбра, V — вершины).

$$P(S_n) \;=\; \sum_{\substack{(j_1,\ldots,j_n)\,\in\,\mathbb{N}_0^n \\ 1j_1+2j_2+\ldots+nj_n\,=\,n}} \frac{x_1^{j_1} x_2^{j_2} \ldots x_n^{j_n}}{(1^{j_1} j_1!)(2^{j_2} j_2!)\ldots(n^{j_n} j_n!)}\,,$$

$$P(\mathbb{Z}_n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)\,x_d^{n/d}, \quad \varphi - \text{функция Эйлера},$$

$$P(D_n) = \frac{1}{2}P(\mathbb{Z}_n) + \begin{cases} \frac{1}{2}\,x_1 x_2^{(n-1)/2}, & n \text{ нечётно}, \\ \frac{1}{4}\left[\,x_2^{n/2} + x_1^2 x_2^{n/2-1}\,\right], & n \text{ чётно}, \end{cases}$$

$$P(O \underset{\alpha}{:} V) = \frac{1}{24}\left[\,x_1^8 + 9x_2^4 + 6x_4^2 + 8x_1^2x_3^2\,\right],$$

$$P(O \underset{\alpha}{:} E) = \frac{1}{24}\left[\,x_1^{12} + 3x_2^6 + 8x_3^4 + 6x_1^2x_2^5 + 6x_4^3\,\right],$$

$$P(O \underset{\alpha}{:} F) = \frac{1}{24}\left[\,x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4 + 6x_2^3 + 8x_3^2\,\right].$$

4.3 Применение теоремы Пойа для решения комбинаторных задач

К множеству T, $|T| = N$, группе $\mathcal{G}$, $|G| = n$ и действию $\mathcal{G} \underset{\alpha}{:} T$ добавим множество $R = \{c_1, \ldots, c_r\}$, меток («красок»), и совокупность функций $F = R^T$ — приписывания меток (*раскрашиваний*) элементам T.

$\mathcal{G}$, действуя на T, действует и на R^T — операция

$$\circ : R^T \times G \overset{\circ}{=} R^T.$$

Придадим вес элементам R: $w(c_i) = y_i$, $i = \overline{1,r}$.

Теорема 4.2 (Редфилда-Пойа; 1927, 1937). *Цикловой индекс действия группы $\mathcal{G}$ на R^T есть*

$$P(\mathcal{G} \underset{\alpha}{:} R^T, y_1, \ldots, y_r) = \\ = P(\mathcal{G} \underset{\alpha}{:} T, x_1, \ldots, x_N)\Big|_{x_k = y_1^k + \ldots + y_r^k,\ k=\overline{1,N}}.$$

Следствие. *Если все веса выбраны одинаковыми* ($y_1 = \ldots = y_r = 1$), *то* $x_1 = \ldots = x_N = r$ *и* $W(F)$ *— число классов эквивалентности*

$$C(\mathcal{G} \underset{\alpha}{:} R^T) = C(\mathcal{G} \underset{\alpha}{:} T) = P(\mathcal{G} \underset{\alpha}{:} T, r, \ldots, r)$$

— лемма Бёрнсайда.

Что можно определить (подсчитать) с помощью:

леммы Бёрнсайда — *общее число* неэквивалентных разметок (раскрасок);

теорема Редфилда-Пойа — число разметок *данного типа*, т.е. содержащих данное количество элементов конкретного цвета.

Дьёрдь Пойа
(Pólya György, 1887–1985)
— венгерско-швейцарско-американский математик.
После окончания Будапештского университета работал в Высшей технической школе в Цюрихе, а с 1940 г. — в Стэнфордском университете (США).

Усложним задачу об ожерельях:

Задача 4.1 (об ожерельях $N = 5$, $r = 3$, продолжение, более сложный вариант). *Цвета — красный, синий, зелёный. Ожерелья одинаковы, если одно получается из другого поворотом и переворотом.*

Сколько имеется ожерелий, имеющих ровно 2 *красные бусины?*

Решение. Было: $\mathcal{G} = D_5$, цикловой индекс

$$P(x_1, \ldots, x_5) = \frac{1}{10}\left[x_1^5 + 4x_5 + 5x_1x_2^2\right],$$

всего ожерелий $P(3,\ldots,3) = 39$ (только поворот — 51).

$x_1 = y_1+y_2+y_3,\ \ x_2 = y_1^2+y_2^2+y_3^2,\ \ \ldots,\ \ x_5 = y_1^5+y_2^5+y_3^5.$

$$\left\{\begin{array}{ll} w(\text{красный}) & = y_1, \\ w(\text{синий}) & = y_2, \\ w(\text{зелёный}) & = y_3, \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y_1 = y, \\ y_2 = y_3 = 1, \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_1 & = y+2, \\ x_2 & = y^2+2, \\ \ldots & \\ x_5 & = y^5+2. \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} x_k \mapsto y^k + 2,\ k = \overline{1,5}; \\ P(y) = \sum\limits_{i=1}^{5} u_i y^i; \\ \boxed{u_2 = ?} \end{array}$$

$$P(y) = \frac{1}{10}\left[u_0 + u_1 y + u_2 y^2 + \ldots + u_5 y^5\right] =$$

$$= \frac{1}{10}\left[(y+2)^5 + 4(y^5+2) + 5(y+2)(y^2+2)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{10}\left[\ldots + C_5^2 2^3 y^2 + \ldots + 5(y+2)(y^4+4y^2+4)\right] =$$

$$= \frac{1}{10}\left[\ldots + (10\cdot 8 + 5\cdot 2\cdot 4)\, y^2 + \ldots\right].$$

$$u_2 = 8 + 4 = 12.$$

Задача 4.6 (о раскраске куба). *Вершины куба помечают красными и синим цветами. Сколько существует*

1) *разнопомеченных кубов (#Col(2));*

2) *кубов, у которых половина вершины красные* ($\#Col(4,4)$);

3) *кубов, у которых не более* 2 *красных вершин?*

Решение.

Цикловой индекс действия O на вершины куба —

$$P(O \underset{\alpha}{:} V;\, x_1, \dots x_8) \,=\, \frac{1}{24}\big[\, x_1^8 + 6x_4^2 + 9x_2^4 + 8x_1^2x_3^2 \,\big]\,.$$

$$1)\quad \#Col(2) \,=\, P(x_1,\dots,x_8)\Big|_{x_1=\dots=x_8=2} \,=$$

$$=\, \frac{2^8 + 6\cdot 2^2 + 9\cdot 2^4 + 8\cdot 4\cdot 4}{3\cdot 2^3} \,=\, \frac{32+3+18+16}{3} \,=\, 23.$$

2) $w(\text{красный}) = y,\ w(\text{синий}) = 1,$
$x_k = y^k + 1,\ k = \overline{1,8}$:

$$\#Col(4,4) \,=\, \frac{1}{24}\big[\,(y+1)^8 + 9\cdot(y^2+1)^4 + 6\cdot(y^4+1)^2 + \\ + 8\cdot(y+1)^2(y^3+1)^2\,\big] \,=$$

$$=\, \frac{1}{24}\big[\,\dots + C_8^4 y^4 + \dots + 9(\dots 4y^2 + 6y^4 + \dots) + \\ \dots + 6\cdot 2y^4 \dots + 8(\dots + 2y + y^2 + \dots)(\dots + 2y^3 + \dots)\,\big]\,.$$

$$u_4 \,=\, \frac{1}{24}\big[\,70 + 9\cdot 6 + 6\cdot 2 + 8\cdot 2\cdot 2\,\big] \,=\, \frac{168}{24} \,=\, 7.$$

3) $\#Col(\leqslant 2, *) \,=\, u_0 + u_1 + u_2$, очевидно $u_0 = u_1 = 1.$

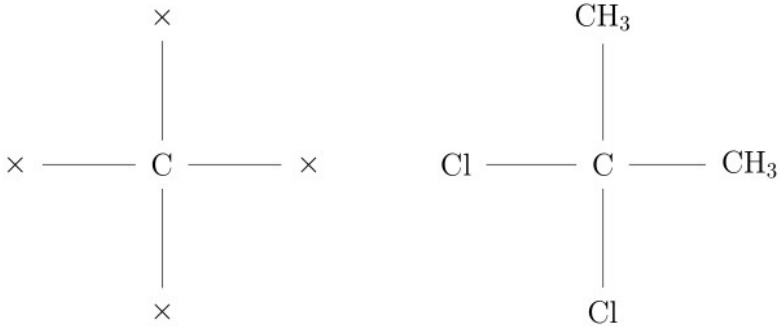
$$u_2 \,=\, \frac{1}{24}\big[\dots + 28y^2 + 9(\dots + 4y^2\dots) + 8(\dots + y^2 + \dots)\big] \,= \\ =\, \frac{28+36+8}{24} \,=\, 3.$$

$$\#Col(\leqslant 2, *) \,=\, 1+1+3 \,=\, 5.$$

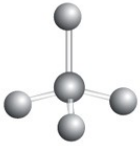
Задача 4.7 (о числе молекул). *Рассмотрим молекулы 4-валентного углерода* C*: где на на месте* $\times$ *могут находится* CH_3 *(метил),* C_2H_5 *(этил),* H *(водород) или* Cl *(хлор). Например — дихлорбутан.*

Найти

1) *общее число* M *всех молекул;*
2) *число молекул с* $H = 0, 1, 2, 3, 4$ *атомами водорода.*



Решение. Какая группа действует и на каком множестве?



T на множестве вершин тетраэдра —

Цикловой индекс —

$g \in T$	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$\langle\, 4,0,0,0 \,\rangle$	x_1^4	1
$t,\ t^2$	$\langle\, 1,0,1,0 \,\rangle$	x_1x_3	$4 \cdot 2 = 8$
f	$\langle\, 0,2,0,0 \,\rangle$	x_2^2	3

$$P(T \underset{\alpha}{:} V) = \frac{1}{12}\left[\, x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 \,\right]$$

1. Всего M молекул (4 радикала, $x_1 = \ldots = x_4 = 4$) —

$$M \;=\; P(x_1,\,\ldots,\,x_4) \;=\; \frac{4^4 + 8\cdot 4\cdot 4 + 3\cdot 4^2}{3\cdot 4} \;=\; 36.$$

2. Веса: $y_1 = \mathrm{H}$, $y_2 = y_3 = y_4 = 1$.
Подстановка в P: $x_k = \mathrm{H}^k + 3$, $k = \overline{1,4}$.

$$\begin{aligned} &P(H) = \\ &= \frac{1}{12}\Big[\,(\mathrm{H}+3)^4 + 8\,(\mathrm{H}+3)\left(\mathrm{H}^3+3\right) + 3\left(\mathrm{H}^2+3\right)^2\Big] = \\ &= \frac{1}{12}\big[\,\left(\mathrm{H}^4 + 4\cdot\mathrm{H}^3\cdot 3 + 6\cdot\mathrm{H}^2\cdot 9 + 4\cdot\mathrm{H}\cdot 27 + 81\right) + \\ &\quad +8\left(\mathrm{H}^4 + 3\mathrm{H}^3 + 3\mathrm{H} + 9\right) + 3\left(\mathrm{H}^4 + 6\mathrm{H}^2 + 9\right)\big] = \\ &\qquad = 1\cdot\mathrm{H}^4 + 3\cdot\mathrm{H}^3 + 6\cdot\mathrm{H}^2 + 11\cdot\mathrm{H} + 15. \end{aligned}$$

Итого имеется молекул с числом атома водорода: с 4-мя — 1 шт., с 3-мя — 3 шт., с 2-мя — 6 шт., с 1-м — 11 шт., без атомов водорода — 15 шт., всего — $1 + 3 + 6 + 11 + 15 = 36$.

Задача 4.8 (об ожерельях со стоимостью). *Стоимости каменей для ожерелий равны: красного — 1 ед., синего — 2 ед., зелёного — 3 ед. Сколько существует ожерелий из 15 таких камней, стоимость которых равна 30 ед.?*

Решение. Цикловой индекс самодействия группы диэдра (было ранее):

$$P(D_n) = \frac{1}{2n}\sum_{d|n}\varphi(d)\,x_d^{n/d} + \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 x_2^{(n-1)/2}, & n \text{ нечётно}, \\ \frac{1}{4}\left[x_2^{n/2} + x_1^2 x_2^{n/2-1}\right], & n \text{ чётно}, \end{cases}$$

Для $n = 15$: $D(15) = \{1, 3, 5, 15\}$

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(3) = 2, \quad \varphi(5) = 4, \quad \varphi(15) = 8.$$

$$P_{D_{15}} = \frac{1}{30}\left[x_1^{15} + 2x_3^5 + 4x_5^3 + 8x_{15}^1 + 15x_1x_2^7\right].$$

С учётом стоимости камней необходимая подстановка в цикловой индекс: красный — $y_1 = y$,
синий — $y_2 = y^2$,
зелёный — $y_3 = y^3$,
откуда $x_k = y^k + y^{2k} + y^{3k}$.

$$W = \frac{1}{30}\Big[\left(y + y^2 + y^3\right)^{15} + 2\left(y^3 + y^6 + y^9\right)^5 + 4\left(y^5 + y^{10} + y^{15}\right)^3 + 8\left(y^3 + y^{30} + y^{45}\right)^1 + 15\left(y + y^2 + y^3\right)\left(y^2 + y^4 + y^6\right)^7\Big] = \ldots + u_{30}y^{30} + \ldots.$$

$$u_{30} = \frac{1}{30}\left[\sum_{i=0}^{7} C_{15}^{i,15-i,i} + 2\sum_{i=0}^{2} C_5^{i,5-i,i} + 4\sum_{i=0}^{1} C_3^{i,3-i,i} + 8 + 15\sum_{i=0}^{3} C_7^{i,7-i,i}\right] = 59\,788.$$

4.4 Задачи с решениями

Задача 4.9. *Найдите порядок стабилизаторов произвольной (а) вершины, (б) ребра, (в) грани куба*

при действии группы октаэдра O на соответствующие элементы.
Какие перестановки в них содержатся?

Решение.

(а) Пусть O действует на вершины куба и v — некоторая вершина.
Тогда $\mathrm{Stab}\,(v) = \{\, e, s, s^2 \,\} \leqslant O$ — группа вращений на 120° (в выбранном направлении) вокруг диагонали куба, проходящей через данную вершину, $\mathrm{Stab}\,(v) \cong \mathbb{Z}_3$.

(б) Пусть O действует на рёбра куба и r — некоторое ребро.
Тогда $\mathrm{Stab}\,(r) = \{\, e, f \,\} \leqslant O$ — группа вращений на 180° вокруг оси, проходящей через середины рёбер (данного и ему противоположного) куба, $\mathrm{Stab}\,(r) \cong \mathbb{Z}_2$.

(в) Пусть O действует на грани куба и f — некоторая грань.
Тогда $\mathrm{Stab}\,(f) = \{\, e, t, t^2, t^3 \,\} \leqslant O$ — группа вращений на 90° (в выбранном направлении) вокруг вокруг оси, проходящей через середины граней (данной и ей противоположной) куба, $\mathrm{Stab}\,(f) \cong \mathbb{Z}_4$.

Задача 4.10. *Найти цикловой индекс для следующим образом определённого самодействия четверной группы Клейна*
$V_4 = \{\, e,\, a,\, b,\, ab \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 = e^2 = e,\, ab = ba \,\}$*:*

1.
$$e:\begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ e & a & b & ab \end{pmatrix}, \qquad a:\begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ a & e & ab & b \end{pmatrix},$$
$$b:\begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ b & ab & e & a \end{pmatrix}, \qquad ab:\begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ ab & b & a & e \end{pmatrix};$$

2.
$$e:\begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ e & a & b & ab \end{pmatrix}, \qquad a:\begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ a & e & b & ab \end{pmatrix},$$
$$b:\begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ e & a & ab & b \end{pmatrix}, \qquad ab:\begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ a & e & ab & b \end{pmatrix}.$$

Решение. Везде группа Клейна V_4 действует на свои же элементы.

1)

g	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$\langle \underline{4},\, 0,\, 0,\, 0 \rangle$	x_1^4	1
$a,\, b,\, ab$	$\langle 0,\, 2,\, 0,\, 0 \rangle$	x_2^2	3

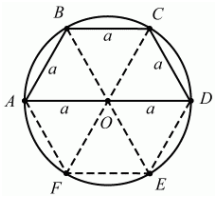
$$P_{V_4} = \frac{1}{4}\left[\, x_1^4 + 3x_2^2 \,\right].$$

2)

g	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$\langle \underline{4},\, 0,\, 0,\, 0 \rangle$	x_1^4	1
$a,\, b$	$\langle \underline{2},\, 1,\, 0,\, 0 \rangle$	$x_1^2 x_2$	2
ab	$\langle 0,\, 1,\, 0,\, 0 \rangle$	x_2	1

$$P'_{V_4} = \frac{1}{4}\left[\, x_1^4 + 2x_1^2 x_2 + x_2 \,\right].$$

Первая группа перестановок есть нормальная подгруппа S_4, а вторая — нет.



Задача 4.11. *Найти цикловой индекс транзитивного самодействия группы* $\mathbb{Z}_6$.

Решение. Обозначим последовательно вершины правильного шестиугольника буквами $A, \ldots, F$, $\mathbb{Z}_6 = \langle t \rangle$, t — поворот на $60°$.

$g \in \mathbb{Z}_6$	$Type(g)$	$w(g)$
$e = (A)\ldots(F)$	$\langle\, 6,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0 \,\rangle$	x_1^6
$g = (ABCDEF)$	$\langle\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 1 \,\rangle$	x_6
$g^2 = (ACE)(BDF)$	$\langle\, 0,\, 0,\, 2,\, 0,\, 0,\, 0 \,\rangle$	x_3^2
$g^3 = (AD)(BE)(CF)$	$\langle\, 0,\, 3,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0 \,\rangle$	x_2^3
$g^4 = (AEC)(BFD)$	$\langle\, 0,\, 0,\, 2,\, 0,\, 0,\, 0 \,\rangle$	x_3^2
$g^5 = (AFEDCB)$	$\langle\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 1 \,\rangle$	x_6

$$P_{\mathbb{Z}_6} = \frac{1}{6}\left[\, x_1^6 + x_2^3 + 2x_3^2 + 2x_6 \,\right] = \frac{1}{6}\sum_{d|6} \varphi(d)\, x_d^{6/d};$$

$$D(6) = \{\, 1, 2, 3, 6 \,\},\ \varphi(1) = \varphi(2) = 1,\ \varphi(3) = \varphi(6) = 2$$

Задача 4.12. *На стеклянных пластинах рисуют одинаковые прямоугольники (не квадраты) и раскрашивают их стороны в* r *цветов.*

Сколько можно нарисовать таких различных прямоугольников? Конкретно, при $r = 2$*?*

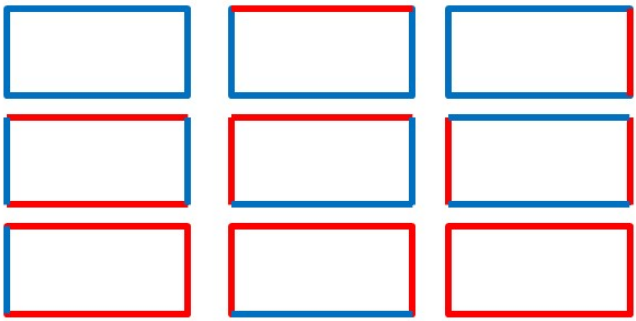
Решение. Найдём цикловой индекс $R \underset{\alpha}{:} S$ действия группы R самосовмещений прямоугольника в пространстве на его стороны. Группа $R = \langle\, t,\, f \,\rangle$ порождается образующими: t — вращение вокруг центра симметрии на $180°$, f — отражение вокруг оси, проходящей через середины противоположных сторон, 2 оси.

$g \in R$	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$\langle\, 4,\, 0,\, 0,\, 0 \,\rangle$	x_1^4	1
t	$\langle\, 0,\, 2,\, 0,\, 0 \,\rangle$	x_2^2	1
f	$\langle\, 2,\, 1,\, 0,\, 0 \,\rangle$	$x_1^2 x_2$	2

$$P(R \underset{\alpha}{:} S;\, x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) \;=\; \frac{1}{4}\left[\, x_1^4 + x_2^2 + 2x_1^2 x_2 \,\right].$$

Число 2-цветных прямоугольников —

$$\#Col(2) \;=\; P(R \underset{\alpha}{:} S; 2, \ldots, 2) \;=\; \frac{16+4+16}{4} \;=\; 9$$



Задача 4.13. *На стеклянных пластинах рисуют одинаковые прямоугольники (не квадраты) и раскрашивают их вершины в 3 цвета.*

Сколько можно нарисовать таких различных прямоугольников?

Решение. Найдём цикловой индекс $P(R \underset{\alpha}{:} V)$ действия группы R самосовмещений прямоугольника в пространстве на его вершины.

$g \in R$	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$\langle\, 4,\, 0,\, 0,\, 0 \,\rangle$	x_1^4	1
t	$\langle\, 0,\, 2,\, 0,\, 0 \,\rangle$	x_2^2	1
f	$\langle\, 0,\, 2,\, 0,\, 0 \,\rangle$	x_2^2	2

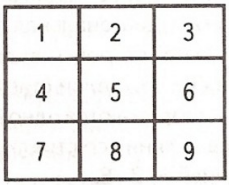
$$P(R \underset{\alpha}{:} V;\, x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) \;=\; \frac{1}{4}\left[\, x_1^4 + 3x_2^2 \,\right]$$

Число прямоугольников:

$$\#Col(3) \;=\; P(R \underset{\alpha}{:} V; 3, \ldots, 3) \;=\; \frac{81+27}{4} \;=\; 27$$

Задача 4.14. *Квадратная стеклянная пластина разделена на 9 равных квадратов, которые раскрашиваются в один из 2 цветов.*

Сколько существует разноокрашенных пластин?



Решение. На множество T из $N = 9$ квадратов стеклянной пластики действует группа $D_4 = \langle\, t,\, f,\, s \,\rangle$, $t^4 = f^2 = s^2 = e$, где

t — вращение на 90° вокруг центра квадрата;

f — симметрия относительное прямой, проходящей через середины противоположных сторон;

s — симметрия относительное прямой, проходящей через противоположные вершин.

Определяем цикловой индекс действия D_4 на T.

$g \in D_4$	перестановка	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$(1)\dots(9)$	$\langle\, 9,\, 0,\, \dots \,\rangle$	x_1^9	1
t, t^3	$(5)(1397)(2684)$	$\langle\, 1,\, 0,\, 0,\, 2,\, \dots \,\rangle$	$x_1 x_4^2$	2
t^2	$(5)(19)(37)(28)(79)$	$\langle\, 1,\, 4,\, 0,\, \dots \,\rangle$	$x_1 x_2^4$	1
$s, f, \dots$	$(2)(5)(8)(13)(48)(79)$	$\langle\, 3,\, 3,\, 0,\, \dots \,\rangle$	$x_1^3 x_2^3$	4
Всего				8

Цикловой индекс: $P = \dfrac{1}{8}\left[\, x_1^9 + 2x_1x_4^2 + x_1x_2^4 + 4x_1^3x_2^3 \,\right]$.

$$\#Col(2) = \frac{2^9 + 2\cdot 2^3 + 2^5 + 4\cdot 2^3\cdot 2^3}{2^3} = 102.$$

Задача 4.15 (о компостере). *Компостером назовём квадратную таблицу 4×4, в которой каждая клетка может быть либо пустой, либо содержать в центре символ* $\bullet$.

Сколько существует различных компостеров, если не различать те, которые могут быть получены один из другого самосовмещениями в пространстве?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Решение. Найдём цикловой индекс действия группы диэдра D_4 на 16 клеток компостера.
$D_4 = \langle t, f, s \rangle$, $t^4 = f^2 = s^2 = e$, $|D_4| = 8$,

$g \in D_4$	перестановка	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$(1)\dots(16)$	$\langle 16, 0, \dots \rangle$	x_1^4	1
$t,\ t^3$	$(1,4,16,13)\dots(6,7,11,10)$	$\langle 0, 0, 0, 4, \dots \rangle$	x_4^4	2
t^2	$(1,16)\dots(6,11)$	$\langle 0, 8, 0 \dots \rangle$	x_2^8	1
f	$(1,4)\dots(10,11)$	$\langle 0, 8, 0, \dots \rangle$	x_2^8	2
s	$(1)\dots(16)(2,5)\dots(12,15)$	$\langle 4, 6, 0, \dots \rangle$	$x_1^4 x_2^6$	2

Цикловой индекс действия группы D_4 на элементы компостера:

$$P(x_1, \dots, x_4) = \frac{1}{8}\left[\, x_1^{16} + 2x_4^4 + 3x_2^8 + 2x_1^4 x_2^6 \,\right].$$

Наличие/отсутствие в клетке символа • описывается их отображением в двухэлементное множество (раскраске в два цвета), поэтому число C различных компостеров есть

$$C = P(2, 2, \dots) = \frac{2^{16} + 2^5 + 3 \cdot 2^8 + 2^{11}}{2^3} =$$
$$= 8192 + 4 + 3 \cdot 32 + 256 = 8196 + 96 + 256 = 8548.$$

К аналогичной задаче сводится задача о числе фотошаблонов рисунков соединений для интегральных схем.

Задача 4.16. *Найти число различных вариантов раскраски граней куба в 2 и 3 цвета.*

Решение. Цикловой индекс:

$$P(O \underset{\alpha}{:} F) = \frac{1}{24}\left[x_1^6 + \underline{6x_1^2x_4} + 3x_1^2x_2^2 + \underline{6x_2^3} + 8x_3^2\right].$$

$$\#Col(2) = \frac{2^6 + 12\cdot 2^3 + 3\cdot 2^4 + 2^5}{3\cdot 2^3} = 10.$$

$$\#Col(3) = \frac{3^6 + 12\cdot 3^3 + \cdot 3^5 + 8\cdot 3^2}{3\cdot 8} = 57.$$

Задача 4.17. *Определить число различных раскрасок всех граней правильной 4-угольной пирамиды П в 3 цвета.*

Решение. Занумеруем последовательно боковые грани П числами $1, \ldots 4$, а основание — 5.
$\mathcal{G} \cong \mathbb{Z}_4 = \langle t \rangle$, t — вращение на $90°$.

$g \in \mathbb{Z}_4$	$Type(g)$	$w(g)$	#
$e = (1)(2)(3)(4)(5)$	$\langle 5, 0, 0, 0, 0 \rangle$	x_1^5	1
$t, t^3 = (1234)(5)$	$\langle 1, 0, 0, 1, 0 \rangle$	x_1x_4	2
$t^2 = (12)(34)(5)$	$\langle 1, 2, 0, 0, 0 \rangle$	$x_1x_2^2$	1

$$P(x_1, \ldots, x_5) = \frac{1}{4}\left[x_1^5 + 2x_1x_4 + x_1x_2^2\right],$$

$$P(3, \ldots, 3) = \frac{3^5 + 2\cdot 3^2 + 3^3}{4} = \frac{9\cdot 32}{4} = 72.$$

Задача 4.18. *Найти число раскрасок всех граней усечённой правильной 4-угольной пирамиды в 3 цвета.*

Решение. Пронумеруем грани П: боковые — с 1 по 4 по часовой стрелке, основания — 5 и 6. Группа, действующая на П — $\mathbb{Z}_4 = \langle t \rangle$, t — поворот на 90° по часовой стрелке.

$g \in \mathbb{Z}_4$	перестановка	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$(1)\dots(6)$	$\langle 6, 0, \dots \rangle$	x_1^6	1
t, t^3	$(1234)(5)(6)$	$\langle 2, 0, 0, 1, 0, 0 \rangle$	$x_1^2 x_4$	2
t^2	$(12)(34)(5)(6)$	$\langle 2, 2, 0, \dots \rangle$	$x_1^2 x_2^2$	1

Цикловой индекс $P = \dfrac{1}{4}\left[x_1^6 + 2x_1^2 x_4 + x_1^2 x_2^2\right]$.

$$\#Col(3) = \frac{3^6 + 2 \cdot 3^2 + 3^4}{4} = \frac{3^3(27 + 2 + 3)}{4} = 216.$$

Задача 4.19. *Найти число различных вариантов раскраски граней тетраэдра в 2 и 3 цвета.*

Решение. $P(T \underset{\alpha}{:} F, x_1, \dots, x_4) = \dfrac{1}{12}\left[x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2\right]$.

$$\#Col(2) = \frac{2^4 + 11 \cdot 2^2}{3 \cdot 2^2} = \frac{4 + 11}{3} = 5\,.$$

$$\#Col(3) = \frac{3^4 + 11 \cdot 3^2}{3 \cdot 4} = \frac{27 + 33}{4} = \frac{60}{4} = 15.$$

Задача 4.20. *Найти число различных вариантов раскраски рёбер тетраэдра в 2 и 3 цвета.*

Решение. Группа $T = \langle t, f \rangle$, $t^3 = f^2 = e$, $|T| = 12$, где

t — вращение на $120°$ вокруг оси, проходящей через вершину и центр симметрии, 4 оси;

f — вращение на $180°$ вокруг оси, проходящей через середины противоположных рёбер, 3 оси.

Обозначим через E множество рёбер тетраэдра — $|E| = 6$ — и обозначим их цифрами от 1 до 6, считая, что рёбра 1, 2 и 3 инцидентны одной вершине, а ось вращения, задаваемого элементом f, проходит через середины рёбер 1 и 6.
Найдём цикловой индекс.

$g \in T$	$Type(g)$	$w(g)$	#
$e = (1)\dots(6)$	$\langle 6, 0, \dots \rangle$	x_1^6	1
$t, t^2 = (123)(456)$	$\langle 0, 0, 2, 0, \dots \rangle$	x_3^2	8
$f = (1)(23)(45)(6)$	$\langle 2, 2, 0, \dots \rangle$	$x_1^2 x_2^2$	3

$$P(T \underset{\alpha}{:} E, x_1, \dots, x_6) = \frac{1}{12}\left[x_1^6 + 8x_3^2 + 3x_1^2x_2^2\right].$$

$$\#Col(2) = \frac{2^6 + 8 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^4}{3 \cdot 2^2} = \frac{15 + 9 + 12}{3} = 12,$$

$$\#Col(3) = \frac{3^6 + 8 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^4}{3 \cdot 4} = 87.$$

Задача 4.21. *Найти число различных вариантов раскраски рёбер куба в 2 цвета.*

Решение. Цикловой индекс:

$$P(O \underset{\alpha}{:} R) = \frac{1}{24}\left[\, x_1^{12} + 6x_4^3 + 3x_2^6 + 6x_1^2x_2^5 + 8x_3^4 \,\right].$$

$$\#Col(2) = \frac{2^{12} + 6\cdot 2^3 + 3\cdot 2^6 + 7\cdot 2^7}{3\cdot 2^3} = 218.$$

Задача 4.22. *Найти число различных вариантов раскраски вершин куба в* 2 *и* 3 *цвета.*

Решение. Цикловой индекс:

$$P(O \underset{\alpha}{:} V) = \frac{1}{24}\left[\, x_1^8 + 6x_4^2 + 9x_2^4 + 8x_1^2x_3^2 \,\right].$$

$$\#Col(2) = \frac{1}{3\cdot 2^3}\left[\, 2^8 + 6\cdot 2^2 + 9\cdot 2^4 + 2^7 \,\right] = 23,$$

$$\#Col(3) = \frac{1}{3\cdot 8}\left[\, 3^8 + 6\cdot 3^2 + 9\cdot 3^4 + 8\cdot 3^4 \,\right] = 333.$$

Задача 4.23. *Сколькими геометрически различными способами три абсолютно одинаковые мухи могут усесться в вершинах правильного семиугольника, нарисованного на листе бумаги?*

Решение. Множество T — вершины семиугольника, на которые действует группа $\mathbb{Z}_7 = \langle\, t \,\rangle,\ t^7 = e$.

$g \in \mathbb{Z}_7$	$Type(g)$	$w(g)$	$\#$
e	$\langle\, 7,\, 0,\, \ldots \,\rangle$	x_1^7	1
$t,\, t^2,\, \ldots,\, t^6$	$\langle\, 0,\, \ldots,\, 0,\, 1 \,\rangle$	x_7	6

Цикловой индекс самодействия $\mathbb{Z}_7$:

$$P_{\mathbb{Z}_7}(x_1, \ldots, x_7) = \frac{1}{7}\left[x_1^7 + 6x_7\right] = \frac{1}{7}\sum_{d|7}\varphi(d)\, x_d^{7/d}.$$

Число различных раскрасок в 2 цвета (муха есть/нет), при условии окраски ровно 3 вершин из 7 есть коэффициент u_3 при y^3 после подстановки
$x_1 \mapsto y+1$, $x_7 \mapsto y^7+1$ в $P_{\mathbb{Z}_7}$:

$$P(y) = \frac{1}{7}\left[(y+1)^7 + 6(y+1)\right] = \frac{1}{7}\left[\ldots + C_7^3 y^3 + \ldots\right].$$

$$u_3 = \frac{7!}{7\cdot 3!\cdot 4!} = \frac{5\cdot 6}{2\cdot 3} = 5.$$

Задача 4.24. *Боковые грани правильной 6-угольной пирамиды окрашиваются в красный, синий и зелёный цвета. Определить*

(а) *число различных 2- и 3-цветных пирамид;*

(б) *число пирамид с одной красной гранью;*

(в) *число пирамид, у которых не менее трёх красных граней.*

Решение. Имеем транзитивное самодействие $\mathbb{Z}_6$.

(а) *Общее число пирамид.*

$$P(\mathbb{Z}_6) = \frac{1}{6}\sum_{d|6}\varphi(d)\, x_d^{6/d} = \frac{1}{6}\left[x_1^6 + x_2^3 + 2x_3^2 + 2x_6\right].$$

$$\#Col(2) = \frac{1}{2\cdot 3}\left[2^6 + 2^3 + 2\cdot 2^2 + 2\cdot 2\right] = \frac{4\cdot 21}{3} = 14.$$

$$\#Col(3) = \frac{1}{6}\left[3^6 + 3^3 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3\right] = \frac{780}{6} = 130.$$

(б, в) *Число пирамид с* 1 *и* $3 \leqslant$ *красными гранями.* Полагаем $y_1 = y$, $y_2 = y_3 = 1$ (следим только за красными гранями), $x_1 = y + 2$, $x_2 = y^2 + 2$, $x_3 = y^3 + 2$.

$$P(y) = \frac{1}{6}\left[(y+2)^6 + (y^2+2)^3 + 2(y^3+2)^2 + \right.$$
$$\left. +2(y^6+2)\right] = \frac{1}{6}\left[u_0 + u_1 y + u_2 y^2 + \ldots + u_6 y^6\right] =$$
$$= \frac{1}{6}\left[\left(2^6 + 2^3 + 2^3 + 4\right) + 6\cdot 2^5\, y + \right.$$
$$\left. + \left(16\cdot 15 + 2\cdot 3\cdot 2^2\right) y^2 + \ldots\right].$$

$u_0 = 84/6 = 14$, $u_1 = 2^5 = 32$, $u_2 = (240{+}24)/6 = 44$.

Число пирамид с:

(б) одной красной гранью — $u_1 = 32$,

(в) не менее, чем 3 красными гранями — $\#Col(3) - (u_0 + u_1 + u_2) = 130 - (14 + 32 + 44) = 130 - 90 = 40$.

Задача 4.25. *Имеются плоские бусины, окрашенные с одной стороны в красный, синий и зелёный цвета. Из них составляют ожерелья, содержащие по* 8 *в равноотстоящих точках окружности. Определить*

а) *число различных* 3*-цветных ожерелий;*

б) *число ожерелий, у которых не менее трёх красных бусин?*

Решение. Здесь везде — транзитивное самодействие циклической группы $\mathbb{Z}_8$.

$$D(8)=\{1,\,2,\,4,\,8\},\ \varphi(1)=\varphi(2)=1,\ \varphi(4)=2,\ \varphi(8)=4,$$
$$P(\mathbb{Z}_8)\ =\ \frac{1}{8}\sum_{d|8}\varphi(d)\,x_d^{8/d}\ =\ \frac{1}{8}\left[\,x_1^8+x_2^4+2x_4^2+4x_8\,\right].$$

а) *Общее число ожерелий*:

$$\#Col(3)\ =\ \frac{3^8+3^4+2\cdot 9+4\cdot 3}{8}\ =\ 834.$$

б) Подсчитаем *число X ожерелий, в которых число красных бусин не более* 3 (т.е. 0, 1 и 2) и вычтем полученное количество из 834.

Полагаем $y_1=y,\ y_2=y_3=1$ (следим только за бусинами красного цвета).

Найдём коэффициенты $u_0,\,u_1,\,u_2$ при y_0,y_1,y_2 в производящем многочлене W при подстановке $x_k=y^k+2,\ k=1,\ldots,8$.

$$P(\mathbb{Z}_8)\ =\ \frac{1}{8}\left[\,x_1^8+x_2^4+2x_4^2+4x_8\,\right]$$

$$W\ =\ \frac{1}{8}\left[\,(y+2)^8+(y^2+2)^4+2(y^4+2)^2+4(y^8+2)\,\right]\ =$$
$$=\ u_0+u_1y+u_2y^2+\ldots+u_8y^8\ =$$
$$=\ \frac{1}{2^3}\left[\,(2^8+2^4+2\cdot 2^2+8)+8\cdot 2^7y+\right.$$
$$\left.+(C_8^2\cdot 2^6+4\cdot 2^3)\,y^2+\ldots\,\right].$$
$$u_0\ =\ 2^5+2+1+1\ =\ 36,\qquad u_1\ =\ 128,$$
$$u_2\ =\ 28\cdot 8+4\ =\ 224+4\ =\ 228.$$

Отсюда

$$\#Col(3\leqslant)\ =\ 834-(36+128+228)\ =\ 834-392\ =\ 442.$$

Задача 4.26. *Грани куба раскрашивают в два цвета — красный и синий. Сколько существует кубов*

1) *различно окрашенных?*
2) *у которых не менее 4 граней красные (#Col(⩾ 4))?*

Решение. Цикловой индекс:

$$P(O \underset{\alpha}{:} F) = \frac{1}{3\cdot 2^3}\left[x_1^6 + \underline{6x_1^2x_4} + 3x_1^2x_2^2 + \underline{6x_2^3} + 8x_3^2\right].$$

$$1)\ \#Col(2) = \frac{2^6 + 12\cdot 2^3 + 3\cdot 2^4 + 2^5}{3\cdot 2^3} = \frac{30}{3} = 10.$$

2) Полагаем
$w(1) = y,\ w(2) = 1,\ x_k = y^k + 1,\ k = \overline{1,6}.$

$$W = \frac{1}{24}\left[(y+1)^6 + 6(y+1)^2(y^4+1) + \right.$$
$$\left. + 3(y+1)^2(y^2+1)^2 + 6(y^2+1)^3 + 8(y^3+1)^2\right].$$

$\#Col(\geqslant 4) = u_4 + u_5 + u_6$ — число кубов с 4, 5 и 6 красными гранями соответственно. Очевидно $u_5 = u_6 = 1$.

Раскрывая W, находим:

$$W = \frac{1}{24}\left[\ldots + C_6^4 y^4 + \ldots + 6(y^2+2y+1)(\underline{y^4}+1) + \right.$$
$$+3(\underline{y^2}+2y+1)(\underline{y^4}+2\underline{y^2}+1) +$$
$$\left. +6(y^6+3\underline{y^4}+3y^2+1) + 8(y^6+2y^3+1)\right].$$

$$u_4 = \frac{15+6+9+18}{3\cdot 8} = \frac{5+2+3+6}{8} = \frac{16}{8} = 2.$$

Итого $\#Col(\geqslant 4) = 1+1+2 = 4$.

Задача 4.27. *Для раскраски сторон квадрата на стеклянной пластинке используют* 3 *цвета — красный, синий и зелёный. Сколько можно получить*

1) *разнораскрашенных квадратов?*
2) *квадратов с* 1 *красным ребром и не более* 2 *синих?*

Решение. Цикловой индекс:

$$P(D_4) = \frac{1}{8}\left[\, x_1^4 + 2x_4 + 3x_2^2 + 2x_1^2x_2 \,\right]$$

$$1)\ \#Col(3) = \frac{1}{8}\left[\, 3^4 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + 2\cdot 3^2\cdot 3 \,\right] = 21.$$

2) При раскраске в 3 цвета: $x_k = y_1^k + y_2^k + y_3^k$, $k = \overline{1,4}$. Следим только за красным (y_1) и синим (y_2) цветами: $x_k = y_1^k + y_2^k + 1$, $k = \overline{1,4}$. Находим $u_{10} + u_{11} + u_{12}$.

$$W = \frac{1}{8}\left[\, (y_1 + (y_2+1))^4 + 2(y_1^4 + y_2^4 + 1) + \right.$$
$$\left. + 3(y_1^2 + (y_2^2+1))^2 + 2(y_1 + (y_2+1))^2(y_1^2 + y_2^2 + 1) \,\right] \boxed{=}$$

нас интересуют только члены с y_1^1 (красное ребро — одно)

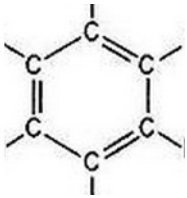
$$\frac{1}{8}\left[y_1^4 + 4y_1^3(y_2+1) + 6y_1^2(y_2+1)^2 + \underline{4y_1(y_2+1)^3} + \right.$$
$$+ (y_2+1) + \dots$$
$$\left. + 2(y_1^2 + \underline{2y_1(y_2+1)} + (y_2+1)^2)(y_1^2 + y_2^2 + 1) \right] =$$
$$= \frac{1}{8}\left[\, \dots + 4y_1(y_2+1)^3 + 4y_1(y_2+1)(y_2^2+1)) \,\right] =$$
$$= \frac{1}{8}\left[\, \dots + 4y_1(y_2^3 + \underline{3y_2^2 + 3y_2^1 + 1}) + \right.$$

$$+4y_1(y_2^3 + \underline{y_2 + y_2^2 + 1})\Big] \boxed{=}$$

нас интересуют только члены с y_2^0, y_2^1 и y_2^2 при y_1 (синих рёбер — 0, 1, 2)

$$\boxed{=} \frac{1}{8}\,[4 \cdot 7 + 4 \cdot 3] = \frac{4 \cdot 10}{8} = 5.$$

Задача 4.28. *Присоединяя к свободным связям углерода бензольного кольца атомы водорода* H *или метил* CH_3, *можно получить молекулы разных веществ (ксилол, бензол и др.).*



1) *Сколько химически разных молекул можно получить таким путём?*

2) *Сколько из них молекул с присоединёнными* $0, \ldots, 6$ *атомами водорода?*

Решение. Самодействие группы диэдра D_6.
1) Имеем $D_6 = \langle t, f, s \rangle$, $t^4 = f^2 = s^2 = e$, $|D_6| = 12$ — группа диэдра порядка 6, где

t — вращение на $60°$ вокруг центра квадрата;

f — симметрия относительное прямой, проходящей через середины противоположных сторон (3 оси);

s — симметрия относительное прямой, проходящей через противоположные вершин (3 оси).

Пронумеруем последовательно вершины правильного 6-угольника $1, \ldots, 6$.

Перестановки ниже указаны для случая, когда ось f проходит через середины сторон (2-3) и (5-6), а ось s — через вершины 1 и 4.

$g \in D_6$	перестановка	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$(1)\ldots(6)$	$\langle\, 6,\, 0,\, \ldots\, 0 \,\rangle$	x_1^6	1
t, t^5	(123456)	$\langle\, 0,\, \ldots,\, 0,\, 1 \,\rangle$	x_6^1	2
t^2, t^4	$(135)(246)$	$\langle\, 0,\, 0,\, 2, \ldots\, 0 \,\rangle$	x_3^2	2
t^3	$(14)(25)(36)$	$\langle\, 0,\, 3,\, 0, \ldots\, 0 \,\rangle$	x_2^3	1
f	$(14)(23)(56)$	$\langle\, 0,\, 3,\, 0,\, \ldots\, 0 \,\rangle$	x_3^2	3
s	$(1)(4)(26)(35)$	$\langle\, 2,\, 2,\, 0,\, \ldots \,\rangle$	$x_1^2x_2^2$	3
Всего				12

$$P(D_6) \;=\; \frac{1}{12}\left[\, x_1^6 + 2x_6 + 2x_3^2 + 4x_2^3 + 3x_1^2x_2^2 \,\right].$$

Всего молекул — подстановка $x_1 = \ldots = x_6 = 2$ (водород H и метил CH_3):

$$M \;=\; \frac{64 + 4 + 8 + 32 + 3 \cdot 16}{3 \cdot 4} \;=\; \frac{39}{3} \;=\; 13.$$

2) *Число молекул с* $0, \ldots, 6$ *атомами водорода* — обозначение $y_1 = \mathrm{H}$, $y_2 = 1$ и подстановка $x_k = \mathrm{H}^k + 1$, $k = \overline{1,6}$ в P.

$$W \;=\; \frac{1}{12}\left[\, (\mathrm{H}+1)^6 + 3(\mathrm{H}+1)^2(\mathrm{H}^2+1)^2 + 4(\mathrm{H}^2+1)^3 + \right.$$
$$\left. +2(\mathrm{H}^3+1)^2 + 2(\mathrm{H}^6+1) \,\right] \;=$$
$$= \mathrm{H}^6 + \mathrm{H}^5 + 3\cdot\mathrm{H}^4 + 3\cdot\mathrm{H}^3 + 3\cdot\mathrm{H}^2 + \mathrm{H} + 1\,.$$

Итого: молекул с числом атомов водорода (как радикала) — H = 0, 1, 5 и 6 — по 1 шт., H = 2, 3 и 4 — по 3 шт., всего — 13.

Задача 4.29. *Сколько существует ожерелий из 6 красных и 12 синих бусин?*

Решение. Цикловой индекс самодействия группы диэдра (было ранее)

$$P(D_n) = \frac{1}{2n}\sum_{d|n}\varphi(d)\,x_d^{n/d} + \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 x_2^{(n-1)/2}, & n \text{ нечётно}, \\ \frac{1}{4}\left[x_2^{n/2} + x_1^2 x_2^{n/2-1}\right], & n \text{ чётно}, \end{cases}$$

$n = 6 + 12 = 18,\ D(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$,

$$\begin{array}{lll} \varphi(1) = 1, & \varphi(3) = 2, & \varphi(9) = 6, \\ \varphi(2) = 1, & \varphi(6) = 2, & \varphi(18) = 6. \end{array}$$

По формуле: $P(D_{18}) =$

$$= \frac{1}{36}\left[x_1^{18} + x_2^9 + 2x_3^6 + 2x_6^3 + 6x_9^2 + 6x_{18}^1\right] + \\ + \frac{1}{4}\left[x_2^9 + x_1^2 x_2^8\right] =$$

$$= \frac{1}{36}\left[x_1^{18} + 10x_2^9 + 2x_3^6 + 2x_6^3 + 6x_9^2 + 6x_{18}^1 + 9x_1^2 x_2^8\right].$$

$x_k = y^k + 1, \quad W = \frac{1}{36}\left[(y+1)^{18} + \right.$

$+ 10(y^2+1)^9 + 2(y^3+1)^6 + 2(y^6+1)^3 +$

$$+ 6(y^9+1)^2 + 6(y^{18}+1) + 9(y+1)^2(y^8+1)^8\,\big]\;=$$
$$= \frac{1}{36}\big[\,\ldots + \big(\,C_{18}^6 + 10C_9^3 + 2C_3^1 + 2C_6^2 + 0 + 0 +$$
$$+\;9(C_8^2 + C_8^3)\,\big)\;y^6\,\big]\;=$$
$$= \frac{1}{36}\big[\,\ldots + (18654 + 840 + 6 + 30 + 756)\,y^6\,\big]\;=$$
$$= 561\,y^6 \qquad \textit{Ответ.}\ 561.$$

Задача 4.30. *Найти число раскрасок куба в красный и синий цвета с 5 красными рёбрами.*

Решение. Ранее был найден цикловой индекс действия группы O на рёбра куба:

$$P(O \underset{\alpha}{:} R) \;=\; \frac{1}{24}\big[\,x_1^{12} + 6x_4^3 + 3x_2^6 + 6x_1^2x_2^5 + 8x_3^4\,\big]\,.$$

$y_k = x^k + 1$,

$$W \;=\; \frac{1}{24}\big[\,(y+1)^{12} + 6(y^4+1)^3 + 3(y^2+1)^6 +$$
$$+6(y+1)^2(y^2+1)^5 + 8(y^3+1)^4\,\big]\;=$$
$$= \frac{1}{24}\big[\,\ldots + \big(C_{12}^5 + 6C_2^1C_5^2\big)\;y^5\,\big]\;=$$
$$= \frac{1}{24}\big[\,\ldots + (792 + 6\cdot 2\cdot 10)\;y^5\,\big]\;=\;\ldots + \frac{792+120}{24}y^5\;=$$
$$= \ldots + (33+5)\,y^5\;=\;\ldots + 38\,y^5.$$

Ответ: 38.

Глава 5

Частично упорядоченные множества

5.1 Основные понятия теории ч.у. множеств

Определение 5.1. Пару $\mathcal{P} = \langle P, \leqslant \rangle$, где P — непустое множество, а $\leqslant$ — рефлексивное, антисимметричное и транзитивное бинарное отношение на нём, называют *частично упорядоченным множеством* (сокращённо *ч.у. множеством*, англ. *poset*).

Рефлексивность (R): $x \leqslant x$;
Антисимметричность (AS): $(x \leqslant y) \,\&\, (y \leqslant x) \;\Rightarrow\; x = y$;
Транзитивность (T): $(x \leqslant y) \,\&\, (y \leqslant z) \;\Rightarrow\; x \leqslant z$.

Пример 5.1.

- $\langle \mathcal{P}(M), \subseteq \rangle$ — классический пример ч.у. множества (упорядочивание множеств *по включению*, $M \neq \varnothing$);
- $\langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle$ и $\langle \mathbb{N}, | \rangle$ — два упорядочивания одного множества.
- Пусть M — множество людей, $h(x)$ — рост, а $w(x)$ — вес человека x.
  Определим на отношение ρ на M:

$$x\rho y \;\Rightarrow\; (h(x) \leqslant h(y)) \,\&\, (w(x) \leqslant w(y))\,.$$

Является ли ρ отношением частичного порядка на M?

Нет. ρ — рефлексивно и транзитивно, но не является антисимметричным отношением: $x\rho y \,\&\, y\rho x \;\not\Rightarrow\; x = y$ (могут найтись два человека с одинаковыми ростом и весом).

Отношения со свойствами (R) и (T) называют *предпорядками.*

Понятное обозначение: $a < b \;\Leftrightarrow\; (a \leqslant b)\&(a \neq b)$

- если $(x \leqslant y)\vee(y \leqslant x)$, то x и y *сравнимы* $(x \sim y)$, иначе они *несравнимы* $(x \nsim y)$;
- *полный (линейный) порядок*, если $\forall\, x, y : x \sim y$;
- если в $\mathcal{P}$ нет ни одной пары различных сравнимых элементов, то это тривиально упорядоченное множество;
- x *непосредственно предшествует* y (y *непосредственно следует за* x), $x \lessdot y$, если $x \leqslant z \leqslant y \;\Rightarrow\; (z = x) \vee (z = y)$;
- $\{\, x \in P \mid a \leqslant x \leqslant b \,\}$ — *интервал* $[\,a, b\,]$;

  Ч. у. множество, все интервалы которого конечны — *локально конечное*;

- $v_1 < \ldots < v_n \stackrel{\text{def}}{=} [v_1, \ldots, v_n]$ — *цепь* $\mathbf{n}$, а совокупность попарно несравнимых элементов — *антицепь* в $\mathcal{P}$;

- цепь *максимальная* (*насыщенная*), если при добавлении к ней любого элемента она перестаёт быть цепью;
- $\geqslant$ — двойственный к $\leqslant$ порядок: $\leqslant^d \Leftrightarrow \geqslant$.

Рис. 5.1. Диаграммы 3-элементных ч.у. множеств

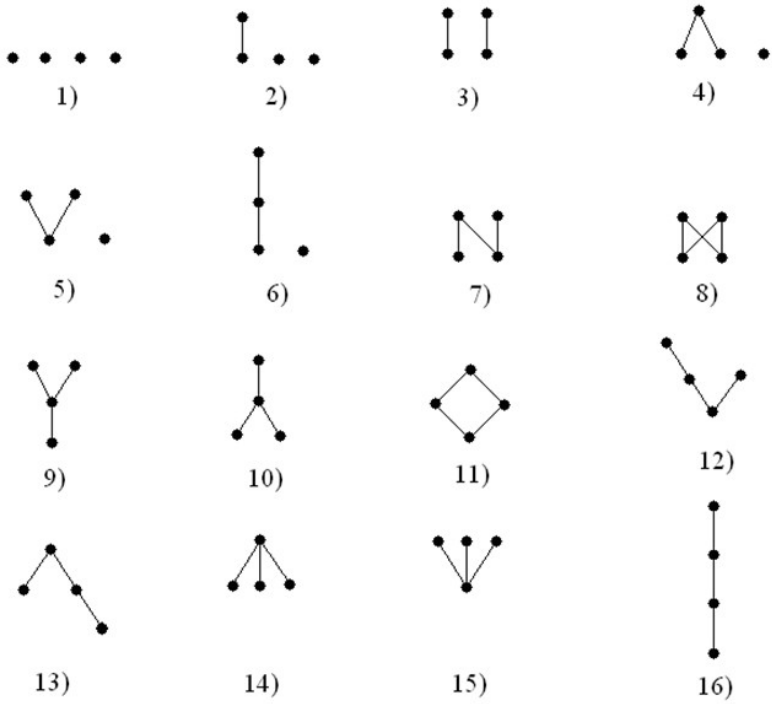


Рис. 5.2. Диаграммы всех 4-элементных ч.у. множеств

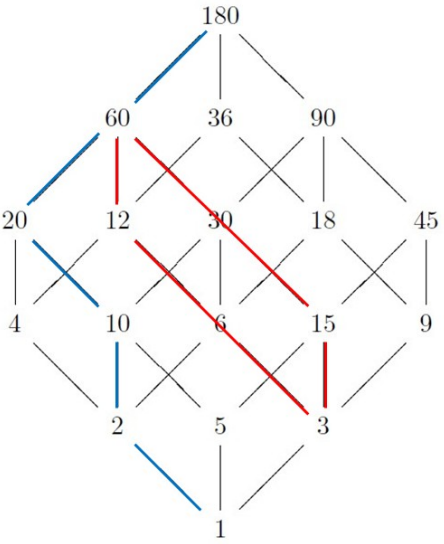


Рис. 5.3. Диаграмма $D(180)$ всех делителей числа $180 = 2^2 3^2 5$. Показаны одна из максимальных цепей и интервал $[3, 60]$

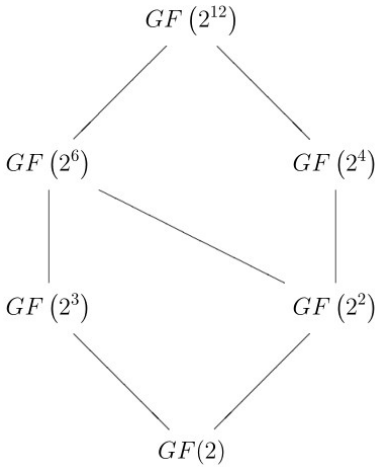


Рис. 5.4. Диаграмма Хассе всех подполей поля $GF\left(2^{18}\right)$, упорядоченных по включению.

Ч.у. множества: особые элементы

Определение 5.2. Элемент $u \in P$ ч.у. множества $\langle P, \leqslant \rangle$ называют:

- *максимальным*, если $u \leqslant x \Rightarrow u = x$,
- *минимальным*, если $u \geqslant x \Rightarrow u = x$,
- *наибольшим*, если $x \leqslant u$,
- *наименьшим*, если $x \geqslant u$

для любых $x \in P$.

Наибольший (1) и наименьший (0) — *граничные элементы*. В конечном ч.у. множестве имеется как минимум по одному максимальному и минимальному элементу.

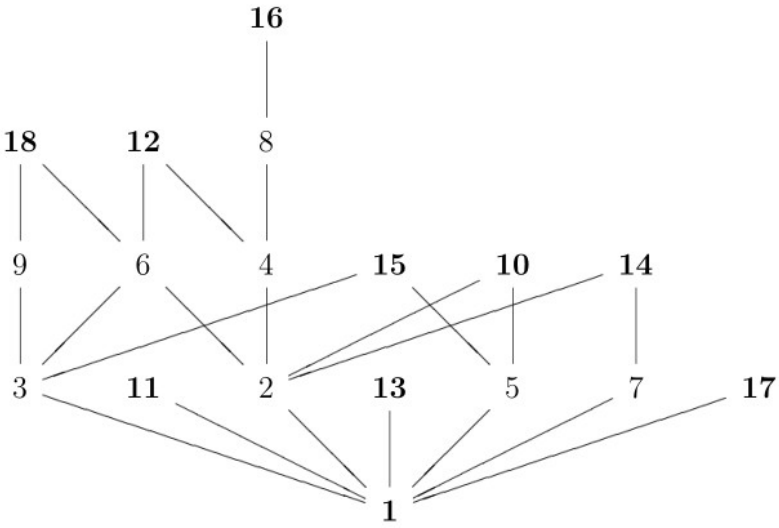


Рис. 5.5. Ч.у. множество $\langle \{1, \ldots, 18\}, | \rangle$. 1 — наименьший элемент, $11 \ldots 18$ — максимальные.

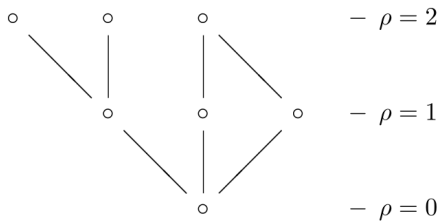
Ранжированные ч.у. множества.
Цепное условие Жордана-Дедекинда Все максимальные цепи между любыми двумя сравнимыми элементами элементами локально конечного ч.у. множества имеют одинаковую длину.

Если ч.у. множество удовлетворяет условию Жордана-Дедекинда и имеет наименьший элемент 0, то оно *ранжируемо*, т.е. на нём можно определить *функцию ранга* ρ:

1. $\rho(0) = 0$;
2. $a \lessdot b \;\Rightarrow\; \rho(b) = \rho(a) + 1$

и такое множество имеет *слои*.

Если множество ранжируемо, то любой его слой (но не только!) является антицепью.



Порядковые гомоморфизмы

Определение 5.3. Отображение $\varphi\colon P \to P'$ носителей ч.у. множеств называется соответственно

- *изотонным* (*монотонным*, *порядковым гомоморфизмом*), если $x \leqslant y \;\Rightarrow\; \varphi(x) \leqslant \varphi(y)$;
- *обратно изотонным*, если $\varphi(x) \leqslant \varphi(y) \;\Rightarrow\; x \leqslant y$;
- *антиизотонным*, если $x \leqslant y \;\Rightarrow\; \varphi(x) \geqslant \varphi(y)$.

Если φ изотонно, обратно изотонно и инъективно, то это *вложение* или *(порядковый) мономорфизм* ($P \overset{\varphi}{\hookrightarrow} P'$).

Сюръективный мономорфизм — *(порядковый) изоморфизм* ($P \cong P'$ или $P \overset{\varphi}{\cong} P'$).

Изоморфизм ч.у. множества в себя — *(порядковый) автоморфизм.*

Идеалы и фильтры ч.у. множеств

Определение 5.4. Подмножество J элементов ч.у. множества $\langle P, \leqslant \rangle$ называется его *(порядковым) идеалом*, если

$$(x \in J) \,\&\, (y \leqslant x) \;\Rightarrow\; y \in J.$$

Подмножество F элементов P называется его *(порядковым) фильтром*, если

$$(x \in F) \,\&\, (x \leqslant y) \;\Rightarrow\; y \in F.$$

$\varnothing$ и всё ч.у. множество P — *несобственные* порядковые идеалы.

Важное свойство: объединение и пересечение порядковых идеалов есть порядковый идеал.

Обозначение: $J(P)$ — множество всех порядковых идеалов ч.у. множества P.

Определение 5.5. Пусть $\langle P, \leqslant \rangle$ — ч.у. множество и $A \subseteq P$. Множества $A^{\triangle}$ и $A^{\triangledown}$

$$A^{\triangle} = \{x \in P \mid \underset{A}{\forall} a \; (a \leqslant x)\} \text{ и}$$
$$A^{\triangledown} = \{x \in P \mid \underset{A}{\forall} a \; (x \leqslant a)\}$$

называются верхним и нижним *конусами* множества A, а их элементы — верхними и нижними *гранями* множества A соответственно.

Для одноэлементного множества $A = \{a\}$ — $a^{\triangle}$ и $a^{\triangledown}$.

Понятно, что если $a \leqslant b$, то $a^{\triangle} \cap b^{\triangledown} = [\,a,\, b\,]$.
$x^{\triangledown} = \langle x \rangle = J(x)$ — идеал, а $x^{\triangle}$ — фильтр P;
такие идеалы и фильтры называют *главными*.

Пример 5.2.

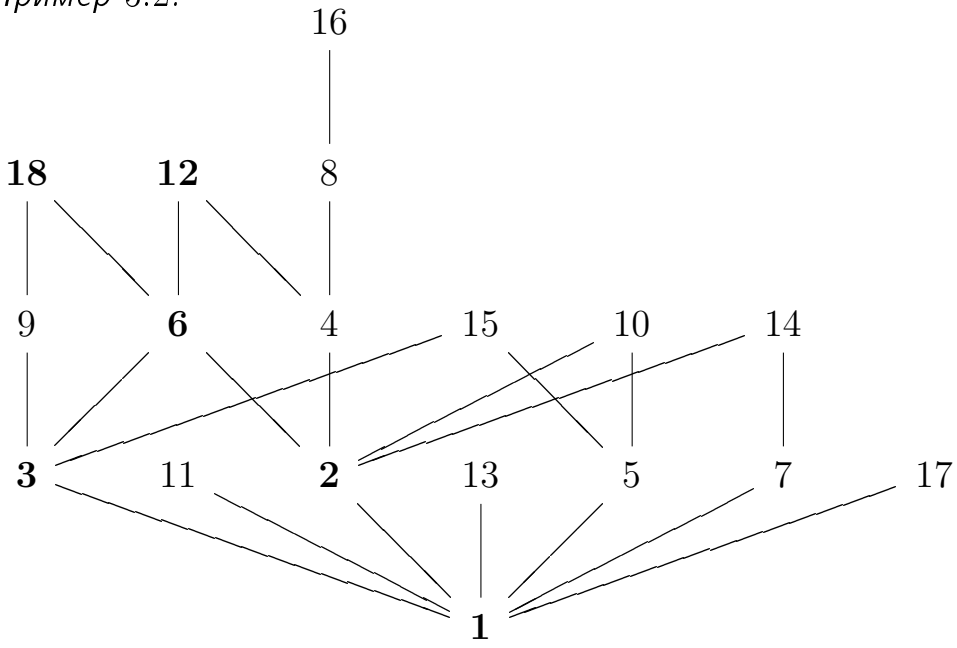


Рис. 5.6. Верхний и нижний конусы множества $\{\,2,\, 3\,\}$

Конечнопорождённый идеал:

$$\langle a_1, \ldots, a_k \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^{k} {a_i}^{\triangledown}, \quad a_i \nsim a_j,\ i \neq j.$$

Пример 5.3.

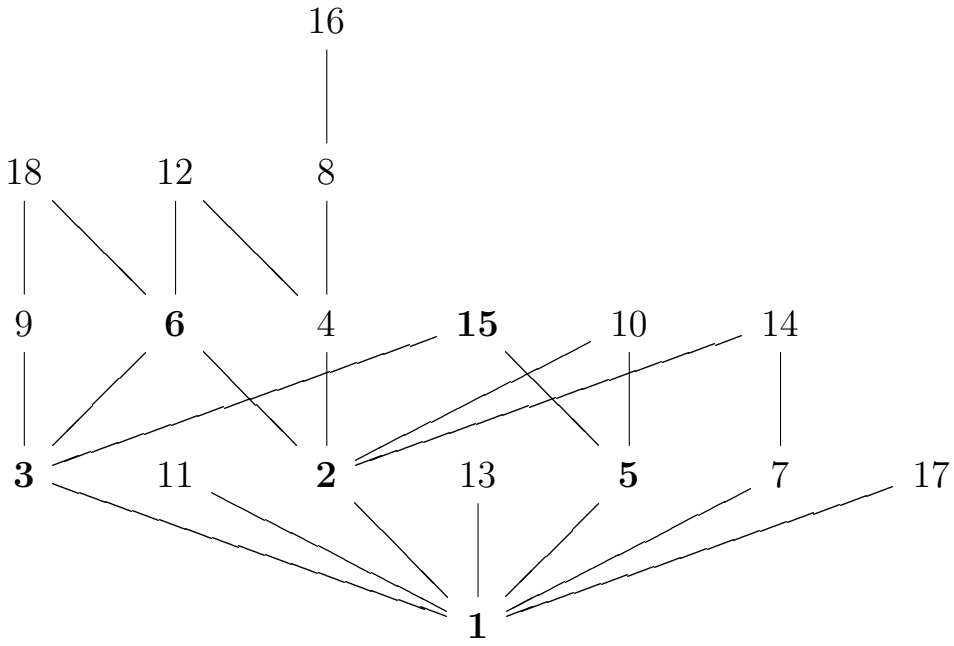


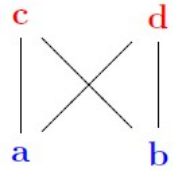
Рис. 5.7. Идеал $\langle 6, 15 \rangle$

Определение 5.6. Пусть $\langle P, \leqslant \rangle$ — ч.у. множество и $A \subseteq P$.

- Наименьший элемент в $A^{\triangle}$ называется *точной верхней гранью множества* A (символически $\sup A$).

- Наибольший элемент в $A^{\triangledown}$ называется *точной нижней гранью множества* A (символически $\inf A$).

Пример 5.4 ($\sup A$ и/или $\inf A$ могут не существовать).



$\{a,b\}^{\triangle} = \{c,d\}$, но множество $\{c,d\}$ не имеет инфимума $\Rightarrow$ $\sup\{a,b\}$ отсутствует. Аналогично, отсутствует $\inf\{c,d\}$.

5.2 Операции над ч.у. множествами

Пересечение

$$\langle P, \leqslant_1 \rangle \cap \langle P, \leqslant_2 \rangle = \langle P, \leqslant_1 \cap \leqslant_2 \rangle.$$

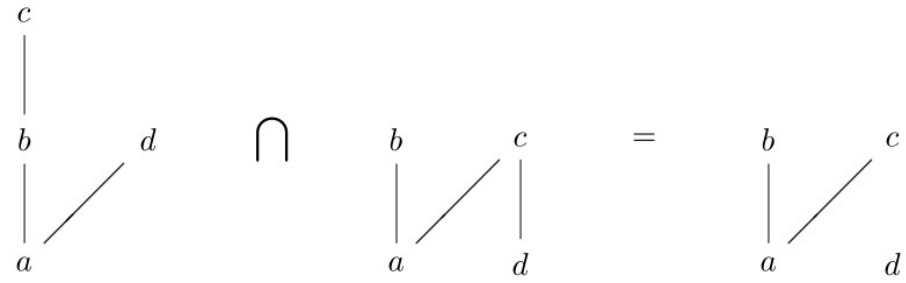


Рис. 5.8. Пересечение ч.у. множеств

Свойства ч.у. множеств могут не сохраняются при пересечении. Например, «быть цепью»: если P — цепь, тогда $P^{\sharp}$ — также цепь, а $P \cap P^{\sharp}$ — тривиально упорядоченное множество.

Прямая сумма. $\mathcal{P} = \langle P, \leqslant_P \rangle$ и $\mathcal{Q} = \langle Q, \leqslant_Q \rangle$ — два ч.у. множества, причём $P \cap Q = \varnothing$.

$$\mathcal{P} + \mathcal{Q} = \langle P \cup Q, \leqslant_P \vee \leqslant_Q \rangle.$$

Справедливы соотношения

$$P + Q \cong P + R \Rightarrow Q \cong R; \quad (P + Q)^\sharp \cong P^\sharp + R^\sharp.$$

$n\mathcal{P}$ — прямая сумма n экземпляров $\mathcal{P}$,
$n\mathbf{1}$ — n-элементная антицепь.

Диаграмма прямой суммы состоит из двух диаграмм соответствующих ч.у. множеств, рассматриваемых как единая диаграмма.
Ч.у. множество, не являющееся прямой суммой некоторых двух других ч.у. множеств, называется *связным*.

Прямое произведение. *Прямым* или *декартовым произведением* ч.у. множеств $\mathcal{P} = \langle P, \leqslant_P \rangle$ и $\mathcal{Q} = \langle Q, \leqslant_Q \rangle$ называется множество

$$\mathcal{P} \times \mathcal{Q} = \langle P \times Q, \leqslant \rangle,$$
$$\text{где } (p, q) \leqslant (p', q') \Leftrightarrow (p \leqslant_P p') \& (q \leqslant_Q q').$$

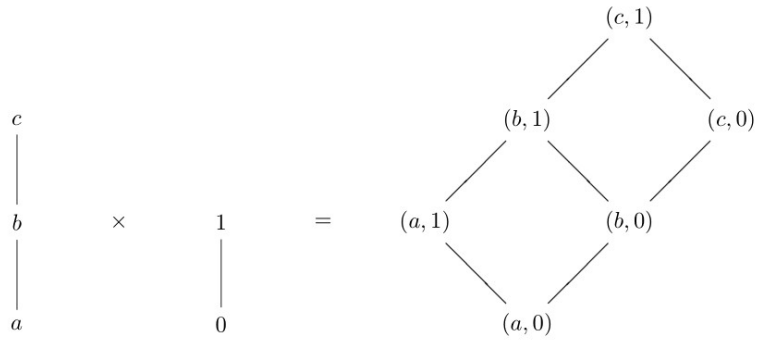


Рис. 5.9. Прямое произведение цепей **3** и **2**

$\mathcal{P}^n$ — прямое произведение n экземпляров $\mathcal{P}$: $B^n = \mathbf{2}^n$.

Если P, Q ранжированы и их ранговые функции суть ρ_P и ρ_Q, то $P \times Q$ также ранжировано и $\rho(x_1, x_2) = \rho_P(x_1) + \rho_Q(x_2)$;

Справедливы соотношения $P \times Q \cong Q \times P$

$$P \times R \cong Q \times R \Rightarrow P \cong Q\,, \quad P^n \cong Q^n \Rightarrow P \cong Q.$$

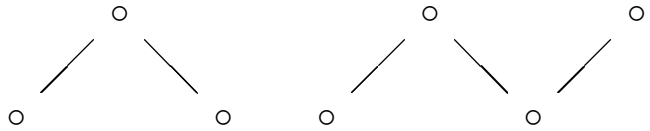


Рис. 5.10. Зигзаги (или заборы) $\mathbf{Z}_3$ и $\mathbf{Z}_4$

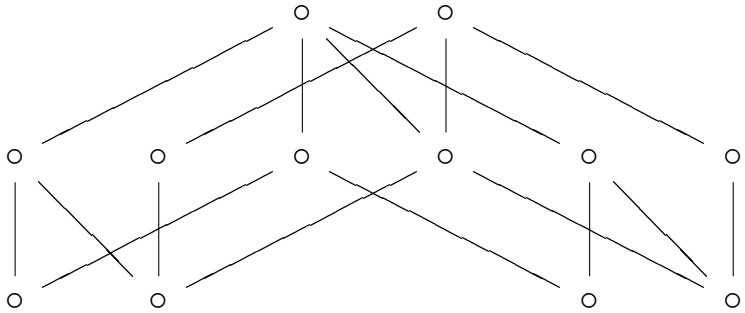
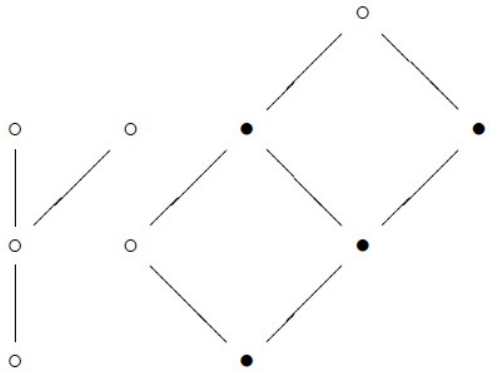


Рис. 5.11. Прямое произведение $\mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_4$

Теорема 5.1 (Ope). *Каждый частичный порядок изоморфен некоторому подмножеству декартова произведения цепей.*

Определение 5.7. *Мультипликативной размерностью* ч.у. множества $\mathcal{P}$ называется наименьшее число k линейных порядков $\mathbf{L}_i$ таких, существует вложение $\mathcal{P} \hookrightarrow \mathbf{L}_1 \times \ldots \times \mathbf{L}_k$.



5.3 Линеаризация

Принцип продолжения порядка

Теорема 5.2 (Шпильрайна-Дашника-Миллера).

1. *Любой частичный порядок может быть продолжен до линейного на том же множестве.*
2. *Каждый порядок есть пересечение всех своих линейных продолжений (линеаризаций).*

$$\mathcal{P} \to \mathbf{L_i}, \qquad \mathcal{P} = \mathbf{L}_1 \cap \ldots \cap \mathbf{L}_{e(\mathcal{P})},$$

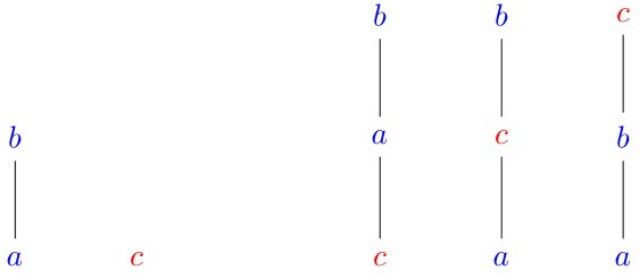
где $e(\mathcal{P})$ — число всех линеаризаций ч.у. множества $\mathcal{P}$.

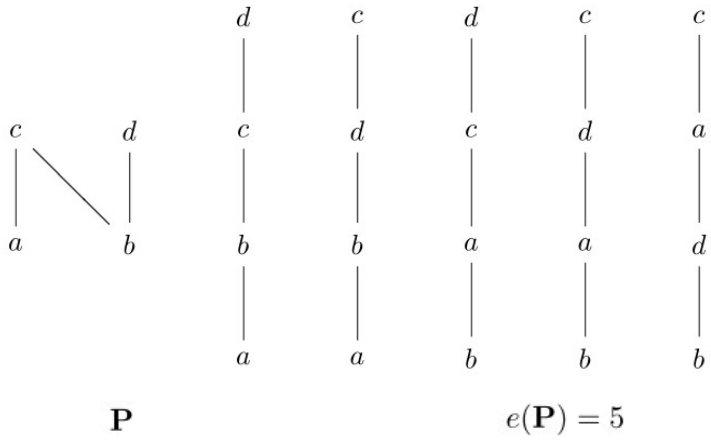
для конечного случая, $|P| = n$ Если $\mathcal{P}$ — не цепь, то в P найдутся несравнимые элементы; произвольно определим порядок на них и продолжим его по транзитивности. Если получившиеся ч.у. множество ещё не цепь, то выберем новую пару несравнимых элементов и поступаем, как указано выше. Через конечное число шагов получаем линейный порядок.

Т.к. возможен различный выбор пар несравнимых элементов и при каждом выборе можно полагать любой их порядок, то можно получить все возможные линейные продолжения исходного частичного порядка.

Пересечение всех таких цепей даст исходное ч.у. множество: если $x \leqslant y$, то аналогичное следование будет и во всех полученных линейных порядках, а при $x \nsim y$ всегда найдётся пара цепей с противоположным их следованием, что в пересечении цепей и даст несравнимость этих элементов. □

Линейные продолжения ч.у. множеств: примеры...





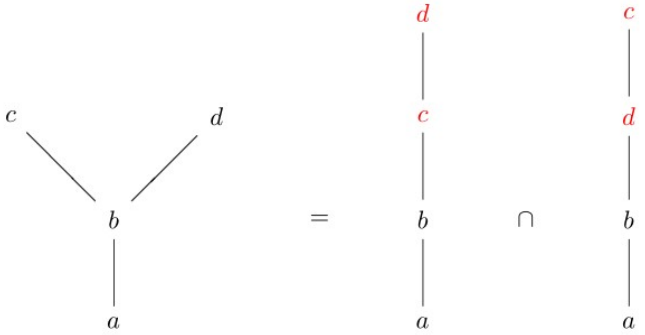


Рис. 5.12. Представление ч.у. множества пересечением цепей

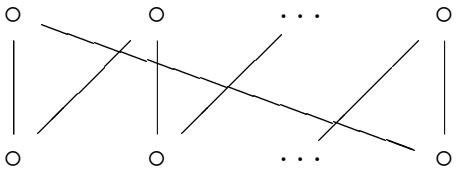


Рис. 5.13. Малая корона $\mathbf{s}_n$

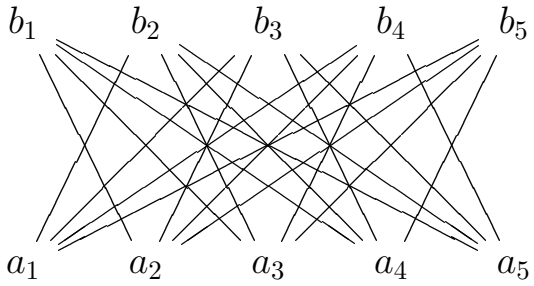


Рис. 5.14. Корона $\mathbf{S}_5$

«$e(\mathcal{P}) = ?$» — NP-полная задача, но:

- $e(\mathbf{2} \times \mathbf{n}) = \dfrac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$ — *числа Каталана*;

- Для зигзагов справедливо представление

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{e(\mathbf{Z}_n)\,x^n}{n!} \;=\; \operatorname{tg} x \;+\; \sec x\,,$$

значения $\mathbf{Z}_n$ при чётных n — *числа секанса*, а при нечётных — *числа тангенса*;

- $e(\mathbf{S}_n) \;=\; (n+1)!(n-1)!\,;$
- $$\sum_{n\geqslant 1}\frac{e(\mathbf{s}_n)}{n!}\,x^n \;=\; \frac{x}{\cos^2 x}\,;$$
- $$\frac{\log(e(B^n))}{2^n} \;=\; \log\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor} - \frac{3}{2}\log e + o(1)\,.$$

Вероятностное пространство на линеарезациях При дискретных задач часто рассматривают связанное с ч.у. множеством P *вероятностное пространство* на множестве всех $e(P)$ его линеаризаций, в котором каждая линеаризация *равновероятна*.

В этом пространстве для элементов x, y, z, ... ч.у. множества P рассматривают события E вида $x\leqslant y$, $(x\leqslant y)\,\&\,(x\leqslant z)$ и т.д.

Вероятность $\Pr[E]$ такого события:

$$\Pr[E] \;=\; \frac{\text{число линеаризаций, в которых имеет место } E}{e(\mathcal{P})}.$$

Теорема 5.3 (*XYZ-теорема*). *Пусть* $\langle P,\leqslant\rangle$ *— ч.у. множество и* x, y, $z\in P$. *Тогда*

$$\Pr[\,x\leqslant y\,]\cdot\Pr[\,x\leqslant z\,] \;\leqslant\; \Pr[\,(x\leqslant y)\,\&\,(x\leqslant z)\,]\,.$$

Проблема сортировки — определить линейный порядок $\mathbf{L}$ с помощью минимального количества вопросов «*верно ли, что* $x < y$ *в* $\mathbf{L}$*?*».

Обобщение: $\mathbf{L}$ — зафиксированная, но неизвестная линеаризация ч.у. множества $\mathcal{P}$.

Оптимальная процедура поиска $\mathbf{L}$ включает в себя нахождение элементов x и y, для которых $\Pr[x < y] \approx \frac{1}{2}$.

С.С. Кислицын (1968) высказал «*1/3 – 2/3 предположение*»: "*любое не являющееся цепью ч.у. множество содержит пару несравнимых элементов* x *и* y*, для которых*

$$\frac{1}{3} \leqslant \Pr[x \leqslant y] \leqslant \frac{2}{3}".$$

Позднее это утверждение независимо выдвинули американские исследователи М. Фредман и Н. Линал.

Данное предположение до сих пор успешно противостоит всем попыткам его доказать и *представляет собой одну из наиболее интригующих проблем комбинаторной теории ч.у. множеств* (С. Фелснер и У.Т. Троттер).

На сегодняшний день наиболее сильный результат:

$$0,2764 \approx \frac{5-\sqrt{5}}{10} \leqslant \Pr[x \leqslant y] \leqslant \frac{5+\sqrt{5}}{10} \approx 0,7236\,.$$

Ч.у. множества: спектр Определение:

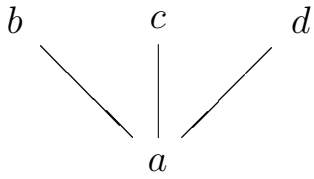
$$Spec(\mathcal{P}) = \{\Pr[a \leqslant b] \mid a, b \in P\}$$

Ясно, что

- поскольку $\Pr[a \leqslant b] = 1 - \Pr[b \leqslant a]$, спектр симметричен относительно $\frac{1}{2}$;

- для всех неодноэлементных тривиально упорядоченных
  множеств $Spec = \{ \frac{1}{2} \}$;
- $\{ 0, \frac{1}{2}, 1 \}$ — единственный трёхэлементный спектр;
- все четырёхэлементные спектры должны иметь вид
  $\{ 0, \alpha, 1-\alpha, 1 \}$, где $0 < \alpha < \frac{1}{2}$;
  Гипотеза (2002): $\alpha = \frac{1}{3}$.

Размерность ч.у. множеств. По теореме Шпильрайна ч.у. множество $\mathcal{P}$ совпадает с пересечением всех $e(\mathcal{P})$ своих линеаризаций, но тот же результат можно получить, взяв значительно меньшее число линейных продолжений.
Например, ч.у. множество $\mathcal{P}$



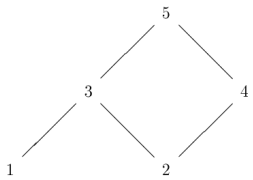
имеет 6 линеаризаций, но $\mathcal{P} = [a, b, c, d] \cap [a, d, c, b]$.

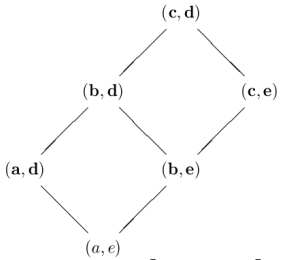
Пусть $\mathcal{P}$ — ч.у. множество и $\mathcal{R} = \{ \mathbf{L}_1, \ldots, \mathbf{L}_k \}$ — совокупность цепей такая, что $\mathcal{P} = \mathbf{L}_1 \cap \ldots \cap \mathbf{L}_k$, то говорят, что $\mathcal{R}$ *реализует* $\mathcal{P}$.

Определение 5.8. Наименьшее число линейных порядков, дающих в пересечении данное ч.у. множество $\mathcal{P}$ называется его *(порядковой) размерностью* (символически $\dim(P)$).

Теорема 5.4 (Ope). *Порядковая и мультипликативная размерности ч.у. множества совпадают.*

$[1,2,3,4,5] \cap [2,4,1,3,5]$:





$$— [a,b,c] \times [d,e]$$

$\dim(\mathcal{P})$ — *более тонкая оценка сложности ч.у. множества, чем* $e(\mathcal{P})$ Размерность ... имеют:

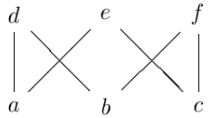
1 — только цепи;

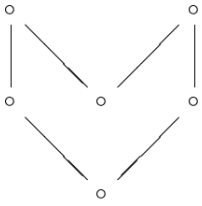
2 — тривиально упорядоченные множества
(т.е. размерность не может интерпретироваться как мера отличия данного ч.у. множества от линейного);

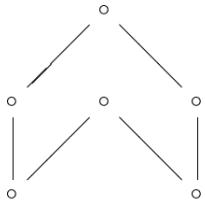
— $\mathbf{Z}_n$;

— все отличные от цепей ч.у. множеств, при $|P| \leqslant 6$, кроме

3 — $\mathbf{s}_3$, **sh** и $\mathbf{sh}^\sharp$ (см. диаграммы) :







n — $\mathbf{S}_n$. Стандартный пример показывает,

что существуют ч.у. множества сколь угодно большой размерности.

- $\varnothing \neq Q \subseteq P \Rightarrow \dim(\mathcal{Q}) \leqslant \dim(\mathcal{P})$, при удалении 1-го элемента его размерность уменьшается не более, чем на 1;
- $\dim(\mathcal{P} + \mathcal{Q}) = \max\{\dim(\mathcal{P}), \dim(\mathcal{Q})\}$, если хотя бы одно из множеств не является цепью и $\dim(\mathcal{P} + \mathcal{Q}) = 2$;
- $\dim(\mathcal{P} \times \mathcal{Q}) \leqslant \dim(\mathcal{P}) + \dim(\mathcal{Q})$;
- $\dim(\mathcal{P}) \leqslant |\mathcal{P}|/2$ при $|\mathcal{P}| \geqslant 4$ (теорема Хирагучи).

Теорема 5.5 («компактности»). *Пусть $\mathcal{P}$ — такое ч.у. множество, что любое его конечное ч.у. подмножество имеет размерность, не превосходящую d.*

Тогда $\dim(\mathcal{P}) \leqslant d$.

$$wp1: \quad \frac{n}{4}\left(1 - \frac{c_1}{\log n}\right) \leqslant \dim(\mathcal{P}) \leqslant \frac{n}{4}\left(1 - \frac{c_2}{\log n}\right), \quad n = |\mathcal{P}|$$

Определение 5.9. Ч.у. множество $\mathcal{P}$ называется *d-несводимым* для некоторого $d \geqslant 2$, если $\dim(\mathcal{P}) = d$ и $\dim(\mathcal{P}') < d$ для любого собственного ч.у. подмножества $P' \subset P$.

d-несводимые множества:
2 — двухэлементная антицепь (единственное);

3 — $\mathbf{s}_3, \mathbf{sh}, \mathbf{sh}^\sharp + \ldots$ — описаны, регулярны и хорошо изучен
4 — достаточно часто встречаются и весьма причудливы;
t — $\mathbf{S}_t$ (единственное $2t$-элементное) $+ \ldots$;

- каждое t-несводимое ч.у. множество является ч.у. подмножеством некоторого $(t+1)$-несводимого.

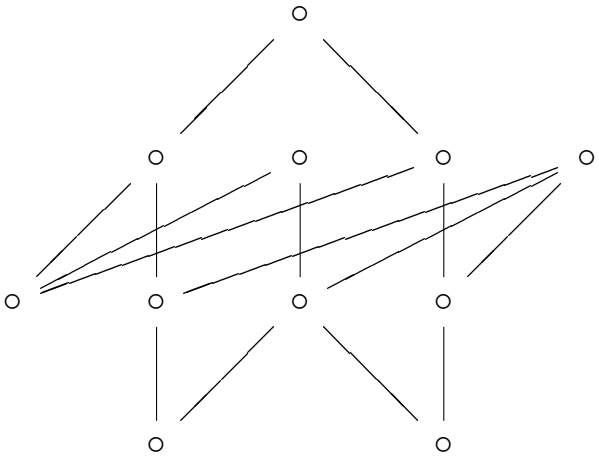


Рис. 5.15. 4-несводимое ч.у. множество

Проблема Ногина. Каково наибольшее значение $\pi(d, n)$ *мощности множества максимальных элементов* d*-несводимого* n*-элементного ч.у. множества при* $d \geqslant 4$*?*

Данная проблема до сих пор остаётся открытой.

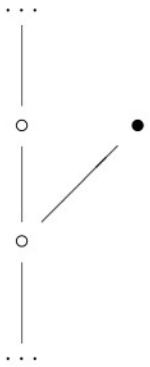
Утверждение 5.1.

$$\pi(d, n) \leqslant n - d\,.$$

5.4 Задачи с решениями

Задача 5.1. *Приведите пример ч.у.м., имеющего в точности один максимальный элемент и не имеющего наибольшего.*

Решение.



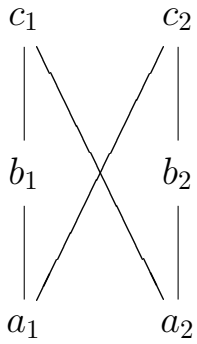
Задача 5.2. *В ч.у. множестве* $\langle \mathbb{N}, | \rangle$ *для подмножества* $A = \{12, 18\}$ *найти*

$$1)\ A^{\triangle}, \quad 2)\ A^{\triangledown}, \quad 3)\ \sup A, \quad 4)\ \inf A.$$

Решение.

1. $A^{\triangle} = \{\, 36n \mid n = 1, 2, \dots \}$;
2. $A^{\triangledown} = \{\, 1, 2, 3, 6 \,\}$;
3. $\sup A = \text{НОК}\ (12, 18) = 36$;
4. $\inf A = \text{НОД}\ (12, 18) = 6$.

Задача 5.3. *Разложить в пересечение минимального количества цепей ч.у. множество* $\mathcal{P}$



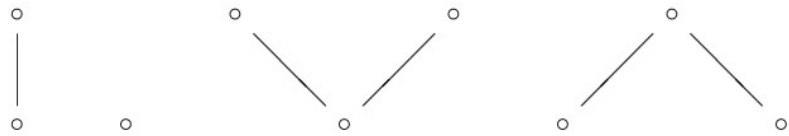
Решение.
$\mathcal{P} = [\,a_1,\, b_1,\, a_2,\, c_1,\, b_2,\, c_2\,] \cap [\,a_2,\, b_2,\, a_1,\, c_2,\, b_1,\, c_1\,]\,.$

Задача 5.4. *1. Сколько существует частичных порядков на множестве* $\{\,a,\, b,\, c\,\}$*?*

2. Сколько среди них неизоморфных?

3. Сколько среди них линейных порядков?

Решение. Неизоморфных трёхэлементных порядков 5: тривиальный, **3** и



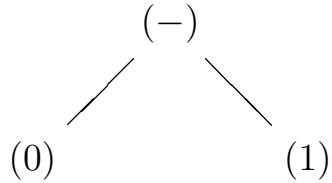
Они порождают порядки на $\{\,a,\, b,\, c\,\}$:

тривиальный	— 1,
цепь **3**	— 6,
$\mathbf{2}+\mathbf{1}$	— 6,
$\mathbf{Z}_3$ и двойственный к нему	— по 3
Всего	— 19

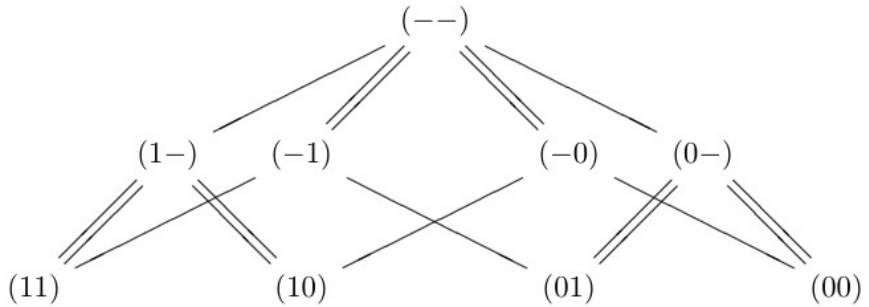
Задача 5.5. *Постройте ч.у. множества* $I(1)$ *и* $I(2)$ *всех интервалов булевых единичных кубов размерностей* 1 *и* 2.

Решение. Булев единичный кубов размерности n содержит 3^n различных интервалов, при этом имеется $C_n^k 2^k$ интервалов размерности k, $k = 0, 1, \ldots, n$.

$I(1)$:



$I(2) = I(1) \times I(1)$
(двойными линиями показаны экземпляры $I(1)$):



5.5 Модели Крипке

Интуиционистское исчисление высказываний ИИВ: формулы. Применение ч.у. множеств в математической логике *модели Крипке* как общего способа

установления истинности формул логических исчислений.

Зафиксируем множества

- $Var = \{x, y, \ldots\}$ *логических переменных* — символов *атомарных высказываний*;
- $\Phi = \{\neg, \&, \vee, \supset\}$ — *логических связок.*

Определение 5.10. *Формулой над множеством* Φ *логических связок называется либо некоторая логическая переменная (атомарная формула), либо одно из знакосочетаний вида* $(\neg A)$, $(A \,\&\, B)$, $(A \vee B)$ *или* $(A \supset B)$ *(молекулярная формула), где* A *и* B *— формулы.*

$\mathcal{A}$ — множество всех логических формул.

Для сокращения записи формул принимают соглашения — правила экономии скобок и приоритета связок: внешние скобки у формул опускаются и сила связок убывает в порядке, указанном при их введении выше ($>$ — «сильнее»)

$$\neg \;>\; \& \;>\; \vee \;>\; \supset .$$

Каждая логическая переменная может принимать, вообще говоря, счётное множество *истинностных значений* $\{\mathbf{0}, 1, \ldots, \}$. Первое значение $\mathbf{0}$ назовём *выделенным.*

Неформально выделенное значение символизирует «истину» (*И*), а остальные — различные ситуации отсутствия истинности: неопределённость высказывания, различные формы его «ложности» (*Л*) и т.д. В классической логике множество истинностных значений сужается до двух: $\{\ ,\ \}$ и выделенное — $\ $.

Следующие формулы назовём *схемами аксиом* ИИВ:

1. $A \supset (B \supset A)$;
2. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$;
3. $A \,\&\, B \supset A$;
4. $A \,\&\, B \supset B$;
5. $A \supset (B \supset (A \,\&\, B))$;
6. $A \supset A \vee B$;
7. $B \supset A \vee B$;
8. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$;
9. $\neg A \supset (A \supset B)$;
10. $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$.

Аксиомы ИВВ получаются при подстановке в схемы конкретных формул вместо *метасимволов* A, B и C.

В ИИВ имеется единственное правило вывода, обозначаемое MP (лат. *modus ponens*, правило отделения(?) размещения), позволяющее из формул A и $A \supset B$ получить формулу B:

$$A,\ A \supset B \vdash B$$

Формула A называется *выводимой*, если найдётся конечная последовательность формул $A_1, \ldots, A_l$ такая, что $A_l = A$ и каждый элемент последовательности

- либо является аксиомой,
- либо получен по правилу MP из каких-то двух предыдущих формул.

Выводимость формулы A записывается как $\vdash A$, в случае отсутствия вывода пишут $\nvdash A$.

Пример 5.5 (пример вывода формулы в ИИВ). Приведём вывод формулы $x \vee y \supset y \vee x$.

Для удобства формулы вывода будем писать друг под другом, нумеруя их и давая краткие комментарии по их получению.

(1) $x \supset y \vee x$ — подстановка в схему 7

(2) $y \supset y \vee x$ — подстановка в схему 6

(3) $(x \supset y \vee x) \supset ((y \supset y \vee x) \supset (x \vee y \supset y \vee x))$ — подстановка в аксиому 8: $A \mapsto x$, $B \mapsto y$, $C \mapsto y \vee x$

(4) $(y \supset y \vee x) \supset (x \vee y \supset y \vee x)$ — по MP из (1) и (3)

(5) $x \vee y \supset y \vee x$ — по MP из (2) и (4)

Напоминание: 6. $A \supset A \vee B$; 7. $B \supset A \vee B$; 8. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$.

Пусть Γ — конечное множество формул. Формула B называется *выводимой из множества формул* Γ (символически $\Gamma \vdash B$), если найдётся конечная последовательность формул $B_1, \ldots, B_l$ такая, что $B_l = B$ и каждый элемент этой последовательности

- либо является аксиомой,
- либо принадлежит Γ,
- либо получен по правилу MP из каких-то двух предыдущих формул.

Факт выводимости $\Gamma \vdash B$ не изменится, если вместо множества Γ взять конъюнкцию составляющих его

формул, так что можно рассматривать только одноэлементные множества Γ и опуская фигурные скобки, писать $A \vdash B$.

Знак $\vdash$ является символом отношения предпорядка на множестве $\mathcal{A}$.

Проблема выводимости — одна из важнейших проблем любого логического исчисления L: «выводима ли в L данная формула?».

$\vdash A$ — можно либо предъявить соответствующий вывод, либо доказать его существование;

$\nvdash A$ — возможно лишь дать доказательство несуществования вывода A.

Метатеория — теория, изучающая язык, структуру и свойства некоторой другой (*предметной*, или *объектной*) теории:

- корректность,
- непротиворечивость,
- различные виды полноты,
- проблема разрешимости,
- независимость систем аксиом и правил вывода
- ...

Классическое исчисление высказываний КИВ: определение Если к схемам аксиом добавить ещё одну:

11. $A \vee \neg A$ — логический закон *TND* (лат. *tertium non datur*, «третьего не дано»),

то получим *классическое исчисление высказываний КИВ.*

Тогда каждой логической переменной можно приписать одно из двух истинностных значений $\mathbf{1}$ или $\mathbf{0}$, понимаемых как «истина» и «ложь» соответственно, и по правилам

$$|\neg A| = \mathbf{1} \Leftrightarrow |A| = \mathbf{0};$$

$$|A \,\&\, B| = \mathbf{1} \Leftrightarrow |A| = |B| = \mathbf{1};$$

$$|A \vee B| = \mathbf{0} \Leftrightarrow |A| = |B| = \mathbf{0};$$

$$|A \supset B| = \mathbf{1} \Leftrightarrow |B| = \mathbf{1} \text{ или } |A| = \mathbf{0}.$$

получить оценку $|F| \in \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ любой формулы F.

Формулы, истинные при любых *интерпретациях* — возможных вариантах приписываний логическим переменным значений ($\mathbf{1}$ или $\mathbf{0}$) — называются *тавтологиями.*

Примеры тавтологий: все аксиомы 1–11, $\neg\neg x \supset x$, $\neg(x \vee y) \supset \neg x \,\&\, \neg y$, ...

В КИВ выводимыми оказываются все тавтологии и только они $\Rightarrow$ проблема выводимости сводится к проверке формулы на тавтологичность.

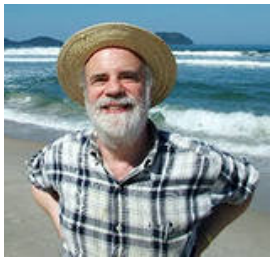
В ИИВ задача радикально усложняется: это исчисление не имеет конечнозначной интерпретации, т.е. если в любом конечном наборе $Tr = \{\,\mathbf{0}, 1, \ldots, k-1\}$ объявив значение $\mathbf{0}$ выделенным и задав правила оценки формул так, чтобы при всех интерпретациях переменным из Var значений из Tr все аксиомы всегда принимали бы только значение $\mathbf{0}$, найдётся невыводимая

формула ИИВ такая, что её оценка тоже всегда будет принимать выделенное значение.

ИИВ: проблема разрешимости

- Любая выводимая в ИИВ формула выводима и в КИВ.
- Обратное неверно: например, формулы, получаемые из схемы TND и $\neg\neg x \supset x$, $\neg(x \vee y) \supset \neg x \,\&\, \neg y$, ... невыводимы в ИИВ.

Для разрешения проблемы выводимости в ИИВ применим метод, основанный на построении *шкал Крипке*.



Сол Крипке (Saul Aaron Kripke, 1940) — американский философ и логик, один из десяти выдающихся философов последних 200 лет. Ещё юношей внёс значительный вклад в математическую логику, философию математики и теорию множеств.

Шкалы Крипке: построение. Чтобы задать такую шкалу нужно:

- указать ч.у. множество $\langle W, \leqslant \rangle$, элементы носителя которого называют *мирами*;
- для каждого мира указать, какие из логических переменных в нём являются истинными (остальные переменные в этом мире ложны).

Факт истинности переменной x в мире w записывают символически $w \Vdash x$, ложности — $w \nVdash x$.
При формировании шкалы Крипке требуется, чтобы

$$u \leqslant v \text{ и } u \Vdash x \Rightarrow v \Vdash x,$$

т.е., как говорят, «*область истинности переменной наследуется вверх*» или «*сохраняется в бóльших мирах*».

Неформально порядок $u \leqslant v$ между мирами интерпретируется как то, что *мир v есть состояние мира u в следующий момент времени*, понимая время не в физическом, а в логическом смысле: каждый мир описывается состоянием знаний в данный момент и однажды установленная истинность или доказанный факт остаётся таковым и впоследствии.

Логическое время не обязательно обладает линейным порядком.

Определение 5.11. *Шкала Крипке* есть тройка $\langle W, \leqslant, \Vdash \rangle$, где редукт $\langle W, \leqslant \rangle$ — ч.у. множество, а $\Vdash \subseteq W \times Var$ — соответствие «один ко многим», ставящее каждому миру совокупность истинных в нём логических переменных и удовлетворяющее условию наследования истинности.

Для построенной шкалы Крипке определим истинность данной формулы A в любом мире w:

$w \Vdash A \,\&\, B \Leftrightarrow w \Vdash A$ и $w \Vdash B$;

$w \Vdash A \vee B \Leftrightarrow w \Vdash A$ или $w \Vdash B$;

$w \Vdash A \supset B \Leftrightarrow \forall (u \geqslant w)\ u \Vdash B$ или $u \nVdash A$;

$w \Vdash \neg A \Leftrightarrow \forall (u \geqslant w)\ u \nVdash A$
(т.е. если $\Vdash \neg A$, то не существует большего мира, в котором бы $\Vdash A$).

Введённые шкалы Крипке задают *семантику* ИИВ, придавая смысл формулам — разделяя их на истинные и ложные в данном мире.

- *Истинная* в данном мире формула остаётся истинной и в *старших* (бóльших) мирах.
- *Ложная* в данном мире формула была ложной и во всех *младших* (меньших) мирах.
- Если формула содержит только связки $\&$ и $\vee$, то её истинность в данном мире не зависит от её истинности в других мирах.
- Истинности *импликации* и *отрицания* используют порядок на множестве миров.
- Следствием предыдущего является факт независимости импликации от других связок: в ИИВ, например, формулы $A \supset B$ и $\neg A \vee B$ логически не эквивалентны.

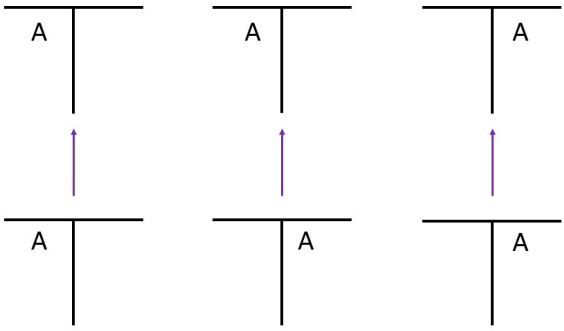


Рис. 5.16. Шкалы Крипке: варианты истинности формулы в шкале из двух миров

Теорема 5.6 (*корректности ИИВ относительно шкал Крипке*). *Формула, выводимая в ИИВ, истина во всех мирах всех шкал Крипке.*

Доказательство. Покажем, что
(1) все аксиомы истины во всех мирах и
(2) правило MP сохраняет истинность.

Второе очевидно: если и A, и $A \supset B$ истины во всех мирах, то B будет также истина во всех мирах.

Замечание: чтобы в мире w проверить оценку

- *истинность* импликации $A \supset B$ надо удостовериться, что $w \Vdash A \Rightarrow w \Vdash B$ ($w \nVdash A$ эта импликация подавно истина);
- *ложность* импликации $A \supset B$ надо удостовериться, что $w \Vdash A \Rightarrow w \nVdash B$. □

Теорема 5.7 (*корректности ИИВ относительно шкал Крипке*). *Формула, выводимая в ИИВ, истина во всех мирах всех шкал Крипке.*

Доказательство. Покажем, что (1) все аксиомы истины во всех мирах и (2) правило MP сохраняет истинность.

Второе очевидно: если и A, и $A \supset B$ истины во всех мирах, то B будет также истина во всех мирах.

Замечание: чтобы в мире w проверить оценку

- *истинность* импликации $A \supset B$ надо удостовериться, что $w \Vdash A \Rightarrow w \Vdash B$ ($w \nVdash A$ эта импликация подавно истина);
- *ложность* импликации $A \supset B$ надо удостовериться, что $w \Vdash A \Rightarrow w \nVdash B$.

Проверим 1-*ю аксиому* $A \supset (B \supset A)$.

Если в некотором мире u имеет место $u \Vdash A$, то во всех мирах $v \geqslant u$ (в том числе и в u) справедливо $v \Vdash B \supset A$.

Проверим 2-*ю аксиому*
$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$.

Пусть существует мир u, где она ложна $\Rightarrow$ в нём должны быть истины формулы $A \supset (B \supset C)$, $A \supset B$ и A, а C — ложна.

Но из $u \Vdash A$ и $u \Vdash A \supset B$ следует $v \vDash B$ во всех мирах $v \geqslant u$. При $u \vDash A \supset (B \supset C)$ это означает справедливость $w \vDash C$ во всех мирах $w \geqslant v$. Отсюда следует справедливость $u \vDash C$ — противоречие.

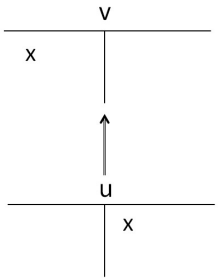
Остальные аксиомы проверяются аналогично. □

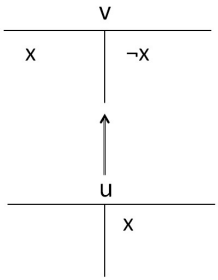
Следствие. Для доказательства невыводимости формулы в ИИВ достаточно указать шкалу Крипке, в одном из миров которой она ложна.

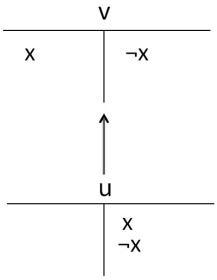
Такая шкала называется *контрмоделью* для данной формулы. Существует контрмодель, являющаяся корневым деревом, в которой мир с ложной формулой — его корнем.

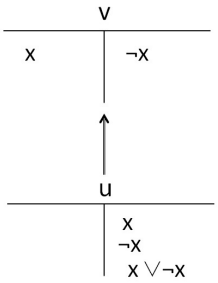
Пример 5.6. 1. Постоим шкалу Крипке, содержащую мир, в котором формула $x \vee \neg x$ ложна.

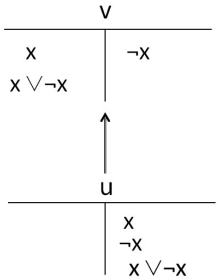
Возьмём два мира u и v такие, что $u \leqslant v$, $u \nVdash x$ и $v \Vdash x$. Тогда $v \nVdash \neg x$, откуда $u \nVdash \neg x$, что, в свою очередь даёт $u \nVdash x \vee \neg x$ (но $v \Vdash x \vee \neg x$).











2. Постоим шкалу Крипке, содержащую мир, в котором формула $\neg x \vee \neg\neg x$ ложна.

Пусть в мире u данная формула ложна, т.е. $u \not\Vdash \neg x \vee \neg\neg x$. Тогда $u \not\Vdash \neg x$ и $u \not\Vdash \neg\neg x$.

Построим два несравнимых между собой мира v и w, бóльшие u, в которых:

- $v \not\Vdash \neg x$ и $v \Vdash \neg\neg x$;

- $w \nVdash \neg\neg x$ и $w \Vdash \neg\neg x$.

Искомая контрмодель получена:

- правила истинности и ложности формул в модели соблюдены;
- формула x будет истинна только в мире v.

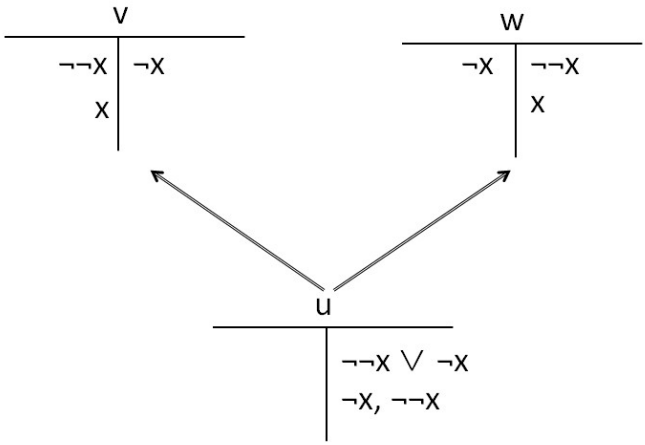


Рис. 5.17. Контрмодель для $\neg x \vee \neg\neg x$

Шкалы Крипке: применение

- Метод автоматической верификации параллельных вычислительных систем (англ. *model checking*), позволяет проверить, удовлетворяет ли заданная модель системы формальным спецификациям. В качестве модели обычно используют шкалы Крипке, а для спецификации аппаратного и программного обеспечения — *темпоральную* (временную) логику.

- *Модальные логики* формализуют *сильные* и *слабые модальные* выражения вида «необходимо/возможно», «всегда/иногда», «здесь/где-то» и т.д. Заменив в определении шкалы Крипке частичный порядок на
  - отношение толерантности — получим семантику для брауэровой логики B;
  - аморфное отношение — семантику для логики $S5$;
  - диагональное — модель для модальной логики M.