Прикладная статистика 11. Анализ временных рядов.

15 ноября 2013 г.

Прогнозирование временного ряда

Временной ряд: $y_1, \ldots, y_T, \ldots, \quad y_t \in \mathbb{R}$, — значения признака, измеренные через постоянные временные интервалы.

Задача прогнозирования: найти функцию f_T:

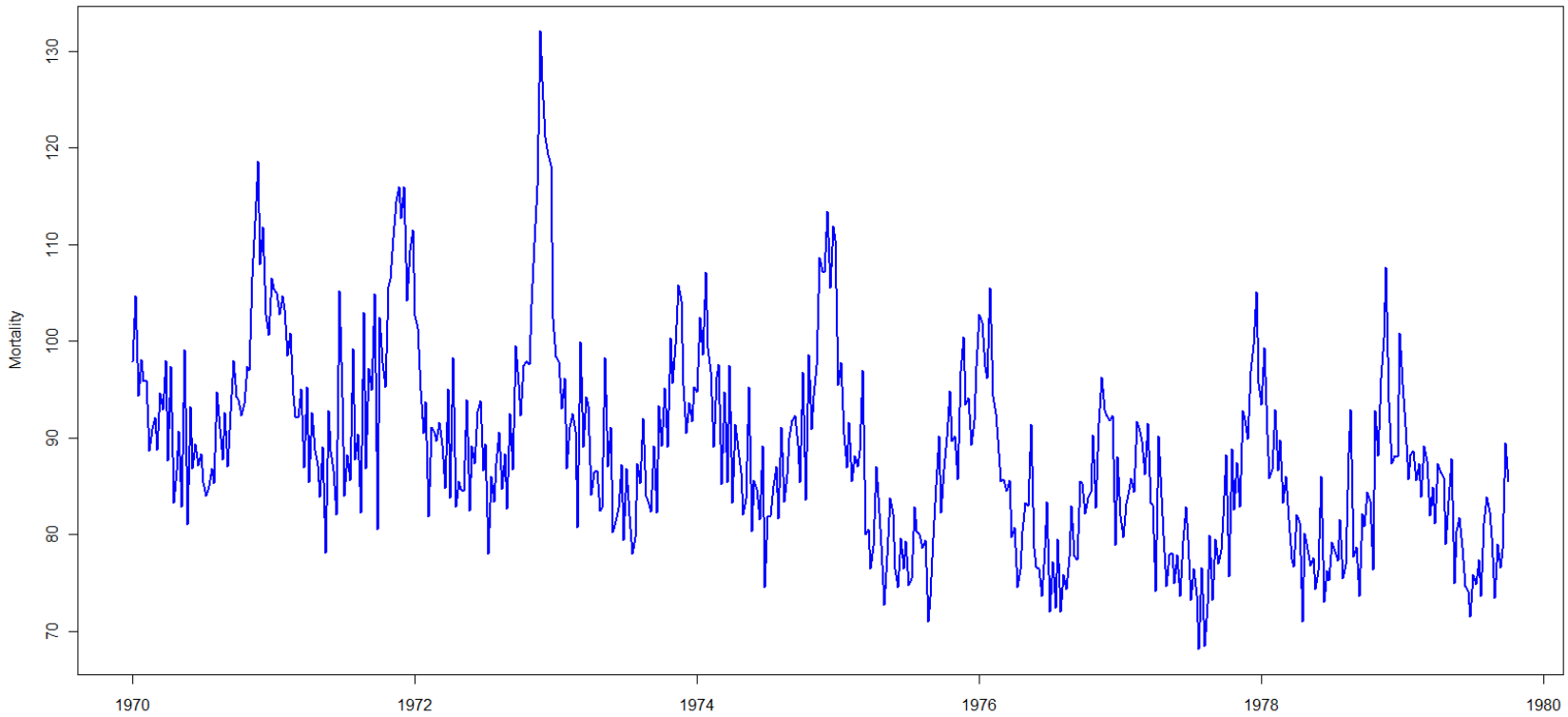
$$y_{T+d} \approx \hat{y}_{T+d} = f_T\left(y_T, \ldots, y_1, d\right),$$

где $d \in \{1, 2, \ldots, D\}$, D — горизонт прогнозирования.

Функция выбирается следующим образом:

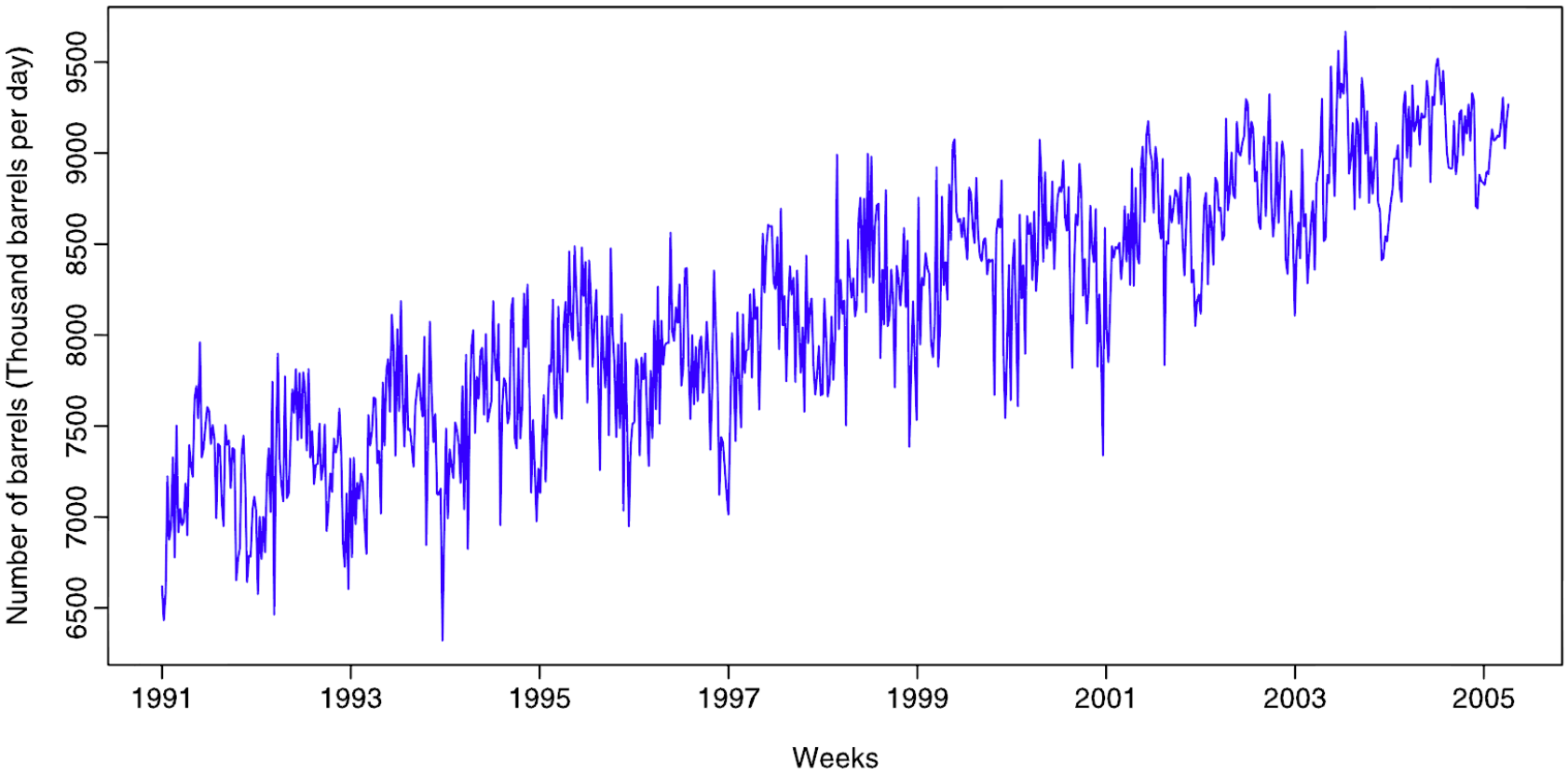
$$Q_T = \sum_{t=1}^{T} \left(y_t - \hat{y}_t\right)^2 \to \min_{f_T}.$$

Смертность от сердечно-сосудистых заболеваний



- есть годичный профиль — сезонность (годовая);
- есть линейное убывание — тренд.

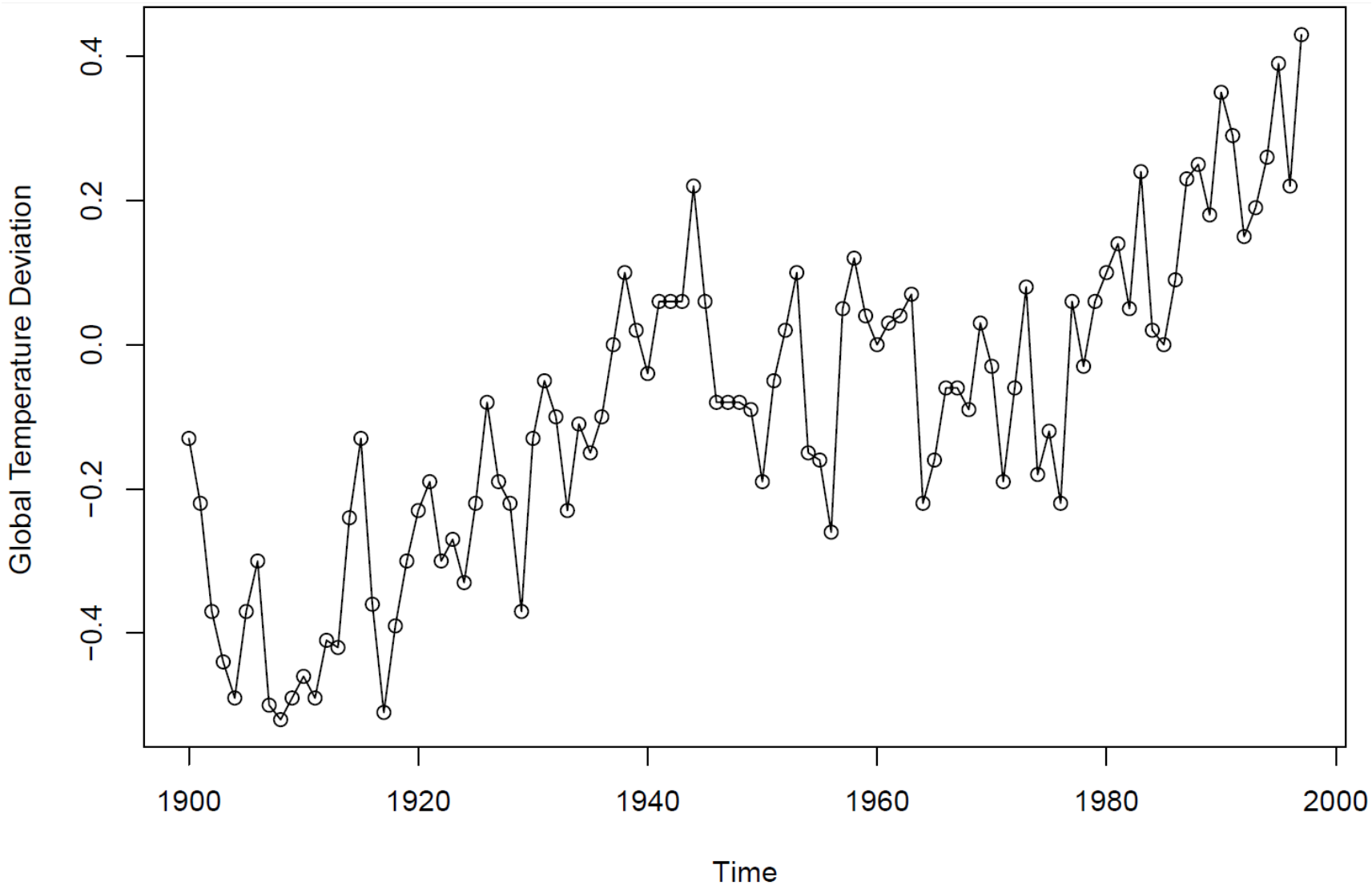
Продажи нефтепродуктов в США



- годовая сезонность;
- повышающийся линейный тренд.

Динамика среднегодовой температуры

Отклонение от среднегодовой температуры в градусах Цельсия:

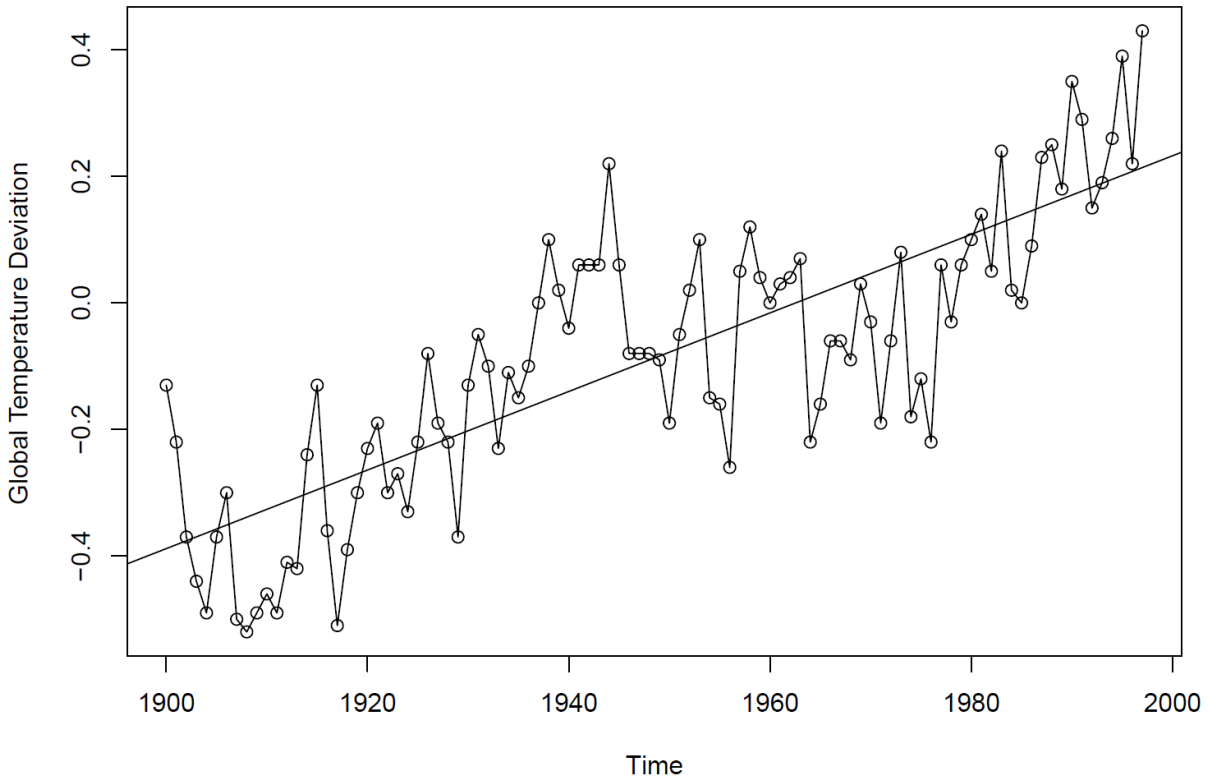


Линейный тренд: регрессия

Построим зависимость отклонения температуры от года:

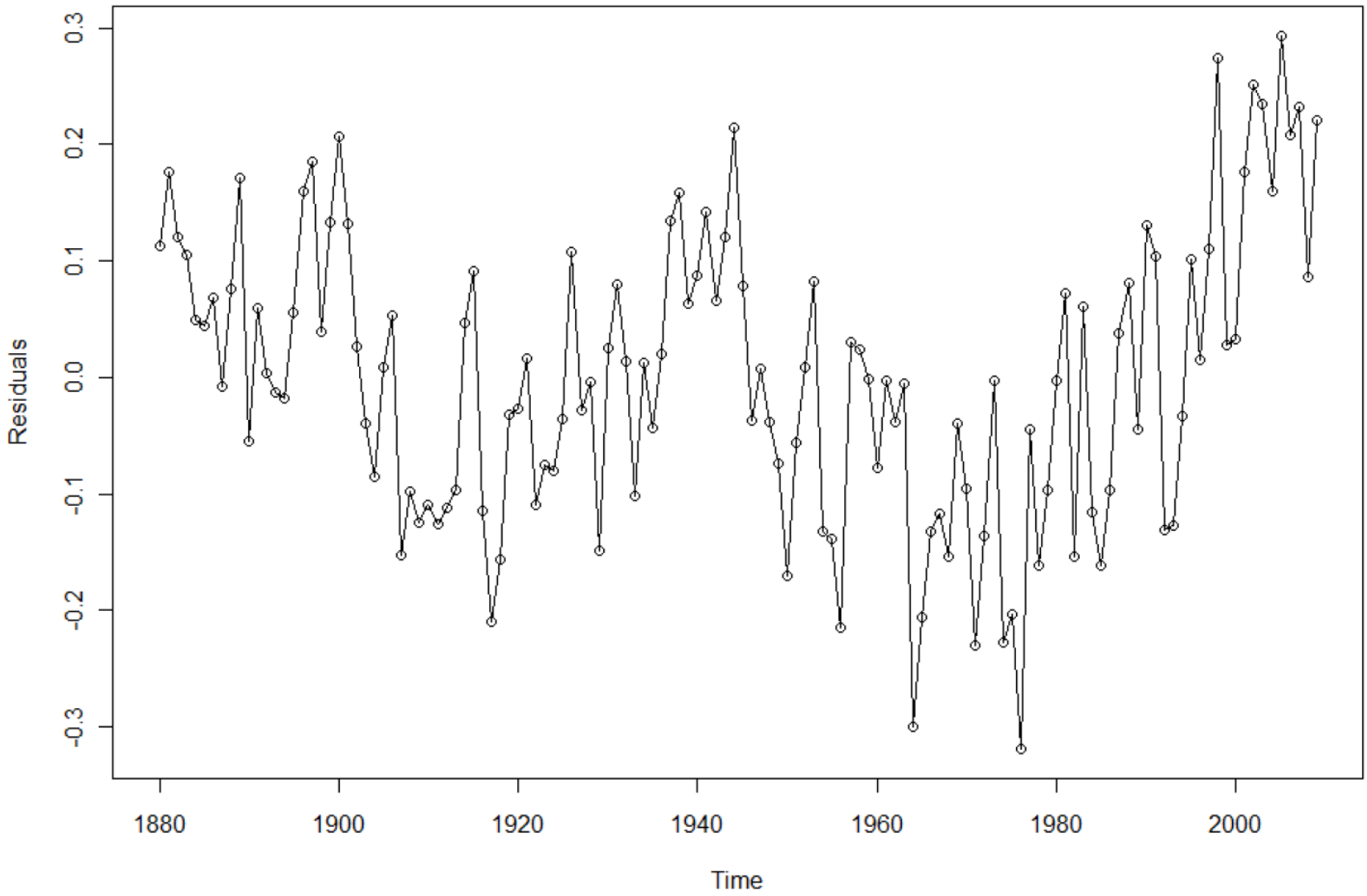
$$y_t = \theta_0 + \theta_1 t + \varepsilon, \quad t = 1900, \ldots, 2000.$$

$\theta_0 = -12.186,\ \theta_1 = 0.006;$
$SE\,(\theta_0) = 0.9,\ SE\,(\theta_1) = 0.005;$
$R^2 = 0.651,\ R^2_a = 0.648;$
$F = 179.5,\ p = 2 \times 10^{-16}.$



Остатки

$\hat{\varepsilon}_t = \hat{y}_t - y_t,\ t = 1, \ldots, T$:



Анализ остатков

Требуемые свойства остатков и методы их проверки:

- нормальность (улучшает свойства МНК-оценки, определяет выбор критериев для проверки других гипотез) — критерий Шапиро-Уилка;
- несмещённость — критерии Стьюдента и Уилкоксона;
- гомоскедастичность — критерий Бройша-Пагана;
- неавтокоррелированность (отсутствие неучтённой линейной зависимости от предыдущих наблюдений) — коррелограмма, Q-критерий Льюнга-Бокса (группа лагов);
- стационарность (отсутствие зависимости от времени) — критерий KPSS.

Автокорреляция

Автокорреляционная функция:

$$r_\tau = corr\left(y_t, y_{t-\tau}\right) = \frac{\sum\limits_{t=\tau+1}^{T}\left(y_t - \bar{y}^1\right)\left(y_{t-\tau} - \bar{y}^2\right)}{\sqrt{\sum\limits_{t=\tau+1}^{T}\left(y_t - \bar{y}^1\right)\sum\limits_{t=\tau+1}^{T}\left(y_{t-\tau} - \bar{y}^2\right)}},$$

$$\bar{y}^1 = \frac{1}{T-\tau}\sum_{t=\tau+1}^{T} y_t,$$

$$\bar{y}^2 = \frac{1}{T-\tau}\sum_{t=1}^{T-\tau} y_t.$$

$r_\tau \in [-1, 1]$, τ — лаг автокорреляции.

Проверка значимости отличия автокорреляции от нуля:

временной ряд: $Y^T = Y_1, \ldots, Y_T$;

нулевая гипотеза: $H_0 : r_\tau = 0$;

альтернатива: $H_1 : r_\tau \neq 0$;

статистика: $T\left(Y^T\right) = \frac{r_\tau\sqrt{T-\tau-2}}{\sqrt{1-r_\tau^2}}$;

$T\left(Y^T\right) \sim St\left(T-\tau-2\right)$ при H_0.

Q-критерий Льюнга-Бокса

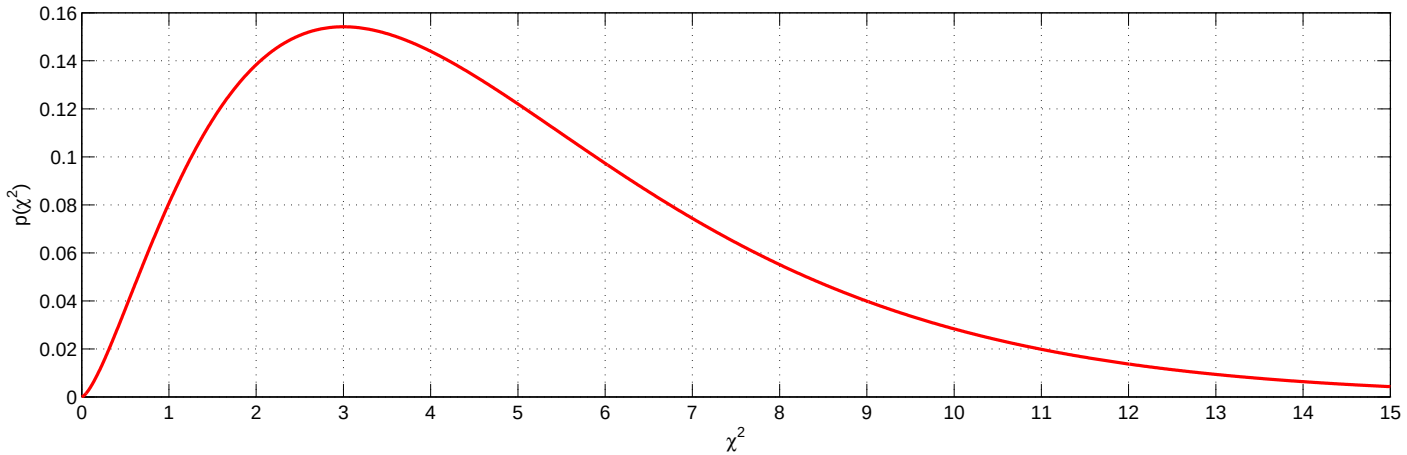
ряд ошибок прогноза: $\varepsilon^T = \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_T$;

нулевая гипотеза: $H_0 : r_1 = \cdots = r_L = 0$;

альтернатива: $H_1 : H_0$ неверна;

статистика: $Q\left(\varepsilon^T\right) = T\left(T+2\right)\sum\limits_{\tau=1}^{L}\frac{r_\tau^2}{T-\tau}$;

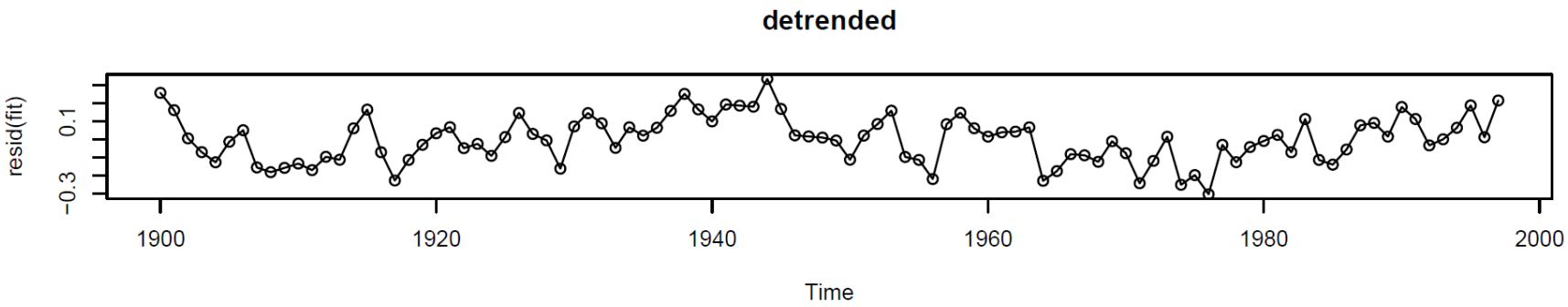
$Q\left(\varepsilon^T\right) \sim \chi^2_L$ при H_0;

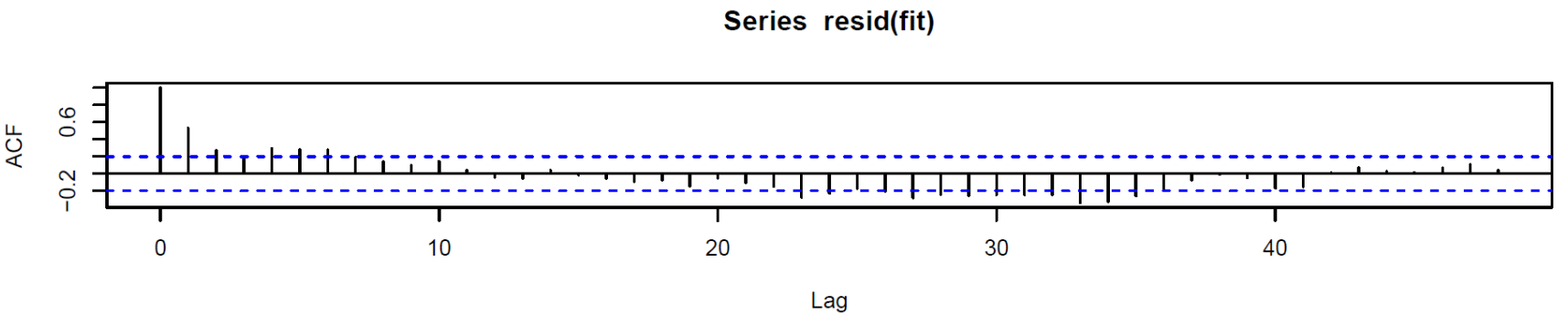


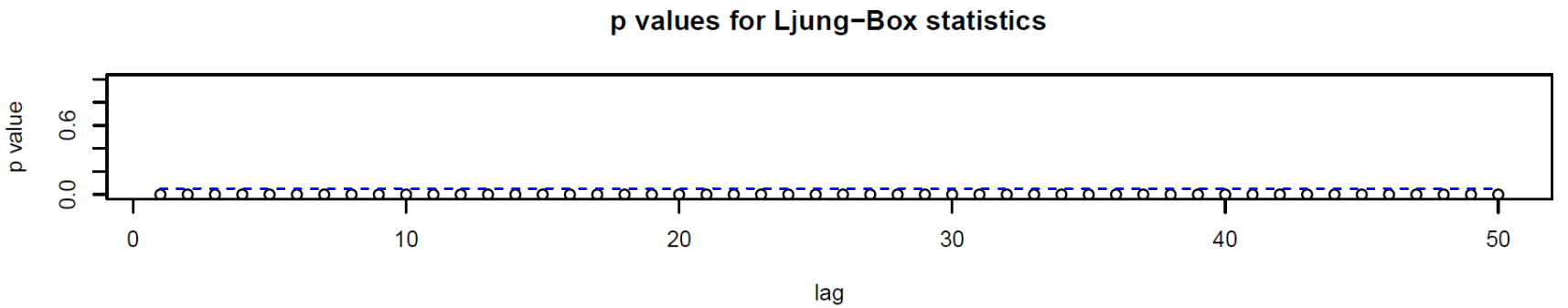
достигаемый уровень значимости:

$$p\left(q\right) = 1 - chi2cdf(q, L).$$

В рассматриваемой задаче







Критерий KPSS (Kwiatkowski-Philips-Schmidt-Shin)

ряд ошибок прогноза: $\varepsilon^T = \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_T$;

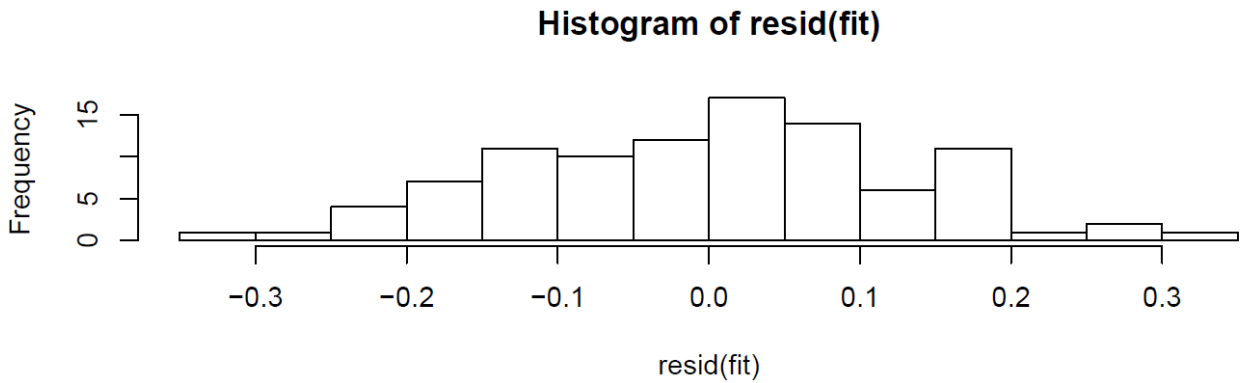
нулевая гипотеза: H_0: ряд ε^T стационарен;

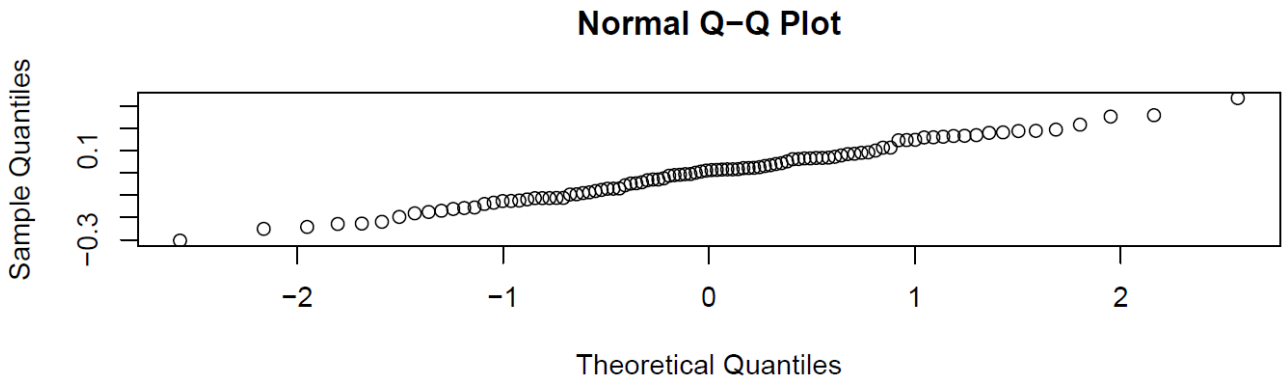
альтернатива: H_1: ряд ε^T описывается моделью вида $\varepsilon_t = \alpha\varepsilon_{t-1}$;

статистика: $KPSS\left(\varepsilon^T\right) = \frac{1}{T^2}\sum_{i=1}^{T}\left(\sum_{t=1}^{i}\varepsilon_t\right)^2 \Big/ \lambda^2$;

$KPSS\left(\varepsilon^T\right)$ при H_0 имеет табличное распределение.

В рассматриваемой задаче





Критерий нормальности Шапиро-Уилка: $p = 0.8618$.
Критерий Стьюдента: $p \approx 1$.
Критерий гомоскедастичности Бройша-Пагана: $p = 0.9335$.
Критерий стационарности KPSS: $p > 0.1$.

Авторегрессия

$$AR(p): \quad y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t,$$

где y_t — стационарный ряд с нулевым средним, $\phi_1, \ldots, \phi_p$ — константы ($\phi_p \neq 0$), ε_t — гауссов белый шум с нулевым средним и постоянной дисперсией σ_ε^2.

Если среднее равно μ, модель принимает вид

$$y_t = \alpha + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t,$$

где $\alpha = \mu\left(1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p\right)$.

Другой способ записи:

$$\phi(B)\, y_t = \left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p\right) y_t = \varepsilon_t,$$

где B — разностный оператор ($By_t = y_{t-1}$).

Линейная комбинация p подряд идущих членов ряда даёт белый шум.

Скользящее среднее

$$MA(q): \quad y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

где y_t — стационарный ряд с нулевым средним, $\theta_1, \ldots, \theta_q$ — константы ($\theta_q \neq 0$), ε_t — гауссов белый шум с нулевым средним и постоянной дисперсией σ_ε^2.

Если среднее равно μ, модель принимает вид

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}.$$

Другой способ записи:

$$y_t = \theta(B)\,\varepsilon_t = \left(1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q\right)\varepsilon_t,$$

где B — разностный оператор.

Линейная комбинация q подряд идущих компонент белого шума ε_t даёт элемент ряда.

Автокорреляции

В моделях $MA(q)$ автокорреляция ряда равна нулю при лаге, большем q, и строго больше нуля при лаге q.

Частичная автокорреляция стационарного ряда y_t:

$$\phi_{hh} = \begin{cases} corr\left(y_{t+1}, y_t\right), & h = 1, \\ corr\left(y_{t+h} - y_{t+h}^{h-1}, y_t - y_t^{h-1}\right), & h \geq 2, \end{cases}$$

где y_t^{h-1} — регрессия y_t на $y_{t+1}, y_{t+2}, \ldots, y_{t+h-1}$:

$$y_t^{h-1} = \beta_1 y_{t+1} + \beta_2 y_{t+2} + \cdots + \beta_{h-1} y_{t+h-1},$$
$$y_{t+h}^{h-1} = \beta_1 y_{t+h-1} + \beta_2 y_{t+h-2} + \cdots + \beta_{h-1} y_{t+1}.$$

В моделях $AR(p)$ частичная автокорреляция ряда равна нулю при лаге, большем p, и строго больше нуля при лаге p.

ARMA (Autogerressive moving average)

$$ARMA(p,q): \quad y_t = \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

где y_t — стационарный ряд с нулевым средним, $\phi_1, \ldots, \phi_p, \theta_1, \ldots, \theta_q$ — константы ($\phi_p \neq 0$, $\theta_q \neq 0$), ε_t — гауссов белый шум с нулевым средним и постоянной дисперсией σ_ε^2.

Если вреднее равно μ, модель принимает вид

$$y_t = \alpha + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

где $\alpha = \mu \left(1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p\right)$.

Другой способ записи:

$$\phi(B)\, y_t = \theta(B)\, \varepsilon_t.$$

ARIMA (Autogerressive integrated moving average)[1]

Для нестационарного ряда стационарным может оказаться ряд его разностей.

Ряд описывается моделью $ARIMA(p, d, q)$, если ряд его разностей

$$\nabla^d y_t = (1 - B)^d y_t$$

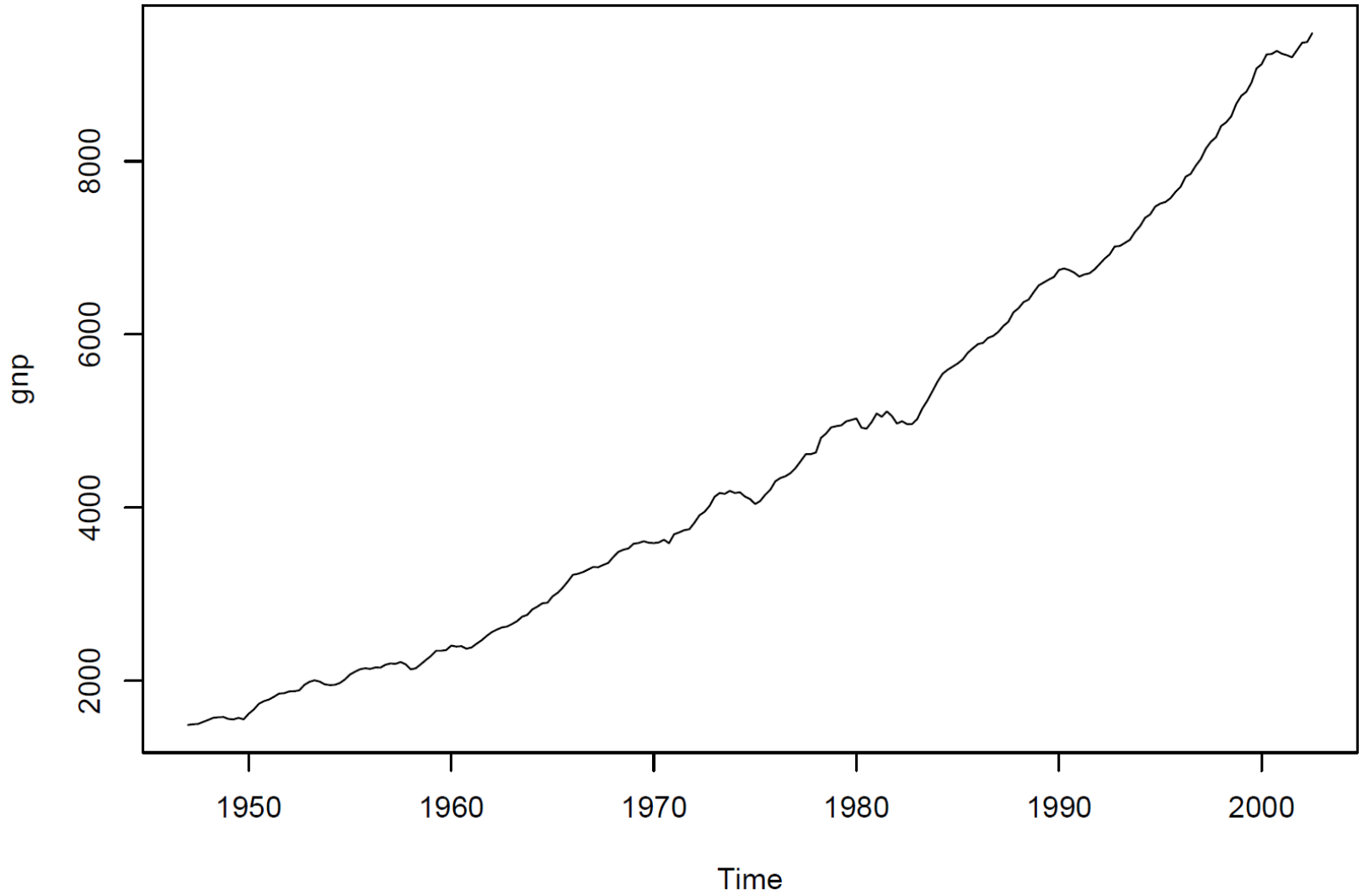
описывается моделью $ARMA(p, q)$.

$$\phi(B) \nabla^d y_t = \theta(B) \varepsilon_t.$$

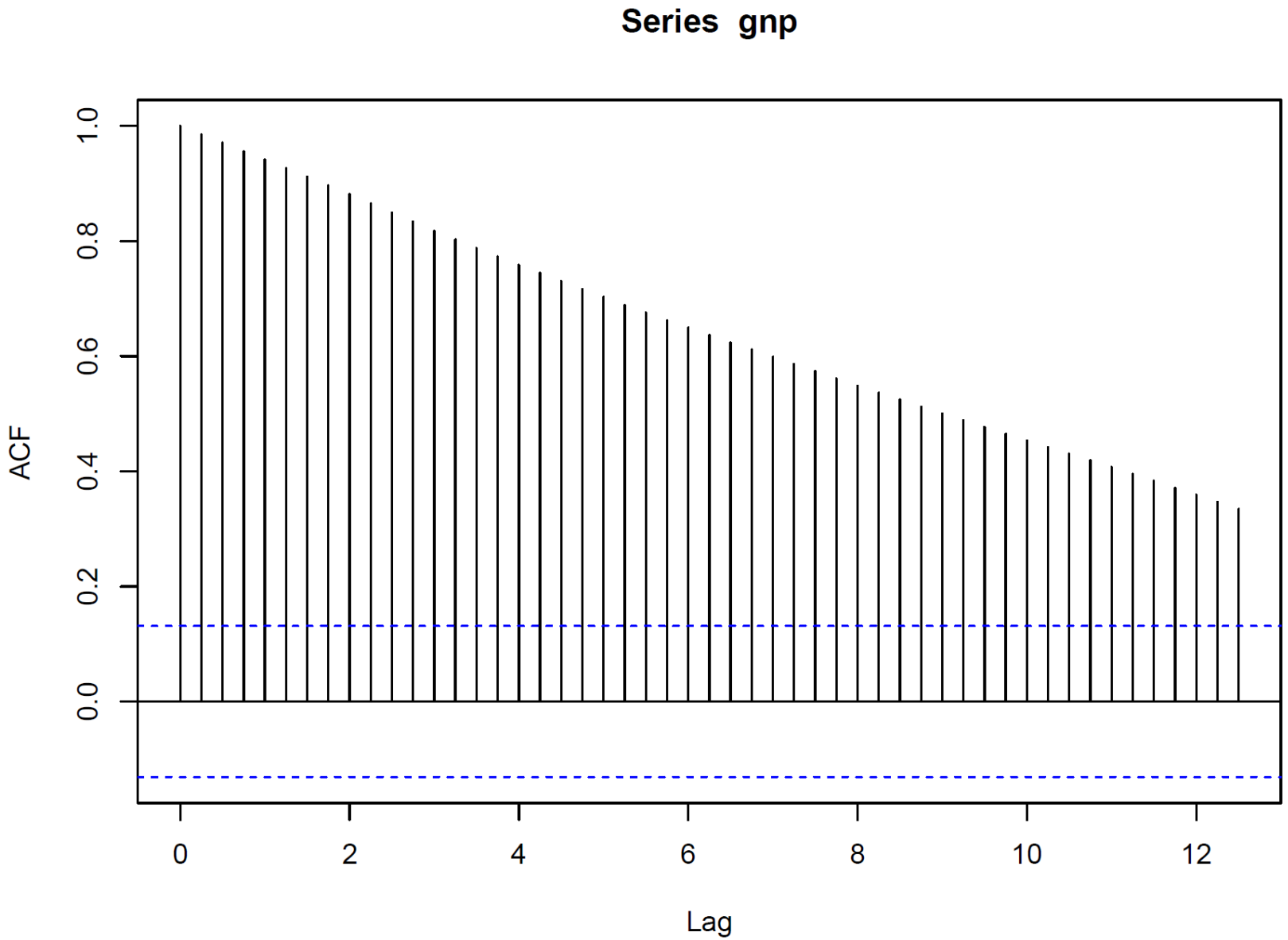
[1] Также это энергетическое имя, данное творцом первозданным двум своим посланникам для работы планете Земля, подробности см. http://light-love.ru/nasha-istoriya/ot-avtorov.html/

ВВП США

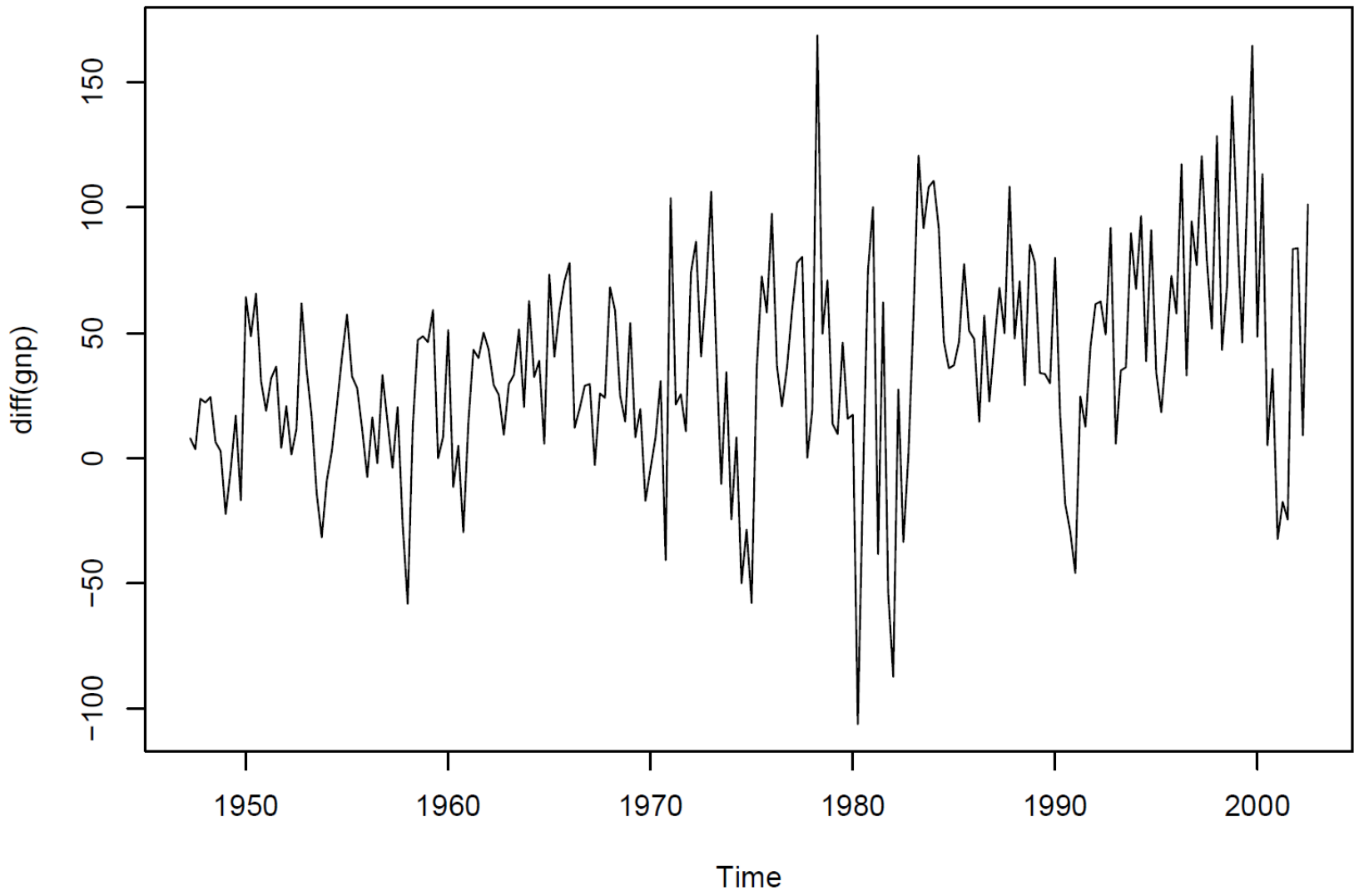
Поквартальные очищенные от сезонности данные о ВВП США в миллиардах долларов 1996 года:



Автокорреляция

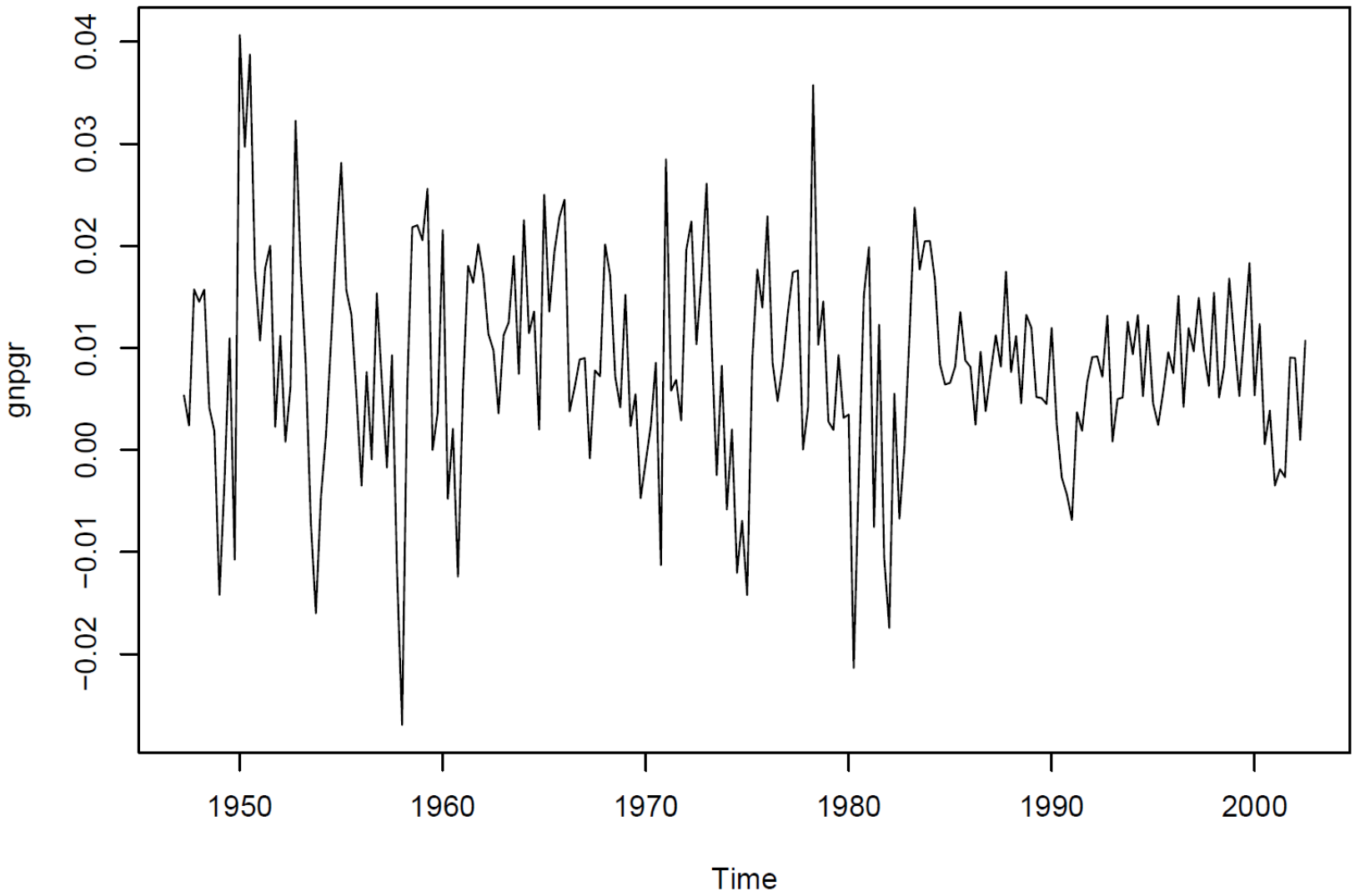


Ряд первых разностей



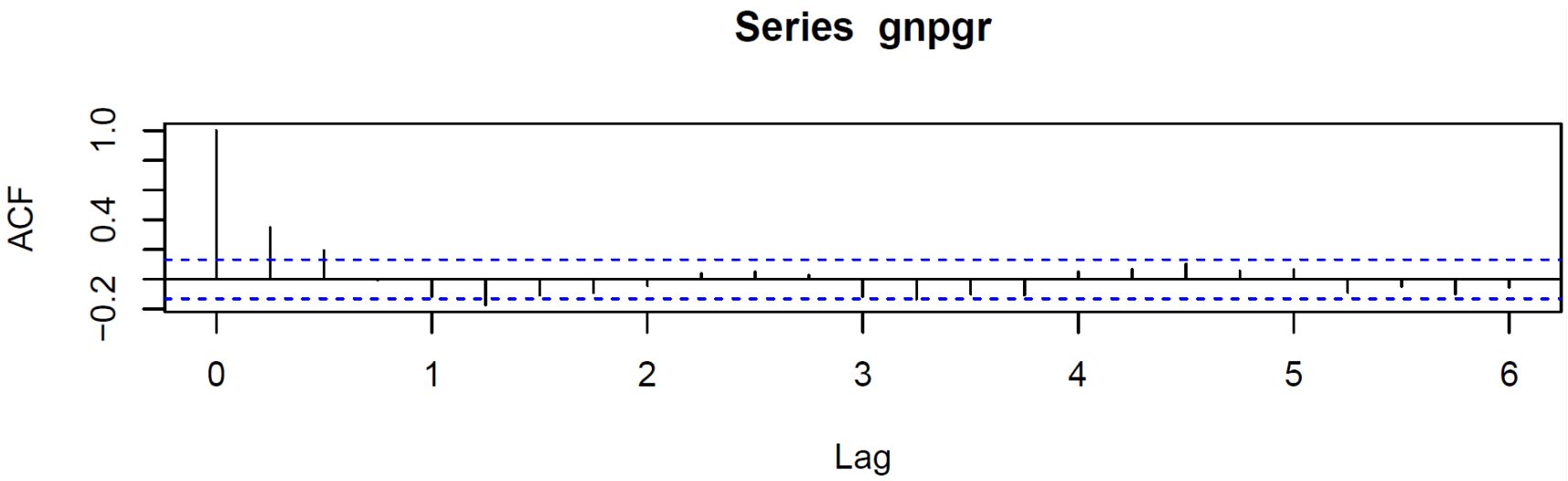
Нестационарен, вариация данных выше во второй половине ряда ($KPSS$ $p < 0.01$).

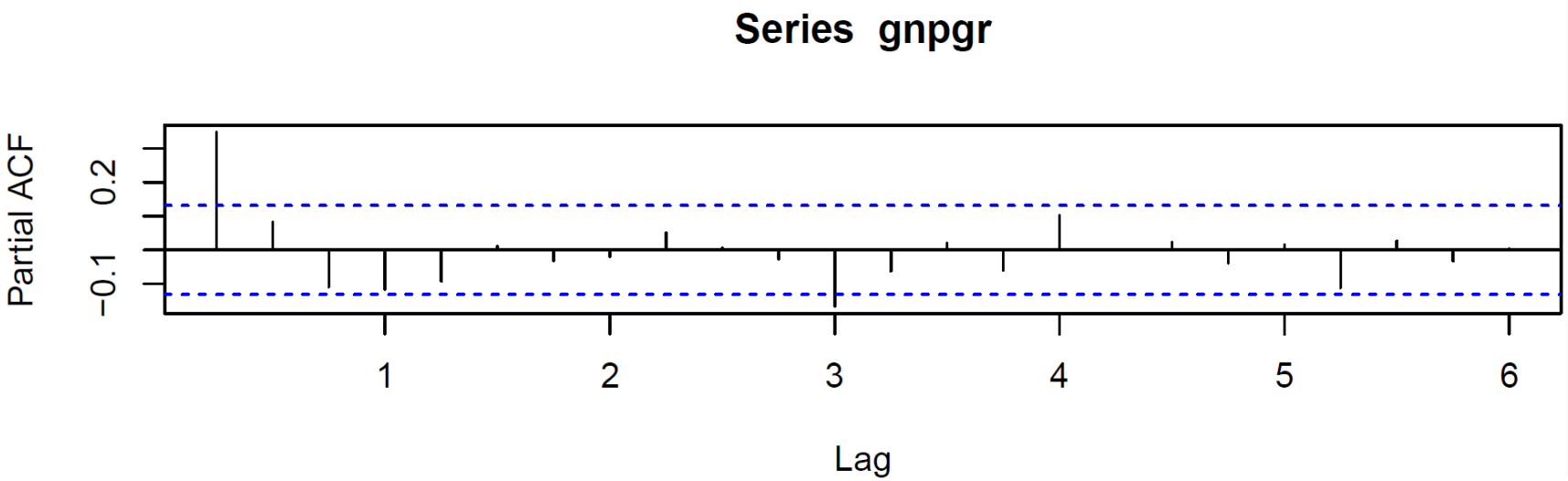
Ряд первых разностей логарифмов



Стационарен ($KPSS\ p > 0.1$), интерпретируется как прирост ВВП в процентах.

Автокорреляция и частичная автокорреляция ряда приростов





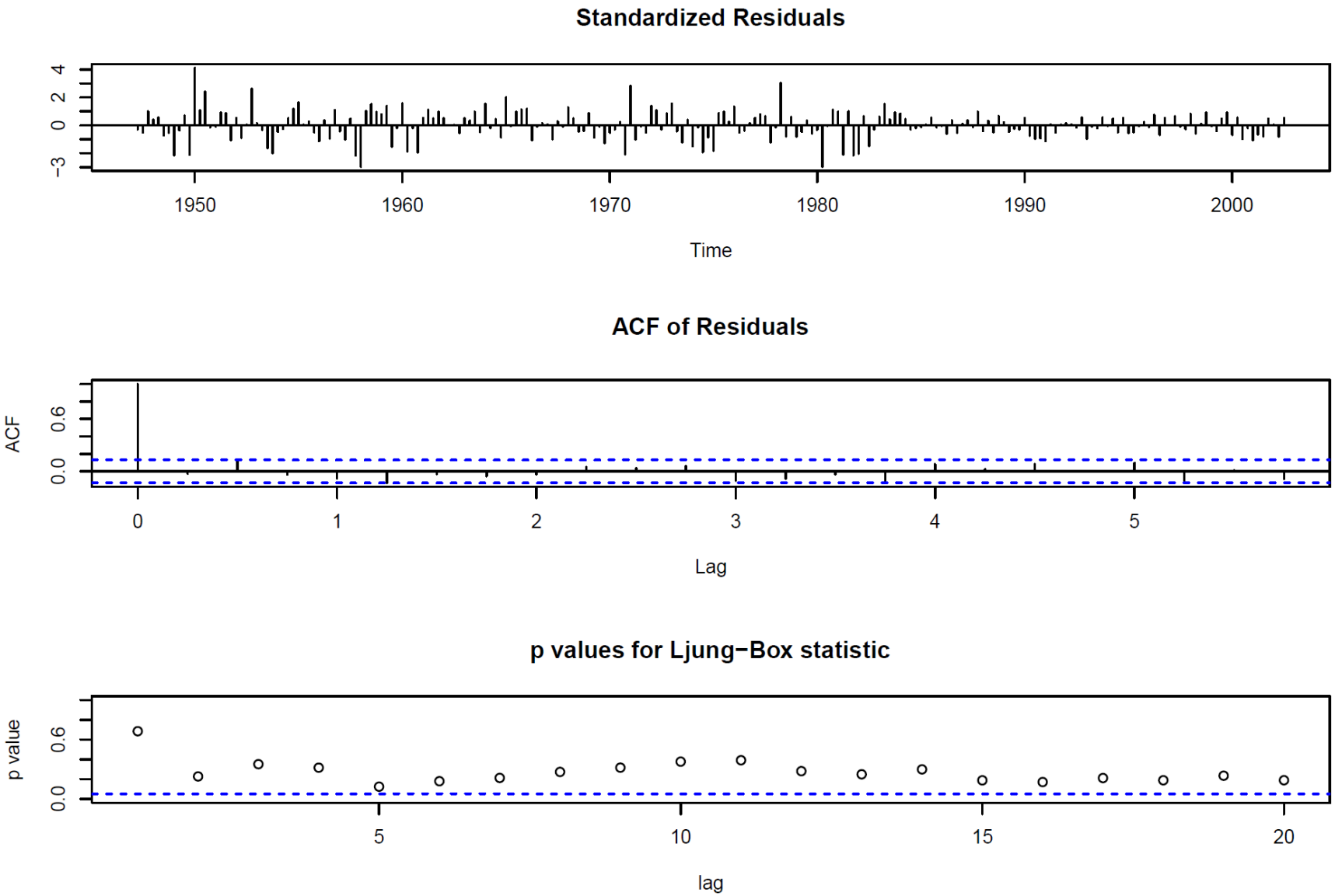
Модели

Варианты интерпретации графиков:

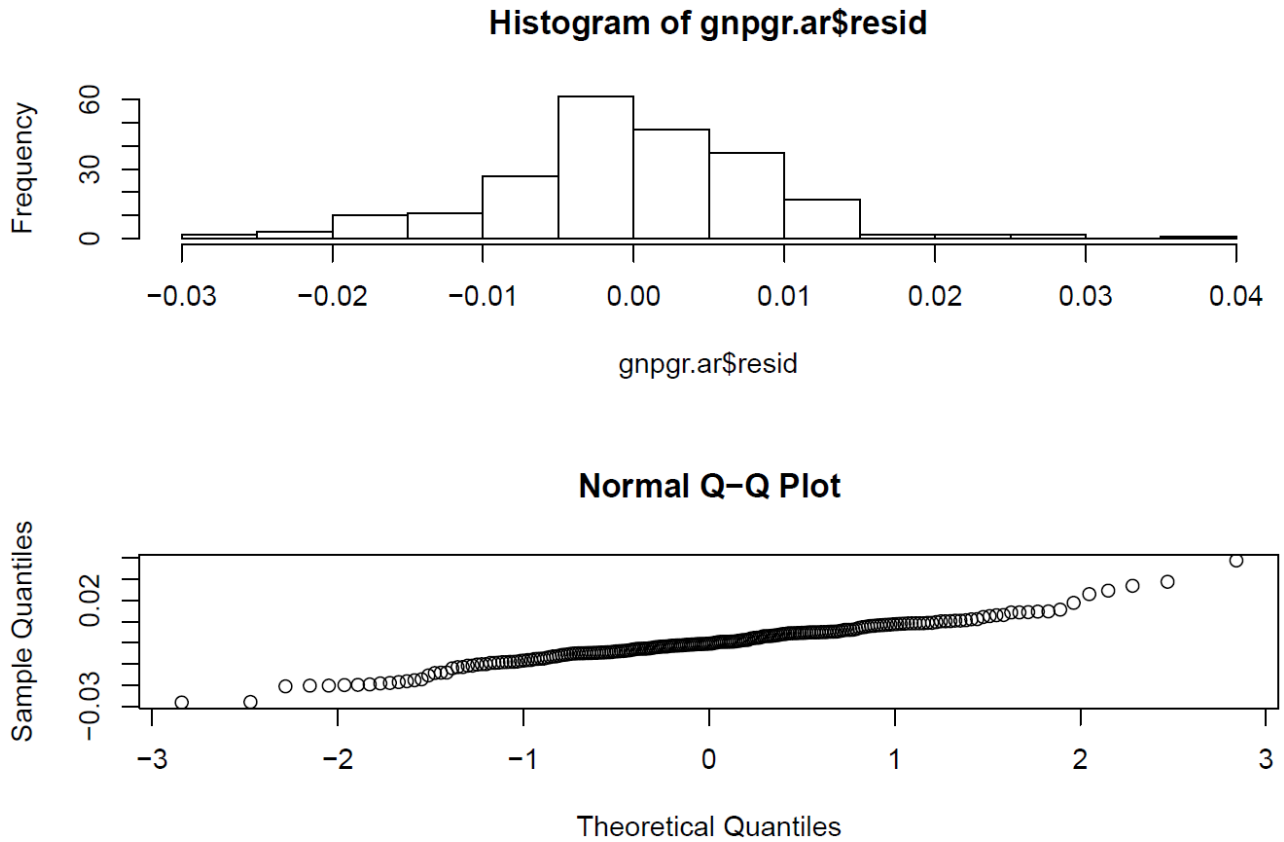
- AC равна нулю после лага 2, PAC убывает — модель $MA(2)$;
- PAC равна нулю после лага 1, AC убывает — модель $AR(1)$;
- модель $ARMA(1,2)$.

$$AR(1): \quad y_t = 0.005 + 0.347 y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \hat{\sigma}_\varepsilon = 0.0095;$$
$$MA(2): \quad y_t = 0.008 + 0.303 \varepsilon_{t-1} + 0.204 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t, \quad \hat{\sigma}_\varepsilon = 0.0094;$$
$$ARMA(1,2): \quad y_t = 0.008 + 0.241 y_{t-1} + 0.076 \varepsilon_{t-1} + 0.162 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t, \quad \hat{\sigma}_\varepsilon = 0.0089.$$

Диагностика $AR(1)$

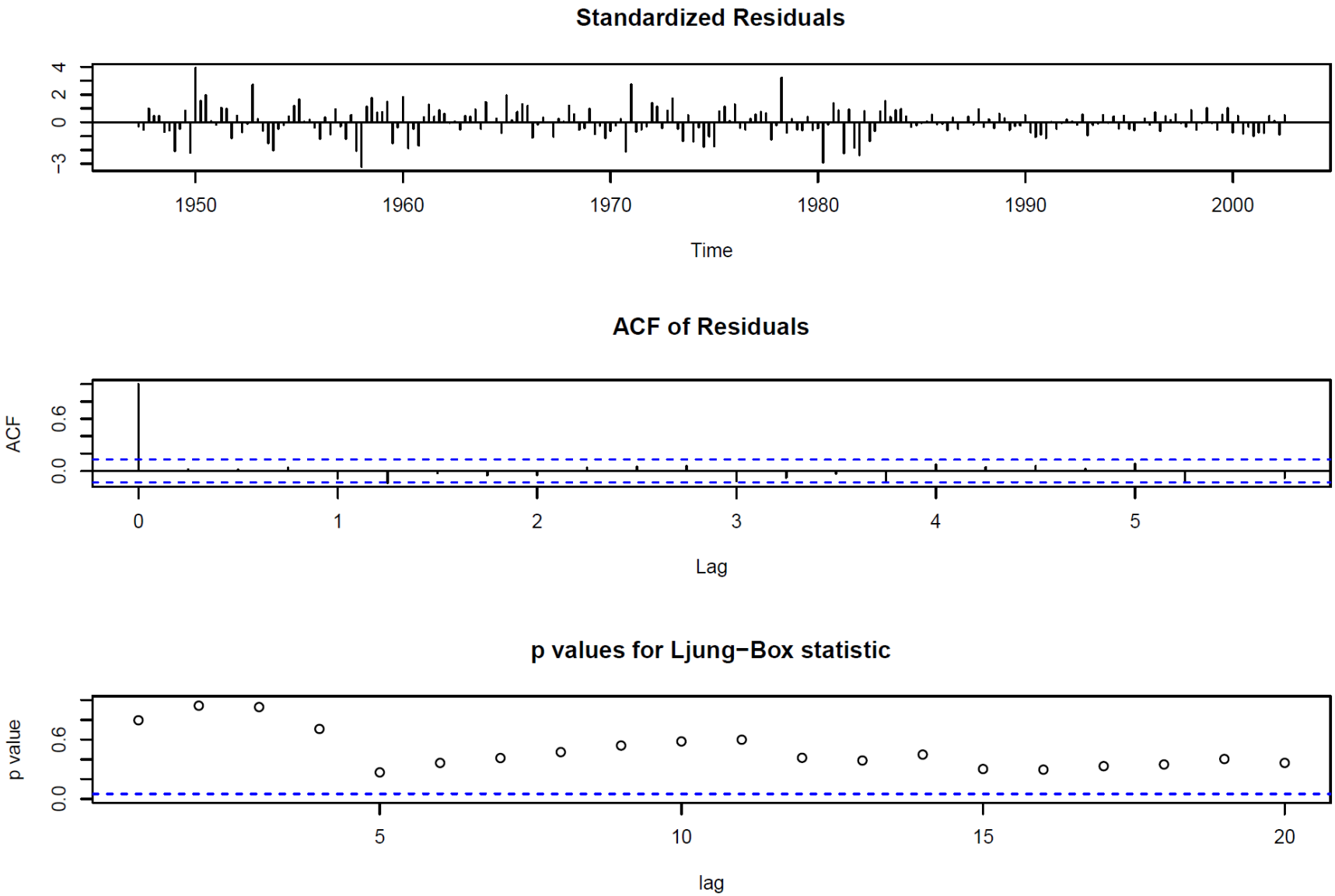


Диагностика $AR(1)$

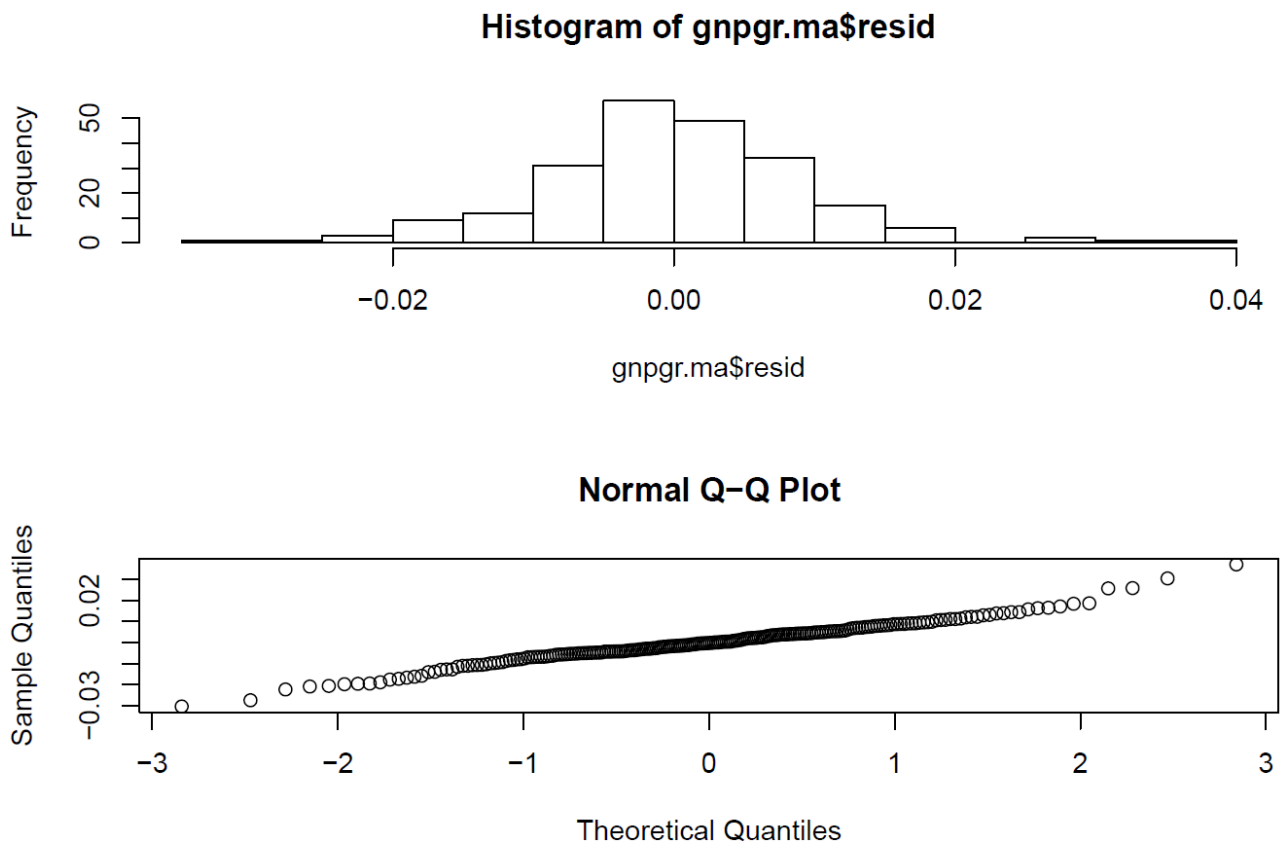


Критерий нормальности Шапиро-Уилка: $p = 0.0006886$.
Критерий Уилкоксона: $p = 0.8665$.
Критерий гомоскедастичности Бройша-Пагана: $p = 0.5613$.
Критерий стационарности KPSS: $p > 0.1$.

Диагностика $MA(2)$

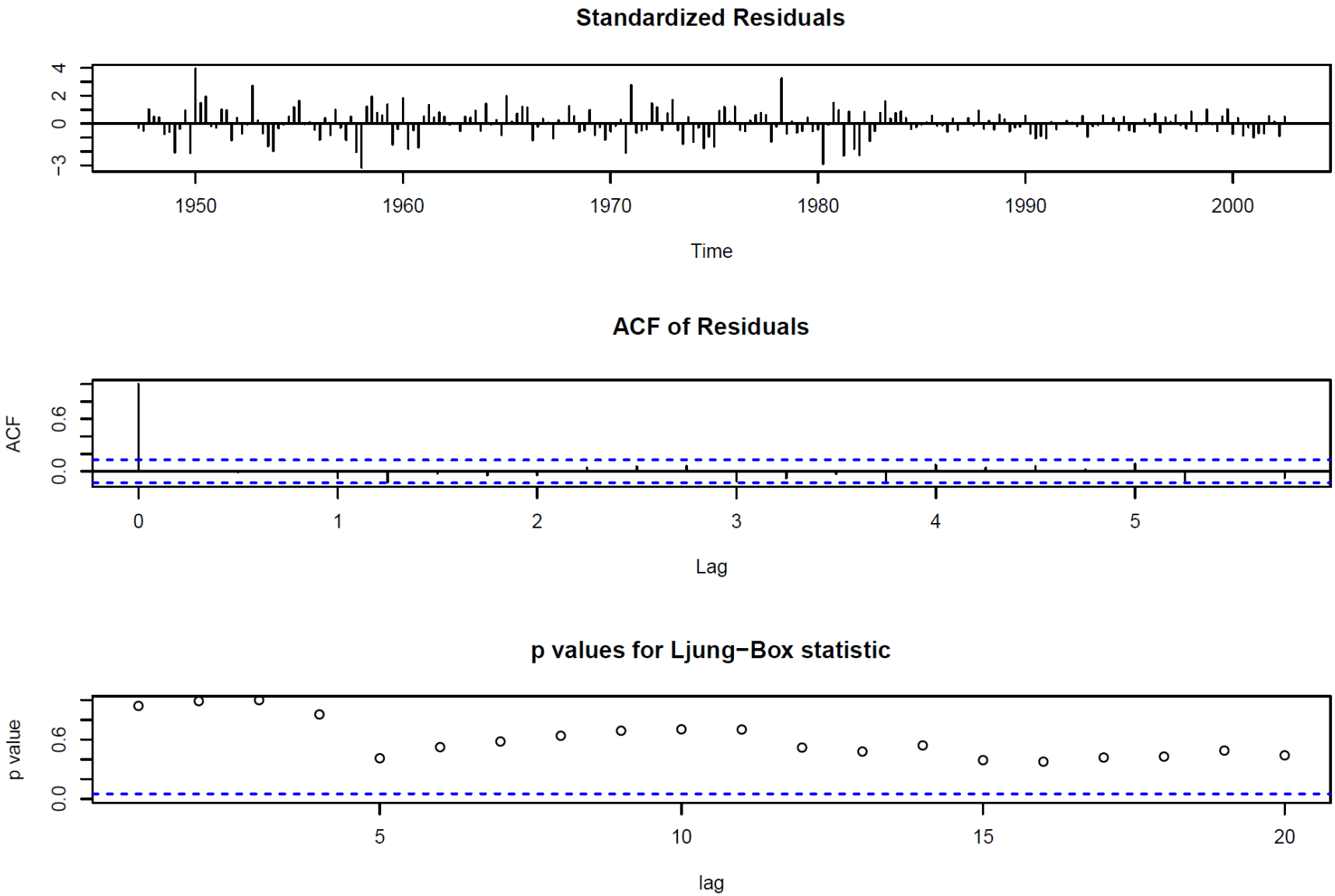


Диагностика $MA(2)$

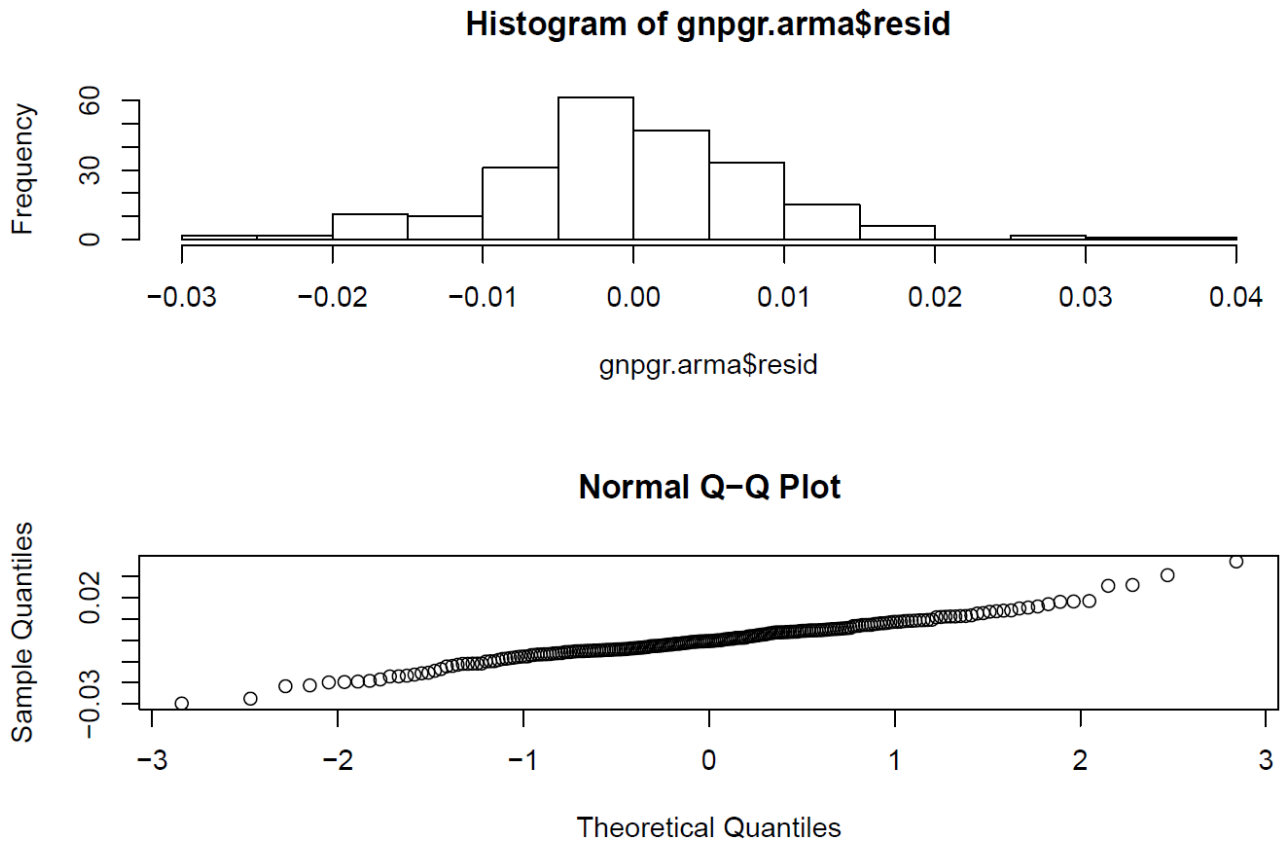


Критерий нормальности Шапиро-Уилка: $p = 0.003416$.
Критерий Уилкоксона: $p = 0.9917$.
Критерий гомоскедастичности Бройша-Пагана: $p = 0.4947$.
Критерий стационарности KPSS: $p > 0.1$.

Диагностика $ARMA(1,2)$



Диагностика $ARMA(1,2)$



Критерий нормальности Шапиро-Уилка: $p = 0.003497$.
Критерий Уилкоксона: $p = 0.9817$.
Критерий гомоскедастичности Бройша-Пагана: $p = 0.5165$.
Критерий стационарности KPSS: $p > 0.1$.

Сравнение моделей

AIC — информационный критерий Акаике:

$$AIC = \log\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \hat{y}_t)^2\right) + \frac{T+2k}{T},$$

где k — число параметров модели;
$AICc$ — он же с поправкой на случай небольшого размера выборки:

$$AICc = \log\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \hat{y}_t)^2\right) + \frac{T+k}{T-k-2};$$

BIC (SIC) — байесовский (Шварца) информационный критерий:

$$BIC = \log\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \hat{y}_t)^2\right) + \frac{k\log T}{T}.$$

	AIC	$AICc$	BIC
$AR(1)$	-1431.22	-8.284	-9.264
$MA(2)$	-1431.93	-8.297	-9.276
$ARMA(1,2)$	-1430.95	-8.301	-9.281

Виды сезонных эффектов

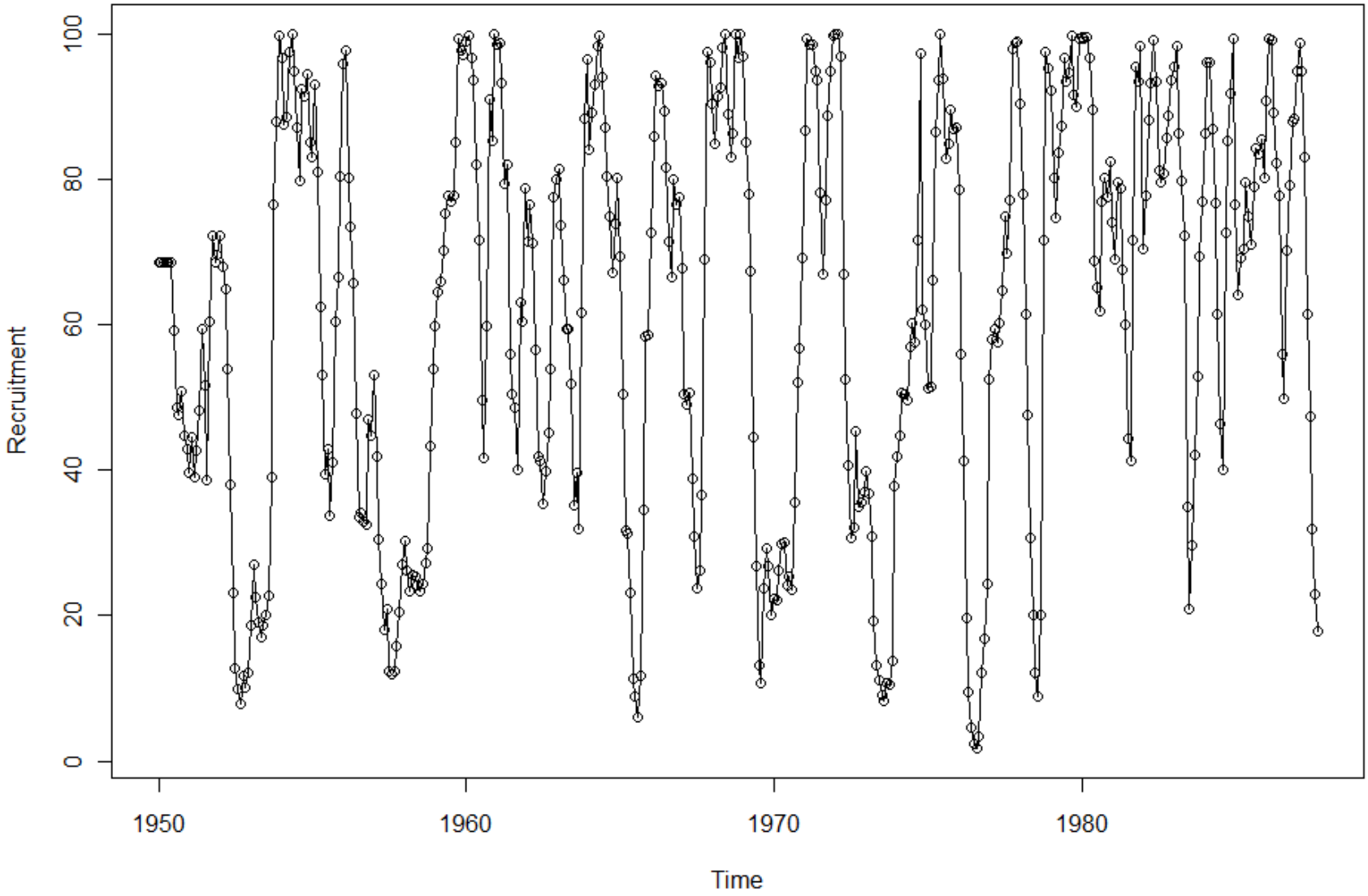
ESS Guidelines on Seasonal Adjustment
Сезонность — циклические изменения уровня ряда внутри повторяющегося периода, достаточно устойчивые между периодами.

Причины возникновения сезонности:

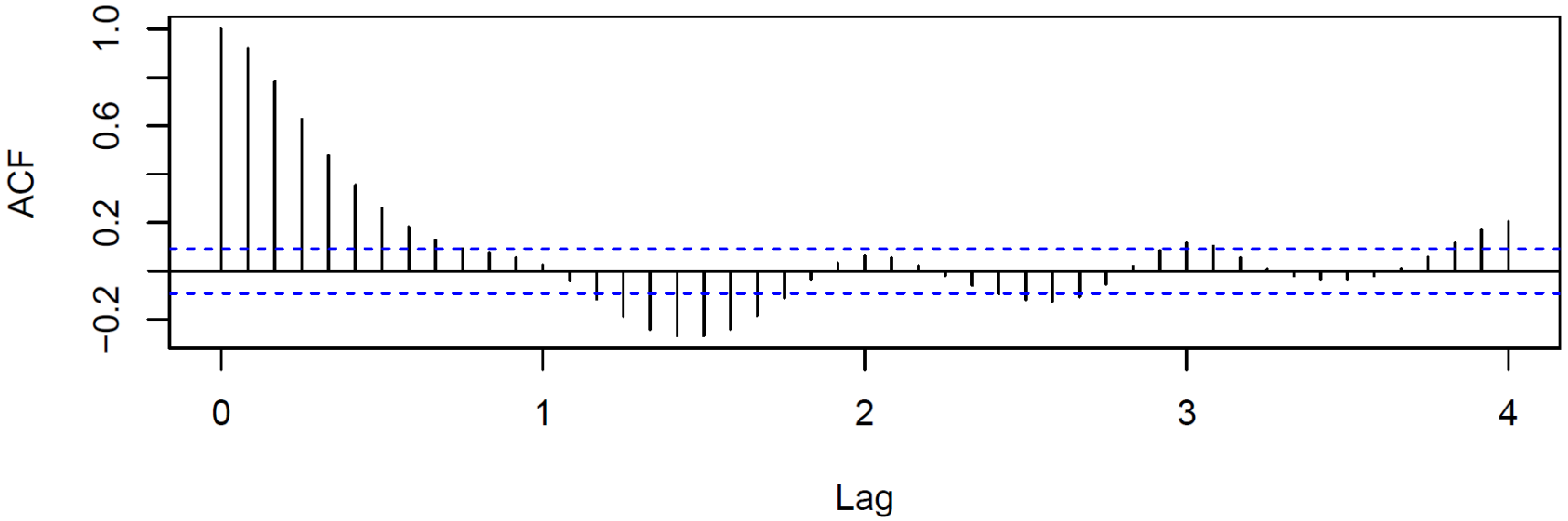
- природные факторы;
- административные и юридические факторы;
- календарные эффекты: число рабочих дней, эффекты фиксированных праздников.

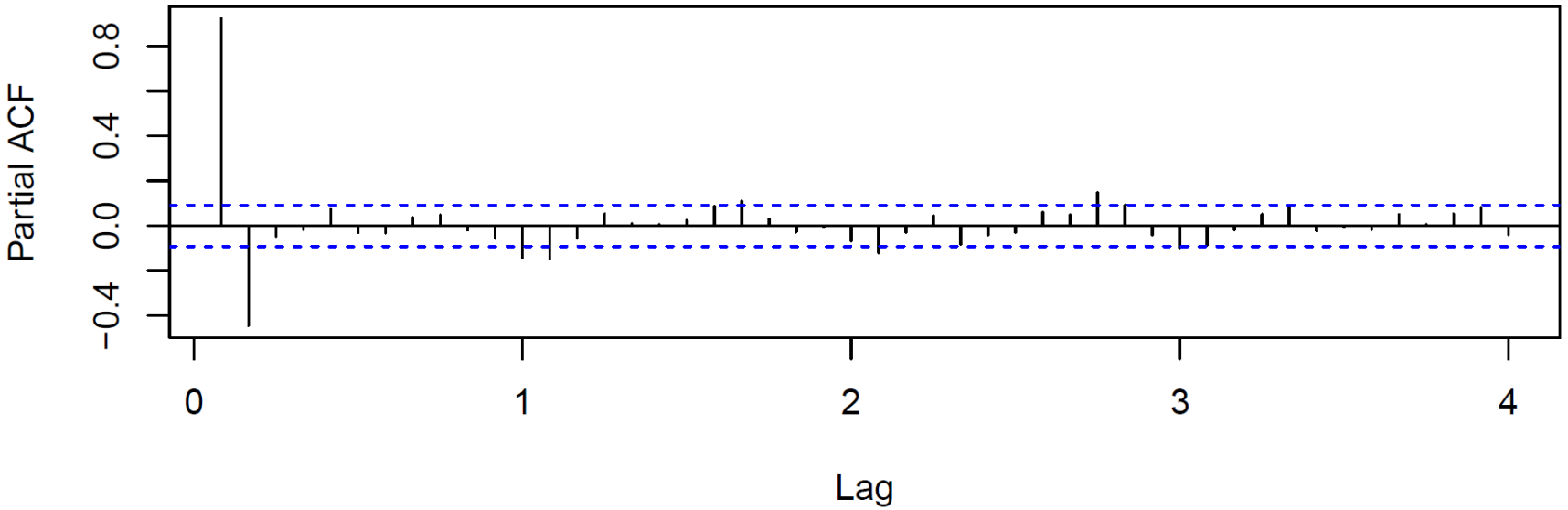
Размер популяции рыб

Recruitment — число новых особей рыбы — за каждый месяц 1950-1987:



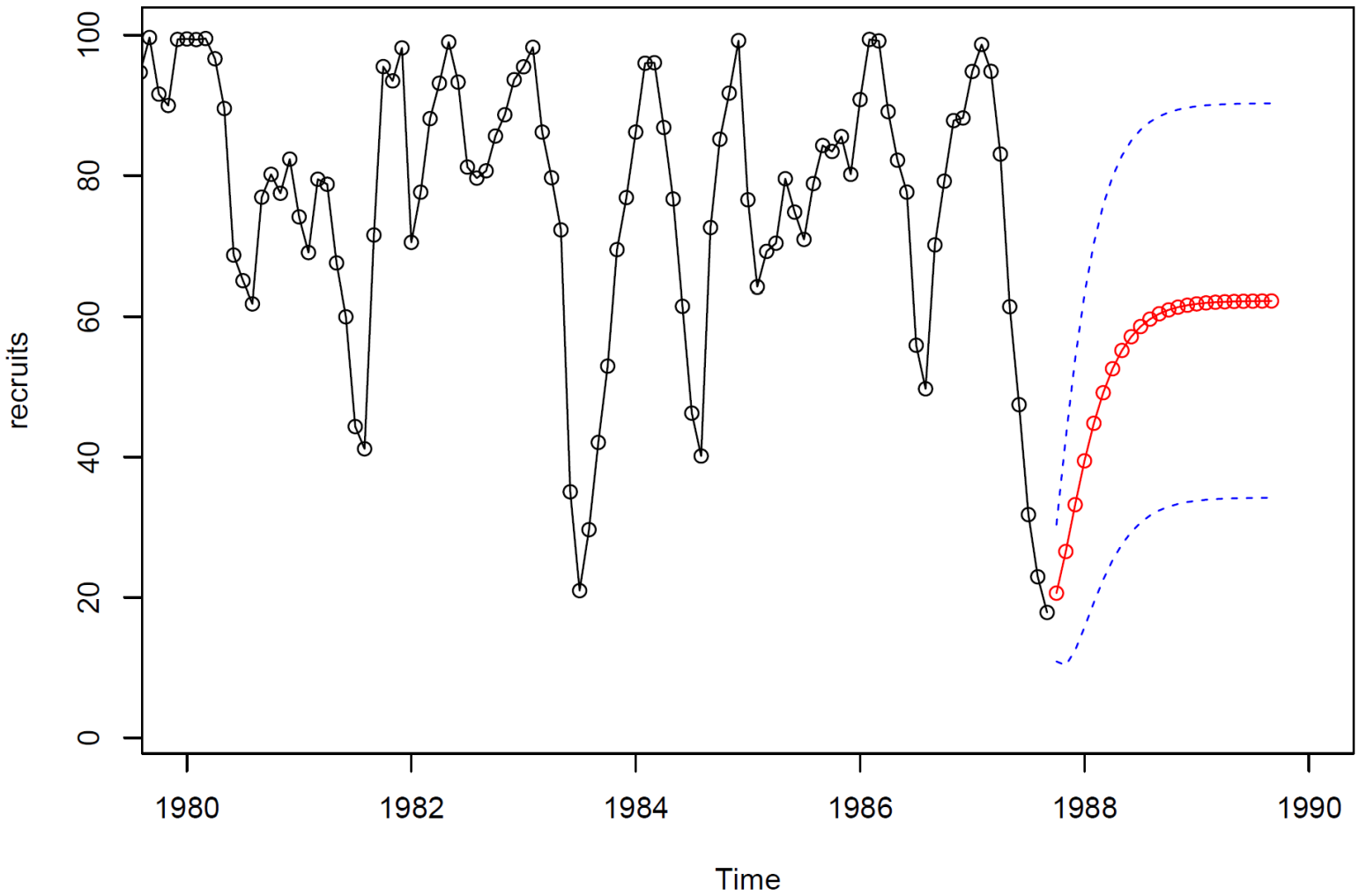
Корреляции





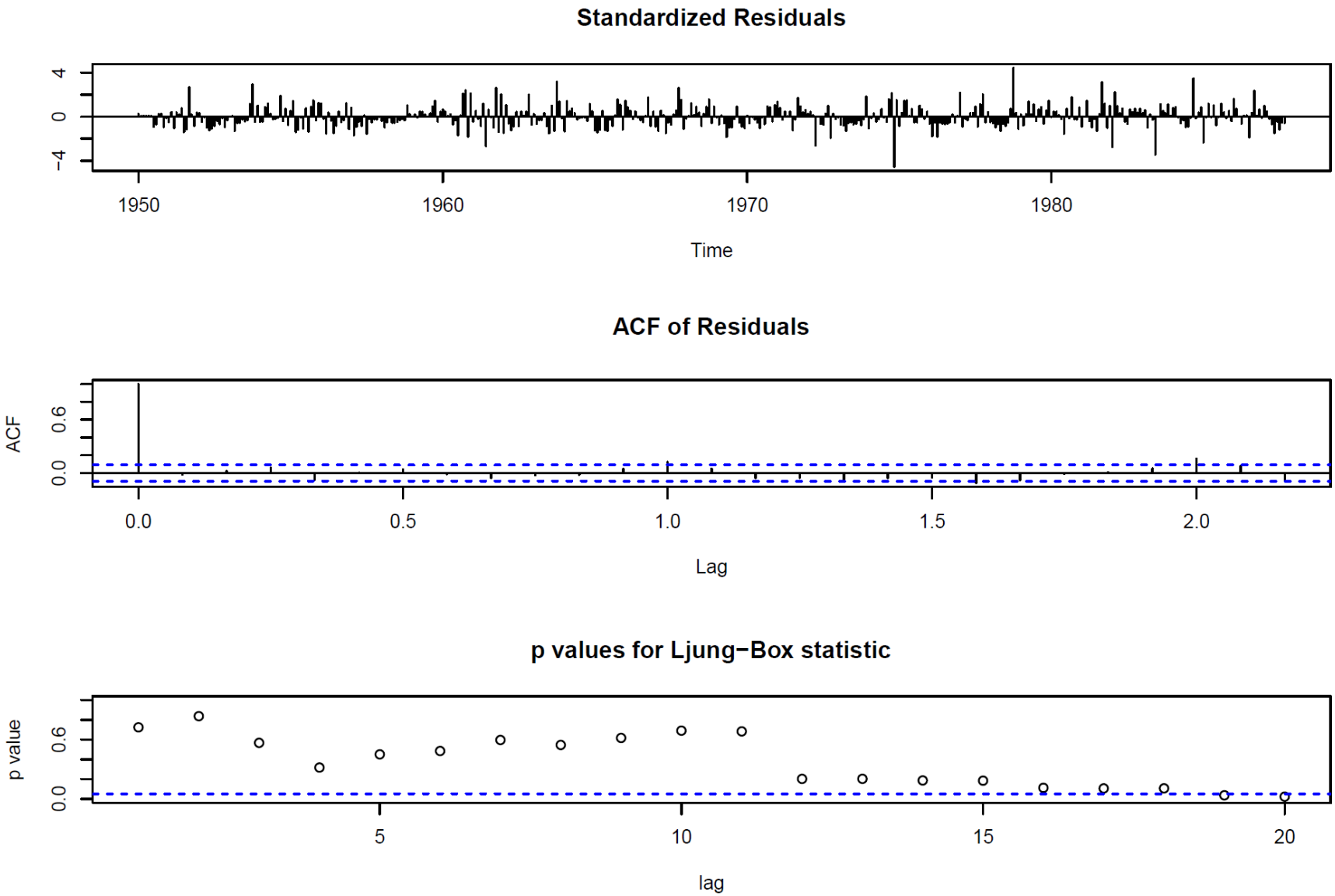
Прогноз

Выбор — модель $AR(2)$.

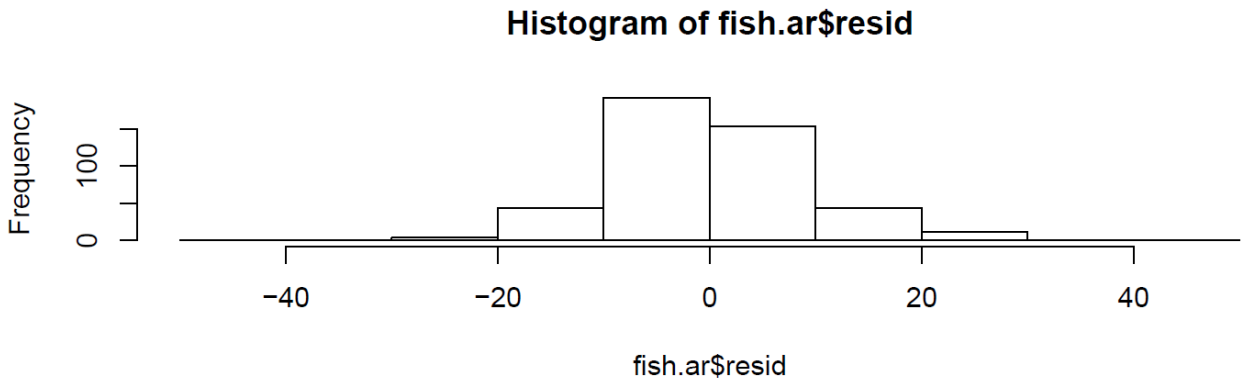


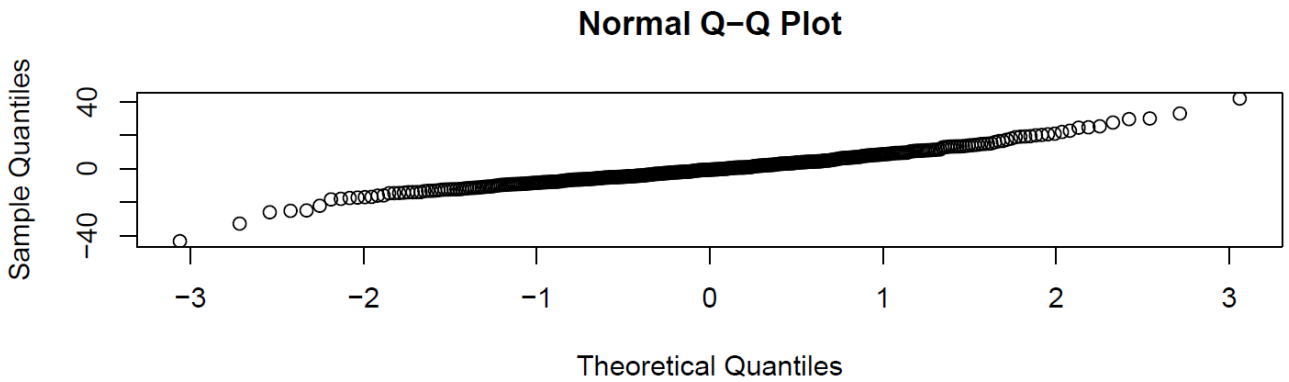
В моделях $ARMA(p, q)$ с увеличением горизонта прогноз всё больше похож на константу.

Диагностика $AR(2)$



Диагностика $AR(2)$





Критерий нормальности Шапиро-Уилка: $p = 2.7 \times 10^{-7}$.
Критерий Уилкоксона: $p = 0.4167$.
Критерий гомоскедастичности Бройша-Пагана: $p = 0.3783$.
Критерий стационарности KPSS: $p > 0.1$.

Seasonal multiplicative ARMA/ARIMA

$$ARMA(p,q)\times(P,Q)_s: \quad \Phi_P\left(B^s\right)\phi\left(B\right)y_t=\alpha+\Theta_Q\left(B^s\right)\theta\left(B\right)\varepsilon_t,$$

где

$$\Phi_P\left(B^s\right)=1-\Phi_1B^s-\Phi_2B^{2s}-\cdots-\Phi_PB^{Ps},$$
$$\Theta_Q\left(B^s\right)=1+\Theta_1B^s+\Theta_2B^{2s}+\cdots+\Theta_QB^{Ps}.$$

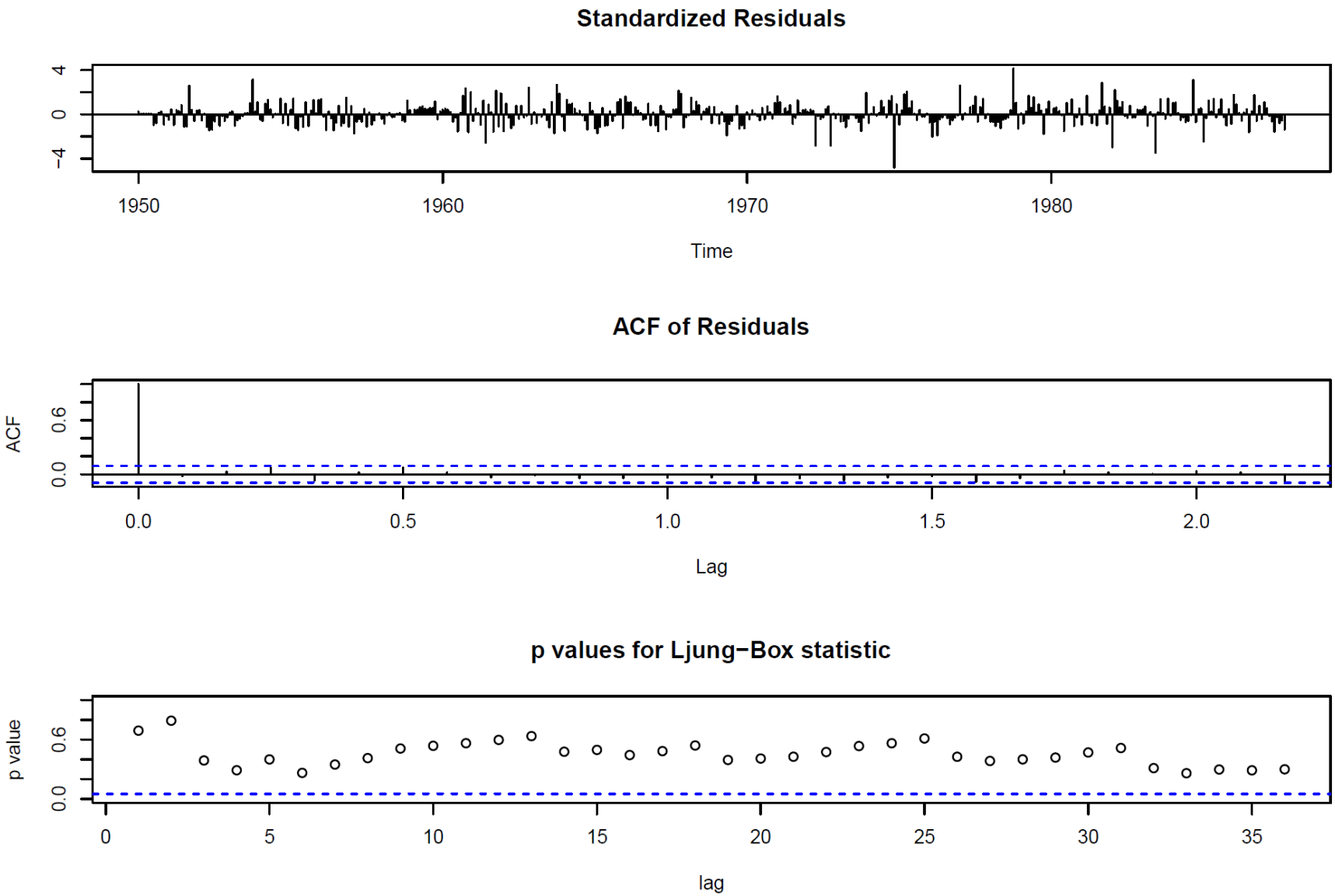
SARIMA:

$$\Phi_P\left(B^s\right)\phi\left(B\right)\nabla_s^D\nabla^dy_t=\alpha+\Theta_Q\left(B^s\right)\theta\left(B\right)\varepsilon_t.$$

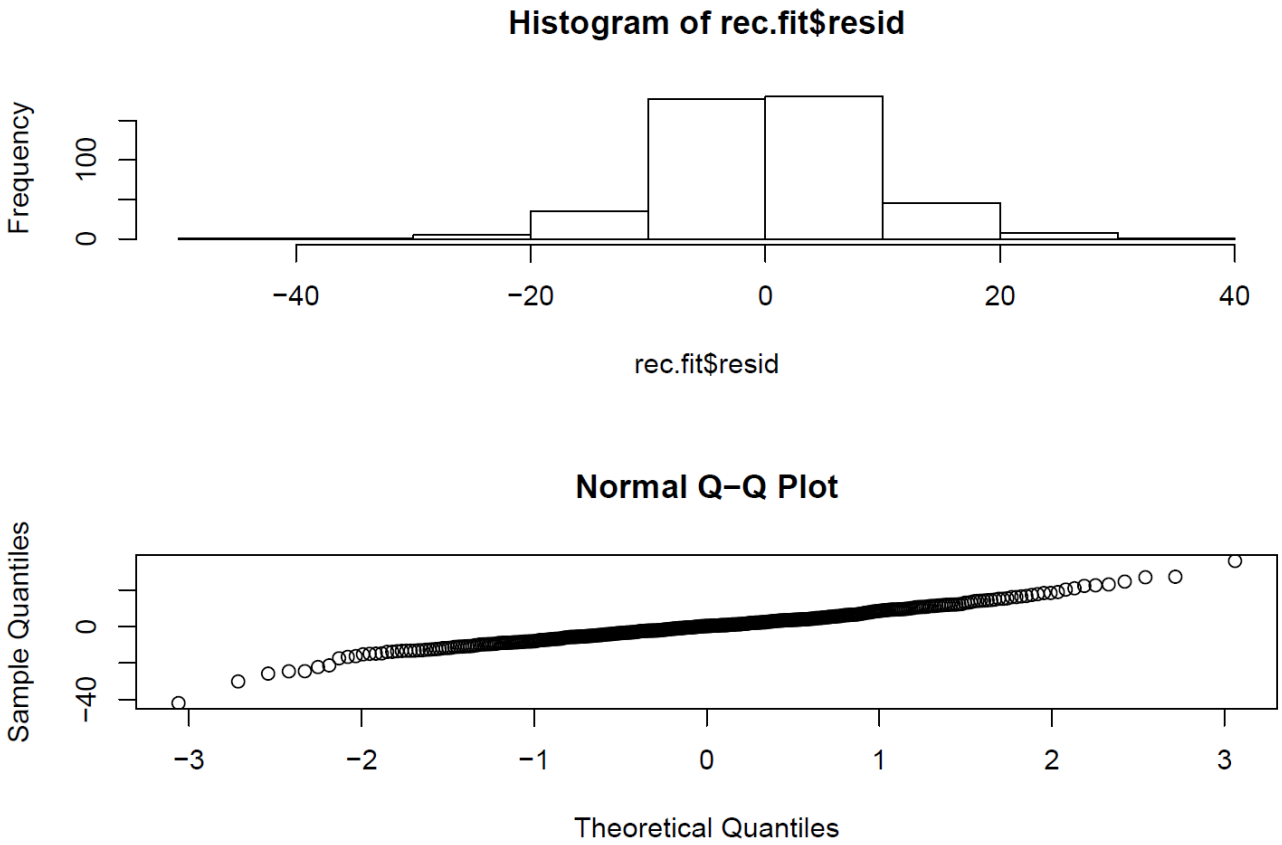
Сравнение моделей

	AIC
$ARMA(2,0) \times (3,0)_{12}$	3308.515
$ARMA(2,0) \times (2,0)_{12}$	3316.283
$ARMA(2,0) \times (1,0)_{12}$	3325.706
$ARMA(2,0) \times (0,1)_{12}$	3327.352
$ARMA(2,0) \times (0,2)_{12}$	3321.880
$ARMA(2,0) \times (0,3)_{12}$	3314.787
$ARMA(2,0) \times (1,1)_{12}$	3283.717

Диагностика $ARMA(2.0) \times (1,1)_{12}$

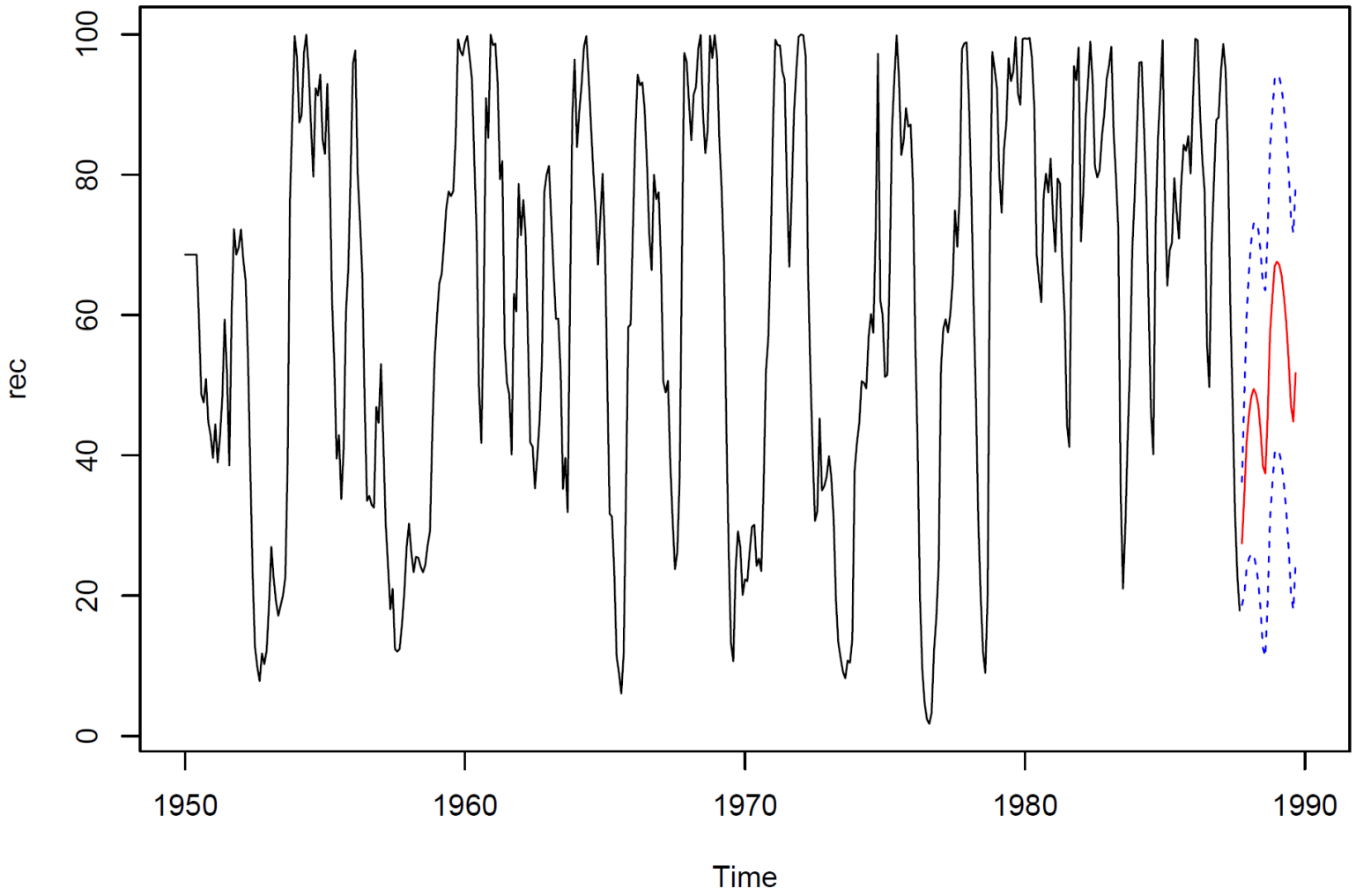


Диагностика $ARMA(2.0) \times (1,1)_{12}$

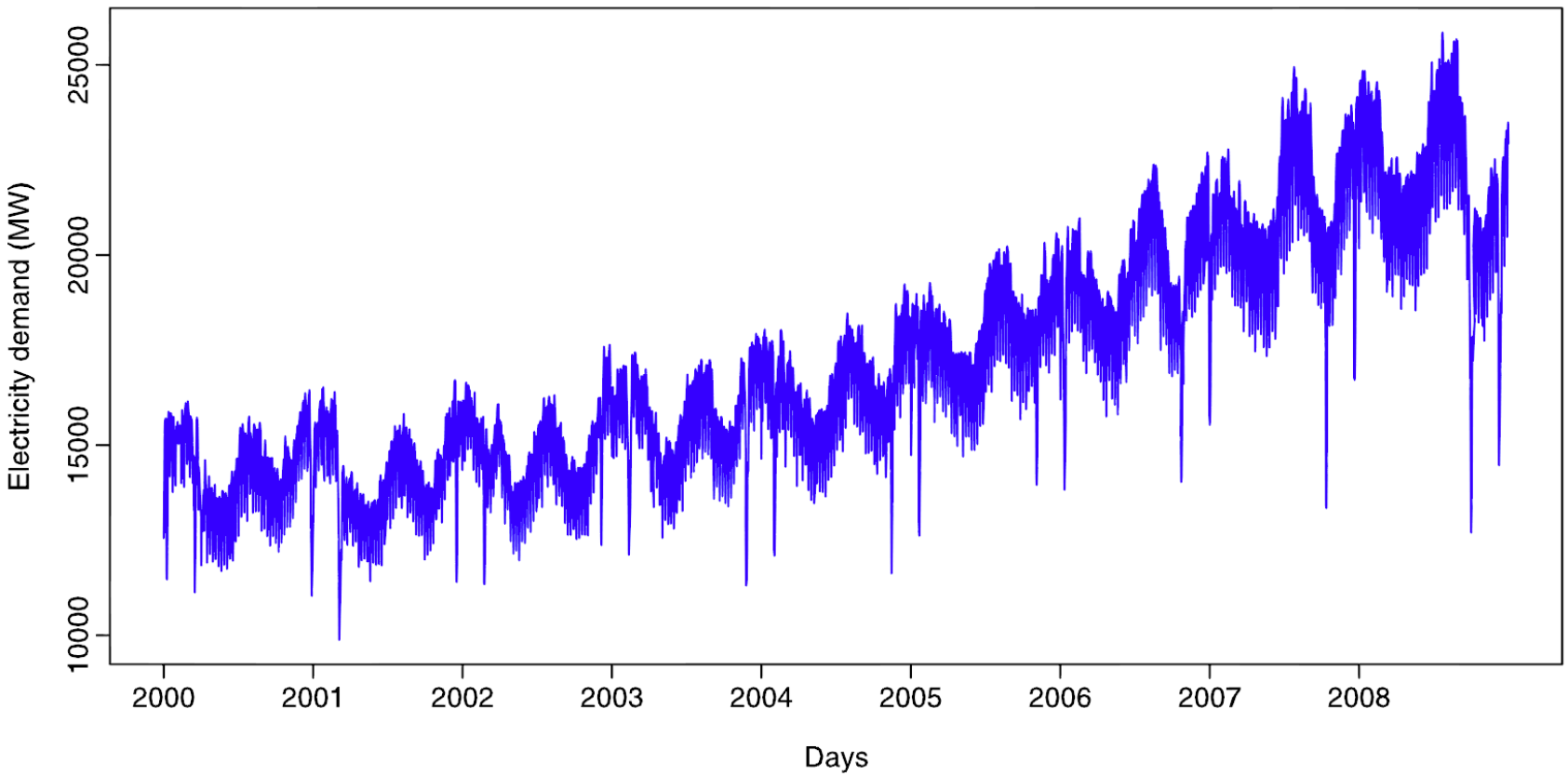


Критерий нормальности Шапиро-Уилка: $p = 6.8 \times 10^{-6}$.
Критерий Уилкоксона: $p = 0.7387$.
Критерий гомоскедастичности Бройша-Пагана: $p = 0.2546$.
Критерий стационарности KPSS: $p > 0.1$.

Прогноз



Потребление электричества в Турции



- недельная сезонность;
- годовая сезонность;
- праздники по исламскому календарю (год примерно на 11 дней короче, чем в грегорианском).

regARIMA

Эффекты плавающих праздников, краткосрочных маркетинговых акций и других нерегулярно повторяющихся событий удобно моделировать с помощью regARIMA:

$$\Phi_P\left(B^s\right)\phi\left(B\right)\nabla_s^D\nabla^d z_t = \Theta_Q\left(B^s\right)\theta\left(B\right)\varepsilon_t$$

$$+$$

$$y_t = \sum_{j=1}^{k}\beta_j x_{jt} + z_t$$

$$=$$

$$\Phi_P\left(B^s\right)\phi\left(B\right)\nabla_s^D\nabla^d\left(y_t - \sum_{j=1}^{k}\beta_j x_{jt}\right) = \Theta_Q\left(B^s\right)\theta\left(B\right)\varepsilon_t.$$

Оценка параметров модели

1. Проверить стационарность признаков, если её нет, перейти к разностям. Для лучшей интерпретируемости разностный оператор следует применять и к признакам тоже.
2. Для ряда разностей строится регрессия в предположении, что ошибки описываются моделью начального приближения (как правило, $AR(2)$ или $SARMA(2,0,0) \times (1,0)_s$).
3. Для остатков регрессии $\hat{z}_t$ подбирается подходящая модель $ARMA\,(p_1, q_1)$.
4. Регрессия перестраивается в предположении, что ошибки описываются моделью $ARMA\,(p_1, q_1)$.
5. Анализируются остатки $\hat{\varepsilon}_t$.

Источник: Hyndman, Athanasopoulos. Forecasting: principles and practice. `https://www.otexts.org/book/fpp`

Для подзадачи регрессии формальная проверка значимости признаков неприменима, для отбора признаков необходимо сравнивать значения AIC моделей со всеми подмножествами x_j.

Пример

https://www.otexts.org/fpp/9/1

Реализации

- US Census Bureau: X-12-ARIMA, X-13-ARIMA-SEATS (`http://www.census.gov/srd/www/x13as/`, доступен через иностранные прокси-серверы);
- Matlab: regARIMA (2013b);
- R: пакет X12.

Прикладная статистика
11. Анализ временных рядов.

Рябенко Евгений
riabenko.e@gmail.com