Конспект лекций по курсу

КОМБИНАТОРНЫЕ И ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ДАННЫХ

группа 517 (магистратура)
осенний семестр 2016/17 уч. года

Лектор *С. И. Гуров*

2016

Глава 1

Информационный подход в распознавании образов

1.1 Информация по Хартли

Определение 1.1 (информация по Хартли). Если Ω — конечное множество, то *информация* $I(\omega)$ *его элемента* $\omega \in \Omega$ есть величина

$$I(\omega) = \log \big|\Omega\big|.$$

Если на Ω задано отношение эквивалентности $\sim$, то *информация* $I_{\sim}(\omega)$ *элемента* ω *по эквивалентности* ω есть

$$I_{\sim}(\omega) = \log \big|[\omega]_{\sim}\big|$$

(т.е. $I_{\sim}(\omega)$ есть логарифм мощности класса эквивалентности, в который попадает элемент ω; здесь и далее все логарифмы — по основанию 2 $\Rightarrow$ информация измеряется в *битах*).

Ральф Хартли (Ralph Vinton Lyon Hartley, 1888–1970) — американский исследователь области электроники (ему принадлежат более 70 патентов); ввёл в 1928 г. логарифмическую меру информации, которая называется *хартлиевским количеством информации.*

Утверждение 1.1. *Если $N = \left|\Omega/\sim\right|$ — число классов эквивалентности, то*

$$\sum_{\omega\in\Omega} 2^{-(I_\sim(\omega)+\log N)} = 1.$$

Доказательство. Пусть W_i — i-й класс эквивалентности. Тогда (суммирование «по элементам» $\to$ «по классам эквивалентности»)

$$\sum_{\omega\in\Omega} 2^{-(I_\sim(\omega)+\log N)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|W_i\right|\cdot 2^{-\log|W_i|} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} 1 = 1.$$

□

Неравномерные коды. Пусть

- X — конечный алфавит;
- X^n — множество всех слов длины n в X (сообщений);
- $\{0,1\}$ — множество *кодовых слов*: все слова ненулевой длины в двоичном алфавите.

Для однозначности восстановления сообщений при приёме сообщений нужно использовать:

- кодовые слова одинаковой длины (блоковое помехозащищённое кодирование);
- разделитель между кодовыми словами (как, например, в азбуке Морзе);
- префексные коды.

Определение 1.2. *Неравномерным кодом* (*сжимающим отображением*) называют отображение

$$\psi : X^n \to \{0,1\}^+,$$

определённое для каждого $n = 1, 2, \ldots$.

Код называется *префексным* или *дешифрируемым*, если $\psi(x)$ не является началом никакого слова $\psi(x')$, $x' \neq x$.

Длина кодового слова $\psi(x)$ обозначается $l(x)$.

Критерий существования существования префиксных кодов —

Утверждение 1.2 (неравенство Крафта). *Для существования префиксного кода C из N слов с длинами $l_1, \ldots, l_N$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{i=1}^{N} 2^{-l_i} \leqslant 1.$$

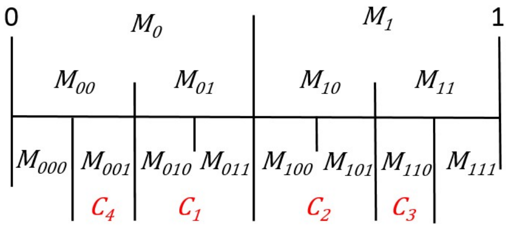
Пример 1.1. $C = \{01, 10, 110, 001\}, l_1 = l_2 = 2,\ l_3 = l_4 = 3,$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} < 1.$$

Доказательство. Рассмотрим код C из N слов с длинами $l_1, l_2, \ldots, l_N$ и отрезок $[0; 1]$ на числовой прямой.

1. Разделим его пополам, левую половину обозначим M_0, а правую — M_1.
2. Поделим M_0 пополам и обозначим его левую половину M_{00}, а правую M_{01}, и, проделав то же самое с M_1, получим M_{10}, а левую M_{11}... и т.д., пока длина индекса полученного отрезка M_j не станет $= \max\{l_1, l_2, \ldots, l_N\}$.

В нашем примере



$$C = \{01,\ 10,\ 110,\ 001\}$$

Ясно, что:

- любому кодовому слову C_j сопоставлен свой отрезок M_{C_j} — например, кодовому слову 110 соответствует отрезок M_{110};
- длина отрезка M_{C_i} равна 2^{-l_i};
- если код C — префиксный, то никакие два отрезка не пересекаются;
- сумма длин отрезков не превзойдет 1, т.е.

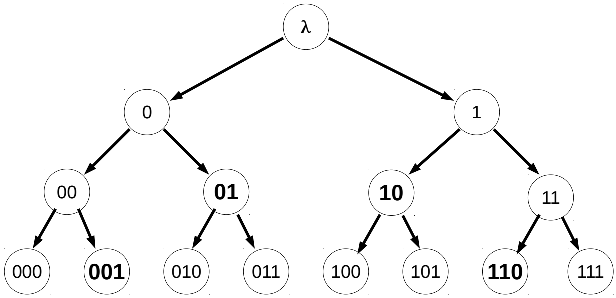
$$\sum_{i=1}^{N} |M_{C_i}| = \sum_{i=1}^{N} 2^{-l_i} \leqslant 1.$$

□

Следствие. *Существует префиксный двоичный код с длинами* $l(\omega) = \lceil I(\omega) + \log N \rceil$.

Пример 1.2. Укоренённое двоичное дерево можно рассматривать как графическое описание префиксного кода над $\{0,1\}^+$.

Неравенство Крафта для таких деревьев: $\sum_{x \in L} 2^{-\mathrm{depth}(x)} \leqslant 1$, где L — множество листьев дерева, а $\mathrm{depth}(x)$ — глубина листа x.



1.2 Действие группы на множестве

Действие группы на множестве: два определения. Пусть заданы

- Группа $\mathcal{G} = \langle\, G, \circ, e \,\rangle,\ |G| = n \geqslant 1.$
- Множество $\Omega \neq \varnothing,\ |\Omega| = N.$
- $Bij(\Omega)$ — множество всех биекций (перестановок) элементов Ω.
- $Sym(\Omega)$ — симметрическая группа множества Ω:
$$Sym(\Omega) = \langle\, Bij(\Omega), *, 1_\Omega \,\rangle = S_N$$

Обозначение действия группы $\mathcal{G}$ на множестве Ω — $\mathcal{G} \underset{\alpha}{:} \Omega$ или просто α.

<u>*Определение*</u> 1.3 (I). $\alpha \in \mathrm{Hom}\ (\,\mathcal{G}, Sym(\Omega)\,)$.

Пример 1.3. $\forall\, g \in G : \alpha(g) = 1_\Omega$ — *тривиальное действие.*

Определение 1.4 (II). $\alpha = \langle\, G,\, \Omega;\, \circ,\, \star,\, e\,\rangle$,
где редукт $\langle\, G,\, \circ,\, e\,\rangle = \mathcal{G}$, т.е.

$G \times G \xrightarrow{\circ} G$ — групповая операция, а

$G \times \Omega \xrightarrow{\star} \Omega$ — новая операция.

Аксиомы для этих операций:

$$1)\ e \star \omega = \omega; \qquad 2)\ (g \circ h) \star \omega = h \star (g * \omega).$$

Запись операции $\star$: $g \star \omega = g(\omega)$, тогда *аксиомы*: $e(\omega) = \omega$ и $(g \circ h)(\omega) = h(g(\omega))$.

Элементы g группы G порождают перестановки на Ω, обладающие вышеуказанными свойствами.
Часто вместо «*элемент* g *(группы* G*)*» будем говорить «*перестановка (элемента* Ω*)*».

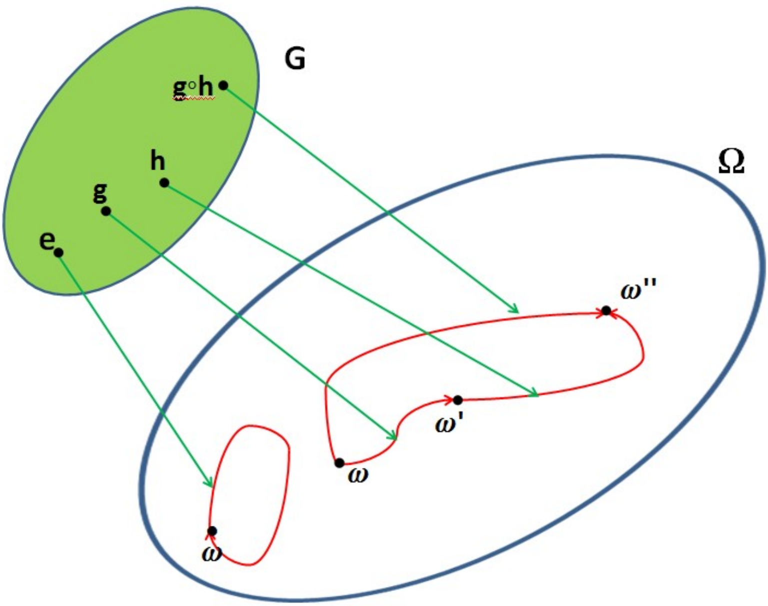


Рис. 1.1. Действие группы на множестве: схема

Для данной перестановки g:

Введём отношение эквивалентности $\sim_g$ на Ω —

$$\omega \sim_g \omega' \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : g^k(\omega) = \omega'$$

Рефлексивность (R), *симметричность* (S) и *транзитивность* (T) отношения $\sim_g$ легко показывается.

Смежные классы эквивалентности $\sim_g$ называются *g-циклами.* Действительно, легко видеть, что элементы этих классов образуют циклы:

$\omega \xrightarrow{g} \omega' \xrightarrow{g} \ldots \xrightarrow{g} \omega,$ *и у каждого элемента — по единственной входящей и исходящей стрелке.*

Обозначения:

- $C(g)$ — число g-циклов (смежных классов по эквивалентности $\sim_g$).
- $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N$ (или $\nu_1(g), \nu_2(g), \ldots, \nu_N(g)$) — количества циклов длины $1, 2, \ldots, N$.
- $\langle\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N \,\rangle = Type(g)$ — *тип перестановки* g (упорядоченная совокупность количеств циклов).

Понятно, что $\sum\limits_{k=1}^{N} \nu_k(g) = C(g)$ и $\sum\limits_{k=1}^{N} k \cdot \nu_k(g) = N.$

Пример 1.4 (Тип перестановки). Пусть

$\Omega = \{\, 1, \ldots, 10 \,\},$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 6 & 1 & 8 & 5 & 2 & 7 & 10 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= (1,9,3)(2,6)(4,8,10)(5)(7) = (1,9,3)(2,6)(4,8,10)$$

Тогда $Type(g) = \langle\, 2, 1, 2, 0, \ldots, 0 \,\rangle$, и

$C(g) = 2+1+2 = 5, \quad \left|\,\Omega\,\right| = 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 3 = 10.$

<u>*По всей группе $\mathcal{G}$:*</u>

Отношение эквивалентности $\sim_{\mathcal{G}}$ на Ω —

$$\omega \sim_{\mathcal{G}} \omega' \stackrel{\text{def}}{=} \underset{G}{\exists}\, g : g(\omega) = \omega'.$$

Свойства (R), (S) и (T) отношения $\sim_{\mathcal{G}}$ очевидны.

- Классы этой эквивалентности называют *орбитами*; они образуют разбиение множества Ω.
- Класс эквивалентности, в которую попадает элемент ω обозначаем $\mathrm{Orb}\,(\omega)$.
- Число получившихся орбит — $C(\mathcal{G})$.

Если $C(\mathcal{G}) = 1$ (любой элемент Ω может быть переведён в любой), то действие $\mathcal{G} \underset{\alpha}{:} \Omega$ называют *транзитивным*.

Соответствующую *эквивалентность* будем обозначать так же, как и порождающее её *действие* группы на множестве — α и поэтому

$$I_{\sim_{\mathcal{G}}}(\omega) = I_\alpha(\omega) = \log \big|\, \mathrm{Orb}\,(\omega) \,\big|.$$

Фиксатор перестановки и стабилизатор элемента множества. Будем решать уравнение

$$g(\omega) = \omega.$$

При выполнении этого равенства можно фиксировать либо ω, либо g.

1. Фиксируем g, т.е. находим все элементы множества Ω, которые перестановка g оставляет на месте — это *фиксатор перестановки* $g \in \mathcal{G}$:

$$\big\{\, \omega \in \Omega \mid g(\omega) = \omega \,\big\} = \mathrm{Fix}\,(g) \subseteq \Omega.$$

2. Фиксируем ω, т.е. находим все перестановки g, которые оставляют данный элемент неподвижным — это *стабилизатор элемента* $\omega \in \Omega$:

$$\left\{ g \in G \mid g(\omega) = \omega \right\} = \mathrm{Stab}\,(\omega) \subseteq G.$$

Очевидно $\forall\,\omega \in \Omega:\ e \in \mathrm{Stab}\,(\omega)$, т.е. $\mathrm{Stab}\,(\omega) \neq \varnothing$, и возможен случай, когда $\mathrm{Stab}\,(\omega) = G$.

Более того, стабилизатор есть подгруппа группы $\mathcal{G}$:

Утверждение 1.3. $\quad \mathrm{Stab}\,(\omega) \leqslant \mathcal{G}$

Доказательство. Зафиксируем $\omega \in \Omega$ и рассмотрим $g,\, h \in \mathrm{Stab}\,(\omega)$. Тогда $g(\omega) = h(\omega) = \omega$ и $h^{-1}(\omega) = \omega$. Следовательно

$$(g \circ h^{-1}) \star \omega = \omega \;\Rightarrow\; g \circ h^{-1} \in \mathrm{Stab}\,(\omega)\,.$$

□

Поэтому стабилизатор $\mathrm{Stab}\,(\omega)$ называют ещё *стационарной подгруппой* (или *изотопической подгруппой*) *элемента* ω.

$\mathrm{Stab}\,(\omega)$ будем также обозначать G_ω; это вообще говоря, не есть нормальная подгруппа G.

Утверждение 1.4. *При действии группы G на множество Ω между множеством левых смежных классов G по стационарной подгруппе G_ω элемента $\omega \in \Omega$ и его орбитой $\mathrm{Orb}\,(\omega)$ существует взаимно однозначное соответствие.*

Доказательство. Левые смежные классы G по G_ω обозначаем gG_ω, $g \in G$, считая при этом, что на элементы

Ω сначала действует некоторая перестановка из G_ω, а затем — фиксированная перестановка g.

Но тогда любая перестановка $h \in gG_\omega$ одинаково подействует на ω: $h(\omega) = g(\omega) = \omega' \in \mathrm{Orb}\,(\omega)$ (т.к. все элементы G_ω оставляют ω на месте) и утверждение доказано. $\square$

Из этого утверждения вытекает важное для нас

Следствие. Длина орбиты $\mathrm{Orb}\,(\omega)$ *равна индексу стационарной подгруппы* $\mathrm{Stab}\,(\omega)$ *группы* $\mathcal{G}$:

$$\big|\,\mathrm{Orb}\,(\omega)\big| = \frac{|G|}{\big|\,\mathrm{Stab}\,(\omega)\big|} = \big[G : \mathrm{Stab}\,(\omega)\big].$$

Доказательство. По теореме Лагранжа

$$H \leqslant G \;\Rightarrow\; \big|\,G\,\big| = \big|\,H\,\big| \cdot \big[\,G : H\,\big]$$

число смежных классов группы G по её подгруппе $H \leqslant G$ равно индексу $\big[\,G : H\,\big]$. $\square$

1.3 Измерение информации слов

Конкретизируем множество и действующую на нём группу:

- $X = \{\,a_1,\,\ldots,\,a_q\,\}$ — конечный алфавит,
- $\Omega = X^n$ — множество всех слов длины n в алфавите X,
- на Ω действует симметрическая группа S_n, переставляющая буквы внутри слова.

Пример 1.5 (Нахождение орбиты и её длины). $X = \{a, b\}, \ = 5,$
$\Omega = \{\, aaaaa,\ aaaab,\ \ldots,\ bbbbb \,\} = X^5.$

Рассмотрим действие $S_5 \underset{\alpha}{:} \Omega$ симметрической группы S_5 всех $5! = 120$ перестановок букв на 5-буквенные слова из Ω.

Пусть $\omega = ababb$, $\operatorname{Orb}(\omega) = ?$

$$\big|\operatorname{Orb}(\omega)\big| = \big[\,|S_5| : |\operatorname{Stab}(\omega)|\,\big] = \frac{|S_5|}{\big|\operatorname{Stab}(\omega)\big|},$$

$$\operatorname{Stab}(\omega) = \{\, e, (13), (245), (254), (54), (13)(245), \ldots \} \cong$$
$$\cong S_2 \times S_3 \Rightarrow \big|\operatorname{Stab}(\omega)\big| = 2 \cdot 6 = 12 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \big|\operatorname{Orb}(\omega)\big| = \frac{5!}{2!3!} = \frac{120}{12} = 10.$$

Выпишем все элементы $\operatorname{Orb}(ababb)$:

$$\begin{array}{ccccc} aabbb & ababb & abbab & abbba & baabb \\ babab & babba & bbaab & bbaba & bbbaa \end{array}$$

Определение 1.5. *Композицией* слова $\omega \in X^n$ называется кортеж

$$(m_1,\ \ldots,\ m_q),$$

где m_i — число вхождений буквы a_i в слово ω, $i = \overline{1, q}$.

Перестановка букв в слове не меняет количеств их вхождений $\Rightarrow$ все слова одной орбиты имеют одну и ту же композицию.

Безусловная и условная информация слов

<u>Определение</u> 1.6. *Безусловной* 0-*информацией* $I_0(x)$ слова $x \in X^n$ называется величина

$$I_0(x) = I_\alpha(x) = \log \big| \operatorname{Orb}(x) \big| = \log \frac{n!}{m_1! \cdot \ldots \cdot m_q!},$$

где $\operatorname{Orb}(x)$ — орбита слова x, при действии $S_n \underset{\alpha}{:} X^n$.

Пример 1.6 (Вычисление безусловной 0-информации слов). $X = \{a, b\}$, $n = 4$, $\Omega = X^5$.

$$\begin{aligned} I_0(abaa) &= \log \frac{4!}{3!\,1!} = 2, \\ I_0(abab) &= \log \frac{4!}{2!\,2!} = \log 6, \\ I_0(aaaa) &= \log \frac{4!}{4!} = 0 \text{ — минимальное,} \\ I_0(abcd) &= \log 24 \text{ — максимальное значение} \\ &\qquad I_0(\cdot) \text{ для слов из 4 элементов} \end{aligned}$$

Меньше симметрий в слове $\Rightarrow$ больше его 0-информация.

Наличие симметрий позволяет эффективно кодировать (сжимать) слово.

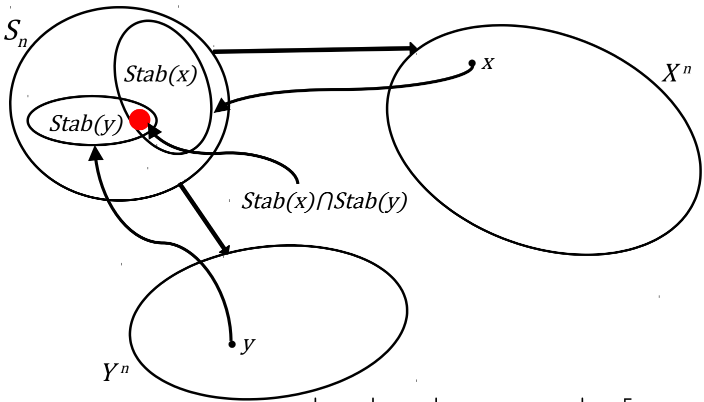
Вместе с алфавитом X будем рассматривать алфавит Y (не исключено $X = Y$) и множество слов Y^n:

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \qquad y = (y_1, \ldots, y_n).$$

Симметрическая группа S_n действует и на X^n, и на Y^n.

Рассмотрим стационарную подгруппу $\mathrm{Stab}\,(y) \leqslant S_n$ слова $y \in Y^n$.

Под действием $\mathrm{Stab}\,(y)$ слова из X^n разбиваются на орбиты, которые называют *условными*.



$$\left|G_y\right| = \left|G_x \cap G_y\right| \cdot \left[G_y : (G_x \cap G_y)\right]$$

Определение 1.7. *Условной информацией* $I(x/y)$ слова $x \in X^n$ относительно слова $y \in Y^n$ назовём величину

$$I(x/y) \;=\; \log\left[\,G_y : (G_x \cap G_y)\,\right] \;=\; \log\frac{|\,G_y\,|}{|\,G_x \cap G_y\,|}.$$

Пример 1.7 (Вычисление условной информации). Пусть $X = \{\,a,\,b\,\}$, $Y = \{\,0,\,1\,\}$.

1. $n = 3,\ x = aab,\ y = 111$:

$$I_0(x) = \log\frac{3!}{2!1!} = \log 3, \quad I_0(y) = 0,$$

$$\mathrm{Stab}\,(x) \;=\; \{\,e,\,(12)\,\}, \quad \mathrm{Stab}\,(y) \;=\; S_3, \quad |S_3| = 6,$$

$$\mathrm{Stab}\,(x) \cap \mathrm{Stab}\,(y) = \mathrm{Stab}\,(x) \;\text{ и}$$

$$I(x/y) = \log\frac{6}{2} = \log 3, \qquad I(y/x) = \log\frac{2}{2} = 0.$$

2. $\underline{n = 5,\ x = aabab,\ y = 11000}$:

$$I_0(x) \;=\; I_0(y) \;=\; \log \frac{5!}{2! \cdot 3!} \;=\; \log 10$$

— слова с одинаковой композицией

$$G_x \;=\; \{\, e,\, (124),\, (142),\, (12),\, (24),\, (14),\, (35),\, \ldots \} \;\cong$$
$$\cong\; S_2 \times S_3 \;\Rightarrow\; \bigl|G_x\bigr| \;=\; 12,$$
$$G_y \;=\; \{\, e,\, (12),\, (345),\, (354),\, (34),\, (45),\, (35),\, \ldots \} \;\cong$$
$$\cong\; S_2 \times S_3 \;\Rightarrow\; \bigl|G_y\bigr| \;=\; 12,$$
$$G_x \cap G_y \;=\; \{\, e,\, (12),\, (35),\, (12)(35)\, \} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \bigl|G_x \cap G_y\bigr| \;=\; 4,$$
$$I(x/y) \;=\; I(y/x) \;=\; \log \frac{12}{4} \;=\; \log 3.$$

Задание слов таблицами и замена букв. Слово $x \;=\; (abaacbca) \in \{\, a, b \,\}^8$ можно задать в виде таблицы номеров вхождений его символов

$$x \;=\; \left| \begin{array}{llll} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & & \\ 5 & 7 & & \end{array} \right| \qquad \begin{array}{c} (a) \\ (b) \\ (c) \end{array}$$

по которой оно однозначно восстанавливается с точностью до переименований букв.

Проведя замены $a \mapsto d,\ b \mapsto a,\ c \mapsto b$, получим слово

$$daddbabd$$

(*шифр Цезаря* в криптографии).

Очевидно, $I(x/x) \;=\; 0$ и более того —

Утверждение 1.5. $I(x/y) = 0 \Leftrightarrow G_y \subseteq G_x.$

Доказательство.

$$I(x/y) = \log \frac{|G_y|}{|G_x \cap G_y|} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow G_y = G_x \cap G_y \Leftrightarrow G_y \subseteq G_x.$$

□

Слова x и y такие, что $I(y/x) = I(x/y) = 0$ (или, что то же $G_x = G_y$), называют *эквивалентными*: существует взаимно однозначное соответствие между их буквами и эти слова могут быть получены друг из друга переименованием букв, причём разные буквы одного слова переходят в разные буквы другого.

Произведение слов. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ и $y = (y_1, \ldots, y_n) \in Y^n$, тогда *произведение* z *слов* x *и* y (в данном порядке)

$$z = x \times y = (\,(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\,) \in Z^n$$

— слово в алфавите $Z = X \times Y$.

Утверждение 1.6.

$$I_0(x \times y) = I_0(x) + I(y/x) = I_0(y) + I(x/y) = I_0(y \times x).$$

Доказательство. Очевидно $G_{x \times y} = G_x \cap G_y$ и $G_{x \times y} \subseteq G_x \subseteq G$, $G_{x \times y} \subseteq G_y \subseteq G$. Из теоремы Лагранжа следует, что при $F \leqslant H \leqslant G$

$$|G| = |H| \cdot [G : H], \quad |H| = |F| \cdot [H : F],$$
$$|G| = |F| \cdot [G : F], \quad \text{откуда}$$

$$\left[\,G:F\,\right] = \frac{\left|G\right|}{\left|F\right|} = \frac{\left|G\right|\cdot\left[\,H:F\,\right]}{\left|H\right|} = \left[\,G:H\,\right]\cdot\left[\,H:F\,\right].$$

В нашем случае

$$\left[\,G:(G_x\cap G_y)\,\right] = \left[\,G:G_x\,\right]\cdot\left[\,G_x:(G_x\cap G_y)\,\right] = \\ = \left[\,G:G_y\,\right]\cdot\left[\,G_y:(G_x\cap G_y)\,\right],$$

и переходя к логарифмам, получаем требуемое. □

Неравенства для количеств информации

Утверждение 1.7.

$$1)\ I_0(x/y) \leqslant I_0(x), \qquad 2)\ I(x\times y) \leqslant I_0(x)+I_0(y).$$

Доказательство. Переходя к орбитам замечаем, что орбита элемента x под действием стационарной подгруппы G_y есть его подорбита под действием всей группы G.

Второе неравенство следствие первого и равенства для $I(x\times y)$. □

Взаимная информация слов

Определение 1.8. *Взаимной информацией слов* x *и* y, или *информацией, содержащийся в слове* x *относительно слова* y назовём величину

$$I(x:y) = I_0(x)+I_0(y)-I_0(x\times y) = \\ = I_0(x)-I(x/y) = I_0(y)-I(y/x).$$

При $I(x:y)=0$ слова x и y называют *независимыми.*

Из *Утверждения* 1.7 следует, что $I(x:y) \geqslant 0$. Ясно, что $I(x:y) = I(y:x)$, а если слова независимы, то

$$I_0(x) = I(x/y) \text{ и } I_0(y) = I(y/x).$$

Пример 1.8 (Взаимная информация слов). Для слов из *Примера* 1.7 будем иметь следующее.

1. $\underline{n = 3,\ x = aab,\ y = 111}$:

$I_0(x) = \log 3,\ I_0(y) = 0,\ I(x/y) = \log 3,\ I(y/x) = 0,$
$I(x:y) = I_0(x) - I(x/y) = \log 3 - \log 3 = 0,$
$I_0(y:x) = I_0(y) - I(y/x) = 0 - 0 = 0,$

и слова x и y независимы.

2. $\underline{n = 5,\ x = aabab,\ y = 11000}$:

$$I_0(x) = I_0(y) = \log 10, \quad I(x/y) = I(y/x) = \log 3.$$

$$I(x:y) = I(y:x) = \\ = I_0(x) - I(x/y) = \log 10 - \log 3 = \log \frac{10}{3}.$$

Пример 1.9 (Вычисление условной, взаимной и безусловной 0-информацин). Пусть имеются

- алфавиты X и Y из q и k букв соответственно;
- слова $x \in X^n$ и $y \in Y^n$ длины n над ними;
- композиции слов — $(m_1, \ldots, m_q)$ и $(n_1, \ldots, n_k)$ соответственно.

Составим $q \times k$ таблицу $M = \| m_{ij} \|$, где m_{ij} — число замен i-го символа слова x на j-й символ слова y, $i = \overline{1, q}$, $j = \overline{1, k}$.

В таблице M суммы элементов строкам будут равняться $m_1, \ldots, m_q$, а по столбцам — $n_1, \ldots, n_k$.

Тогда, как можно показать:

$$I(y/x) = \log \frac{m_1!}{m_{11}! \ldots m_{1k}!} + \log \frac{m_2!}{m_{21}! \ldots m_{2k}!} + \ldots \\ \ldots + \log \frac{m_q!}{m_{q1}! \ldots m_{qk}!}.$$

Пусть
$$x = (a\,b\,a\,a\,c\,b\,c\,a) \in \{a, b, c\}^8,$$
$$y = (1\,2\,2\,1\,3\,2\,1\,3) \in \{1, 2, 3\}^8.$$

Композиции слов: x — $(4, 2, 2)$, y — $(3, 3, 2)$.

Таблица 3×3 замен букв:

$$M = \begin{array}{c|ccc|c} x \diagdown y & 1 & 2 & 3 & \# \\ \hline a & 2 & 1 & 1 & 4 \\ b & & 2 & & 2 \\ c & 1 & & 1 & 2 \\ \hline \# & 3 & 3 & 2 & 8 \end{array}$$

Тогда

$$I(y/x) = \log \frac{4!}{2!\,1!\,1!} + \log \frac{2!}{2!} + \log \frac{2!}{1!\,1!} = \\ = \log 12 + 0 + \log 2 = \log 24.$$

Производя те же вычисления по столбцам, получим

$$I(x/y) = \log \frac{3!}{2!\,1!} + \log \frac{3!}{2!\,1!} + \log \frac{2!}{1!\,1!} = \\ = 2 \log 3 + \log 2 = \log 18.$$

Для безусловной информации I_0 получим значения

$$I_0(x) = \log\frac{8!}{4!\,2!\,2!} = \log 420,\ \ I_0(y) = \log\frac{8!}{3!\,3!\,2!} = \log 560.$$

Взаимная информация:

$$\begin{aligned} I(x:y) &= I_0(x) - I(x/y) \ = \ \log\frac{420}{18} \ = \ \log\frac{70}{3}, \\ &= I_0(y) - I(y/x) \ = \ \log\frac{560}{24} \ = \ \log\frac{70}{3}. \end{aligned}$$

1.4 Группировка значений

Если на алфавите X задана эквивалентность $\sim$, то буквы из одного смежного класса отождествляются.

Утверждение 1.8. *В результате отождествления некоторых букв алфавита информация слова уменьшается: если x и x' — исходное и новое слова, то*

$$I_0(x') \ = \ I_0(x) - I(x/x').$$

Пример 1.10. Пусть в слове $x = (a\,b\,a\,a\,c\,b\,c\,a)$ буквы b и c отождествляются, тогда $x' = (a\,b\,a\,a\,b\,b\,b\,a)$, и при вычислении $I(x/x')$ можно ограничиться таблицей отождествляемых букв

$$M \ = \ \begin{array}{c|cc|c} & b & c & \\ \hline b & 2 & 2 & 4 \end{array}$$

$$I(x/x') \ = \ \log\frac{4!}{2!\,2!} \ = \ \log 6, \quad I_0(x) \ = \ \log 420,$$

$$I_0(x') \ = \ I_0(x) - I(x/x') \ = \ \log\frac{420}{6} \ = \ \log 70.$$

Прямой подсчёт: $I_0(x') = \log \dfrac{8!}{4!4!} = \log 70.$

Пусть в результате наблюдений получена последовательность данных — вектор x, который требуется закодировать *бинарным словом*.

Естественно требовать, чтобы новое слово $x' \in \{0, 1\}$ содержало как можно больше информации об исходном слове, т.е. чтобы значение $I_0(x')$ было максимальным. Это достигается при (может быть приблизительном) равенстве количеств 0 и 1 в x'.

В результате приходим к *квантильному квантованию по вариационному ряду*: упорядочиваем значения x по возрастанию и кодируем значением 0 первую половину отсортированных данных, а значением 1 — вторую.

Пример 1.11 (Оптимальное квантование данных). Пусть в результате наблюдений получена последовательность данных $x = (0{,}16,\ 0{,}1,\ 0{,}7,\ 0{,}1,\ 0{,}18,\ 1{,}15)$ и требуется закодировать их *бинарным* словом.

Составляем вариационный ряд, и кодируем в нём первые 3 по порядку значения нулём, а последние 3 — единицей:

x	0,16	0,1	0,7	0,1	0,18	1,5
№ позиции	3	1	5	2	4	6
x'	0	0	1	0	1	1

При кодировании *двухбитными* словами 00, 01, 10 и 11 — разбиваем вариационный ряд на 4 приблизительно равных интервала и т.д.

1.5 Методы теории информации в задачах распознавания

Прецедентная информация задач распознавания образов может быть описана *матрицей информаций*, строки которой соответствуют объектам, столбцы — признакам, а дополнительный столбец содержит символы классов, которым принадлежат объекты.

Будем рассматривать задачу распознавания с *качественными признаками*, когда каждый признак принимает значения из множества $X = \{1, 2, \ldots, m\}$, k непересекающимися классами, закодированными символами $Y = \{1, 2, \ldots, k\}$ и n прецедентами.

Информативность $I(x : y)$ признака $x \in X^n$ по отношению к *информационному вектору* символов классов $y \in Y^n$ объектов равна количеству информации, содержащимся в x относительно y:

$$I(x : y) = I_0(x) - I(x/y) = I_0(y) - I(y/x).$$

Пример 1.12 (Информативность признака). Пусть

$x = (2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2)$ — значение признака и

$y = (1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3)$ — классификация,

$n = 9$ прецедентов.

Тогда

$$I_0(x) = \log \frac{9!}{8!\,1!} = \log 9,$$

$$I_0(y) = \log \frac{9!}{3!\,3!\,3!} = \log 1680$$

и таблица замен символов при переходе $x \to y$ —

$$M = \quad \begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & 3 & \\ \hline 1 & & 1 & & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 8 \\ \hline & 3 & 3 & 3 & 9 \end{array}$$

$$\begin{aligned} I(y/x) &= \log \frac{1!}{1!} + \log \frac{8!}{3!\,2!\,3!} = \log 560, \\ I(x/y) &= 2\log \frac{3!}{3!} + \log \frac{3!}{1!\,2!} = \log 3, \\ I(x:y) &= I_0(x) - I(x/y) = \log 9 - \log 3 = \log 3, \\ I(y:x) &= I_0(y) - I(y/x) = \log 1680 - \log 560 = \\ &= \log \frac{1680}{560} = \log 3. \end{aligned}$$

Чистые классификаторы и чистые шумы

Определение 1.9. Признак x относительно информационного вектора символов классов y назовём

- *чистым классификатором*, если $I(x:y) = I_0(y)$ (т.е. $I(y/x) = I(x/y) = 0$, $G_x = G_y$);
- *чистым шумом*, если $I(x:y) = 0$.

Ясно, что

- по значениям чистого классификатора информационный вектор восстанавливается полностью: в этом случае существует биекция $x \leftrightarrow y$;
- чистый шум не даёт никакой информации об информационном векторе (x и y независимы).

Нижний порог информативности признака. Для того, чтобы исключить «шумящие» признаки из дальнейшего рассмотрения, введём *нижний порог* α информативности признака и отбросим все признаки объектов с информативностью, меньшей α.

Нижний порог α естественно выбирать в процентах от максимально возможной информативности $I(y)$.

Пример 1.13. 1. Для информационного вектора $y = (1,1,1,2,2,2,3,3,3)$ символов классов имеем: $y \in Y^9$, $Y = \{1,2,3\}$ и

$$I(y) = \log|Y^n| = \log 3^9 = \log 19683 \approx 14{,}26.$$

Например, если выбрать $\alpha = 24\%$, то все признаки x с информативностью $I(x:y) < 3{,}42 = 14{,}26 \cdot 0{,}24$ исключаются из дальнейшего рассмотрения.

Кластеры признаков: информационный подход

Утверждение 1.9. *Функция*

$$\rho(x^i, x^j) = \frac{1}{2}\left(I(x^i/x^j) + I(x^j/x^i) \right)$$

является метрикой на множестве признаков — слов из X^n.

Назовём

- ρ — *информационной метрикой* на пространстве признаков;
- *кластером признаков* — подмножество близких друг к другу признаков относительно метрики ρ. Ясно, что значение ρ между такими признаками близко к 0.

Пример 1.14 (Кластеры признаков – продолжение *Примера* 1.12). Пусть информация о прецедентах в задаче распознавания задана матрицей с качественными признаками

	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	y
1	2	2	2	1	2	2	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	1	1	1
3	2	2	2	1	1	2	1	1	1
4	2	1	1	2	1	1	1	2	2
5	2	1	1	2	1	1	2	1	2
6	1	1	1	2	1	1	1	2	2
7	2	1	1	1	2	2	1	2	3
8	2	1	1	1	2	2	2	2	3
9	2	2	1	1	2	2	1	2	3

(значение $I(y) \approx 14{,}26$ вычислено ранее).

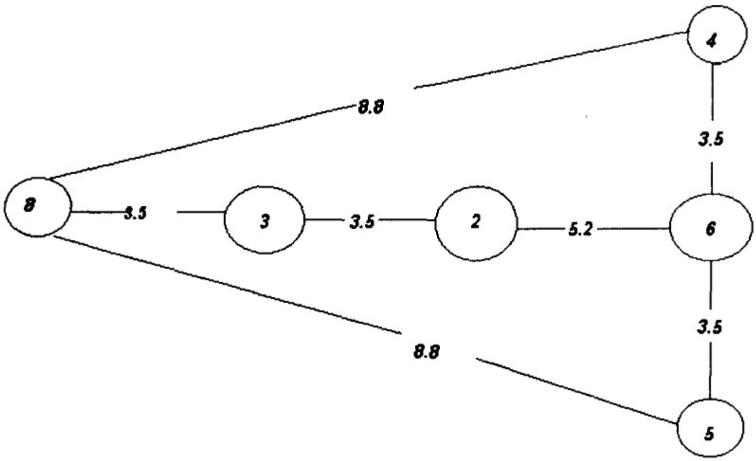
1. Подсчитаем информативность $I(x^i : y), i = \overline{1,8}$ признаков по отношению к информационному вектору y:

x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
1,77	6,16	8,26	6,16	6,16	8,26	1,37	6,16

Приняв порог $\alpha = 24\%$, отбрасываем признаки x^1 и x^7 как малоинформативные — с $I(x : y) < 3{,}24$.

2. Составим таблицу расстояний оставшихся признаков:

ρ	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^8
x^2	0	3,5	8,4	8,4	5,2	6,8
x^3		0	8,4	8,4	6,0	3,5
x^4			0	6,8	3,5	8,8
x^5				0	3,5	8,8
x^6					0	8,4
x^8						0



Анализ таблицы расстояний позволяет сделать вывод, что исследуемые признаки можно представить разбивающимися на два кластера: $\{x^2, x^3, x^8\}$ и $\{x^4, x^5, x^6\}$.

Пример 1.15 (Прогнозирование запаса руды для месторождения). Значения бинарных признаков:

y — запас руды (1/0 — больше/меньше 1 млн тонн),
x^1 — приуроченность к горизонтам слюдистых сланцев,
x^2 — приуроченность к горизонтам амфиболитов,

x^3 — близость к контакту со слюдистыми сланцами,
x^4 — близость к контакту с амфиболитами,
x^5 — присутствие тел амфиболитов,
x^6 — обилие даек,
x^7 — пиритизация,
x^8 — пропилитизация,
x^9 — ожелезнение,
x^{10} — аргиллитизация,
x^{11} — наличие вторичных ореолов свинца и цинка,
x^{12} — развитие складок.

	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	y
1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1
4	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1
5	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1
6	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
7	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0
8	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
9	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0
10	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
11	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	?
12	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	?

1. Вычислим информативность признаков
($I(y) = \log 2^{10} = 10$):

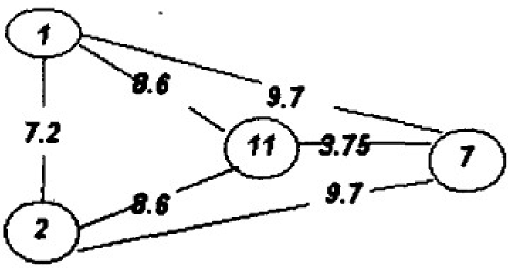
x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
2,8	2,8	1,24	0,3	1,24	0,3

x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}
2,8	0,3	1,24	1,24	6,1	0

Если выбрать $\alpha = 25\%$, то останутся признаки x^1, x^2, x^7 и x^{11} (с информативностями $\geqslant 2{,}5$ относительно y).

2. Составим таблицу расстояний этих признаков:

ρ	x^1	x^2	x^7	x^{11}
x^1	0	7,2	9,7	8,6
x^2		0	9,7	8,6
x^7			0	3,75
x^{11}				0



Анализ таблицы позволяет провести следующую кластеризацию признаков: $\{\, x^7, x^{11} \,\}$, $\{\, x^1 \,\}$, $\{\, x^2 \,\}$.

Сложные признаки. Если x^i и x^j — признаки, то признак $x^{i,j} = x^i \times x^j$ назовём *сложным.*

Утверждение 1.10. *Информативность сложного признака $x^i \times x^j$ по отношению к информационному вектору символов классов y не меньше суммы их информативностей, точнее*

$$I(y : (x^i \times x^j)) \geqslant I(y : x^i) + I(y : x^j) - I(x^i : x^j).$$

Поскольку значение $I(x^i : x^j)$ монотонно возрастает от 0 при увеличении зависимости признаков x^i и x^j (суммарной длины фрагментов, получающихся перекодировкой), справедливо следующее правило:

При образовании сложного признака следует объединять признаки, лежащие в *разных* кластерах

Введём второй параметр настройки β, равный минимально допустимой информативности сложного признака. На практике β выбирают не менее 60% от $I_0(y)$.

В *Примере* 1.12 и его продолжении 1.14 было выделено два кластера признаков: $\{x^2, x^3, x^8\}$ и $\{x^4, x^5, x^6\}$, при $\beta = 80\%$ получаем порог $0{,}8 \cdot 14{,}26 = 11{,}4$.

Вычисляя значение $I(y : (x^i \times x^j))$ для признаков из разных классов, найдём, что информативность сложных признаков

$x^{3,6}$ — достаточна,
$x^{2,4}$ — недостаточна,
$x^{2,4,8}$ — достаточна.

Пример 1.16 (Формирование сложных признаков – продолжение *Примера* 1.15). Положим $\beta = 60\%$, что установит порог информативности $0{,}6 \cdot 10 = 6$ для формируемых сложных признаков.

Образуем сложный признак $x^{1,11} = x^1 \times x^{11} = x$. Его взаимную относительно информационного вектора y информативность $I(x : y)$ определим по таблице переходов значений x в значения y, которая, в свою очередь, заполняется строится по соответствующим столбцам матрицы информаций.

x^1	x^{11}	y
0	1	1
0	1	1
0	0	1
0	1	1
1	1	1
1	0	0
1	0	0
1	0	0
1	0	0
0	0	0

	0	1	
01		3	3
00	1	1	2
11		1	1
10	4		4
	5	5	10

$$\begin{aligned}
I(x:y) &= I_0(x) - I(x/y), \\
I_0(x) &= \log \frac{10!}{3!\,2!1!\,4!} = \log 12600, \\
I(x/y) &= \log \frac{5!}{1!\,4!} + \log \frac{5!}{3!\,1!\,1!} = \log 100, \\
I(x:y) &= \log \frac{12600}{100} = \log 126 \approx 6{,}98 > 6,
\end{aligned}$$

т.е. сложный признак $x = x^1 \times x^{11}$ удовлетворяет условию информативности.

Аналогично находим, что информативность > 6 имеют сложные признаки $x^{2,11}$, $x^{1,2,7}$ и $x^{7,11}$ и осуществляем переход в новое признаковое пространство полученных сложных признаков.

Значения $f(x)$ сложного признака x данного объекта определяют в зависимости от третьего параметра настройки γ, принимающего целочисленные значения и выражающего «*степень значимости*» признака.

Обозначим через n_1 и n_0 число единичных и, соответственно, нулевых значений информационного вектора, соответствующих данному значению полученного сложного признака x.

Полагаем

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } n_1 - n_0 \geqslant \gamma, \\ 0, & \text{если } n_0 - n_1 \geqslant \gamma, \\ -, & \text{иначе (отказ от распознавания).} \end{cases}$$

В рассматриваемом примере примем $\gamma = 2$.

Для признака $x = x^{1,11}$ имеем (дублируем таблицу):

x	0	1		$f(x)$
01		3	3	1
00	1	1	2	–
11		1	1	–
10	4		4	0

Тогда, например, для 1, 11 и 12-го объектов получим $f_1(x) = 1$ (справочно), $f_{11}(x) = -$, $f_{12}(x) = 1$.

Для признака $x = x^{11,2}$:

x^{11}	x^2	y
1	1	1
1	1	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	1	0

x	0	1		$f(x)$
11		3	3	1
01	1	1	2	–
10		1	1	–
00	4		4	0
	5	5	10	

$I(y : (x^{11} \times x^2)) = 8$
— это относительная информативность, «вес» признака

Для признака $x = x^{1,2,7}$:

x^1	x^2	x^7	y
0	1	1	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
1	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
1	0	0	0
0	1	0	0

x	0	1		$f(x)$
011		2	2	1
010	1	1	2	–
001		1	1	–
111		1	1	–
100	3		3	0
101	1		1	–
	5	5	10	

$I(y : (x^{11} \times x^2)) = 8$

Для признака $x = x^{11,7}$:

x^{11}	x^{7}	y
1	1	1
1	1	1
0	0	1
1	1	1
1	1	1
0	0	0
0	1	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0

x	0	1		$f(x)$
11		4	4	1
00	4	1	5	0
01	1		1	–
	5	5	10	

$$I(y : (x^{11} \times x^{2})) \;=\; 6{,}4 \text{ бит}$$

Классификацию будем осуществлять по близости (в метрике Хэмминга) к векторам классов и в новом признаковом пространстве имеем:

Номер объекта	$x^{1,11}$	$x^{2,11}$	$x^{1,2,7}$	$x^{7,11}$	y
11	–	0	–	0	0
12	1	1	–	–	1

Сложные признаки выступают в качестве элементарных классификаторов (э.к.). Далее для классификации производится голосование по э.к.

Глава 2

Теория перечисления Пойа

2.1 Лемма Бёрнсайда

Напоминание: действие α группы $\mathcal{G} = \langle\, G, \circ, e\,\rangle$, $|G| = n$ на множестве T, $|T| = N$ обозначаем $\mathcal{G} \underset{\alpha}{:} T$.

$$\alpha \in \operatorname{Hom}\,(\,\mathcal{G},\, Sym(T)\,)\ \text{ или }\ \alpha = \langle\, G, T; \circ, *, e\,\rangle\,.$$

Аксиомы: $e(t) = t$ и $(g \circ h)(t) = h(g(t))$.

Лемма 2.1 (не-Бёрнсайда, или Коши-Фробениуса).

$$C(\mathcal{G}) = \frac{1}{|\,G\,|}\sum_{g\in G}\Big|\operatorname{Fix}(g)\Big| = \frac{1}{|\,G\,|}\sum_{t\in T}\Big|\operatorname{Stab}(t)\Big|;$$

первое равенство называется леммой Бёрнсайда.

Доказательство. Пусть $|G| = n$, $|T| = N$ и действие $\mathcal{G} \underset{\alpha}{:} T$ задаётся $n\times N$ матрицей $A = \|g_i(t_j)\|$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,N}$.

Подсчитаем двумя различными способами мощность множества $M = \big\{\,(g,t) \in G\times T \mid g(t) = t\,\big\}$: по столбцам и по строкам матрицы A. Получим

$$\sum_{g\in G}\Big|\operatorname{Fix}(g)\Big| = \big|M\big| = \sum_{t\in\Omega}\Big|\operatorname{Stab}(t)\Big|.$$

Если x и y принадлежат одному классу эквивалентности по $\sim_{\mathcal{G}}$, то $\operatorname{Orb}(x) = \operatorname{Orb}(y)$ и их стационарные подгруппы имеют одинаковую мощность:

$$\big|\operatorname{Stab}(x)\big| = \frac{|G|}{|\operatorname{Orb}(x)|} = \frac{|G|}{|\operatorname{Orb}(y)|} = \big|\operatorname{Stab}(y)\big|.$$

Выберем по представителю $t_1, \ldots, t_{C(\mathcal{G})}$ из всех $C(\mathcal{G})$ орбит. Тогда

$$\big|M\big| = \sum_{t\in T}\Big|\operatorname{Stab}(t)\Big| = \sum_{i=1}^{C(\mathcal{G})}\Big|\operatorname{Stab}(t_i)\Big|\cdot\Big|\operatorname{Orb}(t_i)\Big| =$$

$$= \sum_{i=1}^{C(\mathcal{G})}\frac{|G|}{\big|\operatorname{Orb}(t_i)\big|}\cdot\Big|\operatorname{Orb}(t_i)\Big| = |G|\cdot C(\mathcal{G}).$$

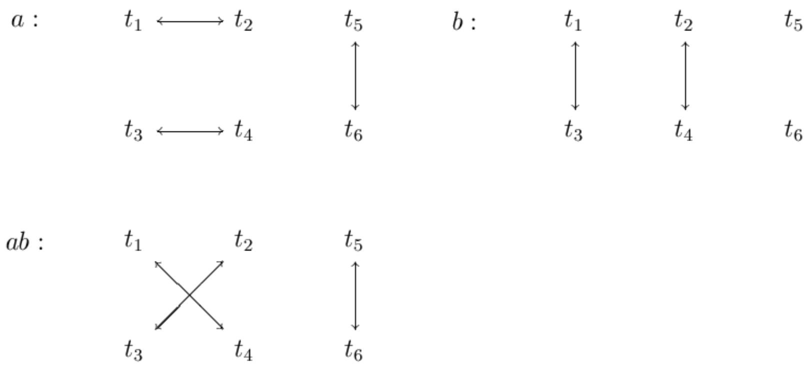
□

Уильям Бёрнсайд
(William Burnside, 1852–1927)
— английский математик-алгебраист. «Написал первый трактат о группах на английском языке и был первым, кто разработал теорию групп с современной абстрактной точки зрения».

Пример 2.1. Действие группы V_4 на множестве $T = \{t_1, \ldots, t_6\}$

$\circ$	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

$g*t$	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
e	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
a	t_2	t_1	t_4	t_3	t_6	t_5
b	t_3	t_4	t_1	t_2	t_5	t_6
ab	t_4	t_3	t_2	t_1	t_6	t_5



$$Type(e) = \langle 6,0,0,0,0,0\rangle, \quad Type(a) = \langle 0,3,0,0,0,0\rangle,$$
$$Type(b) = \langle 2,2,0,0,0,0\rangle, \quad Type(ab) = \langle 0,3,0,0,0,0\rangle.$$
$$C(e) = 6,\ C(a) = C(ab) = 3,\ C(b) = 4.$$
$$\operatorname{Stab}(t_1) = \operatorname{Stab}(t_2) = \operatorname{Stab}(t_3) = \operatorname{Stab}(t_4) = e \leqslant V_4,$$
$$\operatorname{Stab}(t_5) = \operatorname{Stab}(t_6) = \langle e, b\rangle \leqslant V_4.$$
$$\operatorname{Fix}(a) = \operatorname{Fix}(ab) = \varnothing,\ \operatorname{Fix}(b) = \{t_5, t_6\},\ \operatorname{Fix}(e) = T.$$
$$\big|\operatorname{Orb}(t_1)\big| = \frac{4}{1} = 4, \quad \big|\operatorname{Orb}(t_5)\big| = \frac{4}{2} = 2.$$
$$\frac{1}{4}\sum_{g\in G}\big|\operatorname{Fix}(g)\big| = \frac{6+2}{4} = 2,$$
$$\frac{1}{4}\sum_{t\in\Omega}\big|\operatorname{Stab}(t)\big| = \frac{4\cdot 1 + 2\cdot 2}{4} = 2.$$

Как применять лемму «не-Бёрнсайда?»

Для определения числа классов эквивалентности надо представить *эквивалентные элементы множества* T *как классы эквивалентности* действия $\mathcal{G} \underset{\alpha}{:} T$ некоторой группы $\mathcal{G}$ на T и по лемме определить $C(\mathcal{G})$.

Задача 2.1 (про слова; решение прямым использованием леммы Бёрнсайда). *Составляются слова длины* $l \geqslant 2$ *из алфавита* $A = \{ a_1, \ldots, a_q \}$.

Слова считаются эквивалентными, если они получаются одно из другого перестановкой крайних букв.

Определить число S *неэквивалентных слов.*

Решение. T — множество слов длины l в алфавите A, $|T| = N = q^l$.

Надо представить эквивалентности как орбиты некоторого действия подходящей группы G на T.

Очевидно, двукратная перестановка не меняет ничего, и поэтому подходит $\mathcal{G} \cong \mathbb{Z}_2 = \{ e, f \}$. Действие f: переставляет в слове крайние буквы.

Число неэквивалентных слов = число классов эквивалентности действия $\mathbb{Z}_2 \underset{\alpha}{:} T$ —

$$\big|\operatorname{Fix}(e)\big| = \big|T\big| = q^l, \qquad \big|\operatorname{Fix}(f)\big| = q^{l-2} \cdot q = q^{l-1}.$$

$$S = C(\mathbb{Z}_2) = \frac{1}{2} \sum_{g \in G} \big|\operatorname{Fix}(g)\big| = \frac{q^l + q^{l-1}}{2} = \frac{q^{l-1}(q+1)}{2}.$$

Для $l = 3$, $q = 2$ имеем $|T| = 8$ и $S = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$. Пусть $A = \{a, b\}$, тогда слова и классы —

	aaa		(1)
aab		baa	(2)
	aba		(3)
abb		bba	(4)
	bab		(5)
	bbb		(6)

Платоновы тела — правильные 3-мерные многогранники. Рассматриваем их группы вращений (самосовмещений).

Платоновы тела	Группа вращения	Порядок группы
тетраэдр	T (тетраэдра)	$4 \cdot 3 = 12$
куб и октаэдр	O (октаэдра)	$8 \cdot 3 = 24$
икосаэдр и додекаэдр	Y (икосаэдра)	$12 \cdot 5 = 60$

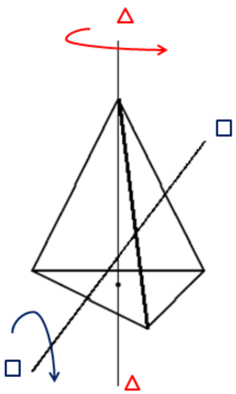
Икосаэдр имеет 20 граней, 30 рёбер и 12 вершин.

Октаэдр

Икосаэдр

Додекаэдр

T — группа вращения тетраэдра



$T = \langle t, f \rangle$, $t^3 = f^2 = e$, где:

t — вращение на 120° вокруг оси, проходящей через вершину и центр тетраэдра ($\triangle$—$\triangle$); таких осей **4**.

f — вращение на 180° вокруг оси, проходящей через центры двух противоположных рёбер ($\square$—$\square$); таких осей **3**.

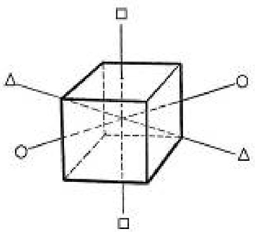
$$|T| = (3-1)\cdot 4 + (2-1)\cdot 3 + 1 = 12.$$

Действие T на грани (или вершины) тетраэдра: типы перестановок

$$\square : Type(t) = Type(t^2) = \langle 1, 0, 1, 0 \rangle;$$
$$\triangle : Type(f) = \langle 0, 2, 0, 0 \rangle.$$

Тетраэдр двойственен самому себе $\Rightarrow$ действие на грани $=$ действие на вершины.

O — группа вращения октаэдра (= куба)



$O = \langle t, f, r \rangle, t^4 = f^2 = r^3 = e$, где:
t — вращение на 90° вокруг оси, проходящей через середины двух противоположных граней ($\square$—$\square$), таких осей **3**;
f — вращение на 180° вокруг оси, проходящей через середины двух противоположных рёбер ($\circ$—$\circ$), таких осей **6**;
r — вращение на 120° вокруг оси, проходящей через две противоположные вершины ($\triangle$—$\triangle$) таких осей **4**.

$$|O| = 3 \cdot 3 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 1 = 24.$$

Действие O на вершины куба: типы перестановок

$$\square : Type(t) = Type(t^3) = \langle 0, 0, 0, 2, 0, \ldots \rangle;$$
$$Type(t^2) = \langle 0, 4, 0, \ldots \rangle;$$
$$\circ : Type(f) = \langle 0, 4, 0, \ldots \rangle;$$
$$\triangle : Type(r) = Type(r^2) = \langle 2, 0, 2, 0, \ldots \rangle.$$

Поскольку $|G| = |G_x| \cdot [G : G_x]$, то число элементов в группе вращения правильного многогранника есть $\left|E_0\right| \cdot \left|V\right|$, где $\left|E_0\right|$ — число рёбер, выходящих из одной вершины и $\left|V\right|$ — число вершин многогранника.

Цикловой индекс. Существует универсальный способ вычисления числа $C(\mathcal{G})$ — количества классов эквивалентности (= орбит).

Сопоставим каждой перестановке $g \in \mathcal{G}$ вес $w(g)$ по правилу:

$$Type(g) = \langle \nu_1, \ldots, \nu_N \rangle \;\Rightarrow\; w(g) = \underbrace{x_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot x_N^{\nu_N}}_{\text{моном}}.$$

<u>*Определение*</u> 2.1. Средний вес подстановок в группе называется *цикловым индексом* действия $\mathcal{G} \underset{\alpha}{:} T$:

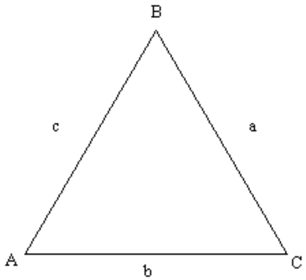
$$P(\mathcal{G} \underset{\alpha}{:} T, x_1, \ldots, x_N) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} w(g) = \\ = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot x_N^{\nu_N}.$$

(Это производящий полином многих переменных)

Будем также использовать обозначения $P_{\mathcal{G}}(x_1, \ldots, x_N)$ и $P_{\mathcal{G}}$, $P(\mathcal{G})$.

Пример 2.2. Вычислим цикловой индекс действия группы всех преобразований правильного треугольника в себя (т.е. оставляющих его неподвижным), на его стороны.

Решение. T — стороны треугольника, $N = 3$.
$\mathcal{G} \cong S_3$ — все перестановки сторон, $n = 3! = 6$.



$\mathcal{G} \underset{\alpha}{:} T$ — самодействие группы S_3

Треугольник — самодвойственная фигура $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ действие на стороны $=$ $=$ действие на вершины

$$\mathcal{G} \underset{\alpha}{:} T \cong$$
$$\cong \{\, e,\, \underbrace{(abc)}_{t},\, \underbrace{(acb)}_{t^2},\, \underbrace{((a)(bc))}_{f},\, \underbrace{((b)(ac))}_{tf},\, \underbrace{((c)(ab))}_{t^2 f} \,\} =$$
$$= \langle\, t,\, f \,\rangle$$

$g \in S_3$	$Type(g)$	$w(g)$	# мономов
$e = (a)(b)(c)$	$\langle\, 3,\, 0,\, 0 \,\rangle$	x_1^3	1
$t,\, t^2$	$\langle\, 0,\, 0,\, 1 \,\rangle$	x_3^1	2
$f,\, tf,\, t^2 f$	$\langle\, 1,\, 1,\, 0 \,\rangle$	$x_1^1 x_2^1$	3
Всего			6

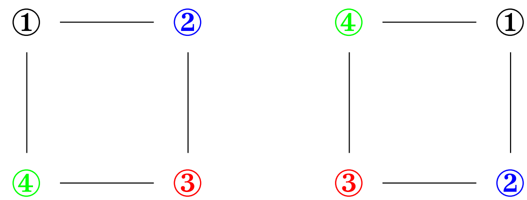
$$P(S_3) \;=\; \frac{1}{6}\left[\, x_1^3 + 2x_3^1 + 3x_1^1 x_2^1 \,\right],$$

— цикловой индекс *самодействия группы* S_3, или, что то же, *группы симметрии треугольника.*

Зачем нужен цикловой индекс?
Пусть заданы множество T, группа $\mathcal{G}$ и действие $\mathcal{G} \underset{\alpha}{:} T$.

1. Припишем каждому элементу T одно из r значений (неформально: покрасим в один из r цветов). Всего, очевидно, имеется r^N раскрасок.

2. Не будем различать раскраски, если при преобразовании $g : t \to t'$ t' раскрашен также как и t. Например, поворот на 90° — не даёт нового раскрашивания вершин квадрата:



Вопрос: Сколько существует неэквивалентных раскрасок = классов эквивалентности?
Ответ: Это значение вычисляется через цикловой индекс. Имеем —

1. Каждый класс эквивалентности это g-цикл; их $C(g) = \nu_1 + \ldots + \nu_N$ штук.
2. Каждая перестановка $g \in \mathcal{G}$ с типом $\langle \nu_1, \ldots, \nu_N \rangle$ будет иметь $|\operatorname{Fix}(g)| = r^{C(g)}$ неподвижных точек: каждый класс эквивалентности это g-цикл, их $C(g)$ и

$$\left|\operatorname{Fix}(g)\right| = x_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot x_N^{\nu_N}\Big|_{x_1 = \ldots = x_N = r} = r^{C(g)}.$$

Отсюда, по лемме Бёрсайда, число полученных классов эквивалентности = неэквивалентных раскрасок:

Теорема 2.1.

$$C(\mathcal{G} \underset{\alpha}{:} T) = P(\mathcal{G} \underset{\alpha}{:} T, x_1, \ldots, x_N)\Big|_{x_1 = \ldots = x_N = r}.$$

Например, $P_{\mathcal{G}}(1, \ldots, 1) = 1$: если все элементы покрасить в один цвет, то таких раскрасок одна.

Задачи на применение циклового индекса

Задача 2.1 (про слова; решение, использующее цикловой индекс). *Определить число S неэквивалентных слов длины $l \geqslant 2$ в q-буквенном алфавите, если эквивалентными считаются слова, получающиеся друг из друга перестановкой крайних букв.*

Было решение: $\quad S = \dfrac{q^l + q^{l-1}}{2}.$

Новое решение: $\mathcal{G} = \{\, e,\, g \,\} \cong \mathbb{Z}_2$; $\quad T$: $\underbrace{\bigcirc\overbrace{\bigcirc\ldots\bigcirc}^{l-2}\bigcirc}_{l}.$

$g \in \mathcal{G}$	$Type(g)$	$w(g)$	# мономов
e	$\langle\, l,\, 0,\, \ldots,\, 0 \,\rangle$	x_1^l	1
g	$\langle\, l-2,\, 1,\, 0, \ldots,\, 0 \,\rangle$	$x_1^{l-2}x_2^1$	1

Цикловой индекс: $P(x_1, \ldots, x_l) = \dfrac{1}{2}\big[x_1^l + x_1^{l-2}x_2^1\big].$

$$S = P(q, \ldots, q) = \frac{q^l + q^{l-1}}{2}.$$

Классическая комбинаторная задача об ожерельях

- *Ожерелье* — окружность, на которой на равных расстояниях по дуге (в вершинах правильного многоугольника) располагаются «бусины».

- *Задача об ожерельях*: сколько различных ожерелий можно составить из N бусин r цветов?

- Какие ожерелья считать неразличимыми?

  Варианты: если одно получается из другого *самосовмещением* —

  1) только *поворотом* в плоскости (бусины плоские, окрашены с одной стороны = *карусель*) — самодействие группы $\mathbb{Z}_N$;
  2) *поворотом* и *переворотом в пространстве* (бусины круглые) — самодействие *группы диэдра (двойной пирамиды)* D_N.

Задача 2.2 (об ожерельях $N = 5$, $r = 3$; 1-й вариант). *Сколько разных ожерелий можно составить из 5 бусин 3 цветов?*

1. Ожерелья одинаковы, если одно получается из другого *поворотом*.

Решение. $\mathcal{G} \cong \mathbb{Z}_5 = \langle t \rangle$, $t^5 = e$, $n = 5$.

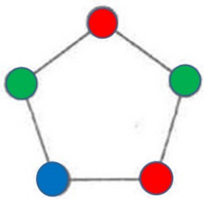
Элемент $\mathbb{Z}_5$	$Type(g)$	$w(g)$	# мономов
e	$\langle\, 5, 0, 0, 0, 0 \,\rangle$	x_1^5	1
t, t^2, t^3, t^4	$\langle\, 0, 0, 0, 0, 1 \,\rangle$	x_5	4

Цикловой индекс: $P(x_1, \dots, x_5) = \dfrac{1}{5}\left[\, x_1^5 + 4x_5 \,\right]$.

$$\#Col(3) = P(3, \dots, 3) = \frac{3^5 + 4 \cdot 3}{5} = 51.$$

<u>Задача</u> 2.3 (Олимпиады «*Покори Воробьёвы горы – 2009*»). *Для 50 детей детского сада закуплены 50 одинаковых тарелок. По краю каждой тарелки равномерно расположено 5 белых кружочков. Воспитатели хотят перекрасить какие-либо из этих кружочков в другой цвет так, чтобы все тарелки стали различными.*

Какое наименьшее число дополнительных цветов потребуется им для этого?



Как должны были решать школьники.

Пусть требуется r цветов. Отбросим r вариантов раскраски в один цвет. Число остальных вариантов — *без учёта* возможности поворота тарелки: $r^5 - r$;

с учётом поворота: $\dfrac{r^5 - r}{5}$ (каждый вариант повторяется 5 раз).

Итого: $\#Col(r) = \dfrac{r^5 - r}{5} + r = \dfrac{r^5 + 4r}{5}$ и при 2 дополнительных цветах $\#Col(3) = 51$.

<u>Задача</u> 2.2 (об ожерельях $N = 5$, $r = 3$; 2-й вариант).

2. Ожерелья одинаковы, если одно получается из другого *поворотом и/или переворотом*.

Решение. *$\mathcal{G}$ — группа диэдра* $D_5 = \langle t, f\rangle$, $t^5 = f^2 = e$, $n = |D_5| = 10$.

Элемент D_5	$Type(g)$	$w(g)$	# мономов
e	$\langle\, 5, 0, 0, 0, 0\,\rangle$	x_1^5	1
t, t^2, t^3, t^4	$\langle\, 0, 0, 0, 0, 1\,\rangle$	x_5	4
f, tf, $\ldots$, t^4f	$\langle\, 1, 2, 0, 0, 0\,\rangle$	$x_1x_2^2$	5
Всего			10

Цикловой индекс: $P = \dfrac{1}{10}\big[\, x_1^5 + 4x_5 + 5x_1x_2^2\,\big]$.

$$\#Col(3) = P(x_1, \ldots, x_5)\Big|_{x_1 = \ldots = x_5 = 3} = \\ = \frac{3^5 + 4\cdot 3 + 5\cdot 3^3}{10} = 39.$$

Задача 2.4 (о раскраске сторон квадрата). *Стороны существует различно окрашенных квадратов, если их стороны раскрашивают в* r *цветов?*

Решение. Группа самосовмещения квадрата в прострнстве — группа диэдра $D_4 = \langle\, t,\ f,\ s\,\rangle$, $|D_4| = 8$, которая порождается тремя образующими:

t : вращение на 90° вокруг центра в выбранном направлении;

f : симметрия относительно оси, проходящей через середины противоположных *сторон* — 2 оси;

s : симметрия относительно оси, проходящей через середины противоположных *вершин* — 2 оси.

При самодействии группы D_4 $(N = 4)$ её элементы будут иметь следующие веса:

e : единичная перестановка оставит все стороны на месте, т.е. имеются 4 цикла длины 1, вес x_1^4 (1 перестановка);

t, t^3 : стороны циклически переходят друг в друга по и против часовой стрелке, длина цикла 4, вес x_4^1 (2 перестановки);

t^2 : стороны переходят в противоположные, что даёт два цикла длины 2, вес — x_2^2 (1 перестановка);

f : две противоположные стороны на месте, остальные две меняются местами, т.е. имеются два единичных цикла и один длины 2, вес — $x_1^2 x_2^1$ (1 перестановка, 2 оси);

s : в двух парах смежных сторон элементы меняются местами, что даёт два цикла длины 2, вес — x_2^2 (1 перестановка, 2 оси).

Цикловой индекс самодействия D_4:

$$P_{D_4}(x_1, \ldots, x_4) = \frac{1}{8}\left[x_1^4 + 2x_4 + 3x_2^2 + 2x_1^2 x_2 \right].$$

Число раскрасок квадрата в r цветов:

$$P_{D_4}(r, \ldots, r) = \frac{1}{8}\left[r^4 + 2r + 3r^2 + 2r^3 \right].$$

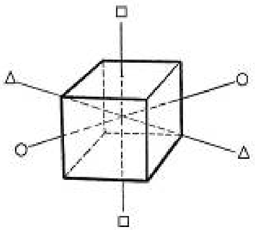
В частности, в два и три цвета:

$$\#Col(2) = \frac{2^4 + 4 \cdot 2^2 + 2^4}{2^3} = 2 + 2 + 2 = 6,$$

$$\#Col(3) = \frac{3^4 + 2 \cdot 3 + 3^4}{8} = 21.$$

Задача 2.5 (раскраска граней куба в два цвета). *Грани куба раскрашивают в 2 и 3 цвета. Сколько существует различно окрашенных кубов?*

Решение. Напоминание: $\mathcal{G} = O = \langle\, t,\ f,\ r\,\rangle,\ |O| = 24.$



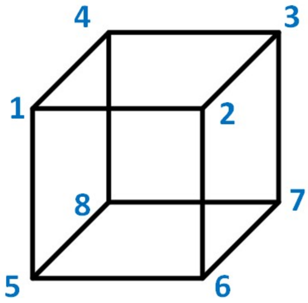
$O = \langle t, f, r\rangle, t^4 = f^2 = r^3 = e$, где:
t — вращение на 90° вокруг оси, проходящей через середины двух противоположных граней (□—□), таких осей 3;
f — вращение на 180° вокруг оси, проходящей через середины двух противоположных рёбер (○—○), таких осей 6;
r — вращение на 120° вокруг оси, проходящей через две противоположные вершины (△—△) таких осей 4.

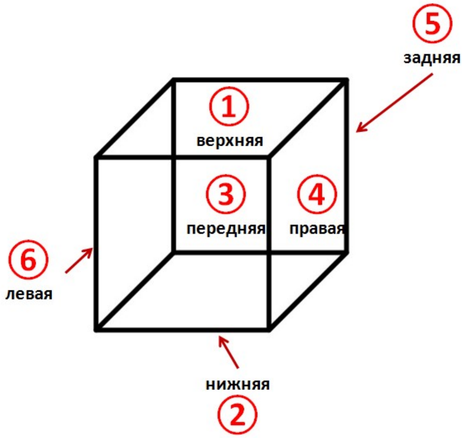
Обозначим через F множество граней куба; $|F| = N = 6$. Выберем некоторую грань куба (квадрат) и обозначим её ①, а параллельную ей — ②.
Перенумеруем последовательно вершины грани ① числами 1, …, 4, а вершины грани ② — числами 5, …, 8 так, что вершина с номером i смежна с вершиной с номером $i+4,\ i = 1, 2, 3, 4.$

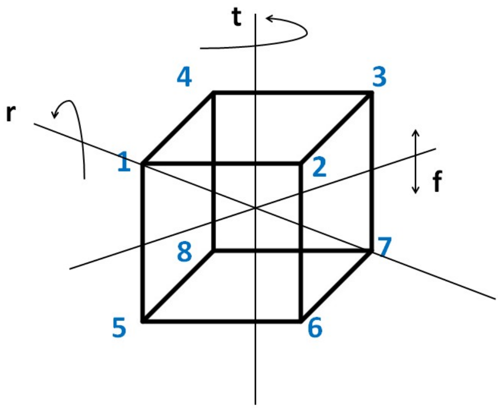
Перестановки далее указаны для случая, когда ось вращения

$\langle t\rangle$ проходит через середины граней ① и ②,
$\langle f\rangle$ проходит через середины рёбер (3-7) и (1-5),
$\langle s\rangle$ проходит через вершины (1) и (7),

а грани обозначены: (1-2-6-5) через ③, параллельная ей грань — ⑤, грань (2-3-7-6) — через ④, параллельная ей грань — ⑥.







$g \in O$	перестановка	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	(①)…(⑥)	$\langle\, 6,\ 0,\ \ldots \rangle$	x_1^6	1
t, t^3	(①)(②)(③④⑤⑥)	$\langle\, 2,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ \rangle$	$x_1^2 x_4$	6
t^2	(①)(②)(③⑤)(④⑥)	$\langle\, 2,\ 2,\ 0,\ \ldots \rangle$	$x_1^2 x_2^2$	3
f	(①②)(③⑥)(④⑤)	$\langle\, 0,\ 3,\ 0,\ \ldots \rangle$	x_2^3	6
r, r^2	(①③⑥)(②④⑤)	$\langle\, 0,\ 0,\ 2,\ 0,\ \ldots \rangle$	x_3^2	8
Всего				24

$$P(x_1,\, \ldots,\, x_6) \;=\; \frac{1}{24}\Big[\, x_1^6 + 6x_1^2 x_4 + 3x_1^2 x_2^2 + 6x_2^3 + 8x_3^2 \,\Big].$$

$$\#Col(2) \;=\; \frac{1}{24}\big[2^6 + 12\cdot 2^3 + 3\cdot 2^4 + 8\cdot 2^2\big] \;=\; 10,$$
$$\#Col(3) \;=\; \frac{1}{24}\big[3^6 + 12\cdot 3^3 + 3\cdot 3^4 + 8\cdot 3^2\big] \;=\; 48.$$

Цикловой индекс действия группы октаэдра на множестве R *рёбер куба* ($|R| = N = 12$):

$g \in O$	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$\langle\, 12,\, 0,\, \ldots\,\rangle$	x_1^{12}	1
t, t^3	$\langle\, 0,\, 0,\, 0,\, 3,\, 0,\, 0\,\rangle$	x_4^3	$3\cdot 2 = 6$
t^2	$\langle\, 0,\, 6,\, 0,\, \ldots\,\rangle$	x_2^6	3
f	$\langle\, 2,\, 5,\, 0,\, \ldots\,\rangle$	$x_1^2 x_2^5$	6
r, r^2	$\langle\, 0,\, 0,\, 4,\, 0,\, \ldots\,\rangle$	x_3^4	$4\cdot 2 = 8$
Всего			24

$$P(O \underset{\alpha}{:} R) \;=\; \frac{1}{24}\big[\,x_1^{12} + 6x_4^3 + 3x_2^6 + 6x_1^2x_2^5 + 8x_3^4\,\big].$$

Цикловой индекс действия группы октаэдра на множестве V *вершин куба* ($|V| = N = 8$):

$g \in O$	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$\langle\, 8,\, 0,\, \ldots\,\rangle$	x_1^8	1
t, t^3	$\langle\, 0,\, 0,\, 0,\, 2,\, 0,\, 0\,\rangle$	x_4^2	$3\cdot 2 = 6$
t^2	$\langle\, 0,\, 4,\, 0,\, \ldots\,\rangle$	x_2^4	3
f	$\langle\, 0,\, 4,\, 0,\, \ldots\,\rangle$	x_2^4	6
r, r^2	$\langle\, 2,\, 0,\, 2,\, 0,\, \ldots\,\rangle$	$x_1^2 x_3^2$	$4\cdot 2 = 8$
Всего			24

$$P(O \underset{\alpha}{:} V) \;=\; \frac{1}{24}\big[\, x_1^8 + 6x_4^2 + 9x_2^4 + 8x_1^2x_3^2 \,\big].$$

Задача 2.6 (Перечисление графов). *Сколько имеется неориентированных непомеченных графов (без петель и кратных рёбер) с тремя вершинами?*

Решение. T — стороны треугольника, $N = 3$.
$\mathcal{G} \cong S_3$ — все перестановки сторон, $n = 3! = 6$.

Ранее был найден цикловой индекс самодействия группы S_3, или, что то же, группы симметрии треугольника:

$$P(S_3) \;=\; \frac{1}{6}\big[\, x_1^3 + 2x_3^1 + 3x_1^1x_2^1 \,\big]$$

Графы *неориентированные* — $r = 2$ — пометки «есть ребро/нет ребра», $P(2,2,2) = 4$: пустой, с 1, 2 и 3 рёбрами.

Цикловые индексы самодействия $S_n, \mathbb{Z}_n, D_n$ и действия O на элементы куба (F — грани, R — рёбра, V — вершины).

$$P(S_n) \;=\; \sum_{\substack{(j_1,\ldots,j_n)\,\in\,\mathbb{N}_0^n \\ 1j_1+2j_2+\ldots+nj_n\,=\,n}} \frac{x_1^{j_1}x_2^{j_2}\ldots x_n^{j_n}}{(1^{j_1}j_1!)(2^{j_2}j_2!)\ldots(n^{j_n}j_n!)}\,,$$

$$P(\mathbb{Z}_n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n} \varphi(d)x_d^{n/d}\,, \quad \varphi \text{ — функция Эйлера},$$

$$P(D_n) = \frac{1}{2}P(\mathbb{Z}_n) + \begin{cases} \frac{1}{2}x_1x_2^{(n-1)/2}, & n \text{ нечётно}, \\ \frac{1}{4}\big[x_2^{n/2} + x_1^2x_2^{n/2-1}\big], & n \text{ чётно}, \end{cases}$$

$$P(O \underset{\alpha}{:} V) = \frac{1}{24}\big[\, x_1^8 + 9x_2^4 + 6x_4^2 + 8x_1^2x_3^2 \,\big],$$

$$P(O \underset{\alpha}{:} E) = \frac{1}{24}\big[\, x_1^{12} + 3x_2^6 + 8x_3^4 + 6x_1^2x_2^5 + 6x_4^3 \,\big],$$
$$P(O \underset{\alpha}{:} F) = \frac{1}{24}\big[\, x_1^{6} + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4 + 6x_2^3 + 8x_3^2 \,\big].$$

2.2 Применение теоремы Пойа для решения комбинаторных задач

К множеству T, $|T| = N$, группе $\mathcal{G}$, $|G| = n$ и действию $\mathcal{G} \underset{\alpha}{:} T$ добавим множество $R = \{c_1, \ldots, c_r\}$, меток («красок»), и совокупность функций $F = R^T$ — приписывания меток (*раскрашиваний*) элементам T.

$\mathcal{G}$, действуя на T, действует и на R^T — операция $\circ : R^T \times G \overset{\circ}{=} R^T$.

Придадим вес элементам R: $w(c_i) = y_i$, $i = \overline{1, r}$.

Теорема 2.2 (Редфилда-Пойа; 1927, 1937). *Цикловой индекс действия группы $\mathcal{G}$ на R^T есть*

$$P(\mathcal{G} \underset{\alpha}{:} R^T, y_1, \ldots, y_r) = $$
$$= P(\mathcal{G} \underset{\alpha}{:} T, x_1, \ldots, x_N)\Big|_{x_k = y_1^k + \ldots + y_r^k,\ k = \overline{1,N}}.$$

Следствие. *Если все веса выбраны одинаковыми ($y_1 = \ldots = y_r = 1$), то $x_1 = \ldots = x_N = r$ и $W(F)$ — число классов эквивалентности*

$$C(\mathcal{G} \underset{\alpha}{:} R^T) = C(\mathcal{G} \underset{\alpha}{:} T) = P(\mathcal{G} \underset{\alpha}{:} T, r, \ldots, r)$$

— лемма Бёрнсайда.

Что можно определить (подсчитать) с помощью:

леммы Бёрнсайда — общее число неэквивалентных разметок (раскрасок);

теорема Редфилда-Пойа — число разметок данного типа, т.е. содержащих данное количество элементов конкретного цвета.

Дьёрдь Пойа
(Pólya György, 1887–1985)
— венгерско-швейцарско-американский математик.
После окончания Будапештского университета работал в Высшей технической школе в Цюрихе, а с 1940 г. — в Стэнфордском университете (США).

Усложним задачу об ожерельях:

Задача 2.2 (об ожерельях $N = 5$, $r = 3$, продолжение, более сложный вариант). *Цвета — красный, синий, зелёный. Ожерелья одинаковы, если одно получается из другого поворотом и переворотом.*

Сколько имеется ожерелий, имеющих ровно 2 *красные бусины?*

Решение. Было: $\mathcal{G} = D_5$, цикловой индекс

$$P(x_1, \ldots, x_5) = \frac{1}{10}\left[x_1^5 + 4x_5 + 5x_1x_2^2\right],$$

всего ожерелий $P(3, \ldots, 3) = 39$ (только поворот — 51).

$$x_1 = y_1+y_2+y_3, \;\; x_2 = y_1^2+y_2^2+y_3^2, \;\; \ldots, \;\; x_5 = y_1^5+y_2^5+y_3^5.$$

$$\begin{cases} w(\text{красный}) & = y_1, \\ w(\text{синий}) & = y_2, \\ w(\text{зелёный}) & = y_3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = y, \\ y_2 = y_3 = 1, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & = y+2, \\ x_2 & = y^2+2, \\ \ldots & \\ x_5 & = y^5+2. \end{cases} \qquad \begin{gathered} x_k \mapsto y^k + 2,\ k = \overline{1,5}; \\ P(y) = \sum_{i=1}^{5} u_i y^i; \\ \boxed{u_2 = ?} \end{gathered}$$

$$P(y) \;=\; \frac{1}{10}\big[\, u_0 + u_1 y + u_2 y^2 + \ldots + u_5 y^5 \,\big] \;=$$

$$= \frac{1}{10}\big[\, (y+2)^5 + 4(y^5+2) + 5(y+2)(y^2+2)^2 \,\big] \;=$$

$$= \frac{1}{10}\big[\, \ldots + C_5^2 2^3 y^2 + \ldots + 5(y+2)(y^4+4y^2+4) \,\big] \;=$$

$$= \frac{1}{10}\big[\, \ldots + (10\cdot 8 + 5\cdot 2\cdot 4)y^2 + \ldots \,\big].$$

$$u_2 \;=\; 8 + 10 \;=\; 12.$$

Задача 2.7 (о раскраске куба). *Вершины куба помечают красными и синим цветами. Сколько существует*

1) *разнопомеченных кубов ($\#Col(3)$);*
2) *кубов, у которых половина вершины красные ($\#Col(4,4)$);*
3) *кубов, у которых не более 2 красных вершин?*

Решение.

Цикловой индекс действия O на вершины куба —

$$P(O \underset{\alpha}{:} V;\, x_1, \dots x_8) \;=\; \frac{1}{24}\big[\, x_1^8 + 6x_4^2 + 9x_2^4 + 8x_1^2x_3^2 \,\big]\,.$$

1) $\quad \#Col(2) \;=\; P(x_1, \dots, x_8)\Big|_{x_1=\ldots=x_8=2} \;=$

$$= \;\frac{2^8 + 6\cdot 2^2 + 9\cdot 2^4 + 8\cdot 4\cdot 4}{3\cdot 2^3} \;=\; \frac{32+3+18+16}{3} \;=\; 23.$$

2) $\;w(\text{красный}) = y,\;\; w(\text{синий}) = 1,$
$x_k = y^k + 1,\;\; k = \overline{1,8}$:

$$\#Col(4,4) \;=\; \frac{1}{24}\big[\,(y+1)^8 + 9\cdot(y^2+1)^4 + 6\cdot(y^4+1)^2 + {} \\ + 8\cdot(y+1)^2(y^3+1)^2\,\big] \;=$$

$$= \;\frac{1}{24}\big[\,\ldots + C_8^4 y^4 + \ldots + 9(\ldots 4y^2 + 6y^4 + \ldots) + {} \\ \ldots + 6\cdot 2y^4 \ldots + 8(\ldots + 2y + y^2 + \ldots)(\ldots + 2y^3 + \ldots)\,\big]\,.$$

$$u_4 \;=\; \frac{1}{24}\big[\,70 + 9\cdot 6 + 6\cdot 2 + 8\cdot 2\cdot 2\,\big] \;=\; \frac{168}{24} \;=\; 7.$$

3) $\;\#Col(\leqslant 2, *) \;=\; u_0 + u_1 + u_2$, очевидно $\;u_0 = u_1 = 1$.

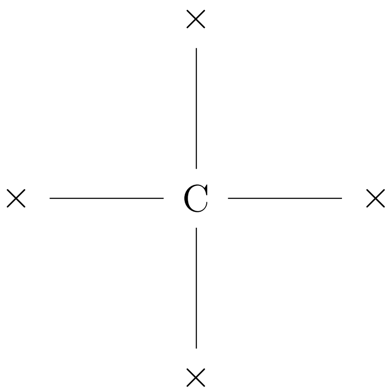
$$u_2 \;=\; \frac{1}{24}\big[\ldots + 28y^2 + 9(\ldots + 4y^2 \ldots) + 8(\ldots + y^2 + \ldots)\big] \;= \\ = \;\frac{28+36+8}{24} \;=\; 3.$$

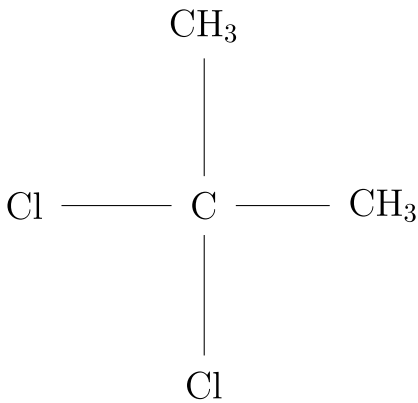
$$\#Col(\leqslant 2, *) \;=\; 1 + 1 + 3 \;=\; 5.$$

Задача 2.8 (о числе молекул). *Рассмотрим молекулы 4-валентного углерода* C*: где на на месте* $\times$ *могут находится* CH_3 *(метил),* C_2H_5 *(этил),* H *(водород) или* Cl *(хлор). Например — дихлорбутан.*

Найти

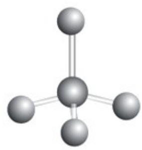
1) *общее число M всех молекул;*
2) *число молекул с $H = 0, 1, 2, 3, 4$ атомами водорода.*





Решение. Какая группа действует и на каком множестве?

T на множестве вершин тетраэдра —



Цикловой индекс —

$g \in T$	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$\langle 4, 0, 0, 0 \rangle$	x_1^4	1
t, t^2	$\langle 1, 0, 1, 0 \rangle$	$x_1 x_3$	$4 \cdot 2 = 8$
f	$\langle 0, 2, 0, 0 \rangle$	x_2^2	3

$$P(T \underset{\alpha}{:} V) = \frac{1}{12}\left[\, x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 \,\right]$$

1. Всего M молекул (4 радикала, $x_1 = \ldots = x_4 = 4$) —

$$M = P(x_1, \ldots, x_4) = \frac{4^4 + 8 \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2}{3 \cdot 4} = 36.$$

2. Веса: $y_1 = \text{Н}$, $y_2 = y_3 = y_4 = 1$.
Подстановка в P: $x_k = \text{Н}^k + 3$, $k = \overline{1,4}$.

$$P(H) =$$
$$= \frac{1}{12}\left[(\text{Н}+3)^4 + 8\,(\text{Н}+3)\left(\text{Н}^3+3\right) + 3\left(\text{Н}^2+3\right)^2 \right] =$$
$$= \frac{1}{12}\Big[\left(\text{Н}^4 + 4 \cdot \text{Н}^3 \cdot 3 + 6 \cdot \text{Н}^2 \cdot 9 + 4 \cdot \text{Н} \cdot 27 + 81\right) +$$
$$+8\left(\text{Н}^4 + 3\text{Н}^3 + 3\text{Н} + 9\right) + 3\left(\text{Н}^4 + 6\text{Н}^2 + 9\right) \Big] =$$
$$= 1 \cdot \text{Н}^4 + 3 \cdot \text{Н}^3 + 6 \cdot \text{Н}^2 + 11 \cdot \text{Н} + 15.$$

Итого имеется молекул с числом атома водорода: с 4-мя — 1 шт., с 3-мя — 3 шт., с 2-мя — 6 шт., с 1-м — 11 шт., без атомов водорода — 15 шт., всего — $1 + 3 + 6 + 11 + 15 = 36$.

Задача 2.9 (об ожерельях со стоимостью). *Стоимости камней для ожерелий равны: красного — 1 ед., синего — 2 ед., зелёного — 3 ед. Сколько существует ожерелий из 15 таких камней, стоимость которых равна 30 ед.?*

Решение. Цикловой индекс самодействия группы диэдра (было ранее):

$$P(D_n) = \frac{1}{2n}\sum_{d|n} \varphi(d) x_d^{n/d} + \begin{cases} \frac{1}{2} x_1 x_2^{(n-1)/2}, & n \text{ нечётно}, \\ \frac{1}{4}\left[x_2^{n/2} + x_1^2 x_2^{n/2-1}\right], & n \text{ чётно}, \end{cases}$$

Для $n = 15$: $D(15) = \{1, 3, 5, 15\}$

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(3) = 2, \quad \varphi(5) = 4, \quad \varphi(15) = 8.$$

$$P_{D_{15}} = \frac{1}{30}\left[x_1^{15} + 2x_3^5 + 4x_5^3 + 8x_{15}^1 + 15x_1x_2^7\right].$$

С учётом стоимости камней необходимая подстановка в цикловой индекс: красный — $y_1 = y$,
синий — $y_2 = y^2$,
зелёный — $y_3 = y^3$,
откуда $x_k = y^k + y^{2k} + y^{3k}$.

$$W = \frac{1}{30}\Big[\left(y + y^2 + y^3\right)^{15} + 2\left(y^3 + y^6 + y^9\right)^5 + \\ + 4\left(y^5 + y^{10} + y^{15}\right)^3 + 8\left(y^3 + y^{30} + y^{45}\right)^1 + \\ + 15\left(y + y^2 + y^3\right)\left(y^2 + y^4 + y^6\right)^7\Big] = \ldots + u_{30}y^{30} + \ldots.$$

$$u_{30} = \frac{1}{30}\Big[\sum_{i=0}^{7} C_{15}^{i,15-i,i} + 2\sum_{i=0}^{2} C_5^{i,5-i,i} + 4\sum_{i=0}^{1} C_3^{i,3-i,i} + \\ + 8 + 15\sum_{i=0}^{3} C_7^{i,7-i,i}\Big] = 59\,788.$$

2.3 Задачи с решениями

Задача 2.10. *Найдите порядок стабилизаторов произвольной (а) вершины, (б) ребра, (в) грани куба при действии группы октаэдра O на соответствующие элементы.*
Какие перестановки в них содержатся?

Решение.

(а) Пусть O действует на вершины куба и v — некоторая вершина.
Тогда $\operatorname{Stab}(v) = \{\, e, s, s^2 \,\} \leqslant O$ — группа вращений на 120° (в выбранном направлении) вокруг диагонали куба, проходящей через данную вершину, $\operatorname{Stab}(v) \cong \mathbb{Z}_3$.

(б) Пусть O действует на рёбра куба и r — некоторое ребро.
Тогда $\operatorname{Stab}(r) = \{\, e, f \,\} \leqslant O$ — группа вращений на 180° вокруг оси, проходящей через середины рёбер (данного и ему противоположного) куба, $\operatorname{Stab}(r) \cong \mathbb{Z}_2$.

(в) Пусть O действует на грани куба и f — некоторая грань.
Тогда $\operatorname{Stab}(f) = \{\, e, t, t^2, t^3 \,\} \leqslant O$ — группа вращений на 90° (в выбранном направлении) вокруг вокруг оси, проходящей через середины граней (данной и ей противоположной) куба, $\operatorname{Stab}(f) \cong \mathbb{Z}_4$.

Задача 2.11. *Найти цикловой индекс для следующим образом определённого самодействия четверной группы Клейна*
$V_4 = \{\, e,\, a,\, b,\, ab \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 = e^2 = e,\, ab = ba \,\}$*:*

1.
$$e : \begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ e & a & b & ab \end{pmatrix}, \qquad a : \begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ a & e & ab & b \end{pmatrix},$$

$$b:\begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ b & ab & e & a \end{pmatrix}, \qquad ab:\begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ ab & b & a & e \end{pmatrix};$$

2.

$$e:\begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ e & a & b & ab \end{pmatrix}, \qquad a:\begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ a & e & b & ab \end{pmatrix},$$

$$b:\begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ e & a & ab & b \end{pmatrix}, \qquad ab:\begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ a & e & ab & b \end{pmatrix}.$$

Решение. Везде группа Клейна V_4 действует на свои же элементы.

1)

g	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$\langle\, \underline{4},\, 0,\, 0,\, 0\,\rangle$	x_1^4	1
$a,\, b,\, ab$	$\langle\, 0,\, 2,\, 0,\, 0\,\rangle$	x_2^2	3

$$P_{V_4} \;=\; \frac{1}{4}\big[\, x_1^4 + 3x_2^2 \,\big].$$

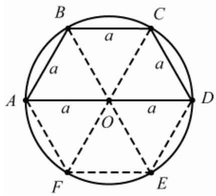
2)

g	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$\langle\, \underline{4},\, 0,\, 0,\, 0\,\rangle$	x_1^4	1
$a,\, b$	$\langle\, \underline{2},\, 1,\, 0,\, 0\,\rangle$	$x_1^2x_2$	2
ab	$\langle\, 0,\, 1,\, 0,\, 0\,\rangle$	x_2	1

$$P'_{V_4} \;=\; \frac{1}{4}\big[\, x_1^4 + 2x_1^2x_2 + x_2 \,\big].$$

Первая группа перестановок есть нормальная подгруппа S_4, а вторая — нет.

Задача 2.12. *Найти цикловой индекс транзитивного самодействия группы* $\mathbb{Z}_6$.



Решение. Обозначим последовательно вершины правильного шестиугольника буквами $A, \ldots, F$, $\mathbb{Z}_6 = \langle t \rangle$, t — поворот на 60°.

$g \in \mathbb{Z}_6$	$Type(g)$	$w(g)$
$e = (A)\ldots(F)$	$\langle\, 6,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0 \,\rangle$	x_1^6
$g = (ABCDEF)$	$\langle\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 1 \,\rangle$	x_6
$g^2 = (ACE)(BDF)$	$\langle\, 0,\, 0,\, 2,\, 0,\, 0,\, 0 \,\rangle$	x_3^2
$g^3 = (AD)(BE)(CF)$	$\langle\, 0,\, 3,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0 \,\rangle$	x_2^3
$g^4 = (AEC)(BFD)$	$\langle\, 0,\, 0,\, 2,\, 0,\, 0,\, 0 \,\rangle$	x_3^2
$g^5 = (AFEDCB)$	$\langle\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 1 \,\rangle$	x_6

$$P_{\mathbb{Z}_6} = \frac{1}{6}\big[\, x_1^6 + x_2^3 + 2x_3^2 + 2x_6 \,\big] = \frac{1}{6}\sum_{d|6} \varphi(d) x_d^{6/d};$$

$$D(6) = \{\, 1, 2, 3, 6 \,\},\ \varphi(1) = \varphi(2) = 1,\ \varphi(3) = \varphi(6) = 2$$

Задача 2.13. *На стеклянных пластинах рисуют одинаковые прямоугольники (не квадраты) и раскрашивают их стороны в r цветов.*

Сколько можно нарисовать таких различных прямоугольников? Конкретно, при $r = 2$?

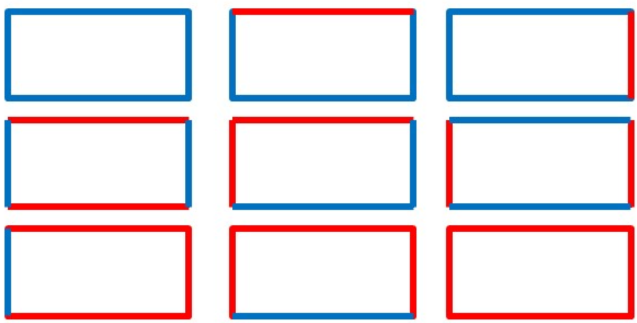
Решение. Найдём цикловой индекс $R \underset{\alpha}{:} S$ действия группы R самосовмещений прямоугольника в пространстве на его стороны. Группа $R = \langle t, f \rangle$ порождается образующими: t — вращение вокруг центра симметрии на $180°$, f — отражение вокруг оси, проходящей через середины противоположных сторон, 2 оси.

$g \in R$	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$\langle 4, 0, 0, 0 \rangle$	x_1^4	1
t	$\langle 0, 2, 0, 0 \rangle$	x_2^2	1
f	$\langle 2, 1, 0, 0 \rangle$	$x_1^2 x_2$	2

$$P(R \underset{\alpha}{:} S;\, x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) = \frac{1}{4}\left[\, x_1^4 + x_2^2 + 2x_1^2 x_2 \,\right].$$

Число 2-цветных прямоугольников —

$$\#Col(2) = P(R \underset{\alpha}{:} S; 2, \ldots, 2) = \frac{16 + 4 + 16}{4} = 9$$



Задача 2.14. *На стеклянных пластинах рисуют одинаковые прямоугольники (не квадраты) и раскрашивают их вершины в 3 цвета.*

Сколько можно нарисовать таких различных прямоугольников?

Решение. Найдём цикловой индекс $P(R \underset{\alpha}{:} V)$ действия группы R самосовмещений прямоугольника в пространстве на его вершины.

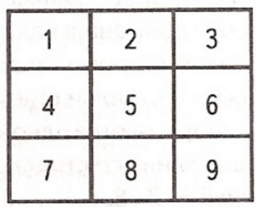
$g \in R$	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$\langle 4, 0, 0, 0 \rangle$	x_1^4	1
t	$\langle 0, 2, 0, 0 \rangle$	x_2^2	1
f	$\langle 0, 2, 0, 0 \rangle$	x_2^2	2

$$P(R \underset{\alpha}{:} V;\, x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) \;=\; \frac{1}{4}\left[\, x_1^4 + 3x_2^2 \,\right]$$

Число прямоугольников:

$$\#Col(3) \;=\; P(R \underset{\alpha}{:} V; 3, \ldots, 3) \;=\; \frac{81+27}{4} \;=\; 27$$

Задача 2.15. *Квадратная стеклянная пластина разделена на 9 равных квадратов, которые раскрашиваются в один из 2 цветов. Сколько существует разноокрашенных пластин?*



Решение. На множество T из $N = 9$ квадратов стеклянной пластики действует группа $D_4 \;=\; \langle\, t,\, f,\, s \,\rangle$, $t^4 = f^2 = s^2 = e$, где

t — вращение на $90°$ вокруг центра квадрата;

f — симметрия относительное прямой, проходящей через середины противоположных сторон;

s — симметрия относительное прямой, проходящей через противоположные вершин.

Определяем цикловой индекс действия D_4 на T.

$g \in D_4$	перестановка	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$(1)\ldots(9)$	$\langle\, 9,\ 0,\ \ldots \rangle$	x_1^9	1
t, t^3	$(5)(1397)(2684)$	$\langle\, 1,\ 0,\ 0,\ 2,\ \ldots \rangle$	$x_1 x_4^2$	2
t^2	$(5)(19)(37)(28)(79)$	$\langle\, 1,\ 4,\ 0,\ \ldots \rangle$	$x_1 x_2^4$	1
$s, f, \ldots$	$(2)(5)(8)(13)(48)(79)$	$\langle\, 3,\ 3,\ 0,\ \ldots \rangle$	$x_1^3 x_2^3$	4
				8

Цикловой индекс: $P = \dfrac{1}{8}\left[\, x_1^9 + 2x_1x_4^2 + x_1x_2^4 + 4x_1^3x_2^3 \,\right]$.

$$\#Col(2) = \frac{2^9 + 2\cdot 2^3 + 2^5 + 4\cdot 2^3\cdot 2^3}{2^3} = 102.$$

Задача 2.16 (о компостере). *Компостером назовём квадратную таблицу 4×4, в которой каждая клетка может быть либо пустой, либо содержать в центре символ $\bullet$.*

Сколько существует различных компостеров, если не различать те, которые могут быть получены один из другого самосовмещениями в пространстве?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Решение. Найдём цикловой индекс действия группы диэдра D_4 на 16 клеток компостера.

$D_4 = \langle\, t, f, s \,\rangle$, $t^4 = f^2 = s^2 = e$, $|D_4| = 8$,

$g \in D_4$	перестановка	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$(1)\dots(16)$	$\langle 16, 0, \dots \rangle$	x_1^4	1
$t,\ t^3$	$(1,4,16,13)\dots(6,7,11,10)$	$\langle 0,0,0,4,\dots \rangle$	x_4^4	2
t^2	$(1,16)\dots(6,11)$	$\langle 0,8,0\dots \rangle$	x_2^8	1
f	$(1,4)\dots(10,11)$	$\langle 0,8,0,\dots \rangle$	x_2^8	2
s	$(1)\dots(16)(2,5)\dots(12,15)$	$\langle 4,6,0,\dots \rangle$	$x_1^4 x_2^6$	2

Цикловой индекс действия группы D_4 на элементы компостера:

$$P(x_1,\,\dots,\,x_4) \;=\; \frac{1}{8}\Big[\,x_1^{16} + 2x_4^4 + 3x_2^8 + 2x_1^4x_2^6\,\Big].$$

Наличие/отсутствие в клетке символа • описывается их отображением в двухэлементное множество (раскраске в два цвета), поэтому число C различных компостеров есть

$$C \;=\; P(2,\,2,\,\dots) \;=\; \frac{2^{16}+2^5+3\cdot 2^8+2^{11}}{2^3} \;=$$

$$=\; 8192+4+3\cdot 32+256 \;=\; 8196+96+256 \;=\; 8548.$$

К аналогичной задаче сводится задача о числе фотошаблонов рисунков соединений для интегральных схем.

Задача 2.17. *Найти число различных вариантов раскраски граней куба в* 2 *и* 3 *цвета.*

Решение. Цикловой индекс:

$$P(O \underset{\alpha}{:} F) \;=\; \frac{1}{24}\Big[\,x_1^6 + \underline{6x_1^2x_4} + 3x_1^2x_2^2 + \underline{6x_2^3} + 8x_3^2\,\Big].$$

$$\#Col(2) = \frac{2^6+12\cdot 2^3+3\cdot 2^4+2^5}{3\cdot 2^3} = \frac{8+12+6+4}{3} = 10.$$

$$\#Col(3) = \frac{3^6 + 12 \cdot 3^3 + \cdot 3^5 + 8 \cdot 3^2}{3 \cdot 8} = 57.$$

Задача 2.18. *Определить число различных раскрасок всех граней правильной 4-угольной пирамиды П в 3 цвета.*

Решение. Занумеруем последовательно боковые грани П числами 1, ... 4, а основание — 5.
$\mathcal{G} \cong \mathbb{Z}_4 = \langle\, t\,\rangle$, t — вращение на $90°$.

$g \in \mathbb{Z}_4$	$Type(g)$	$w(g)$	#
$e = (1)(2)(3)(4)(5)$	$\langle\, 5,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0\,\rangle$	x_1^5	1
$t, t^3 = (1234)(5)$	$\langle\, 1,\, 0,\, 0,\, 1,\, 0\,\rangle$	$x_1 x_4$	2
$t^2 = (12)(34)(5)$	$\langle\, 1,\, 2,\, 0,\, 0,\, 0\,\rangle$	$x_1 x_2^2$	1

$$P(x_1,\, \ldots,\, x_5) = \frac{1}{4}\left[\, x_1^5 + 2x_1x_4 + x_1x_2^2\,\right],$$

$$P(3, \ldots, 3) = \frac{3^5 + 2 \cdot 3^2 + 3^3}{4} = \frac{9 \cdot 32}{4} = 72.$$

Задача 2.19. *Найти число раскрасок всех граней усечённой правильной 4-угольной пирамиды в 3 цвета.*

Решение. Пронумеруем грани П: боковые — с 1 по 4 по часовой стрелке, основания — 5 и 6. Группа, действующая на П — $\mathbb{Z}_4 = \langle\, t\,\rangle$, t — поворот на $90°$ по часовой стрелке.

$g \in \mathbb{Z}_4$	перестановка	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$(1)\ldots(6)$	$\langle\, 6,\, 0, \ldots\,\rangle$	x_1^6	1
t, t^3	$(1234)(5)(6)$	$\langle\, 2,\, 0,\, 0,\, 1,\, 0,\, 0\,\rangle$	$x_1^2 x_4$	2
t^2	$(12)(34)(5)(6)$	$\langle\, 2,\, 2,\, 0,\, \ldots\,\rangle$	$x_1^2 x_2^2$	1

Цикловой индекс $P = \dfrac{1}{4}\left[\, x_1^6 + 2x_1^2x_4 + x_1^2x_2^2 \,\right].$

$$\#Col(3) = \frac{3^6 + 2\cdot 3^2 + 3^4}{4} = \frac{3^3(27+2+3)}{4} = 216.$$

<u>Задача</u> 2.20. *Найти число различных вариантов раскраски граней тетраэдра в* 2 *и* 3 *цвета.*

Решение. $P(T \underset{\alpha}{:} F, x_1, \ldots, x_4) = \dfrac{1}{12}\left[\, x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 \,\right].$

$$\#Col(2) = \frac{2^4 + 11\cdot 2^2}{3\cdot 2^2} = \frac{4+11}{3} = 5\,.$$

$$\#Col(3) = \frac{3^4 + 11\cdot 3^2}{3\cdot 4} = \frac{27+33}{4} = \frac{60}{4} = 15.$$

<u>Задача</u> 2.21. *Найти число различных вариантов раскраски рёбер тетраэдра в* 2 *и* 3 *цвета.*

Решение. Группа $T = \langle t, f\rangle$, $t^3 = f^2 = e$, $|T| = 12$, где

t — вращение на 120° вокруг оси, проходящей через вершину и центр симметрии, 4 оси;

f — вращение на 180° вокруг оси, проходящей через середины противоположных рёбер, 3 оси.

Обозначим через E множество рёбер тетраэдра — $|E| = 6$ — и обозначим их цифрами от 1 до 6, считая, что рёбра 1, 2 и 3 инцидентны одной вершине, а ось вращения, задаваемого элементом f, проходит через середины рёбер 1 и 6.
Найдём цикловой индекс.

$g \in T$	$Type(g)$	$w(g)$	#
$e = (1) \ldots (6)$	$\langle\, 6,\, 0,\, \ldots \rangle$	x_1^6	1
$t, t^2 = (123)(456)$	$\langle\, 0,\, 0,\, 2,\, 0,\, \ldots \rangle$	x_3^2	8
$f = (1)(23)(45)(6)$	$\langle\, 2,\, 2,\, 0,\, \ldots \rangle$	$x_1^2 x_2^2$	3
			12

$$P(T \underset{\alpha}{:} E, x_1, \ldots, x_6) \;=\; \frac{1}{12}\big[\, x_1^6 + 8x_3^2 + 3x_1^2 x_2^2 \,\big].$$

$$\#Col(2) \;=\; \frac{2^6 + 8 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^4}{3 \cdot 2^2} \;=\; \frac{15 + 9 + 12}{3} \;=\; 12,$$

$$\#Col(3) \;=\; \frac{3^6 + 8 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^4}{3 \cdot 4} \;=\; 87.$$

Задача 2.22. *Найти число различных вариантов раскраски рёбер куба в 2 цвета.*

Решение. Цикловой индекс:

$$P(O \underset{\alpha}{:} R) \;=\; \frac{1}{24}\big[\, x_1^{12} + 6x_4^3 + 3x_2^6 + 6x_1^2 x_2^5 + 8x_3^4 \,\big].$$

$$\#Col(2) \;=\; \frac{2^{12} + 6 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^6 + 7 \cdot 2^7}{3 \cdot 2^3} \;=\; 218.$$

Задача 2.23. *Найти число различных вариантов раскраски вершин куба в 2 и 3 цвета.*

Решение. Цикловой индекс:

$$P(O \underset{\alpha}{:} V) \;=\; \frac{1}{24}\big[\, x_1^8 + 6x_4^2 + 9x_2^4 + 8x_1^2 x_3^2 \,\big].$$

$$\#Col(2) = \frac{2^8 + 6\cdot 2^2 + 9\cdot 2^4 + 2^7}{3\cdot 2^3} = 23,$$
$$\#Col(3) = \frac{3^8 + 6\cdot 3^2 + 9\cdot 3^4 + 8\cdot 3^4}{3\cdot 8} = 333.$$

Задача 2.24. *Сколькими геометрически различными способами три абсолютно одинаковые мухи могут усесться в вершинах правильного семиугольника, нарисованного на листе бумаги?*

Решение. Множество T — вершины семиугольника, на которые действует группа $\mathbb{Z}_7 = \langle\, t\,\rangle,\ t^7 = e$.

$g \in \mathbb{Z}_7$	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$\langle\, 7,\, 0,\, \ldots\,\rangle$	x_1^7	1
$t,\, t^2,\, \ldots,\, t^6$	$\langle\, 0,\, \ldots,\, 0,\, 1\,\rangle$	x_7	6

Цикловой индекс самодействия $\mathbb{Z}_7$:

$$P_{\mathbb{Z}_7}(x_1,\, \ldots,\, x_7) = \frac{1}{7}\left[\, x_1^7 + 6x_7\,\right] = \frac{1}{7}\sum_{d|7}\varphi(d)x_d^{7/d}.$$

Число различных раскрасок в 2 цвета (муха есть/нет), при условии окраски ровно 3 вершин из 7 есть коэффициент u_3 при y^3 после подстановки
$x_1 \mapsto y+1,\ x_7 \mapsto y^7+1$ в $P_{\mathbb{Z}_7}$:

$$P(y) = \frac{1}{7}\left[\,(y+1)^7 + 6(y+1)\,\right] = \frac{1}{7}\left[\ldots + C_7^3 y^3 + \ldots\right].$$

$$u_3 = \frac{7!}{7\cdot 3!\cdot 4!} = \frac{5\cdot 6}{2\cdot 3} = 5.$$

Задача 2.25. *Боковые грани правильной 6-угольной пирамиды окрашиваются в красный, синий и зелёный цвета. Определить*

(а) *число различных 2- и 3-цветных пирамид;*

(б) *число пирамид с одной красной гранью;*

(в) *число пирамид, у которых не менее трёх красных граней.*

Решение. Имеем транзитивное самодействие $\mathbb{Z}_6$.

(а) *Общее число пирамид.*

$$P(\mathbb{Z}_6) = \frac{1}{6}\sum_{d|6}\varphi(d)\,x_d^{6/d} = \frac{1}{6}\left[\,x_1^6 + x_2^3 + 2x_3^2 + 2x_6\,\right].$$

$$\#Col(2) = \frac{1}{2\cdot 3}\left[2^6 + 2^3 + 2\cdot 2^2 + 2\cdot 2\right] = \frac{4\cdot 21}{3} = 14.$$

$$\#Col(3) = \frac{1}{6}\left[3^6 + 3^3 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3\right] = \frac{780}{6} = 130.$$

(б, в) *Число пирамид с* 1 *и* $3 \leqslant$ *красными гранями.* Полагаем $y_1 = y$, $y_2 = y_3 = 1$ (следим только за красными гранями), $x_1 = y+2$, $x_2 = y^2+2$, $x_3 = y^3+2$.

$$P(y) = \frac{1}{6}\left[\,(y+2)^6+(y^2+2)^3+2(y^3+2)^2+2(y^6+2)\,\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\left[u_0 + u_1 y + u_2 y^2 + \ldots + u_6 y^6\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\,\left(2^6+2^3+2^3+4\right)+6\cdot 2^5 y+\left(16\cdot 15+2\cdot 3\cdot 2^2\right)y^2+\ldots\,\right].$$

$u_0 = 84/6 = 14$, $u_1 = 2^5 = 32$, $u_2 = (240+24)/6 = 44$.

Число пирамид с:

(б) одной красной гранью — $u_1 = 32$,

(в) не менее, чем 3 красными гранями — $\#Col(3) - (u_0 + u_1 + u_2) = 130 - (14 + 32 + 44) = 130 - 90 = 40$.

Задача 2.26. *Имеются плоские бусины, окрашенные с одной стороны в красный, синий и зелёный цвета. Из них составляют ожерелья, содержащие по 8 в равноотстоящих точках окружности. Определить*

а) *число различных 3-цветных ожерелий;*

б) *число ожерелий, у которых не менее трёх красных бусин?*

Решение. Здесь везде — транзитивное самодействие циклической группы $\mathbb{Z}_8$.

$$D(8) = \{1,\, 2,\, 4,\, 8\},\ \varphi(1) = \varphi(2) = 1,\ \varphi(4) = 2,\ \varphi(8) = 4,$$

$$P(\mathbb{Z}_8) = \frac{1}{8} \sum_{d|8} \varphi(d)\, x_d^{8/d} = \frac{1}{8}\left[\, x_1^8 + x_2^4 + 2x_4^2 + 4x_8 \,\right].$$

а) *Общее число ожерелий*:

$$\#Col(3) = \frac{3^8 + 3^4 + 2 \cdot 9 + 4 \cdot 3}{8} = 834.$$

б) Подсчитаем *число X ожерелий, в которых число красных бусин не более* 3 (т.е. 0, 1 и 2) и вычтем полученное количество из 834.

Полагаем $y_1 = y$, $y_2 = y_3 = 1$ (следим только за бусинами красного цвета).

Найдём коэффициенты u_0, u_1, u_2 при y_0, y_1, y_2 в производящем многочлене W при подстановке $x_k = y^k + 2,\ k = 1, \ldots, 8.$

$$P(\mathbb{Z}_8) = \frac{1}{8}\left[\, x_1^8 + x_2^4 + 2x_4^2 + 4x_8 \,\right]$$

$$W = \frac{1}{8}\left[\, (y+2)^8 + (y^2+2)^4 + 2(y^4+2)^2 + 4(y^8+2) \,\right] =$$
$$= u_0 + u_1 y + u_2 y^2 + \ldots + u_8 y^8 =$$
$$= \frac{1}{2^3}\left[\, (2^8+2^4+2\cdot2^2+8) + 8\cdot2^7 y + (C_8^2\cdot2^6+4\cdot2^3)y^2 + \ldots \,\right].$$
$$u_0 = 2^5 + 2 + 1 + 1 = 36, \qquad u_1 = 128,$$
$$u_2 = 28\cdot8 + 4 = 224 + 4 = 228.$$

Отсюда $\#Col(3 \leqslant) = 834 - (36+128+228) = 834 - 392 = 442.$

Задача 2.27. *Грани куба раскрашивают в два цвета — красный и синий. Сколько существует кубов*

1) *различно окрашенных?*
2) *у которых не менее 4 граней красные ($\#Col(\geqslant 4)$)?*

Решение. Цикловой индекс:

$$P(O \underset{\alpha}{:} F) = \frac{1}{3\cdot2^3}\left[\, x_1^6 + \underline{6x_1^2x_4} + 3x_1^2x_2^2 + \underline{6x_2^3} + 8x_3^2 \,\right].$$

1) $\#Col(2) = \dfrac{2^6 + 12\cdot2^3 + 3\cdot2^4 + 2^5}{3\cdot2^3} = \dfrac{30}{3} = 10.$

2) Полагаем $w(1) = y,\ w(2) = 1,\ x_k = y^k + 1,\ k = \overline{1,6}.$

$$W = \frac{1}{24}\Big[\,(y+1)^6+6(y+1)^2(y^4+1)+3(y+1)^2(y^2+1)^2+ \\ +6(y^2+1)^3+8(y^3+1)^2\,\Big].$$

$\#Col(\geqslant 4) = u_4+u_5+u_6$ — число кубов с 4, 5 и 6 красными гранями соответственно. Очевидно $u_5 = u_6 = 1$.

Раскрывая W, находим:

$$W = \frac{1}{24}\Big[\,\ldots + C_6^4 y^4 + \ldots + 6(y^2+2y+1)(\underline{y^4}+1) + \\ +3(\underline{y^2}+2y+1)(\underline{y^4}+2\underline{y^2}+1)+ \\ +6(y^6+3\underline{y^4}+3y^2+1)+8(y^6+2y^3+1)\,\Big].$$

$$u_4 = \frac{15+6+9+18}{3\cdot 8} = \frac{5+2+3+6}{8} = \frac{16}{8} = 2.$$

Итого $\#Col(\geqslant 4) = 1+1+2 = 4$.

Задача 2.28. *Для раскраски сторон квадрата на стеклянной пластинке используют 3 цвета — красный, синий и зелёный. Сколько можно получить*

1) *разнораскрашенных квадратов?*
2) *квадратов с 1 красным ребром и не более 2 синих?*

Решение. Цикловой индекс:

$$P(D_4) = \frac{1}{8}\big[\,x_1^4+2x_4+3x_2^2+2x_1^2x_2\,\big]$$

1) $\#Col(3) = \frac{1}{8}[\,3^4+2\cdot 3+3\cdot 3^2+2\cdot 3^2\cdot 3\,] =$

$$\frac{81+6+27+54}{8} = \frac{168}{8} = \frac{87+81}{8} = 21.$$

2) При раскраске в 3 цвета: $x_k = y_1^k + y_2^k + y_3^k,\ k = \overline{1,4}$. Следим только за красным (y_1) и синим (y_2) цветами: $x_k = y_1^k + y_2^k + 1\,,\ k = \overline{1,4}$. Находим $u_{10} + u_{11} + u_{12}$.

$$W = \frac{1}{8}\,[\,(y_1 + (y_2+1))^4 + 2(y_1^4 + y_2^4 + 1) +$$

$$+\,3(y_1^2 + (y_2^2+1))^2 + 2(y_1 + (y_2+1))^2(y_1^2 + y_2^2 + 1)\,]\,\boxed{=}$$

нас интересуют только члены с y_1^1 (красное ребро — одно)

$$\frac{1}{8}\,[\,y_1^4 + 4y_1^3(y_2+1) + 6y_1^2(y_2+1)^2 + \underline{4y_1(y_2+1)^3} + (y_2+1) + \ldots$$

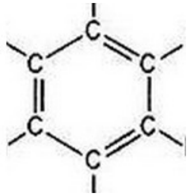
$$\ldots + 2(y_1^2 + \underline{2y_1(y_2+1)} + (y_2+1)^2)(y_1^2 + y_2^2 + 1)\,] =$$

$$= \frac{1}{8}\,[\ldots + 4y_1(y_2+1)^3 + 4y_1(y_2+1)(y_2^2+1))] =$$

$$= \frac{1}{8}\,[\,\ldots + 4y_1(y_2^3 + \underline{3y_2^2 + 3y_2^1 + 1}) + 4y_1(y_2^3 + \underline{y_2 + y_2^2 + 1})\,]\,\boxed{=}$$

нас интересуют только члены с y_2^0, y_2^1 и y_2^2 при y_1 (синих рёбер — 0, 1, 2)

$$\boxed{=}\,\frac{1}{8}\,[\,4\cdot 7 + 4\cdot 3\,] = \frac{4\cdot 10}{8} = 5.$$



<u>Задача</u> 2.29. *Присоединяя к свободным связям углерода бензольного кольца атомы водорода* H *или метил* CH_3, *можно получить молекулы разных веществ (ксилол, бензол и др.).*

1) *Сколько химически разных молекул можно получить таким путём?*

2) *Сколько из них молекул с присоединёнными* $0, \ldots, 6$ *атомами водорода?*

Решение. Самодействие группы диэдра D_6.
1) Имеем $D_6 = \langle\, t,\, f,\, s \,\rangle$, $t^4 = f^2 = s^2 = e$, $|D_6| = 12$ — группа диэдра порядка 6, где

t — вращение на 60° вокруг центра квадрата;

f — симметрия относительное прямой, проходящей через середины противоположных сторон (3 оси);

s — симметрия относительное прямой, проходящей через противоположные вершин (3 оси).

Пронумеруем последовательно вершины правильного 6-угольника $1, \ldots, 6$.

Перестановки ниже указаны для случая, когда ось f проходит через середины сторон (2-3) и (5-6), а ось s — через вершины 1 и 4.

$g \in D_6$	перестановка	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$(1)\ldots(6)$	$\langle\, 6,\, 0,\, \ldots\, 0 \,\rangle$	x_1^6	1
t, t^5	(123456)	$\langle\, 0,\, \ldots,\, 0,\, 1 \,\rangle$	x_6^1	2
t^2, t^4	$(135)(246)$	$\langle\, 0,\, 0,\, 2, \ldots\, 0 \,\rangle$	x_3^2	2
t^3	$(14)(25)(36)$	$\langle\, 0,\, 3,\, 0, \ldots\, 0 \,\rangle$	x_2^3	1
f	$(14)(23)(56)$	$\langle\, 0,\, 3,\, 0,\, \ldots\, 0 \,\rangle$	x_3^2	3
s	$(1)(4)(26)(35)$	$\langle\, 2,\, 2,\, 0,\, \ldots \,\rangle$	$x_1^2 x_2^2$	3
				12

$$P(D_6) = \frac{1}{12}\big[x_1^6 + 2x_6 + 2x_3^2 + 4x_2^3 + 3x_1^2x_2^2\big].$$

Всего молекул — подстановка $x_1 = \ldots = x_6 = 2$ (H и метил CH_3):

$$M = \frac{64+4+8+32+3\cdot 16}{3\cdot 4} = \frac{39}{3} = 13.$$

2) *Число молекул с* 0, ..., 6 *атомами водорода* — обозначение $y_1 = \mathrm{H}$, $y_2 = 1$ и подстановка $x_k = \mathrm{H}^k + 1$, $k = \overline{1,6}$ в P.

$$W = \frac{1}{12}\big[\,(\mathrm{H}+1)^6 + 3(\mathrm{H}+1)^2(\mathrm{H}^2+1)^2 + 4(\mathrm{H}^2+1)^3 + \\ + 2(\mathrm{H}^3+1)^2 + 2(\mathrm{H}^6+1)\,\big] = \\ = \mathrm{H}^6 + \mathrm{H}^5 + 3\cdot\mathrm{H}^4 + 3\cdot\mathrm{H}^3 + 3\cdot\mathrm{H}^2 + \mathrm{H} + 1\,.$$

Итого: молекул с числом атомов водорода (как радикала) — H = 0, 1, 5 и 6 — по 1 шт., H = 2, 3 и 4 — по 3 шт., всего — 13.

Задача 2.30. *Сколько существует ожерелий из 6 красных и 12 синих бусин?*

Решение. Цикловой индекс самодействия группы диэдра (было ранее)

$$P(D_n) = \frac{1}{2n}\sum_{d|n}\varphi(d)x_d^{n/d} + \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 x_2^{(n-1)/2}, & n \text{ нечётно}, \\ \frac{1}{4}\big[x_2^{n/2} + x_1^2 x_2^{n/2-1}\big], & n \text{ чётно}, \end{cases}$$

$n = 6 + 12 = 18$, $D(18) = \{\,1, 2, 3, 6, 9, 18\,\}$,

$$\varphi(1) = 1, \qquad \varphi(3) = 2, \qquad \varphi(9) = 6,$$
$$\varphi(2) = 1, \qquad \varphi(6) = 2, \qquad \varphi(18) = 6.$$

По формуле: $P(D_{18}) =$

$$= \frac{1}{36}\left[\,x_1^{18}+x_2^9+2x_3^6+2x_6^3+6x_9^2+6x_{18}^1\,\right]+\frac{1}{4}\left[\,x_2^9+x_1^2x_2^8\,\right] =$$
$$= \frac{1}{36}\left[\,x_1^{18}+10x_2^9+2x_3^6+2x_6^3+6x_9^2+6x_{18}^1+9x_1^2x_2^8\,\right].$$

$x_k = y^k + 1, \quad W =$

$$= \frac{1}{36}\left[\,(y+1)^{18}+10(y^2+1)^9+2(y^3+1)^6+2(y^6+1)^3+\right.$$
$$\left.+6(y^9+1)^2+6(y^{18}+1)+9(y+1)^2(y^8+1)^8\,\right] =$$
$$= \frac{1}{36}\left[\,\ldots+\Big(C_{18}^6+10C_9^3+2C_3^1+2C_6^2+0+0+\right.$$
$$\left.+\;9(C_8^2+C_8^3)\Big)\,y^6\,\right] =$$
$$= \frac{1}{36}\left[\,\ldots+(18654+840+6+30+756)y^6\,\right] =$$
$$= 561y^6 \qquad \textit{Ответ}.\ 561.$$

<u>Задача</u> 2.31. *Найти число раскрасок куба в красный и синий цвета с 5 красными рёбрами.*

Решение. Ранее был найден цикловой индекс действия группы O на рёбра куба:

$$P(O \underset{\alpha}{:} R) = \frac{1}{24}\left[\,x_1^{12}+6x_4^3+3x_2^6+6x_1^2x_2^5+8x_3^4\,\right].$$

$y_k = x^k + 1,$

$$W = \frac{1}{24}\left[\,(y+1)^{12}+6(y^4+1)^3+3(y^2+1)^6+\right.$$
$$\left.+6(y+1)^2(y^2+1)^5+8(y^3+1)^4\,\right] =$$

$$= \frac{1}{24}\Big[\,\ldots + \left(C_{12}^{5} + 6C_{2}^{1}C_{5}^{2}\right) y^{5}\,\Big] =$$

$$= \frac{1}{24}\Big[\,\ldots + (792 + 6\cdot 2\cdot 10)\, y^{5}\,\Big] = \ldots + \frac{792+120}{24} =$$

$$= \ldots + (33+5)y^{5} = \ldots + 38y^{5}.$$

Ответ: 38.

Глава 3

Структурный подход в распознавании образов

3.1 Введение в синтаксический подход к распознаванию образов

Подходы к решению задачи распознавания образов

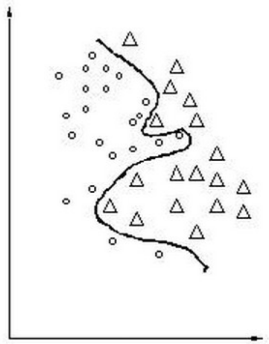
1. *Дискриминантный (признаковый) подход*

Объекты характеризуются набором признаков и распознавание проводят разбиением пространства признаков на области.

Методы:

- метрические (kNN, ...);
- разделяющие поверхности (SVM, ИНС, ...);
- потенциальные функции;
- логические;
- информационные;
- коллективные решающие правила (*области компетенции, голосование, алгебраический подход*);
- ...

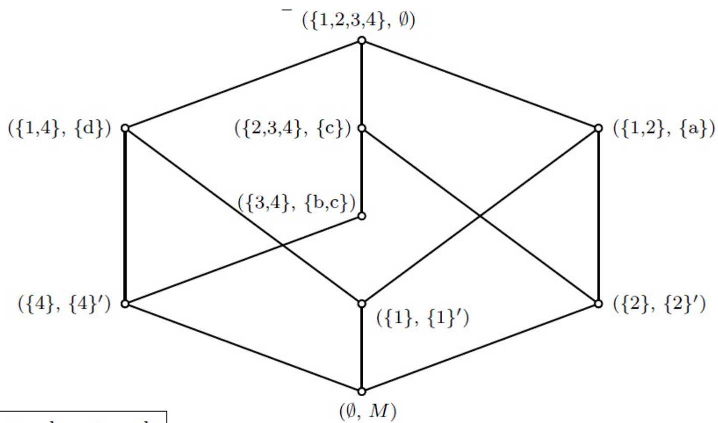
Математический аппарат — метрические теории, логические функции, теория информации, алгебра алгоритмов, ...



«Ленивые» и «не-ленивые» алгоритмы распознавания

При этом игнорируется информация: (1) структурная; (2) объект-признак.

2. *Реляционный подход* — анализ формальных понятий (АФП): формализация понятия в виде пары объём-содержание.



	G \ M	a	b	c	d
1		×			×
2		×		×	
3			×	×	
4			×	×	×

a – ровно 3 вершины,
b – ровно 4 вершины,
c – имеет прямой угол,
d – все стороны равны

ТРИАД 3 –

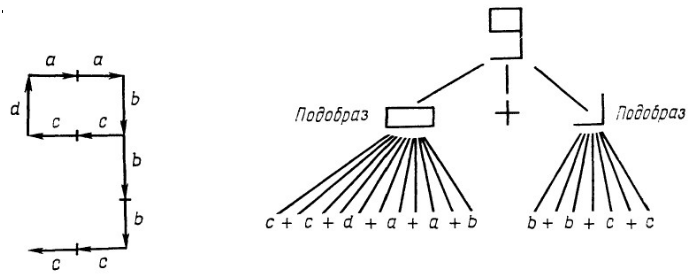
Математический аппарат — теория алгебраических решёток

3. *Синтаксический (структурный, лингвистический) подход* — применяется к задачам, в которых важна информация об объекте, как состоящего из элементарных частей, связанных между собой определённым образом.

Считается, что принадлежность объекта некоторому классу есть следствие его «внутреннего строения» вне связи со свойствами других объектов.

Примеры — распознавание

- *изображений и анализ сцен*: объекты обычно сложны, число требуемых признаков часто велико $\Rightarrow$ удобство описания их через подобразы;
- *сигналов*: акустических (речь), электрических (ЭКГ, ЭЭГ, ...), электромагнитных (отражённые радиолокационные), оптических (изображения), ...



Разные правила порождают разные классы объектов. Аналогия между структурой объекта и синтаксисом языка даёт возможность использовать аппарат *математической лингвистики*.

При *дискриминантном подходе* надо

1) сформировать признаковое пространство;
2) для каждого класса иметь достаточное число прецедентов.

При *синтаксическом подходе* надо задать правило построения классов из примитивных элементов. Понятно, что подход эффективен, когда:

1) имеется небольшое количество примитивов, которые легко вычленяются;
2) построение образов из примитивов описывается сравнительно простыми правилами.

Синтаксическое распознавание: составляющие подхода — на примере распознавания/обработки изображений.

1. *Предобработка*:

1.1 Кодирование и аппроксимация — представление в виде, удобном для дальнейшей обработки.

Примеры:

- бинаризация черно-белых изображений,
- дискредитация непрерывного сигнала,
- представление функции конечным набором коэффициентов разложения по некоторой системе функций (Фурье, Уолша, Хаара, ...).

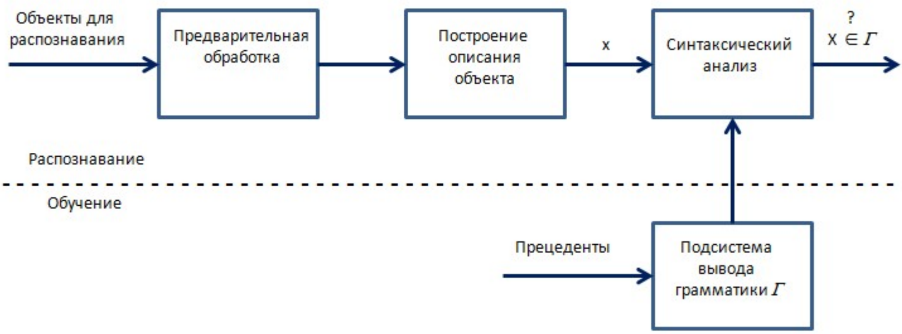
1.2 Фильтрация, восстановление и улучшения объекта — понижение уровня шума, восстановления искажений, улучшения качества.

2. *Построение описания объекта* на основе заранее заданных синтаксических операций:

- выделение примитивов — элементарных частей объектов;

- представление объекта в виде композиции примитивов в соответствии с той или иной структурой.

3. *Синтаксический анализ (грамматический разбор)* — получение синтаксического описания объекта через примитивы — построение дерева грамматического разбора.



Структурный подход обеспечивает высокое быстродействие: распознавание сводится к сравнению символьных описаний структур, а не исходных изображений ⇒ преимущество при поиске в больших коллекциях графических документов.

3.2 Методы предобработки объектов

Кодирование и аппроксимация

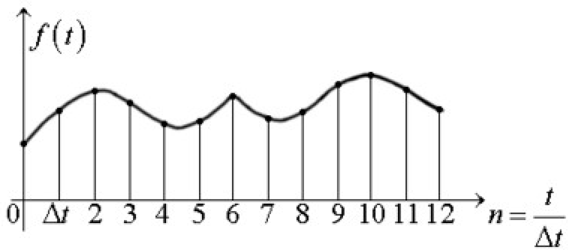
1. *Дискретизация* аналоговых данных — взятие измерений (отсчетов) сигнала в дискретные моменты времени.

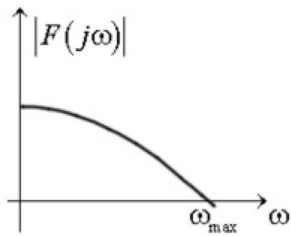
Теорема 3.1 (Котельникова-Найквиста-Шеннона). *Если преобразование Фурье* $F(j\omega)$ *функции* $f(t)$

$$F(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

равно нулю вне интервала $-\omega_{max} \leqslant \omega \leqslant +\omega_{max}$, *то функция* $f(t)$ *может быть точно восстановлена по равноотстоящим её значениям с интервалом дискретизации* $\Delta\, t \leqslant \Delta\, t_{max} = 1/(2f_{max})$, $\omega = 2\pi f$ *друг от друга в виде* sinc*-ряда Котельникова:*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n{\cdot}\Delta\, t) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\Delta\, t} - n\right), \quad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin \pi x}{\pi x}.$$





$$\Delta\, t \leqslant \frac{\pi}{\omega_{\max}}$$

Замечания.

1. Теорема Котельникова применима лишь для сигналов с ограниченным спектром, т.е. принципиально для сигналов бесконечных во времени.
2. На практике полагают $F(j\omega) = 0$, когда $|F(j\omega)| \approx 0$; тогда при восстановлении функции будет получена лишь аппроксимация $f(t)$.

3. Локальная интерполяция (по ограниченному числу точек) и недостаточная частота дискретизации вносит высокочастотные искажения в виде периодических копий полезной полосы частот (алиасинг, aliasing).

4. Сигнал невозможно восстанавливать по мере его получения и следовательно

   - высококачественная дискредитация sinc -рядом возможна только при offline-обработке;
   - при online-обработке приходится запоминать некоторое количество отсчетов и производить интерполяцию с некоторой задержкой.

5. Имеется аналог теоремы Котельникова для двумерного случая — функции $f(x, y)$.

Практические рекомендации:

- частота дискретизации должна не менее чем в 2-3 раза превышать верхнюю частоту информативных составляющих сигнала (oversampling);
- предварительно сигнал следует отфильтровать фильтром нижних частот с частотой среза намного меньшей, чем половина выбранной частоты дискретизации.

2. *Квантование* — присваивание цифровому отсчету значения, соответствующего некоторому фиксированному уровню сигнала.

Уровень квантования — уровень, превышение которого по абсолютной величине приводит к переходу на следующий *шаг квантования*: $f(t) \approx \widehat{f}(t) \in \{$*уровни квантования*$\}$, которые могут располагаться

- *равномерно* — простота представления; при шаге квантования a значения ошибки квантования: максимальная — $\pm a/2$; с.к.о. — $\frac{a}{\sqrt{12}} \approx 0{,}29a$.
- *неравномерно* — выигрыш в точности представления: если, например, уровни яркости изображения в определенном диапазоне встречаются чаще, чем в других диапазонах, то в нём располагают больше уровней квантования.

После дискретизации и квантования объекта уровень квантования в каждой точке отсчета кодируют.

Фильтрация, восстановление и улучшение сигнала — изменение его частотного состава (спектра).

Результат — повышение качества данных $\Rightarrow$ облегчение обнаружения заданных элементов сигнала, изображения.

1. *Для фильтрации изображений* используют операции, инвариантные ко времени и к изменению положения: *сглаживание*, *повышение контраста*, ...

Основной приём — свёртка с окном $g(x, y)$, пределённом на прямоугольнике (u, v) и равном 0 вне его:

$$f(x, y) \mapsto f_g(x, y) = (f * g)(x, y) =$$

$$= \int\limits_{(u,v)\in D} g(x-u,\, y-v) f(u,v)\, du\, dv$$

1). *Сглаживание* — подавление шума, усреднение значений по некоторой окрестности — интегрирование с весом.

Пример:

$$g(x,y) = \frac{1}{|D|}, \quad g(x,y) = \frac{1}{div} \cdot \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1/2 & 3/4 & 1/2 \\ \hline 3/4 & 1 & 3/4 \\ \hline 1/2 & 3/4 & 1/2 \\ \hline \end{array}, \; div = 6$$

div — коэффициент нормирования, для того чтобы средняя интенсивность оставалась не изменой.

2). *Повышение контраста* — дифференцирование: $\nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

$$g(x,y)_1 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline -1 & -2 & -1 \\ \hline -2 & +12 & -2 \\ \hline -1 & -2 & -1 \\ \hline \end{array}, \quad g(x,y)_2 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & -1 & 0 \\ \hline -1 & +5 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

2. Для обработки дискретных линейных сигналов применяют *линейную цифровую фильтрацию*, задаваемую *обобщенным разностным уравнением цифрового фильтра*:

$$y(n) = \sum_{i\in I} b_i x(n-i) + \sum_{j\in J} a_j y(n-j),$$

где $x(n)$ и $y(n)$ — соответственно входной и выходной сигналы,

b_i, a_j — *коэффициенты фильтра*,

I, J — *параметры фильтра*: интервалы $\mathbb{Z}$, содержащие 0.

Частные случаи:

- $a_j = 0$ для всех $j \in J$ — *нерекурсивный* фильтр, иначе — *рекурсивный*;
- все коэффициенты фильтра суть константы — *фильтр с постоянными коэффициентами*, иначе — *адаптивный*.

Примеры 3.1 (цифровых фильтров).

1. *Сглаживание пятёрками* —

$$y(n) = \frac{1}{5}\big[\,x(n-2)+x(n-1)+x(n)+x(n+1)+x(n+2)\,\big].$$

2. *Фильтр нижних частот* (*фильтр Хемминга*) —

$$y(n) = \frac{1}{8}x(n) + \frac{1}{4}x(n-1) + \frac{1}{4}x(n-2) + \\ + \frac{1}{4}x(n-3) + \frac{1}{8}x(n-4).$$

3. *Сглаживающий дифференциатор* —

$$y(n) = \frac{1}{8}\big[\,x(n-8)+x(n-7)+x(n-6)+x(n-5) - \\ - x(n-3) - x(n-2) - x(n-1) - x(n)\,\big].$$

4. *Численное интегрирование по методу трапеций* —

$$y(n) = y(n-1) + \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1).$$

Для повышения устойчивости к шуму, перед применением фильтрации изображение обычно *размывают*.

Сегментация — разбиение изображения на фрагменты, не похожие по какому-то признаку.

Сегментация разделяет изображение на составляющие части или объекты, зависящие от решаемой задачи $\Rightarrow$ универсального метода сегментации не существует. *Методы сегментации изображений* — базируются на распределении яркостей точек изображения.

I. *Пороговые методы* — используют *пороговую операцию*: фрагмент есть совокупность точек, яркость которых больше/меньше порога/лежит между пороговыми значениями).

Например, в задаче распознавания знаков на бумаге, сами знаки представлены совокупностью черных, а бумага (фон) — совокупностью белых точек $\Rightarrow$ отделить знак от фона можно при помощи пороговой операции.

Существенная трудность — выбор значения порога.

- *Метод процентúлей.*
  Если определена приблизительная площадь S фрагмента, то выбирают пороги так, чтобы площадь выделяемого сегмента с яркостью меньше/больше порога была приблизительно равна S.

- *Метод моды.*
  Если определен интервал яркости I фрагмента, то выбирают пороги так, чтобы в сегмент попали точки с яркостью из I.
  Например, если яркости фрагмента имеет пик, то границами I могут быть локальные минимумы

распределения, расположенным по обе стороны от этого пика.

- *Метод Оцу (Otsu)* вычисления порога бинаризации полутонового изображения: ищется порог h, минимизирующий дисперсию внутри классов:

$$h = \arg\min_t \left\{ \omega_1(t)\sigma_1^2(t) + \omega_2(t)\sigma_2^2(t) \right\},$$

где веса ω_i — вероятности (доли) двух классов, разделенных порогом t, σ_i^2 — дисперсии классов, $i = 1, 2$.

Минимизация дисперсии внутри класса = максимизация дисперсии между классами.

- *Прослеживание границ (контуров, краёв, ...).* Например:
  – простой способ отслеживания границ на двухградационном изображении: просмотр изображения, пока не встретится пара точек растра разной яркости,
  – управляемые (steerable) фильтры, осуществляющие дифференцирование по направлению.

Пример 3.1 (порогового метода сегментации). Использование операторов пространственного дифференцирования для формирования контурных изображений.
Оператор Сóбела-Фельдмана, имеющий наименьший коэффициент утолщения контурной линии:

$$f(x,y) \to g(x,y) = \|\nabla f(x,y)\| = \\ = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} \quad \text{— модуль градиента}$$

где d_1, d_2 — суммы элементов свёртки f соответственно с окнами H_1 и H_2:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

II. *«Не-пороговые» методы сегментации*

- *Выращивание регионов, дробление-слияние* — последовательная проверка точек на их принадлежность к фрагменту.

  Методы этой группы учитывают пространственное расположение точек напрямую и позволяют:

  – выделять фрагменты;
  – прослеживать границы или контуры фрагментов;
  – получать характеристики фрагментов (площадь, параметры формы, ...).

  Методы позволяет варьировать значение порога в зависимости от характера уже проверенных точеки результат такой процедуры зависит от того, какая последовательность будет выбрана.

- *Моделирование изображения случайным полем* — в основе предположение, что характеристики каждой точки изображения зависит от характеристик некоторого множества соседних точек.

Как правило, рассматривают марковское случайное поле.

- *Методы, основанные на теории графов.*
  Общая идея:
  - изображение представляется в виде взвешенного графа, с вершинами в точках изображения,
  - вес ребра графа отражает сходство точек в некотором смысле (расстояние между точками по некоторой метрике),
  - разбиение изображения моделируется разрезами графа.

- *Оптимизационный подход*
  — задачу разбиения изображения на однородные области сводят к задаче оптимизации некоторого функционала от разбиения.

  Например, в графовых методах оптимизируется функционал стоимости разреза.

- *Настройка параметров*
  — одно из наиболее перспективных на данный момент направлений.

Почти у всех вышеописанных методов есть масса параметров, значения которых для каждой конкретной задачи приходится подбирать эвристически.
Однин из подходов — машинное обучение.

3.3 Языки описания образов

Выбор терминальных элементов — первый этап построения синтаксической модели образов.
Требования к терминальным элементам (примитивам):

- они должны служить основными элементами образов и обеспечивать адекватное описание объекта в терминах заданных структурных отношений;
- их выделение и распознавание должны легко осуществляться.

Эти требования часто противоречат друг другу.
Примеры непроизводных элементов:

- для речевых образов — совокупность фонем (звуков, минимальных различимых единиц языка).
- для рукописного текста — штрихи.

Языки и порождающие грамматики

<u>Определение</u> 3.1. *Порождающая грамматика* G есть четверка конечных множества

$$G = \langle V, W, I, R \rangle,$$

где

V — множество *терминальных* символов;

W — множество *нетерминальных (вспомогательных)* символов, $V \cap W = \varnothing$;

$I \in W$ — *начальный символ*;

R — совокупность *правил вывода* (подстановок последовательностей символов).

Язык $L(G)$, порождаемый грамматикой G —

$$L(G) = \{ x \in V^* \mid \exists \text{ вывод } I \Rightarrow x \}.$$

V^* — *транзитивное замыкание алфавита* V^*, все слова конечной длины, включая пустое слово λ.

Порождающие грамматики по форме правил подстановки разделены на 4 типа (Н. Хомский, 1957).

Грамматики типа 0 — неограниченные

Самый широкий класс: не имеет каких-либо ограничений на вид правил подстановки.

Пример 3.2. $V = \{ a, b, c \}$, $W = \{ I, A, B \}$

$$\begin{array}{llcl} R: & I \to aAbc & \qquad & Ab \to bA \\ & Ac \to Bbcc & & bB \to Bb \\ & aB \to aaA & & aB \to \lambda \end{array}$$

Грамматика порождает слова вида

$$x = a^n b^{n+2} c^{n+2},\ n \geqslant 0.$$

Вывод слова bbcc:

$$I \Rightarrow aAbc \Rightarrow abAc \Rightarrow abBbcc \Rightarrow aBbbcc \Rightarrow bbcc.$$

Для использования этот класс *слишком широк.*

Грамматики типа 1 — непосредственно составляющих или *контекстно-зависимые, КЗ.*

Правила подстановки — вида $\alpha_1 A \alpha_2 \to \alpha_1 \beta \alpha_2$, где $A \in W$, $\beta \in T^+$, $\alpha_1, \alpha_2 \in T^*$, $T = V \cup W$.

Пример 3.3. $V = \{ a, b, c \}$, $W = \{ I, A, B \}$

$$\begin{array}{llcl} R: & I \to abc & \qquad & I \to aAbc \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} Ab \to bA & \qquad & Ac \to Bbcc \\ bB \to Bb & & aB \to aaA \\ aB \to aa & & \end{array}$$

Грамматика порождает слова вида

$$x = a^n b^n c^n,\ n \geqslant 1.$$

Грамматики типа 2 — *бесконтекстные* или *контекстно-свободные, КС.*

Правила подстановки — вида $A \to \beta$, где $A \in W, \beta \in T^+$, т.е. заменяют вспомогательный символ A на непустую цепочку произвольных символов вне зависимости от контекста (окружения A).

Пример 3.4. $V = \{\, a, b \,\},\ W = \{\, I \,\}$

$$R: \quad I \to ab \qquad\qquad I \to aIb$$

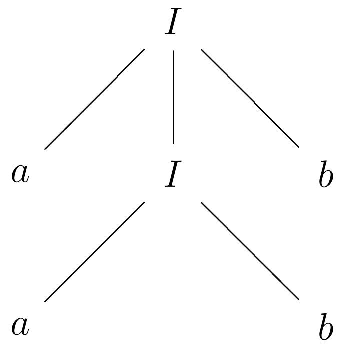
Грамматика порождает слова вида $x = a^n b^n,\ n \geqslant 1$.

Другим методом описания вывода в бесконтекстной грамматике является использование *деревьев вывода.*

Построение дерева вывода:

- каждая вершина дерева имеет метку — символ из алфавита T, корень дерева имеет метку I.
- если вершина с меткой A — не лист дерева, то $A \in W$.
- если вершине n с меткой A прямо подчинены вершины $n_1, \ldots, n_k$, помеченные (слева направо) $A_1, \ldots, A_k$, то в R должно быть правило $A \to A_1, \ldots, A_k$.

Вывод слова $aabb$:



Грамматики типа 3 — автоматные или регулярные
Имеют правила подстановок вида $A \to aB$ или $A \to a$, где $A, B \in W$.

Это самые простые из формальных грамматик: они контекстно-свободны, но с ограниченными возможностями.

Пример 3.5 (Регулярной грамматики G_3). $V = \{\, a, b \,\}$, $W = \{\, I, A \,\}$

$$R: \quad I \to aA \qquad A \to aA \qquad A \to b$$

Эта грамматика порождает слова вида $x = a^n b$, $n \geqslant 1$.

Ясно, что $G_3 \subset G_2 \subset G_1 \subset G_0$.

Определение 3.2. *Программная грамматика* G_p есть пятёрка конечных множеств

$$G_p = \langle\, V, W, I, P, J \,\rangle,$$

где V, W, I — как в грамматиках Хомского;

P — множество правил вывода специального вида;

J — множество *меток* правил; удобно считать, что $J = \{1, \dots, m\}$ — номера правила.

Правила вывода из P имеют вид

$$(r) \quad \alpha \to \beta \quad S \quad F,$$

где $r \in J$ — метка,

$S, F \subseteq J$ — два списка меток переходов при успехе и неудаче соответственно,

$\alpha \to \beta$ — правило подстановки (*ядро*), $\alpha \in T^*WT^*,\ \beta \in T^*,\ T = V \cup W$.

Программная грамматика действует следующим образом:

- сначала применяется правило с меткой (1);
- если делается попытка применить правило (r), то при невозможности его применения следующее выбирается из списка F, а в противном случае его выполнения следующее выбирается из списка S.

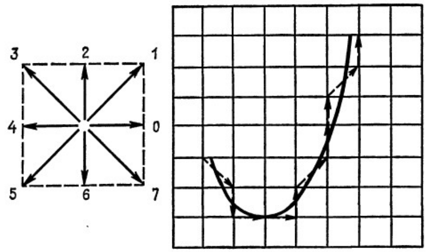
Программные грамматики ограничивают выбор следующего правила подстановки.

Выделение терминальных элементов. Методы выделение терминальных элементов на изображении: упор на 1) границы; 2) области.

1. *На основе границ* — схема *цепного кодирования*:

- на изображение накладывают сетку и узлы сетки, наиболее близкие к точкам изображения соединяют отрезками прямых;

- каждому полученному отрезку присваивают восьмеричное число.



В результате изображение представляется поледовательностью/ями восьмеричных чисел (7600212212).

Свойства цепного кодирования:

- легко выполнимы растяжение, определние длины кривой, самопресечений...
- применимо для границ произвольной связности.

Метод применялся для —

- распознавания рукопечатного текста;
- классификации фотографий треков частиц в пузырьковой и искровой камерах;
- анализе хромосом;
- идентификации отпечатков пальцев
- ...

2. <u>На основе областей</u>. Терминальные элементы — полуплоскости: выпуклые многоугольники представляются пересечением конечного числа полуплоскостей.

Полуплоскости $\to$ буквы,

Слова $\to$ выпуклые многоугольники,
Предложения $\to$ фигуры.

• $H_1, \ldots, H_k$ — полуплоскости с заданными заранее направлениями $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$;

• G — группа параллельных переносов;

• первичное множество

$$R_j = \bigcap_{i=1}^{2k} g_i^j H_i, \; g_i^j \in G;$$

• многоугольник

$$A = \bigcup_{j=1}^{l} R_j.$$

Пример 3.6. Построим грамматики различного типа для регулярного языка $L = \{ a^n, b^n, c^n \mid 1 \leqslant n \leqslant 3 \}$, описывающий равносторонние треугольники с длиной стороны $1, 2, 3$.

1. Автоматная грамматика $G_3 = \langle V, W, I, R \rangle$, где $W = \{ I, A_1, A_2, B_{10}, B_{20}, B_{30}, B_{21}, B_{31}, B_{32}, C_1, C_2, C_3 \}$,

$V = \{ \xrightarrow{a}, \overset{b}{\nwarrow}, \overset{c}{\swarrow} \}$,

R:

$$\begin{array}{lll}
I \to aA_1 & B_{10} \to bC_1 & B_{32} \to bC_3 \\
I \to aB_{10} & B_{20} \to bB_{21} & C_1 \to c \\
A_1 \to aA_2 & B_{21} \to bC_2 & C_2 \to cC_1 \\
A_1 \to aB_{20} & B_{30} \to bB_{31} & C_3 \to cC_2 \\
A_2 \to aB_{30} & B_{31} \to bB_{32} &
\end{array}$$

2. Бесконтекстная грамматика $G_2 = \langle V, W, I, R \rangle$, где $W = \{ I, A_1, A_2, B_1, B_2, B_3, C \}$, $V = \{ a, b, c \}$, R:

$$\begin{array}{lll} I \to aA_1C & A_1 \to aA_2C & B_2 \to bB_1 \\ A_1 \to b & A_2 \to aB_3C & B_1 \to b \\ A_1 \to aB_2C & B_3 \to bB_2 & C \to c \end{array}$$

Беконтекстная грамматика G_2 гораздо компактнее автоматной G_3. Грамматика непосредственно оставляющих для данного языка не приведена, т.к. мало отличается от беконтекстной G_2.

3. Программная грамматика $G_p = \langle V, W, I, P, J \rangle$, где $W = \{ I, B, C \}$, $V = \{ a, b, c \}$, $J = \{ 1, \ldots, 5 \}$, P:

Метка	Ядро	I	F
1	$I \to aB$	$\{2, 3\}$	$\varnothing$
2	$B \to aBB$	$\{2, 3\}$	$\varnothing$
3	$B \to C$	$\{4\}$	$\{5\}$
4	$C \to bC$	$\{3\}$	$\varnothing$
5	$C \to c$	$\{5\}$	$\varnothing$

Все правила имеют вид $A \to \beta$, $A \in W$, $\beta \in T^*$, такая программная грамматика называется *бесконтекстной*.

Беконтекстная программная грамматика G_p описывает язык $L = \{ a^n, b^n, c^n \mid n = 1, 2, \ldots \}$ и ещё более компактна, чем, беконтекстная G_2.

3.4 Автоматные языки, конечные автоматы, регулярные выражения

Альтернативный способ задания автоматной грамматики — конечным недетерминированным автоматом, *генерирующим* регулярный язык.

Определение 3.3. *Конечный недетерминированный автомат* есть пятёрка $\widetilde{\mathcal{A}} = \langle\, X,\, K,\, \varphi,\, P,\, \psi\,\rangle$, где (все множества конечны):

- X — *выходной* алфавит (символы X *генерируются* автоматом $\widetilde{\mathcal{A}}$),
- K — множество *состояний автомата*,
- φ — предикат на K, определяющий *начальные состояния*,
- ψ — предикат на K, определяющий *финальные состояния*,
- P — предикат на $K \times X \times K$, определяющий многозначную *функцию переходов*: если в $(i-1)$-й момент времени автомат находился в состоянии k' и $P(k', x, k) = 1$, то в i-й момент автомат может выдать символ x и перейти в состояние k.

Язык $L(\widetilde{\mathcal{A}}) \subset X^*$ *автомата* $\widetilde{\mathcal{A}}$ — множество слов, которые могут появится на его выходе: $\overline{x} = x_1, x_2, \ldots x_n \in L(\widetilde{\mathcal{A}})$, если существует такая последовательность k_0, k_1, $\ldots$, k_n состояний $\widetilde{\mathcal{A}}$, что

1) $\varphi(k_0) = 1$ (k_0 — начальное состояние);

2) $P(k_{i-1},\, x_i,\, k_i) = 1$, $i = \overline{1, n}$ (переход $k_{i-1} \to k_i$);

3) $\psi(k_n) = 1$ (k_n — финальное состояние).

Это эквивалентно истинности предиката

$$F(\overline{x}) = \bigvee_{k_0 \in K} \ldots \bigvee_{k_n \in K} \varphi(k_0) \,\&\, \mathop{\&}_{i=1}^{n} P(k_{i-1}, x_i, k_i) \,\&\, \psi(k_n),$$

где $F(\overline{x})$ — утверждение «*слово* $\overline{x} = x_1, \ldots, x_n$ *принадлежит языку* $L(\widetilde{\mathcal{A}})$».

Компактная запись предиката $F(\overline{x})$ — в виде матричного произведения. Обозначим:

$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{|K|})$ — вектор-строка, $\varphi_k = \varphi(k)$,

$\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_{|K|})$ — вектор-столбец, $\psi_k = \psi(k)$,

$P_i = \big\|P(k', x_i, k)\big\|$ — квадратная порядка $|K|$ матрица переходов, отвечающая выходному символу $x_i, i = \overline{1, n}$ (существует всего $|X|$ *различных* матриц P_i),

$\otimes$ — матричное произведение с операциями сложения $\vee$ и умножения $\&$,

тогда

$$F(\overline{x}) = \varphi \otimes \bigotimes_{i=1}^{n} P_i \otimes \psi.$$

Сложность вычисления этого предиката — $O(|K|^2 n)$.

Цель распознавания — определить

$$\overline{x} = x_1, x_2, \ldots, x_n \overset{?}{\in} L(\widetilde{\mathcal{A}}).$$

Эту задачу решает *распознающий детерминированный автомат.*

Определение 3.4. *Конечный детерминированный автомат* есть пятёрка $\mathcal{A} = \langle\, X,\, K,\, k_0,\, q,\, K'\,\rangle$, где (все множества конечны)

X — *входной* алфавит (символы X *подаются на вход* автомата $\mathcal{A}$),

K — множество состояний автомата,

$k_0 \in K$ — одно из начальных состояний,

$q : K \times X \to K$ — *функция переходов*,

$K' \subset K$ — множество финальных состояний.

Если в $(i-1)$-й момент времени $\mathcal{A}$ находился в состоянии k, а в i-й момент на его вход подан символ x, то $\mathcal{A}$ окажется в состоянии $q(x,k)$ $\Rightarrow$ слово $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, поданное на вход $\mathcal{A}$ однозначно определит последовательность его состояний k_0, $k_1 = q(k_0, x_1)$, …, $k_n = q(k_{i-1}, x_n)$.

Автомат $\mathcal{A}$ распознаёт принадлежность слова $\overline{x}$ языку $L(\mathcal{A})$, если $k_n \in K'$.

Генерирующий автомат как грамматика. Пусть $\widetilde{\mathcal{A}} = \langle\, X,\, K,\, \varphi,\, P,\, \psi\,\rangle$ — *генерирующий* автомат.

- Назовём X и K — *терминальным и нетерминальным алфавитами* соответственно.

- Функцию φ представим в виде подмножества начальных состояний (*аксиом*) $K^0 = \{\, k \in K \mid \varphi(k) = 1\,\}$.

- Функции P и ψ выразим в виде подмножеств троек $(k',\, x,\, k'')$ и пар $(k,\, x)$, $k,\, k',\, k'' \in K$,

$x \in X$ соответственно и будем называть их *правилами вывода*, множество которых обозначим R.

При этом если справедливо $P(k', x, k'') = 1$, то тройку (k', x, k'')

– запишем в виде правила $k' \to xk''$,
– а если при этом справедливо ещё и $\psi(k'') = 1$, то вводим ещё и правило $k' \to x$.

В результате автомат $\widetilde{\mathcal{A}}$ представляется в виде регулярной грамматики как четвёрка

$$G(\widetilde{\mathcal{A}}) = \langle X, K, K^0, R \rangle,$$

которая определяет тот же язык $L \subset X^*$,что и исходный автомат следующим образом:

1) слово, состоящая из *единственного символа*, который является одной из аксиом, считается выведенным в данной грамматике;
2) если слово $\overline{x}k'$, $\overline{x} \in X^*$, $k' \in K$ выведено и R содержит правило $k' \to x'k''$, то слово $\overline{x}x'k''$ тоже считается выведенным;
3) если слово $\overline{x}k'$, $\overline{x} \in X^*$, $k' \in K$ выведено и R содержит правило $k' \to x'$, то слово $\overline{x}x'$ тоже считается выведенным.

Ясно, что возможен и обратный переход — от регулярной грамматики к автомату.

Недетерминированный конечный автомат и регулярная грамматика — два эквивалентных способа задания регулярных языков.

Регулярные выражения

Введем следующие три операции на множестве языков.

1. *Итерация языка* L есть язык, обозначаемый L^* и определяемый следующим образом.
   - пустое слово (слово нулевой длины), принадлежит L^*.
   - если слово $\overline{x}$ принадлежит L^*, слово $\overline{y}$ принадлежит L, то слово $\overline{x}\,\overline{y}$ также принадлежит L^*.
2. *Конкатенация языков* L_1 *и* L_2 есть язык, обозначаемый L_1L_2 и содержащий все слова вида $\overline{x}\,\overline{y}$, $\overline{x} \in L_1$, $\overline{y} \in L_2$ и только их.
3. *Объединение языков* L_1 *и* L_2 есть язык $L_1 \cup L_2$.

Регулярные языки можно также задать с помощью *регулярных выражений* по следующим правилам.

1. $\varnothing$ — регулярное выражение, обозначающее пустое множество слов.
2. $\#$ — регулярное выражения, обозначающее язык, состоящий из единственного пустого слова (нулевой длины).
3. Для каждого символа $x \in X$ запись x — регулярное выражение, обозначающее язык, состоящий из единственного однобуквенного слова x.
4. Если α — регулярное выражение языка L, то $(\alpha)^*$ — регулярное выражение для итерации языка L^*.

5. Если α_1 и α_2 — регулярные выражение языков L_1 и L_2 соответственно, то

   $\alpha_1\alpha_2$ — регулярное выражение для конкатенации L_1L_2, а

   α_1, α_2 — регулярное выражение для объединения $L_1 \cup L_2$.

Например, $a(b, c)^*$ — регулярное выражение, задающее множество слов символом a, вслед за которым идёт любая (возможно пустая) последовательность, составленная из символов b и c.

Пример 3.7 (записи регулярного языка). Зададим различными эквивалентными способами язык L, состоящий из множества слов вида

$$\langle \textit{идентификатор} \rangle = \\ = \langle \textit{«сумма произведений идентификатов»} \rangle,$$

в алфавите $X = \{ a, b, c, +, \times, = \}$.

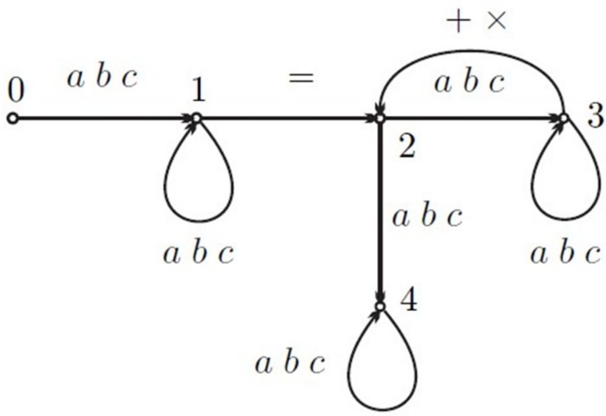
Здесь *идентификатор* — слово длины > 0, состоящее букв a, b, c — простейшие операторы присваивания. *Например* $\overline{x} = (a = ab + c \times a + aba) \in L$, а $(bc =)$, $(a = a + \times b) \notin L$.

1. *Регулярное выражение*:

$$(a, b, c)(a, b, c)^* = ((a, b, c)(a, b, c)^*(+, \times))^* (a, b, c)(a, b, c)^*.$$

2. *Недетерминированный автомат.*

Выходной алфавит — $X = \{ a, b, c, +, \times, = \}$.
Множество состояний $K = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ = множество вершин графа; начальное состояние — 0, конечное — 4.



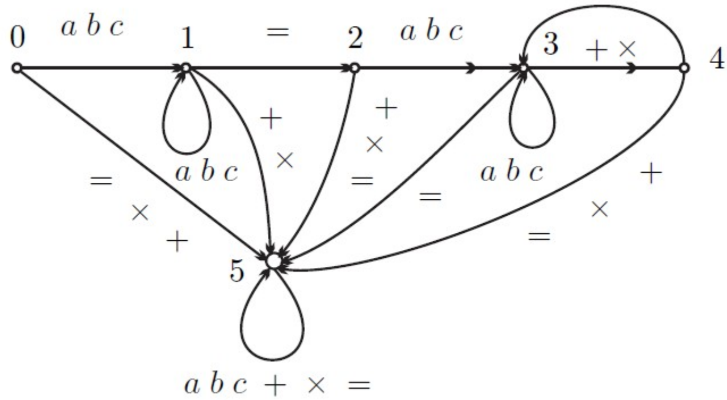
Если стрелке $k' \to k''$ приписан символ x, то $P(k', x, k'') = 1$ (для всех других троек функция $P = 0$), т.е. P принимает значение 1 на следующих тройках:

$$\begin{array}{ll}
(0,a,1),\ (0,b,1),\ (0,c,1), & (3,a,3),\ (3,b,3),\ (3,c,3),\\
(1,a,1),\ (1,b,1),\ (1,c,1), & (3,+,2),\ (3,\times,2),\\
(1,=,2), & (2,a,4),\ (2,b,4),\ (2,c,4),\\
(2,a,3),\ (2,b,3),\ (2,c,3), & (4,a,4),\ (4,b,4),\ (4,c,4).
\end{array}$$

3. *Регулярная грамматика.*
$V = \{a,\ b,\ c,\ =,\ +,\ \times\}$, $W = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, начальный символ $I = 0$, правила R:

$$\begin{array}{ll}
0 \to a1,\ 0 \to b1,\ 0 \to c1, & 3 \to +2,\ 3 \to \times 2,\\
1 \to a1, \iota \to b1, \iota \to c1, & 2 \to a4,\ 2 \to b4,\ 2 \to c4,\\
1 \to= 2, & 4 \to a4,\ 4 \to b4,\ 4 \to c4,\\
2 \to a3,\ 2 \to b3,\ 2 \to c3, & 4 \to a,\ 4 \to b,\ 4 \to c,\\
3 \to a3,\ 3 \to b3,\ 3 \to c3. &
\end{array}$$

4. *Детерминированный автомат, распознающий язык* L: Входной алфавит $X = \{\, a,\, b,\, c,\, =,\, +,\, \times \,\}$, множество состояний $K = \{\, 0,\, \ldots,\, 5\,\}$, начальное состояние — 0, конечное — 3.



Стрелки задают функцию переходов: если стрелка начинается в вершине k', заканчивается в вершине k'' и на ней записан символ x, это обозначает, что $q(k', x) = k''$.

Любое правильное слово автомат переводит в состояние 3, а любое неправильное — в какое-то другое.

В рамках структурного подхода задача распознавания состоит в построении алгоритма, который для любого слова $\overline{x}$ данного регулярного языка определяет, принадлежит ли оно языку L.

Эта задача оказывается не очень трудной, если регулярный язык выражен с помощью генерирующего автомата: распознающий автомат определяется через множество последовательностей, для которых матричное произведение равно 1.

Штрафные автоматы и языки. Для формализации сложных, нечётко определённых понятий (классов) необходимо задание функции, выражающей степень уверенности принадлежности объекта классу, для чего введём понятие штрафных автоматов и языков.

Пусть X и K — два конечных множества, а три функции

$$\varphi : K \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}, \quad P : K \times X \times K \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}, \quad \psi : K \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$$

определяют поведение генерирующего *штрафного автомата* $\mathcal{F}$:

- автомат может начать свою работу в любом состоянии $k \in K$, заплатив при этом штраф $\varphi(k)$;
- если автомат в $(i-1)$-й момент находился в состоянии k', то в i-й момент он может сгенерировать символ $x \in X$ и перейти в состояние k, заплатив штраф $P(k', x, k)$;
- автомат может завершить работу в любой момент i, заплатив за это штраф $\psi(k_i)$.

Штрафной язык определяется автоматом $\mathcal{F} = \langle X, K, \varphi, P, \psi \rangle$ и числом ε: в него входят те и только слова, штраф за генерирование которых не превосходит ε.

Регулярные языки — собственное подмножество штрафных.

Распознавание принадлежности последовательности $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ заданному штрафному языку сводится к вычислению предиката

$$\min_{k_0}\min_{k_1}\ldots\min_{k_n}\Big\{\varphi(k_0)+ \\ +\sum_{i=1}^{n}P(k_{i-1},\,x_i,\,k_i)+\psi(k_n)\Big\}\overset{?}{\leqslant}\varepsilon$$

Полукольцо — алгебраическая структура, отличающаяся от кольца отсутствием требования существования противоположного по сложению элемента.

Рассмотрим ассоциативно-коммутативное полукольцо с операциями: сложения — min и умножения — $+$. Обозначим в нем операцию матричного произведения $\odot$. Тогда та же формула запишется как:

$$\varphi\odot\bigodot_{i=1}^{n}P_i\odot\psi\overset{?}{\leqslant}\varepsilon.$$

Задача остается простой: её формулировка указывает алгоритм решения с вычислительной сложностью $O(|K|^2 n)$.

3.5 Левенштейновская аппроксимация произвольного слова словом из регулярного языка

Введение в проблему. Пусть заданы

- L — регулярный язык, задаваемый генерирующим автоматом $\widetilde{\mathcal{A}}=\langle\,X,\,K,\,\varphi,\,P,\,\psi\,\rangle$;
- $d\,:\,X^*\times X^*\to\mathbb{R}$ — функция *отличия слова* $\overline{x}_2\in X^*$ *от слова* $\overline{x}_1\in X^*$.

Отличие *не обязательно образует метрику* на множестве последовательностей: например, может быть даже несимметричной функцией.

Задача: построить алгоритм, который для каждого слова $\overline{x} \in X^*$ и каждого регулярного языка $L \subset X^*$ вычисляет *отличие слова $\overline{x}$ от языка L* — число

$$D(\overline{x}) = \min_{\overline{y} \in L} \{ d(\overline{y}, \overline{x}) \}.$$

Далее рассматривается случай, когда функция d принадлежит классу т.н. *левенштейновских функций.*

Владимир Иосифович Левенштейн (20.05.1935) — российский математик, д.ф.-м.н, вед.н.сотрудник ИПМ им. М. В. Келдыша. В 1965 г. ввёл понятие расстояния редактирования для 0-1 последовательностей. В 2006 году получил престижную награду США — Медаль Ричарда Хэмминга.

Операции редактирования слов. Определим три операции посимвольного редактирования слов и действительные неотрицательные функции их стоимости (все символы $x, x' \in X$, все слова $\overline{x} \in X^*$):

INsert (*вставка*) преобразует слово $\overline{x}_1\overline{x}_2$ в слово $\overline{x}_1 x \overline{x}_2$, стоимость — $in(x)$;

CHange (*замена*) преобразует слово $\overline{x}_1 x \overline{x}_2$ в слово $\overline{x}_1 x' \overline{x}_2$, стоимость — $ch(x, x')$;

DElete (*исключение*) преобразует слово $\overline{x}_1 x \overline{x}_2$ в слово $\overline{x}_1\overline{x}_2$, стоимость — $de(x)$.

Стоимость последовательности операций = сумма стоимостей операций, входящих в эту последовательность; стоимость пустой последовательности = 0.

<u>Определение</u> 3.5. Стоимость $d(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ самой дешёвой последовательности редакторских операций, преобразующей $\overline{x}_1 \to \overline{x}_2$ называют *левенштейновым отличием слова* $\overline{x}_2$ *от слова* $\overline{x}_1$.

Пример: чтобы перевести слово КОНЬ в слово КОТ нужно совершить одно удаление и одну замену, соответственно расстояние Левенштейна составляет 2:

$$\text{КОНЬ} \xrightarrow{\textit{заменяем}\ \text{Н на Т}} \text{КОТЬ} \xrightarrow{\textit{удаляем}\ \text{Ь}} \text{КОТ}$$

Нахождение стоимости $d(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ в общем случае — непростая задача: *существует бесконечное количество последовательностей редакторских операций* преобразования $\overline{x}_1 \to \overline{x}_2$.

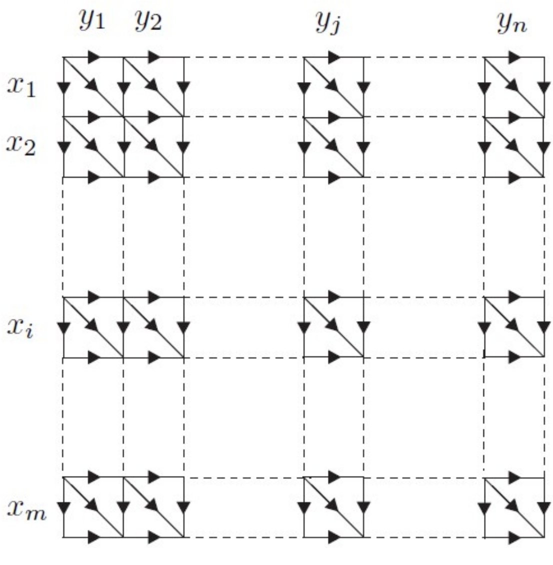
Наивный алгоритм вычисления $d(\overline{y}, \overline{x})$. Приведём известный и часто применяемый алгоритм вычисления функций Левенштейна являющийся примером *псевдорешения*: оптимальность его не гарантируется.

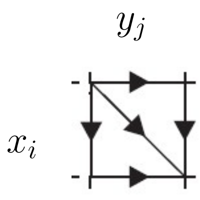
Пусть $\overline{x} = (x_1, \ldots, \ldots, x_m)$ и $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ — слова из X^*.

Алгоритм вычисления стоимости $d(\overline{y}, \overline{x})$ преобразования $\overline{y} \to \overline{x}$ зададим на графе $\Gamma_0(\overline{y}, \overline{x})$, в котором рёбра (стрелки) задают множество допустимых путей из левого верхнего угла графа в правый нижний.

Каждому пути соответствует последовательность *редакторских операций* преобразования $\overline{y} \to \overline{x}$ слов: прохождению пути по

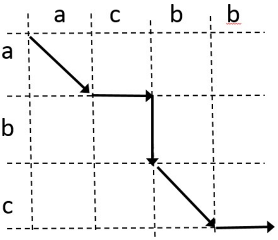
- *вертикальной* стрелке в i-й строке соответствует *вставка* символа x_i;
- *горизонтальной* стрелке j-м столбце соответствует *исключение* символа y_j;
- *диагональной* стрелке в i-й и j-м столбце соответствует *замена* $y_j \mapsto x_i$ символов.





i-ой строке приписан i-й символ слова $\overline{x}$.
j-му столбцу приписан j-й символ слова $\overline{y}$.

Пример 3.8. Пусть $X = \{a, b, c\}$.
Преобразуем по данному алгоритму слово $\overline{y} = acbb$ в слово $\overline{x} = abc$ по указанному пути:



a c b b
a c b b
a b b
a b b b
a b c b
a b c

Присвоим стрелкам неотрицательные длины, равные стоимости редакторских операций.

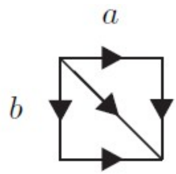
Длина каждой стрелки равна
вертикальной в i-й строке — стоимости $in(x_i)$;
горизонтальной в j-м столбце — стоимости $de(y_j)$;
наклонной в i-ой строке и j-ом столбце — стоимости $ch(y_j, x_i)$.

Длина каждого пути = стоимость последовательности операций, которые этот путь представляет.

Вроде бы: поиск самой дешевой последовательности редакторских операций преобразования $\overline{y} \to \overline{x}$ сводится к поиску кратчайшего пути на графе от верхнего левого угла к правому нижнему.

Покажем *ошибочность* данного предположения.

Пусть в алфавите $X = \{a, b, c, d\}$ даны слова $\overline{x} = (b)$, $\overline{y} = (b)$; необходимо вычислить $d(\overline{y}, \overline{x})$.



Решение. По графу $\Gamma_0(\overline{y}, \overline{x}) : d(\overline{y}, \overline{x}) =$

$$= \min \left\{ ch(a,b),\ de(a) + in(b),\ in(b) + de(a) \right\}.$$

Но имеется и много других вариантов, например:

$$a \xrightarrow{ch(a,c)} c \xrightarrow{de(c)} \lambda \xrightarrow{in(d)} d \xrightarrow{ch(d,b)} b$$

Граф Γ_0 представляет лишь очень малую часть всех возможных редакторских операций преобразования $a \to b$, и наивный алгоритм решает задачу правильно только в случае, когда Γ_0 содержит самую дешевую последовательность.

Вывод: задача определения левенштейнового отличия слова от заданного языка должна быть строго формализована.

Граф преобразований слов. Левенштейново отличие. Определим бесконечный направленный мультиграф Γ:

- $V(\Gamma) = X^*$;
- $E(\Gamma)$ составляют дуги 3 типов: in, de и ch, при этом две вершины, соответствующие словам вида

1) $\overline{x}_1\overline{x}_2$ и $\overline{x}_1 x \overline{x}_2$ соединяют дуги типа
— in длины $in(x)$ от *первой вершины ко второй* и типа
— de длины $de(x)$ от *второй вершины к первой*;

2) $\overline{x}_1 y \overline{x}_2$ и $\overline{x}_1 x \overline{x}_2$ соединяют дуги типа — ch длины $ch(y,x)$ от *первой вершины ко второй* и длины $ch(x,y)$ от *второй вершины к первой.*

Левенштейново отличие — функция

$$d : X^* \times X^* \to \mathbb{R}_{\geqslant 0},$$

значение которой $d(\overline{y}, \overline{x})$ для пары $\overline{y}, \overline{x}$ есть *длина кратчайшего пути* в Γ от вершины $\overline{y}$ до вершины $\overline{x}$.

Лемма 3.1 (о порядке редакторских операций). *Для любых двух слов $\overline{y}$ и $\overline{x}$ из X^* существует кратчайший путь*

1) *начинающийся последовательностью стрелок типа in,*
2) *за которой следует последовательность стрелок типа ch,*
3) *и завершающийся последовательностью стрелок типа de,*

причём любая из этих последовательностей может быть пустой.

Доказательство. Пусть $\overline{y}, \overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n, \overline{x}$ — кратчайший путь от вершины $\overline{y}$ к вершине $\overline{x}$, который не обладает указанным свойством, что обнаруживается при последовательных переходах от $\overline{x}_{i-1}$ к $\overline{x}_i$ и от $\overline{x}_i$ к $\overline{x}_{i+1}$: $\quad \overline{x}_{i-1} \longrightarrow \overline{x}_i \longrightarrow \overline{x}_{i+1}.$

Это может произойти только в 3 следующих ситуациях.

1. Дуга $(\overline{x}_{i-1}, \overline{x}_i)$ имеет тип ch, а дуга $(\overline{x}_i, \overline{x}_{i+1})$ — тип in.

Это значит, что слова $\overline{x}_{i-1}, \overline{x}_i, \overline{x}_{i+1}$ имеют один из двух следующих видов:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \overline{x}_{i-1} & = & \overline{x}'y\overline{x}''\overline{x}''', \\ \overline{x}_i & = & \overline{x}'x\overline{x}''\overline{x}''', \\ \overline{x}_{i+1} & = & \overline{x}'x\overline{x}''z\overline{x}''', \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left\{\begin{array}{lcl} \overline{x}_{i-1} & = & \overline{x}'\overline{x}''y\overline{x}''', \\ \overline{x}_i & = & \overline{x}'\overline{x}''x\overline{x}''', \\ \overline{x}_{i+1} & = & \overline{x}'z\overline{x}''x\overline{x}'''. \end{array}\right.$$

В первом случае заменяем вершину $\overline{x}_i$ на $\overline{x}'y\overline{x}''z\overline{x}'''$, а во втором — на $\overline{x}'z\overline{x}''y\overline{x}'''$.

В обоих случаях получим новый путь из вершины $\overline{y}$ в вершину $\overline{x}$ с той же длиной, но в этом пути первая рассматриваемая стрелка будет иметь тип in, а вторая — тип ch.

2. Дуга $(\overline{x}_{i-1}, \overline{x}_i)$ имеет тип de, а дуга $(\overline{x}_i, \overline{x}_{i+1})$ — тип in.

Это значит, что слова $\overline{x}_{i-1}, \overline{x}_i, \overline{x}_{i+1}$ имеют один из двух следующих видов $(\overline{x}', \overline{x}'', \overline{x}''' \in X^*,\ x, y \in X)$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \overline{x}_{i-1} & = & \overline{x}'y\overline{x}''\overline{x}''', \\ \overline{x}_i & = & \overline{x}'\overline{x}''\overline{x}''', \\ \overline{x}_{i+1} & = & \overline{x}'\overline{x}''x\overline{x}''', \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left\{\begin{array}{lcl} \overline{x}_{i-1} & = & \overline{x}'\overline{x}''y\overline{x}''', \\ \overline{x}_i & = & \overline{x}'\overline{x}''\overline{x}''', \\ \overline{x}_{i+1} & = & \overline{x}'x\overline{x}''\overline{x}'''. \end{array}\right.$$

В первом случае вершину $\overline{x}_i$ заменяем на $\overline{x}'y\overline{x}''x\overline{x}'''$, а во втором — на $\overline{x}'x\overline{x}''y\overline{x}'''$.

В обоих случаях получим новый путь с той же длиной, но в этом пути первая рассматриваемая стрелка будет иметь тип in, а вторая — тип de.

3. Дуга $(\overline{x}_{i-1}, \overline{x}_i)$ имеет тип de, а дуга $(\overline{x}_i, \overline{x}_{i+1})$ — тип ch.

Это возможно в двух случаях:

$$\begin{cases} \overline{x}_{i-1} &= \overline{x}'x\overline{x}''y\overline{x}''', \\ \overline{x}_i &= \overline{x}'\overline{x}''y\overline{x}''', \\ \overline{x}_{i+1} &= \overline{x}'x\overline{x}''z\overline{x}''', \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \overline{x}_{i-1} &= \overline{x}'y\overline{x}''x\overline{x}''', \\ \overline{x}_i &= \overline{x}'y\overline{x}''\overline{x}''', \\ \overline{x}_{i+1} &= \overline{x}'z\overline{x}''\overline{x}'''. \end{cases}$$

Заменяем в первом случае вершину $\overline{x}_i$ на $\overline{x}'x\overline{x}''z\overline{x}'''$, а во втором — на $\overline{x}'z\overline{x}''x\overline{x}'''$.

В обоих случаях получим новый путь с той же длиной, но в этом пути первая рассматриваемая стрелка будет иметь тип ch, а вторая — тип de.

Последовательно изменяя путь от $\overline{y}$ до $\overline{x}$ по указанным правилам, найдем путь, в котором ни одна из указанных трех ситуаций не встретится. □

Эквивалентное определение левенштейнова отличия — на основе доказанной леммы.

1. Определим три частных отличия d_{in}, d_{ch} и d_{de} *по построенному кратчайшему пути*: они равны длинам пути по стрелкам соответствующего типа, при этом если $\overline{y} = \overline{x}$, то полагаем все отличия равными 0, а если пути по стрелкам данного типа нет, то полагаем соответствующее отличие равным ∞.

2. Введём новые «длинные» стрелки в графе Γ (ранее введённые — «короткие»):

- если $\overline{x}$ получена из $\overline{y}$ вставкой некоторых символов, то введём в граф Γ две длинные стрелки: типа in от $\overline{y}$ до $\overline{x}$ длины $d_{in}(\overline{y}, \overline{x})$ и типа de от $\overline{x}$ до $\overline{y}$ длины $d_{de}(\overline{x}, \overline{y})$;

- если $\overline{x}$ и $\overline{y}$ имеют одинаковую длину, введём в граф Γ длинную стрелку типа ch от $\overline{y}$ до $\overline{x}$ длины $d_{ch}(\overline{y}, \overline{x})$.

Ясно, что

- длина кратчайшего пути от $\overline{y}$ до $\overline{x}$ по коротким стрелкам = длине кратчайшего пути по длинным стрелкам,
- и один из этих кратчайших путей содержит не более, чем три длинные стрелки типа *in*, *ch* и *de*, идущие друг за другом в указанном порядке.

Математическое представление этого высказывания —

$$d(\overline{y},\, \overline{x}) \;=\; \min_{\overline{z}_1 \in X^*} \min_{\overline{z}_2 \in X^*} \Big\{\, d_{in}(\overline{y}, \overline{z}_1) + \\ + d_{ch}(\overline{z}_1, \overline{z}_2) + d_{de}(\overline{z}_2, \overline{x}) \,\Big\}$$

ничего не даёт для конструктивного вычисления $d(\overline{y},\, \overline{x})$ (двойной перебор по бесконечному множеству), но полезно, т.к. указывает, что вычисление левенштейнова отличия сводится к отысканию двух вспомогательных слов $\overline{z}_1$ и $\overline{z}_2$, причём $|\overline{y}| \leqslant |\overline{z}_1| = |\overline{z}_2| \geqslant |\overline{x}|$.

Основной результат. Пусть для конечного алфавита X заданы:

- регулярный язык L как подмножество $\{(x_1,\, \ldots,\, x_n)\}$ слов X^*, генерируемых автоматом $\widetilde{\mathcal{A}} = \langle\, X, K, \varphi, P, \psi \,\rangle$, т.е. для которых справедливо утверждение

$$\bigvee_{k_0 \in K} \ldots \bigvee_{k_n \in K} \; \varphi(k_0) \;\&\; \mathop{\&}_{i=1}^{n} P(k_{i-1},\, x_i,\, k_i) \;\&\; \psi(k_n);$$

- три функции in, ch и de на X^*, $(X^*)^2$ и X^* соответственно, определяющие левенштейново отличие слов $d : (X^*)^2 \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$.

Задача нахождения РЛ: создать алгоритм, который для каждого слова $\overline{x} \in X^*$ и каждой шестерки функций $(\varphi,\, P,\, \psi,\, in,\, ch,\, de)$ вычисляет левенштейновское отличие

$$D(\overline{x}) = \min_{\overline{y} \in L} d(\overline{y},\, \overline{x}).$$

Особенности задачи РЛ

Обычно рассматривают многомерные задачи нахождения $\sup_x f(x)$ — оптимизации функций целевых функций $f(x)$, в которых

- количество переменных, может быть большое, заранее задано, в то время, как задача РЛ требуется найти слово с *неизвестной заранее длиной из бесконечного множества*;
- функция $f(x)$, заданными в виде явной формулы, а задаче РЛ функция $d(\overline{y},\, \overline{x})$, представлена в виде *вспомогательной задачи* её поиска.

Основная задача — оптимизация найденной в результате решения вспомогательной задачи функции $d(\overline{y},\, \overline{x})$.

Теорема 3.2 (основной результат по задаче РЛ). *Пусть X и K — два конечных множества, φ и ψ — предикаты на K, P — предикат на $K \times X \times K$, определяющие регулярный язык $L \subset X^*$ как множество слов $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n$, для которых истинен предикат*

$$\bigvee_{k_0\in K} \dots \bigvee_{k_n\in K} \varphi(k_0) \,\&\, \mathop{\&}_{i=1}^{n} P(k_{i-1},\, x_i,\, k_i) \,\&\, \psi(k_n).$$

Пусть также

$$in : X \to \mathbb{R}, \quad ch : X \times X \to \mathbb{R}, \quad de : X \to \mathbb{R}$$

— три неотрицательные функции, определяющие левенштейновы отличия $d : X^* \times X^* \to \mathbb{R}$ *и*

$$D(\overline{x}) \;=\; \min_{\overline{y}\in L} d(\overline{y}, \overline{x}).$$

Тогда для каждой шестерки функций $(\varphi,\, P,\, \psi,\, in,\, ch,\, de)$ *существует такая пара функций* $P',\, \psi'$, *что равенство*

$$D(\overline{x}) \;=\; \min_{k_0\in K} \dots \min_{k_n\in K} \Big\{\, \varphi(k_0) + \\ + \sum_{i}^{n} P'(k_{i-1}, x_i, k_i) + \psi'(k_n) \,\Big\}.$$

выполняется для любого слова $(x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n) \in X^*$.

Следствия и выводы

- Вычисление числа $D(\overline{x}) = \min_{\overline{y}\in L} d(\overline{y}, \overline{x})$, вопреки всей сложности его определения, имеет сложность $O(|K|^2 n)$ что и при распознавании принадлежности слова $\overline{x}$ обыкновенному, не штрафному, регулярному языку.

- Суммарная сложность определения $\overline{y} \overset{?}{\in} L$ и вычисления $d(\overline{y}, \overline{x})$ имеет порядок $O(|K|^2|\overline{y}| + |\overline{y}||\overline{x}|)$.

Т.е. вычисление $D(\overline{x})$ имеет сложность $O(|K|^2|\overline{x}|)$, которая не зависит от $|\overline{y}|$, на которой достигается минимум, и более того, меньше, чем сложность вычисления числа $d(\overline{y}, \overline{x})$ для некоторых слов $\overline{y} \in L$.

Эти вытекающие из теоремы замечательные свойства априори неправдоподобны.

- *Редакционным предписанием* называется последовательность действий, необходимых для получения из первой строки второй кратчайшим образом. К рассмотренным действиям (вставить, заменить, удалить) добавляют MATch) — совпадение.

  Найти только расстояние Левенштейна — более простая задача, чем найти ещё и редакционное предписание.

- Если к списку разрешённых операций добавить транспозицию (два соседних символа меняются местами), приходим к понятию *расстояния Дамерау — Левенштейна.*
  Оно используется
  - при анализе текстов: Дамерау показал, что 80% ошибок при наборе текста человеком являются транспозициями;
  - в биоинформатике.

Алгоритм конструктивного построения функций P' и ψ' может быть найден в книге *М. И. Шлезенгер, В. Главач. Десять лекций по статистическому и структурному распознаванию образов.* Известны издания

К.: Наукова думка и Kluwer Academic Publishers; книга доступна в интернете.

Замечания

1. Алгоритм реализует метод ближайшего соседа в случае, когда L есть регулярный язык, а d — есть функция Левенштейна.

2. Алгоритм требует большого перебора (возможно совместного) по множествам $|K|^3$, $|X|^2$, .

3. Известны результаты по левенштейновой аппроксимации не только в рамках регулярных языков, но и в более общем случае контекстно-свободных языков.

Глава 4

Математика коллективных решений

4.1 Постановка проблемы

Пример 4.1 (выборы в L'Académie royale des Sciences). Одна вакансия, 3 кандидата: A, B, C и 21 выборщик, предпочтения которых:

	I	II	III	или
8	A	B	C	$A \succ B \succ C$
7	B	C	A	$B \succ C \succ A$
6	C	B	A	$C \succ B \succ A$

$\succ$ — *предпочтительнее* (асимметричное, полное и транзитивное однородное отношение)

По правилу относительного большинства будет выбран A, хотя он вряд ли этого достоен: 13 выборщиков ставят его на последнее место.

Начало систематических исследований по теории голосования — работы Кондорсе и Борда (конец XVIII в.)

Кондорсе построил пример, показывающий, что правило относительного большинства может приводить к неразрешимым парадоксам.

Мажоритарная система. — победителем (единственным) считается тот, кто набрал большинство голосов.

Виды большинства. Каждый выборщик указывает на одного наиболее предпочтительного кандидата, затем идет подсчет голосов и побеждает тот кандидат, который набрал

квалифицированное — большинство в 2/3 (или 3/4) голосов;

абсолютное или простое — большинство, составляющее $> 50\%$ голосов (его невозможно превзойти даже при объединении остальных голосующих);

относительное — больше голосов, чем остальные кандидаты, когда ни один из них не имеет простого большинства.

Недостатки мажоритарной системы

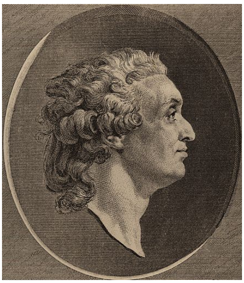
- Квалифицированное большинство набрать очень трудно.
- Победителя по простому большинству также может не быть.
  Победителем может оказаться кандидат, против которого возражает большинство избирателей (*Пример* 4.1).
- Представительство наиболее мощной партии в парламенте выше, чем действительный процент поддерживающих её избирателей: разбросанные

по стране меньшинства не могут добиться большинства в каждом отдельном округе (чтобы провести своего кандидата, требуется компактное проживание $\Rightarrow$ опасность *джерримендеринга*).

- Избиратели, чтобы их голос не пропал, голосуют не за того, кто им нравится, а за наиболее приемлемого из двух лидеров $\Rightarrow$ мажоритарная избирательная система в конце концов приводит к двухпартийной системе (*закон Дюверже*).

Один из выходов — *пропорциональная избирательная система*.

Победители по Кондорсе и по Борда



Мари Жан Антуан Никола де Карита маркиз де Кондорсе (Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, marquis de Condorcet, 1743–1794) — французский философ-просветитель, математик, политический деятель, иностранный почетный член Петербургской академии наук (1776–1792, исключен по указу Екатерины II как член Конвента и участник суда над Людовиком XVI), член Французской академии наук (1769).

Маркиз Кондорсе — один из создателей современного понимания демократии и, в частности, теории голосований.

Пример 4.1 (*продолжение*: выборы в L'Académie royale des Sciences — решение Кондорсе). Подсчитываем количество предпочтений —

8	$A \succ B \succ C$
7	$B \succ C \succ A$
6	$C \succ B \succ A$

$\#(A \succ B) = 8$	$\#(B \succ A) = \mathbf{13}$
$\#(A \succ C) = 8$	$\#(C \succ A) = \mathbf{13}$
$\#(B \succ C) = \mathbf{15}$	$\#(C \succ B) = 6$

— списки предпочтений удобно записывать в виде *матрицы голосования*

В результате при парных сравнениях:

A проигрывает всем;
B выигрывает у всех;
C выигрывает у A проигрывает B.

и B — *победитель по Кондорсе.*

Жан-Шарль шевалье де Борда (Jean-Charles de Borda, 1733–1799) — французский математик, физик, геодезист, инженер, политолог и морской офицер. Член Французской академии наук, участник военных сражений, один из создателей теории голосований (метод оценки Борда).

Автор доказательства теоремы в гидравлике об ударе струи жидкости или газа, носящей его имя.
По поручению Академии наук вместе с астрономами П. Мешеном и Ж.-Б. Деламбром работал над определением длины дуги меридиана.

Пример 4.1 (*продолжение*: выборы в L'Académie royale des Sciences — решение Борда). Присуждаем кандидатам *баллы Борда*:
за первое место — 2, за второе — 1, за третье — 0 и подсчитываем их количество у кандидатов.

	I	II	III
8	A	B	C
7	B	C	A
6	C	B	A
21	2	1	0

кандидат	$\sum$ баллов
A	16
B	**28**
C	19

Побеждает набравший максимальное количество баллов

В результате: *победитель по Борда* — B.

Вывод: победитель по Кондорсе $\neq$ победитель по Борда

Пример 4.2. 3 кандидата — A, B, C, 81 выборщик, их предпочтения и матрица голосования:

30	$A \succ B \succ C$
29	$B \succ A \succ C$
10	$B \succ C \succ A$
10	$C \succ A \succ B$
1	$A \succ C \succ B$
1	$C \succ B \succ A$
81	2 1 0

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{pmatrix} 101 & 41 & 60 \\ 40 & 109 & 69 \\ 21 & 12 & 33 \end{pmatrix}$$

по диагонали — баллы Борда, победитель по ним — B.

По Кондорсе $A \overset{41}{\succ} B$, $A \overset{60}{\succ} C$ и победитель — A.

Причина несовпадения: подход Борда учитывает одновременно взаимоотношения всех кандидатов, а подход Кондорсе — только их парные сравнения.

Парадокс Кондорсе

Пример 4.3 (Кондорсе; *парадокс голосования*).

Число голосующих	Предпочтения
23	$A \succ B \succ C$
17	$B \succ C \succ A$
2	$B \succ A \succ C$
10	$C \succ A \succ B$
9	$C \succ B \succ A$
61	

Подсчитываем предпочтения по Кондорселучаем Решение: $A \overset{33}{\succ} B \overset{42}{\succ} C \overset{36}{\succ} A$ — они *образуют цикл.*

Столкнувшись с этим парадоксом, Кондорсе выбрал «наименьшее зло» — поддержал мнение *относительного большинства*, что избранным следует считать A.

Разные процедуры — разные победители

Пример 4.4. Определить победителя по правилам Кондорсе, относительного большинства, Борда и абсолютного большинства при следующих предпочтениях:

Число голосующих	Предпочтения
23	$A \succ C \succ B$
19	$B \succ C \succ A$
16	$C \succ B \succ A$
2	$C \succ A \succ B$
60	2 1 0

Решение. Строим матрицу голосования с баллами Борда по диагонали:

	A	B	C
A	48	25	23
B	35	54	19
C	37	41	78

Итого:

по Кондорсе победитель — C, побеждающий и A, и B при парных сравнениях «один на один»:

$$\begin{tikzcd} & A & \\ B \arrow[ur, "35"] & & C \arrow[ul, "37"'] \arrow[ll, "41"] \end{tikzcd}$$

по принципу относительного большинства победитель A: у него 23 голоса из 60 (у $B - 19$, у $C - 18$).

по принципу абсолютного большинства победителя нет: никто не набрал $\geqslant 31$ голосов.

по принципу Борда победитель C: у него максимальное количество баллов — 78.

У Борда тоже проблемы

Пример 4.5.

31	$A \succ C \succ B$
12	$B \succ C \succ A$
17	$C \succ B \succ A$
1	$C \succ A \succ B$
61	2 1 0

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 63 & 32 & 31 \\ 29 & 41 & 12 \\ 30 & 43 & 79 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \end{array}$$

По Борда победитель — C, у которого максимальное количество баллов — 79, но явный победитель — A, т.к. у него абсолютное большинство — 31 голос.

Вывод: победитель по Борда $\neq$ победитель по правилу абсолютного большинства.

Двухтуровое голосование — проблемы остаются

Число голосующих	Предпочтения
23	$A \succ B \succ C$
17	$B \succ C \succ A$
2	$B \succ A \succ C$
10	$C \succ A \succ B$
8	$C \succ B \succ A$
60	

Во второй тур выходят набравшие наибольшие число голосов A (23 голоса) и B (у которого 19 голосов, у C — 18).

Однако если двое избирателей (3-я строка) немного изменят своё мнение, поменяв в предпочтениях A и B (т.е. будут считать, что $A \succ B \succ C$), во второй тур выходят A (у него станет 25 голосов) и C (у B останется только 17 голосов), что противоречит здравому смыслу.

Пример 4.6 (индекс влияния Банцафа). Трёхпартийный парламент из 99 депутатов представлен партиями X, Y и Z с распределением мест:

X	33
Y	33
Z	33

X	48	2/7
Y	48	2/7
Z	3	3/7

— влияние партий не пропорционально числу их голосов.

Индекс влияния Банцафа $\beta(i)$ для голосований «да/нет»: если b_i — число коалиций, в которых партия i является ключевой (её удаление из коалиции не позволяет коалиции гарантирровано побеждать), то

$$\beta(i) = \frac{b_i}{\sum\limits_j b_j},$$

Влиятельность участников в Совете Безопасности ООН —

$$\beta(\text{постоянные члены СБ}) \approx 0,835,$$
$$\beta(\text{временные члены СБ}) \approx 0,165.$$

4.2 Правила голосования

Задача голосования. Обозначения:

- множество *голосующих* (*выборщиков, ...*) — $V = V_n = \{1, \ldots, n\}$, $n \geqslant 2$;
- множество *альтернатив* (*вариантов, кандидатов, ...*) — $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$, $m \geqslant 2$ (или $A = \{X, Y, \ldots\}$);
- мнение i-го голосующего *строго линейно упорядочивает* множество альтернатив A: $P_i = \langle A, >_i \rangle$, $i = \overline{1, n}$,
  отношение $>_i$ читается как «*предпочтительнее*», «*лучше, чем*», ...
- $\overline{P} = (P_1, \ldots, P_n)$ — *профиль голосующих*.

> *Задача голосования* заключается в указании элемента $C(A) = a \in A$, в наибольшей степени отражающего мнение коллектива V выборщиков относительно вариантов из A.

Удобно считать, что a — наибольший элемент относительно *некоторого частичного порядка* $P = F(\overline{P})$ на A.

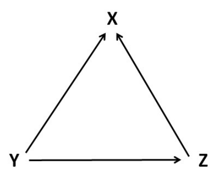
Мажоритарный граф. Пару (x, y) включаем в P (символически $x >_P y$, или просто $x > y$), если её включает в свои отношения простое большинство голосующих:

$$x >_P y \;\Leftrightarrow\; \#\{\, i \in V_n \mid x >_i y \,\} > \frac{n}{2}\,.$$

Граф построенного таким образом отношения P — *мажоритарный граф*.

Пример 4.1 (*продолжение*: выборы в L'Académie royale des Sciences — построение мажоритарного графа). $n = 21$:

$$X \overset{8}{\underset{\mathbf{13}}{\gtrless}} Y, \quad X \overset{8}{\underset{\mathbf{13}}{\gtrless}} Z, \quad Y \overset{\mathbf{15}}{\underset{6}{\gtrless}} Z.$$



Победитель — Y.

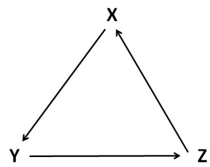
Победитель Кондорсе — *недоминируемая вершина мажоритарного графа*. Свойства:

- Если n нечётно, то *двух* победителей Кондорсе быть не может.

- Победителей по Кондорсе быть может вообще не быть (*парадокс Кондорсе*).

- Функция выбора по Кондорсе чувствительна к малым изменениям профиля голосующих.

  Например: пусть $V = \{1, 2, 3\}$,
  $A = \{X, Y, Z\}$ и
  $P_1 : X > Y > Z$
  $P_2 : Z > X > Y$
  $P_3 : Y > \underbrace{Z > X}$

  Но при изменении предпочтений 3-го выборщика на $P_3' : Y > \underbrace{X > Z}$, имеем

  и здесь X — единственный победитель Кондорсе.

Функции выбора по Кондорсе и Борда:

по Кондорсе —

$$n_{xy} = \#\{ i \in V_n \mid x >_i y \},$$

$$x\rho_{xy}y = n_{xy} \geqslant n_{yx}, \quad \rho = \bigcup_{\substack{x,y \in A,\\ x \neq y}} \rho_{xy},$$

$$C_{Condorcet}(A) = \{ x \in A \mid \forall\, y \in A : \; x\rho y \}$$

по Борда —

$$B_i(x) = \#\{ y \in A \setminus x \mid x >_i y \},$$

$$b(x) = \sum_{i=1}^{n} B_i(x), \quad x\rho_A y = b(x) \geqslant b(y);$$

$$C_{Borda}(A) = \{ x \in A \mid \forall\, y \in A : \; x\rho_A y \}.$$

Эти правила отражают два подхода к оцениванию предпочтений голосующих.

Ординалистский подход — основывается на том, что предпочтения голосующих относительно предлагаемых к выбору альтернатив не могут измеряться количественно, а только *качественно*: одна альтернатива может быть хуже или лучше другой (Кондорсе).

Согласно ординалистской теории, потребитель измеряет не полезность отдельных благ, а полезность наборов благ.

Кардиналистский подход — предполагает *количественную* измеримость предпочтений (Борда),

Основные процедуры голосования. Приведем наиболее распространенные процедуры голосования и рассмотрим результаты их применения.

Пусть на голосование поставлены три альтернативы: A, B и C и голоса 61 экспертов-выборщиков распределились, как в примере Кондорсе:

№ группы	# группы	Предпочтения
1	23	$A > B > C$
2	17	$B > C > A$
3	2	$B > A > C$
4	10	$C > A > B$
5	9	$C > B > A$
	61	2 1 0

1. *Процедура (принцип) Кондорсе* — лучшей считается альтернатива, которую больше половины экспертов при попарном сравнении считают лучше любой другой.

Сравним предпочтения экспертов по отношению к парам альтернатив: построим таблицу голосования (на будущее — с баллами Борда по диагонали):

	A	B	C
A	46	33	25
B	28	70	42
C	36	19	55

Уже было: переходя от индивидуальных предпочтений экспертов к коллективному — $A \overset{33}{>} B \overset{42}{>} C \overset{36}{>} A$ — *лучшая альтернатива отсутствует.*

2. *Процедура Борда* — результаты голосования выражаются в виде числа баллов, набранных каждой альтернативой (при m альтернатив: за первое место присуждается $m-1$ баллов, за второе $m-2$ и т.д., за последнее — 0.

Далее подсчитывается число баллов для каждой альтернативы, и лучшей считается альтернатива, набравшая большую сумму.

Лучшая альтернатива — B (70 баллов).

3. *Редактирующая процедура* — заключается в попарном сравнении альтернатив и отбрасывании тех, которые по большинству голосов признаны *худшими*.

Среди оставшихся альтернатив снова проводят сравнение до тех пор, пока не останется последняя пара альтернатив, из которой выбирают лучшую.

Эту процедуру использует конгресс США, а также парламенты Швеции и Финляндии.

Было уже проведено попарное сравнение альтернатив:

$$A \overset{33}{>} B, \quad B \overset{42}{>} C, \quad C \overset{36}{>} A,$$

т.е. наибольшее число голосов экспертов (42) подано за то, что наихудшей является альтернатива C и она исключается.

Далее сравниваются альтернативы A и B и альтернатива A признается лучшей.

4. *Процедура Копеланда* — проводятся парные сравнения всех альтернатив, по результатам которой альтернатива, получившая большинство голосов, получает один балл, а набравшая большее число баллов считается лучшей.

Все альтернативы набирают по одному баллу т.е. лучшая альтернатива отсутствует.

5. *Процедура максимум* — лучшей считается альтернатива, набравшая при одновременном голосовании всех альтернатив самое большое число голосов (но необязательно больше половины).

За альтернативу A подано 23 голоса, за альтернативы B и C — по 19 голосов.

Лучшей считается альтернатива A.

6. *Процедура большинства голосов* — лучшей считается та, которая первой набрала больше половины голосов при одновременном голосовании всех альтернатив.
Считается наиболее эффективной для принятия решений.

В рассматриваемом примере лучшая альтернатива отсутствует.

7. *Мягкий рейтинг* — участники голосования могут голосовать за любое число альтернатив и лучшей счи-

тается набравшая наибольшее число голосов.

Пусть каждый выборщик проголосовал за две лучшие, по его мнению, альтернативы.

Тогда A получает 35 голосов, B — 51 голос, C — 36 голосов, и лучшей альтернативой является B.

Эта процедура иногда используется в ГД РФ.

Процесс голосования иногда может проходить в несколько итераций, если его результаты не удовлетворяют какие-либо влиятельные группы участников, но, как правило, одного голосования бывает достаточно.

8. *Процедура квалифицированного большинства* — чтобы предложение прошло, за него должно быть подано не менее 2/3 голосов и позволяет меньшинству участников заблокировать принятие решения.

В нашем случае 2/3 голосов > 40 и лучшей альтернативы нет.

Применяется в ГД РФ при принятии конституционных законов и при преодолении вето Совета Федерации или президента.

9. *Правило единогласия* (консенсуса) — полное совпадение всех мнений. Применяется, например, в процессе согласования решений членами НАТО.

Рассмотренные примеры показывают, что способ определения победителя при системе голосования «один человек — один голос» (называемой демократической) *зависит от процедуры обработки результатов голосования.*

Один из способов применения рассмотренных систем голосования для многокритериального сравнения

альтернатив.
Пусть сравнивается альтернатив $x_1, \ldots, x_m$ их качество которых оценено по локальным критериям $z_1, \ldots, z_k$, т.е. для каждой альтернативы $j = \overline{1, m}$ получен вектор критериев $(\, z_1(x_j), \ldots, z_k(x_j)\,)$.

Для выбора лучшей альтернативы предлагается рассмотреть значения альтернатив по i-му критерию z_i как ранжировку, данную i-м экспертом. При такой интерпретации значений альтернатив по разным критериям можно воспользоваться системами голосования для выбора лучшей альтернативы.

Например, при использовании процедуры Кондорсе лучшей будет считаться альтернатива, которая по числу локальных критериев, большему, чем $m/2$, при попарном сравнении альтернатив окажется лучше любой другой.

Для повышения объективности выбора лучшей альтернативы можно провести выбор по разным системам голосования и выполнить анализ альтернатив, оказавшихся лучшими.

Данный подход можно рекомендовать для решения задач выбора, в которых велико число критериев ($|V| = n$ — несколько десятков).

4.3 Парадокс Эрроу

Кеннет Джозеф Эрроу (Kenneth Joseph Arrow, род. 1921) — американский экономист, лауреат Нобелевской премии по экономике (1972, совместно с Д. Хиксом) «за новаторский вклад в общую теорию равновесия и теорию благосостояния», почётный профессор Высшей школы экономики (2012).

Теорема Эрроу о невозможности коллективного выбора обобщает парадокс Кондорсе. Из неё, в частности, следует, что корректное определение победителя на демократических выборах возможно не всегда.

Аксиоматический подход в теории голосования
Обозначение: подмножество голосующих V, предпочитающих альтернативу x альтернативе y в профиле $\overline{P} = (P_1, \ldots, P_n)$:

$$V_{\overline{P}}(x > y) = \{ i \in V \mid x >_i y \} .$$

Правило голосования F строит по профилю $\overline{P}$ общее отношение предпочтения альтернатив $P = F(\overline{P})$.

В 1951 г. выдающийся американский ученый Кеннет Эрроу для поиска оптимальной системы голосования предложил аксиоматический подход.

Конкретно, им был предложен набор аксиом (условий), которым такая система должна обладать. Далее они излагаются которые в несколько измененном виде.

Ограничения на область определения и область принимаемых значений процедуры голосования:

1) индивидуальные предпочтения $P_1, \ldots, P_n$ голосующих — произвольные *нерефлексивные линейные порядки*;
2) коллективное решение $P = \langle\, A, > \rangle$ — *линейный порядок.*

1-е условие требует, чтобы голосующий имел право высказывать в форме линейных порядков любые предпочтения относительно альтернатив.

2-е условие ограничивает коллективное решение: оно должно быть линейным, коль скоро индивидуальные предпочтения линейны.

Аксиомы Эрроу

① *Аксиома локальности (независимости от посторонних альтернатив)*: взаимная предпочтительность любой пары альтернатив x и y в коллективном решении P зависит только и исключительно от их индивидуальных предпочтений (и не зависит от предпочтений других альтернатив):

$$x > y \;=\; F(x >_i y),\; i = \overline{1, n}$$

или

$$V_{\overline{P}}(x > y) \;=\; V_{\overline{P'}}(x > y) \Rightarrow (x >_P y \Leftrightarrow x >_{P'} y)\,,$$

$$P = F(\overline{P}),\ P' = F(\overline{P}').$$

Аксиома локальности фактически постулирует, что групповой выбор должен быть Кондорсе-рациональным (основываться на парных сравнениях альтернатив).

Правило простого большинства удовлетворяет условию локальности: если $V_{\overline{P}}(x > y) = V_{\overline{P}'}(x > y)$, то оба этих множества одновременно либо образуют простое большинство, либо не образуют.

А вот *правило Борда* условию локальности не удовлетворяет.

Пример 4.7. Пусть $V = \{1, 2, 3\}$, $A = \{x, y, z\}$ и профили индивидуальных предпочтений имеют следующий вид:

$$\begin{array}{ll} P_1 : x > y > z, & P'_1 : x > y > z, \\ P_2 : z > x > y, & P'_2 : z > x > y, \\ P_3 : \underbrace{y > z} > x, & P'_3 : \underbrace{z > y} > x. \end{array}$$

По правилу Борда для P: $r(x) = r(y) = r(z) = 3$ (нет победителя),
а для P': $r(x) = 3$, $r(y) = 2$, $r(z) = 4$ (победитель z).

Заметим, что

- $V_{\overline{P}}(x > y) = V_{\overline{P}'}(x > y) = \{1, 2\}$, однако результирующие профили P и P' отличаются: $x \not>_P y$, но $x >_{P'} y$;
- $V_{\overline{P}}(z > x) = V_{\overline{P}'}(z > x) = \{2, 3\}$, но $z \not>_P x$ и $z >_{P'} x$.

«Бытовые» примеры нарушения аксиомы локальности.

1. Посетитель ресторана сравнивая блюда A и B, склоняется к выбору A, не решаясь выбрать своё любимое блюдо B, т.к. его приготовление требует высокой квалификации повара, а, по мнению посетителя, такой повар вряд ли есть в данном ресторане.

Вдруг он замечает в меню блюдо C — очень дорогое и также требующее высокого искусства приготовления.

Тогда посетитель выбирает блюдо B, считая, что повар обладает необходимой квалификацией.

2. Судьи в фигурном катании, давая оценки выступающим, стараются учесть возможность хорошего последующего выступления сильного фигуриста, оставляя ему шансы стать победителем.

② *Аксиома единогласия (оптимальности по Парето)*: если все участники считают, что x предпочтительнее y, то таким же должно быть и консолидированное мнение:

$$V_{\overline{P}}(x > y) = V \;\Rightarrow\; x >_P y.$$

No comment.

③ *Аксиома ненавязанности*: коллективное решение зависит только от мнений участников и не может быть навязано процедурой голосования:

$$\left(\exists\, \overline{P} : x >_P y\right) \;\&\; \left(\exists\, \overline{P}' : x \not>_{P'} y\right).$$

Иначе говоря, процедура голосования не может предписать ни $x > y$, ни $x \not> y$ независимо от мнений участников.

④ *Аксиома монотонности*:

$$\left\{\begin{array}{l} x >_P y \\ V_{\overline{P}}(x > y) \subseteq V_{\overline{P'}}(x > y) \end{array}\right. \Rightarrow x >_{P'} y.$$

No comment.

⑤ *Аксиома нейтральности*: коллективное решение не зависит имён альтернатив —

$$V_{\overline{P}}(x > y) = V_{\overline{P'}}(z > w) \Rightarrow \left((x >_P y) \Leftrightarrow (z >_{P'} w) \right).$$

Сформулированы естественные аксиомы, которым, казалось бы, должна удовлетворять любая разумная процедура голосования.

Диктатор и диктаторское правило голосования. Правило голосования F, строящее по профилю $\overline{P}$ отношение предпочтения $P = F(\overline{P})$, по которому для любой пары альтернатив (x, y) имеет место $x >_P y$ если и только если существует выборщик $d \in V$, такой, что $x >_d y$, называется *диктаторским*, а выборщик d — *диктатором*.

Пример 4.8. Пусть $V = \{1, 2, 3\}$ и правило $P = F(\overline{P})$ таково, что для любых альтернатив x и y справедливо

$$x >_P y \Leftrightarrow V_{\overline{P}}(x > y) = \{ \{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} \}.$$

Тогда для любой пары (x, y) если $x >_2 y$, то такое же будет и коллективное решение независимо от мнений других участников, выборщик 2 — диктатор, а правило $F(\overline{P})$ — диктаторское.

Теорема 4.1 (Парадокс Эрроу). *Правило голосования F, удовлетворяющее аксиомам 1-5 при $n \geqslant 2$ и $m \geqslant 3$ является диктаторским.*

Парадокс Эрроу: комментарии.

- Поскольку поиск «лучшего» решения может оказаться бессмысленным: его может просто не быть.
- Теорема Эрроу (называемая также *теоремой невозможности*), занимает в теории выбора такое же место, как какое занимает в математической логике теорема Гёделя о невозможности построения непротиворечивой математической теории, содержащей аксиомы арифметики.
- Условия Эрроу, запрещающие *дискриминацию альтернатив*, приводят к *дискриминации голосующих*, когда один из них объявляется диктатором, а мнение остальных игнорируются.
- Смысл этой теоремы состоит в том, что в рамках ординалистского подхода не существует метода объединения индивидуальных предпочтений для трёх и более альтернатив, который удовлетворял бы некоторым вполне справедливым условиям и всегда давал бы логически непротиворечивый результат.
- В рамках кардиналистского подхода, теорема Эрроу в общем случае не справедлива.

Парадокс Эрроу: попытки спасти положение После появления в 1951 г. книги К. Эрроу «Social Choice and Individual Values» предпринимались значительные попытки так ослабить рассмотренные условия, чтобы избежать парадокса.

Пример 4.9. Ослабим часть ограничений: *коллективное решение — не обязательно линейный порядок.*

Тогда получаемое правило голосования называется *олигархией*: выделяется не один, а целая группа ω участников, и при этом коллективное решение — единогласное мнение всех членов этой группы, а мнение всех остальных членов коллектива не учитывается.
Формально:

$$P = \bigcap_{i \in \omega} P_i$$

В частности, группа «олигархов» может совпадать со всем множеством участников ($\omega = V$) и тогда коллективное решение = *правило единогласия* (не путать с аксиомой ② единогласия, которая утверждает, что единогласное мнение членов коллектива должно содержаться в коллективном решении). Правило единогласия может не давать решения: $P = \varnothing$, если единогласия нет.

Показана возможность разрешения парадокса невозможности на основе замены Кондорсе-рациональности Борда-ранациональность (выбор базируется на сравнениях не пар альтернатив, а их всех в совокупности).

Для нелокальных систем выбора (неудовлетворяющих аксиоме ①) правил общей теории нет, имеются лишь отдельные результаты.

4.4 Стратегическое поведение участников голосования

Манипулирование. *Напоминание*: считаем, что предпочтения участников P_i, $i = \overline{1, n}$ (строго) линейны, а коллективное решения — только одна альтернатива из A, т.е.
$$F : \overline{P} \to A\,.$$

Определение 4.1. Правило F называется *защищенным от манипулирования*, если ни один из голосующих ни в одном профиле не может изменить свои предпочтения так, чтобы в результате выбранной оказалась лучшая с его точки зрения альтернатива.

В противном случае эффект искажения своих предпочтений называется *манипулированием со стороны избирателя*, а правило голосования, позволяющее это — *манипулируемым*.

Можно ли отделить манипулируемые процедуры от неманипулируемых?

Потребуем, чтобы ни *одна из альтернатив не могла быть априори отброшена* = для каждой альтернативы существует профиль, при котором выбирается именно она (аналог условия ③ ненавязанности) = F — сюръективно — очень слабое ограничение, слабее условия ② единогласия.

Теорема 4.2 (Гиббарда–Саттертуэйта). *При числе альтернатив не менее 3 сюръективное правило голосования защищено от манипулирования iff оно является диктаторским.*

Т.е. любое недиктаторское правило голосования не менее, чем с тремя альтернативами, может сопровождаться манипуляциями и *защиты от манипулирования нет.*

Пример 4.1 (*продолжение*: выборы в L'Académie royale des Sciences — Теорема Гиббарда–Саттертуэйта).

	Предпочтения	Манипулирование
8	$A \succ B \succ C$	
7	$B \succ C \succ A$	
6	$C \succ B \succ A$	$B \succ C \succ A$

Процедура голосования: правило относительного большинства. *Результат* (было): будет избран кандидат A.

Однако в этой ситуации избиратели из последней группы, понимая свою малочисленность и то, что победит худший с их точки зрения кандидат A, могут исказить (манипулирование) свои истинные предпочтения, поставив на первое место кандидата B, который тогда и будет избран.

Виды манипулирования. Манипулирование при голосовании может происходить:

1) избирателями — искажением своего профиля предпочтений;
2) организатором голосования — путем
   - подбора соответствующего правила голосования (простого большинства, относительного большинства, ...),
   - предложения голосовать альтернативы в определенном порядке,

- предложения рассматривать новые альтернативы (объединяя/разъединяя/дополняя имеющиеся);

3) и избирателями, и организатором голосования — комбинацией указанных форм манипулирования.

Пример 4.10 (манипулирования при голосовании: дело Афрания Декстра, Рим, II в. н.э.). Председатель Римского Сената *Плиний Младший* обсуждает в письме Аристону, крупному юристу, следующее дело.

Консул Афраний Декстр был найден убитым, и было не ясно, покончил ли он с собой (I), или же, повинуясь приказу хозяина, его убил слуга (II).

Мнения в Сенате разделились следующим образом:

группа A считала, что слугу можно *освободить*;
группа B высказывалась за его *ссылку*,
группа C высказывалась за его *казнь*.

В Сенате группа A, к которой принадлежал сам Плиний, составляла относительное большинство, а группа $B+C$ — простое.

Рассуждения Плиния.

1. Если поставить на голосование данные альтернативы и использовать правило *простого большинства* (т.е. потребовать, чтобы решение принималось $> 50\%$ голосов), то члены группы B скорее присоединятся к группе C, чем к группе A, и будет принято решение о *казни*.

2. Если

- альтернативы *казнь* и *ссылка* объединить в единую альтернативу *наказание*,
- и сначала выбирать между вариантами *наказание/свобода*,

то группы B и C могут объединиться и выбрать альтернативу *наказание*, а затем, если

- поставить на голосование альтернативы *казнь/ссылка*,

то группа A, скорее всего, объединится с B будет принято *ссылка*.

Поэтому Плиний, чтобы получить результат *свобода*, предложил

3. считать голоса за все 3 альтернативы *порознь*, аргументируя это тем, что альтернативы слишком различны, и использовать правило *относительного большинства*, что и было принято.

При подсчете голосов оказалось, что реализовался вариант (4): часть участников группы C перешла в группу B и было поддержано решение о *ссылке*.

Итак, имела место комбинация разных типов манипулирования:

- *со стороны организатора* — Плиний манипулировал *и множеством альтернатив, и процедурой голосования* (вместо процедуры простого большинства использовалась процедура относительного большинства);

- *со стороны избирателей* — часть участников группы C изменила своё мнение.

Рассмотренные схемы отражают системы принятия решений в уголовных судах:

европейскую континентальную — мера наказания или невиновность определяются *сразу*;

англо-американскую — *сначала* присяжные выносят решение о виновности/невиновности, и *потом* в первом случае судья назначает меру *наказания*.

Пример 4.11 (манипулирования при голосовании: принятие XVII-й поправки к Конституции США). В США до принятия этой поправки члены Сената назначались в штатах, но вначале XX в. обсуждалось две альтернативы:

- S (status quo) — сенаторы *назначаются* законодательными органами штатов;
- a 17-я поправка — сенаторы *избираются* голосованием населения штата.

В 1905 г. большинство в Сенате считало $a \succ S$ и Сенат в то время состоял из трех групп:

1) членов Демократической партии из южных штатов (наибольшее влияние в то время), в основном, поддерживающих поправку;
2) либеральных членов *Демократической партии из северных штатов* и либеральных членов Республиканской партии, которые также поддерживали поправку;
3) консервативных членов обоих партий, которые предпочитали оставить всё, как есть.

С целью предотвратить принятие альтернативы a, один из консерваторов предложил рассмотреть *третью альтернативу* b: принять 17-ю поправку с условием, что федеральное правительство будет иметь право контролировать проведение выборов в штатах.

Либералов были не против, но демократы из южных штатов, различными способами не допускавших темнокожее население к голосованию, возражали, и предпочтения стали выглядеть следующим образом:

Либералы обеих партий	$b \succ a \succ S$
Демократы из южных штатов	$a \succ S \succ b$
Консерваторы обеих партий	$S \succ b \succ a$

Т.е. первая группа раскололась, что привело к образованию классического цикла предпочтений.

Поскольку согласно принятым процедурам Сенат сначала должен голосовать поправки к законопроекту, выбор осуществлялся между альтернативами a и b. В результате:

1) сначала благодаря либералам и консерваторам была принята альтернатива b;
2) далее при сравнении альтернатив b и S была победила альтернатива S.

— т.е. желаемый для консерваторов результат достигался.

Такая тактика приносила успех до 1912 г., пока возросшие числом либералы не проголосовали на первом этапе против b, а на втором, при сравнении a с S, победила альтернатива за a.

Заметим, что в некоторых ситуациях манипулирования можно избежать. Если процедура голосования достаточно сложна или если предпочтения других избирателей неизвестны, то избиратель может и не знать, как манипулирование с его стороны может отразиться на результате с учетом того, что и другие избиратели могут манипулировать мнениями. Тогда избиратель может отказаться от манипулирования.

4.5 Задачи с решениями

Задача 4.1. *Приведите простой пример существования двух победителей Кондорсе.*

Решение. $V = \{1, 2\}$, $A = \{x_1, x_2, x_3\}$,

$P_1 : x_1 \succ x_2 \succ x_3$,
$P_2 : x_2 \succ x_1 \succ x_3$.

$$\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[d] & x_2 \arrow[dl] \\
x_3 &
\end{tikzcd}$$

Задача 4.2. *Покажите, что при нечетном числе выборщиков:*

1) *бинарное отношение, соответствующее мажоритарному графу, связно;*
2) *если победитель Кондорсе существует, то он единственный.*

Решение.

1. Покажем, что любые две вершины x_i и x_j мажоритарного графа соединены дугой, направленной в какую-либо сторону.

Пусть число выборщиков $2n+1$, и вершины мажоритарного графа x_i и x_j дугой не соединены. Это означает, что более n голосующих считают, что $x_i \succ x_j$, и не более n — что $x_j \succ x_i$, т.е. всего участников не более $n+n=2n$. Противоречие.

2. Единственность победителя Кондорсе доказывается от противного.

Задача 4.3. *Постройте мажоритарный граф при указанных предпочтениях голосующих* $V = \{1, 2, 3\}$ *относительно вариантов* $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

$$\begin{array}{c} P_1: x_1 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_3, \\ P_2: x_2 \succ x_4 \succ x_1 \succ x_3, \\ P_3: x_1 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_4 \end{array}$$

и определите победителя по Кондорсе и по Борда.

Решение. Составляем матрицу голосования $m_{ij} = \#(x_i \succ x_j)$ с баллами Борда по диагонали:

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	7	2	3	2
x_2	1	6	2	3
x_3	0	1	2	1
x_4	1	0	2	3

Получаем (все предпочтения $2:1$ или $3:0$):

$$
\begin{array}{lll}
x_1 \succ x_2 & x_2 \succ x_3 & x_4 \succ x_3 \\
x_1 \succ x_3 & x_2 \succ x_4 & \\
x_1 \succ x_4 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& x_1 \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
x_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & x_4 \arrow[dl] \\
& x_3 &
\end{tikzcd}
$$

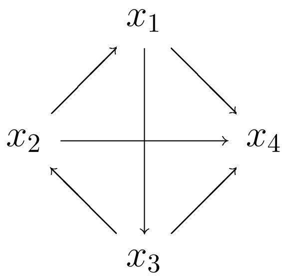
Недоминирумый вариант x_1 — победитель Кондорсе, он же победитель по Борда.

<u>Задача</u> 4.4. *Построить мажоритарный граф при предпочтениях из предыдущей задачи, если участник* 1 *изменил свои предпочтения на*

$$P_1' : \, x_3 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_4,$$

а предпочтения остальных участников остались неизменными. Есть ли здесь победитель Кондорсе? по Борда?

Решение.



Недоминируемых вариантов нет $\Rightarrow$ нет победителя Кондорсе.

Определяем победителя по Борда.

Предпочтения голосующих:

Баллы	3	2	1	0
P_1'	x_3	x_1	x_2	x_4
P_2	x_2	x_4	x_1	x_3
P_3	x_1	x_3	x_2	x_4

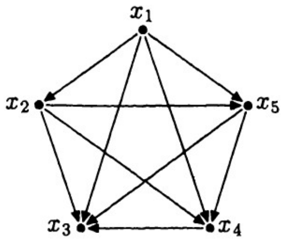
Баллы Борда: $B(x_1) = 6$ — победитель, т.к. $B(x_2) = B(x_3) = 5$, $B(x_4) = 2$.

Задача 4.5. *Построить мажоритарный граф при предпочтениях голосующих* $V = \{1, 2, 3\}$ *относительно вариантов* $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$$P_1 : x_1 \succ x_2 \succ x_5 \succ x_4 \succ x_3,$$
$$P_2 : x_3 \succ x_5 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_4,$$
$$P_3 : x_2 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_5 \succ x_3$$

и определить победителя Кондорсе.

Решение. победитель — x_1

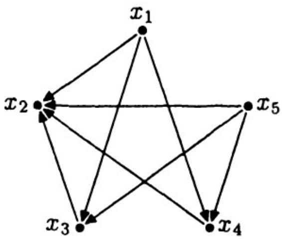


Задача 4.6. *Построить мажоритарный граф при предпочтениях голосующих* $V = \{1, 2, 3, 4\}$ *относительно кандидатов* $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$$P_1 : x_5 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_2,$$
$$P_2 : x_1 \succ x_5 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_2,$$
$$P_3 : x_4 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_5 \succ x_3,$$
$$P_4 : x_5 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_2$$

и определить победителя Кондорсе.

Решение.



Имеем два победителя Кондорсе: x_1 и x_5.

Задача 4.7. *Пусть три друга выбирают место отдыха из вариантов:* $A = \{$ *Сочи (С), Туапсе (Т), Валдай (В), Подмосковье (П)* $\}$ *и их предпочтения имеют вид:*

$$P_1 : С \succ Т \succ В \succ П,$$
$$P_2 : С \succ Т \succ В \succ П,$$
$$P_3 : Т \succ С \succ П \succ В.$$

Предпочтения их жён имеют вид:

$$
\begin{aligned}
P'_1 &: C \succ T \succ B \succ П,\\
P'_2 &: T \succ C \succ B \succ П,\\
P'_3 &: T \succ C \succ B \succ П.
\end{aligned}
$$

1. Пусть коллективное решение P содержит предпочтение $T \succ_P B$.

Если правило построения коллективного решения локально, то содержится ли это предпочтение в коллективном решении по профилю P'?

2. Пусть правило построения коллективного решения удовлетворяет условию единогласия.

Какие предпочтения обязано содержать коллективное решение по профилям

$$\overline{P} = (P_1, P_2, P_3)? \qquad \overline{P'} = (P'_1, P'_2, P'_3)?$$

3. Пусть коллективное решение содержит предпочтение $C \succ_P T$, если первый участник имеет такое предпочтение.

Является ли он диктатором в смысле Эрроу?

Решение. 1. Заметим, что

$$V_{\overline{P}}(\mathrm{T} \succ \mathrm{B}) = V_{\overline{P'}}(\mathrm{T} \succ \mathrm{B}) = \{1, 2, 3\}.$$

Поэтому, раз правило принятия решения локально и если $\mathrm{T} \succ_P \mathrm{B}$, то $\mathrm{T} \succ_{P'} \mathrm{B}$.

2. И в том и в другом случае в коллективном решении должны содержаться те пары (a, b), для которых

$$V_{\overline{P}}(a \succ b) = V_{\overline{P'}}(a \succ b) = \{1, 2, 3\}.$$

Это С $\succ_P$ В, С $\succ_P$ П, Т $\succ_P$ В, Т $\succ_P$ П. Коллективное решение по профилю P' должны содержаться те же пары и, кроме того, В $\succ_P$ П.

3. Не обязательно, поскольку участник является диктатором в смысле Эрроу, если он может навязать свое мнение коллективу по любой паре альтернатив, а здесь он навязывает свое решение только по паре (С, Т).

Задача 4.8. *Рассмотрим следующее правило построения коллективного решения по индивидуальным предпочтениям n участников: пара (x, y) входит в коллективное решение, если она принадлежит —*

1) ровно $n/3$;
2) ровно $n/2 + 1$;
3) более $n/2$;
4) не менее $n/2$;
5) не менее $n - 1$;
6) n индивидуальных предпочтений.

① *Является ли это правило локальным?*
② *Каким аксиомам оно удовлетворяет?*
③ *Приведите (если возможно) пример, когда это правило приводит к циклам в коллективном решении.*

Решение. ① *Аксиоме локальности* (и *нейтральности*) удовлетворяют все правила, т.к. решение о предпочтительности x по отношению к y зависит только от количества таких участников.

② *Аксиоме единогласия* удовлетворяют только те из правил, для которых пара (x, y) принадлежит коллективному решению, если она принадлежит всем индивидуальным предпочтениям. В данном случае это пп. 3–6: например, правило единогласия $\forall\, i \in V : x \succ_i y \;\Rightarrow\; x \succ_i y$ принадлежит (3).

Аксиоме ненавязанности удовлетворяют все приведенные правила (решение зависит только от мнений участников).

Аксиоме монотонности удовлетворяют правила 3–6.

③ Примеры, в которых появляются циклы, можно построить для всех правил, кроме последнего.

Приведем пример для п. 5) — не менее $n-1$ индивидуальных предпочтений:

Пусть имеется n альтернатив, т.е. $A = \{\, x_1, \ldots, x_n \,\}$, а индивидуальные предпочтения имеют «циклический» вид

$$P_i : x_i > x_{i+1} > \ldots > x_n > x_1 > x_2 > \ldots > x_{i-1}, \;\; i = \overline{1, n}.$$

Тогда $V_{\overline{P}}(x_i > x_{i+1}) = V \setminus \{i+1\}$, поэтому в коллективном решении P имеем

$$x_1 > x_2 > \ldots > x_{n-1} > x_n,$$

но поскольку $V_{\overline{P}}(x_n > x_1) = V \setminus \{1\}$, то $x_n > x_1$ и получаем цикл.

Задача 4.9. *Пусть* $A = \{\, a_1, a_2, a_3 \,\}$, $V = \{\, 1, 2, 3 \,\}$ *и коллективное решение строится следующим образом:*

$$\forall i \in V : \; a_i \succ x \; = \; a_i \succ_i x \quad \text{для всех } x \in A.$$

1. *Является ли это правило локальным?*
2. *Каким аксиомам оно удовлетворяет?*

Решение. 1. Данное правило будет локальным, поскольку решение о том, какая из альтернатив, a_i или a_j предпочтительнее, зависит только от предпочтений между a_i и a_j участников i и j.

2. Нетрудно проверить, что данное правило удовлетворяет всем аксиомам 1–5.

Но больше никаким разумным свойствам P удовлетворять не будет: вопрос о принадлежности P пар
(a_1, a_2) и (a_1, a_3) зависит только от участника 1,
(a_2, a_1) и (a_2, a_3) — только от участника 2 и
(a_3, a_1) и (a_3, a_2) — только от участника 3,

т.е. все эти шесть пар могут принадлежать или не принадлежать P в любых сочетаниях.

Задача 4.10. *Пусть семья из трех человек (т.е. $V = \{1, 2, 3\}$) собирается купить автомобиль.*
В качестве альтернатив рассматриваются элементы множества
$A = \{$ *Фольксваген*(W), *Рено*(R), *Пежо*$(P)\}$.

$$P_1 : W > P > R,$$
$$P_2 : P > W > R,$$
$$P_3 : R > W > P.$$

Пусть коллективное решение, которое строится по локальному правилу, имеет вид

$$P : W > R > P.$$

Каким будет коллективное решение, если исключить из рассмотрения альтернативу W?

Решение. Т.к. как правило принятия решения локально, то отношение участников голосования к альтернативам R и P не зависит от их отношения к W и, в частности, от наличия или отсутствия W.

Поэтому при отсутствии W решение о том, что предпочтительнее, P или R, будет принято то же, что и при наличии W, т.е. $R > P$.

Задача 4.11. *Покажите, что олигархическое правило (выделяется некоторая группа участников ω, коллективное решение представляет собой единогласное мнение всех членов этой группы, а мнение всех остальных членов коллектива не учитывается):*

1) всегда строит частичные порядки;

2) удовлетворяет аксиомам Эрроу;

3) не всегда строит слабые порядки (т.е. частичные порядки вида $m_1\mathbf{1} \oplus \ldots \oplus m_h\mathbf{1}$).

Решение. 1. Олигархическое правило можно записать как $P = P_1 \cap {}_2 \cap \ldots \cap {}_k$, если $P_1, \ldots, P_k$ — предпочтения «олигархов».
Поскольку ${}_i$ — строгие линейные порядки, то и их пересечение является некоторым нерефлексивным частичным порядком.

2. Олигархическое правило локально, т.к. решение $x \overset{?}{\succ}_P y$ зависит только от предпочтений олигархов $x \succ_i y$, $i = \overline{1,k}$.
Остальные аксиомы проверяются непосредственно.

3. Покажем, что коллективное решение по олигархическому правилу может не быть слабым порядком.

Пусть $A = \{a, b, \}$, $V = \{1, 2, 3\} = \omega$ предпочтения олигархов (всех голосующих) есть

$$P_1 : a > b > c, \quad P_2 : a > c > b, \quad P_3 : c > a > b.$$

Коллективное решение: $a \succ b$, $a \not\succ c$, $b \not\succ c$ — не есть слабый порядок.

Глава 5

Линейные рекуррентные последовательности

5.1 Основные понятия и определения

Определение 5.1. Числовая последовательность $\overline{a} = \{a_i\}_{i \geqslant 0} = (a_0, a_1, \ldots)$, для которой при $n \geqslant k \geqslant 1$ выполняется *линейное рекуррентное соотношение порядка (л.р.с.)* k (из $k+1$ слагаемых)

$$C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + \ldots + C_{k-1} a_{n-k+1} + C_k a_{n-k} = C,$$

где $C_0 = 1$, $C_1, \ldots, C_{k-1}$, $C_k \neq 0$, C — некоторые константы, называется *линейной рекуррентной последовательностью порядка (л.р.п.)* k, причём в случае $C = 0$ говорят об *однородных соотношении* и *последовательности*.

Л.р.п. порядка k однозначно задаётся своим рекуррентным соотношением и совокупностью из k её последовательных элементов, которые называют *начальными условиями*; обычно это элементы $a_0, \ldots, a_{k-1}$.

Поставим в соответствие вышеприведённому однородному л.р.с. $(*)$ *характеристический многочлен*

$$P(x) = x^k + C_1 x^{k-1} + \ldots + C_{k-1} x + C_k.$$

Пример 5.1. Последовательность Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, …, у которой $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ при $n \geqslant 2$, является однородной линейной рекуррентной последовательностью 2-го порядка, задаваемую соотношением $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$ и начальными условиями $a_0 = a_1 = 1$.

Характеристическим многочленом для последовательности Фибоначчи будет $P(x) = x^2 - x - 1$.

Рассмотрим множество $\mathcal{L} = \{\overline{a}\}$ всех линейных рекуррентных последовательностей (над полем $\mathbb{R}$) и введем на нём операции

1) поэлементного *суммирования* $\overline{a} + \overline{b}$;
2) *умножения* всех элементов на константу из $\mathbb{R}$: $const \cdot \overline{a}$.

Тогда $\mathcal{L}$ превращается в бесконечномерное линейное пространство над $\mathbb{R}$ относительно введенных операций.

Утверждение 5.1. *Последовательности из $\mathcal{L}$, для которых выполняется некоторое линейное рекуррентное соотношение порядка k, образуют k-мерное подпространство L подпространства $\mathcal{L}$.*

Доказательство. Если $\overline{a}, \overline{b} \in L \subset \mathcal{L}$ удовлетворяют л.р.с. порядка k, то ему удовлетворяет и $\alpha\overline{a} + \beta\overline{b} \in L$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Равенство $\dim L = k$ очевидно. □

Теорема 5.1. *Последовательности $\overline{a}^1, \ldots, \overline{a}^k$ образуют базис k-мерного подпространства L линейного про-*

странства $\mathcal{L}$, если и только если

$$\begin{vmatrix} a_0^1 & a_0^2 & \dots & a_0^k \\ a_1^1 & a_0^2 & \dots & a_1^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k-1}^1 & a_{k-1}^2 & \dots & a_{k-1}^k \end{vmatrix} \neq 0.$$

5.2 Решение однородных л.р.с.

Утверждение 5.2. *Если заданы однородное л.р.с.*

$$a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \ldots + C_k a_{n-k} = 0$$

и начальные условия $a_0, \ldots, a_{k-1}$, то единственная удовлетворяющая им л.р.п. имеет вид

$$\overline{a} = \beta_1 \overline{a}^1 + \ldots + \beta_k \overline{a}^k,$$

где $\overline{a}^1, \ldots, \overline{a}^k$ — некоторый базис линейного под пространства решений L, а коэффициенты $\beta_1, \ldots, \beta_k$ однозначно определяются СЛАУ порядка k

$$\begin{cases} a_0^1\beta_1 + a_0^2\beta_2 + \ldots + & a_0^k\beta_k = a_0, \\ a_1^1\beta_1 + a_1^2\beta_2 + \ldots + & a_1^k\beta_k = a_1, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \ldots \quad \ldots \\ a_{k-1}^1\beta_1 + a_{k-1}^2\beta_2 + \ldots + & a_{k-1}^k\beta_k = a_{k-1}. \end{cases}$$

Т.о. задача нахождения л.р.п. сводится к нахождению базиса линейного подпространства L, образованного множеством всех последовательностей, удовлетворяющих данному л.р.с. и решению приведённой СЛАУ.

Базисные последовательности строят с помощью корней характеристического многочлена $P(x)$.

Случай простых корней.

Лемма 5.1 (о корнях характеристического многочлена). *Пусть задано л.р.с. порядка k*

$$a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \ldots + C_k a_{n-k} = 0. \qquad (*)$$

Тогда если λ — корень его характеристического многочлена

$$P(x) = x^k + C_1 x^{k-1} + \ldots + C_{k-1} x + C_k, \quad C_k \neq 0,$$

то последовательность $\widehat{\lambda} = (1, \lambda, \lambda^2, \ldots)$ удовлетворяет соотношению $(*)$.

Доказательство. Подставим члены последовательности $\widehat{\lambda}$ в $(*)$: поскольку $C_k \neq 0$ влечёт $\lambda \neq 0$, получим

$$\lambda^n + \ldots + C_k \lambda^{n-k} = \lambda^{n-k} \left(\lambda^k + \ldots + C_k \right) = 0. \qquad \square$$

Будем искать базис подпространства L в виде набора последовательностей, образованных степенями корней характеристического многочлена $P(x)$.

Теорема 5.2. *Пусть характеристический многочлен $P(x)$ однородного л.р.с. $(*)$ порядка k имеет k различных корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.*

Тогда последовательности $\widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_k$ образуют базис k-мерного подпространства решений L.

Доказательство. По лемме о корнях характеристического многочлена, все последовательности $\widehat{\lambda}_i$ удовлетворяют соотношению $(*)$, т.е. лежат в пространстве L.

Определитель, имеющий столбцами первые k элементов последовательностей $\widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_k$, является определителем Вандермонда

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(\lambda_j - \lambda_i)$$

Поскольку все корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ различны, то $\prod_{i<j}(\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$, откуда следует утверждение теоремы. Поэтому общее решение линейного однородного рекуррентного соотношения $(*)$ выглядит следующим образом:

$$\overline{a} = \beta_1\widehat{\lambda}_1 + \ldots + \beta_k\widehat{\lambda}_k. \qquad \square$$

Утверждение 5.3. *Если некоторый корень λ многочлена $P(x)$ имеет кратность m, ему будут соответствовать следующие базисные последовательности*

$$\widehat{\lambda},\ n\widehat{\lambda},\ \ldots,\ n^{m-1}\widehat{\lambda},$$

или последовательность $\left(1 + n + \ldots + n^{m-1}\right)\widehat{\lambda}$.

Уравнение $P(x) = 0$ назовём *характеристическим* для данного характеристического многочлена $P(x)$ соответствующего л.р.с.

Пример 5.2. 1. Найти л.р.п., удовлетворяющую о.л.р.с.

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение данного соотношения есть

$$P(x) = x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Оно имеет два простых вещественных корня $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ и решение данного соотношения в общем виде есть

$$a_n = \beta_1 + \beta_2 \cdot 3^n.$$

2. Найти л.р.п., удовлетворяющую л.р.с.

$$a_{n+3} + 3a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение данного соотношения:

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3 = 0.$$

Т.о. данное характеристическое уравнение имеет один вещественный корень $\lambda = -1$ кратности 3, и решение данного л.о.р.с. в общем виде есть

$$a_n = (-1)^n \left(\beta_1 + \beta_2 n + \beta_3 n^2\right).$$

Из доказанного ранее следует, что если заданы начальные условия $a_0, \ldots, a_{k-1}$ о.л.р.с. порядка k

$$a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \ldots + C_k a_{n-k} = 0,$$

то коэффициенты $\beta_1, \ldots, \beta$ в общем решении

$$\overline{a} = \beta_1 \widehat{\lambda}_1 + \ldots + \beta_k \widehat{\lambda}_k$$

находят из СЛАУ k-го порядка

$$\begin{cases} \beta_1 & + & \ldots + & \beta_k & = a_0 \\ \beta_1 \lambda_1 & + & \ldots + & \beta_k \lambda_k & = a_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_1 \lambda_1^{k-1} & + & \ldots + & \beta_k \lambda_k^{k-1} & = a_{k-1} \end{cases}$$

Пример 5.3. 1. Ранее было найдено, что л.р.п.

$$a_n = \beta_1 + \beta_2 \cdot 3^n$$

при любых β_1, β_2 удовлетворяет л.р.с.

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0.$$

Найти конкретную о.л.р.п., если $a_1 = 10$, $a_2 = 16$.

Решение. Для начала найдём a_0 (полагая $n = 0$):

$$16 - 4 \cdot 10 + 3a_0 = 0 \Rightarrow a_0 = (40 - 16)/3 = 8.$$

Далее:

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 &= 8 \\ \beta_1 + 3\beta_2 &= 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 7 \\ \beta_2 = 1 \end{cases}$$

т.е. искомая л.р.п. есть $a_n = 7 + 3^n$.

2. Ранее было найдено, что л.р.п. $a_n = (-1)^n \left(\beta_1 + \beta_2 n + \beta_3 n^2\right)$ при любых β_1, β_2, β_3 удовлетворяет л.р.с.

$$a_{n+3} + 3a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0.$$

Найти конкретную такую л.р.п., если $a_0 = 0, a_1 = 2$, $a_2 = -10$.

Решение.

$$\begin{cases} \beta_1 & & & = 0 \\ -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 & = 2 \\ \beta_1 & +2\beta_2 & +4\beta_3 & = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 1 \\ \beta_3 = -3 \end{cases}$$

т.е. искомая л.р.п. есть $a_n = (-1)^n(n^2 - 3n)$.

Случай комплексных корней. Если характеристический многочлен $P(x)$ имеет пару комплексных корней

$$\lambda_1 = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \lambda_2 = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

то соответствующая пара базисных комплексных последовательностей имеет вид

$$\widehat{\lambda}_1 = \{ \rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \}_{n\geqslant 0},$$
$$\widehat{\lambda}_2 = \{ \rho^n(\cos n\varphi - i \sin n\varphi) \}_{n\geqslant 0}.$$

Если к системе базисных векторов линейного векторного пространства применить невырожденное линейное преобразование, то преобразованная система векторов также будет базисной.

После применения к пространству L некоторого преобразование поворота, вместо пары комплексных последовательностей $(\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2)$ получим пару действительных последовательностей

$$\widehat{\lambda}'_1 = \{ \rho^n \cos n\varphi \}_{n\geqslant 0}, \qquad \widehat{\lambda}'_2 = \{ \rho^n \sin n\varphi \}_{n\geqslant 0}.$$

То же самое можно проделать и с последовательностями, соответствующими другим парам комплексно сопряженных корней.

Пример 5.4. Найти л.р.п., удовлетворяющую л.р.с.

$$a_{n+2} - 2\cos\alpha a_{n+1} + a_n = 0, \;\; a_1 = \cos\alpha, \; a_2 = \cos 2\alpha.$$

Решение. Для начала найдём a_0[1]:

$$\cos 2\alpha - 2\cos^2\alpha a_1 + a_0 = 0 \;\Rightarrow\; a_0 = 1.$$

Характеристическим уравнением для заданной последовательности является

$$x^2 - 2x\cos\alpha + 1 = 0,$$

[1] вспоминаем: $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

которое имеет два комплексно сопряжённых корня

$$\lambda_1 = \cos\alpha - i\sin\alpha, \qquad \lambda_2 = \cos\alpha + i\sin\alpha.$$

Переходя в действительную область, получим последовательности

$$\widehat{\lambda}_1' = \{\cos n\alpha\}_{n\geqslant 0}, \qquad \widehat{\lambda}_2' = \{\sin n\alpha\}_{n\geqslant 0},$$

т.е. общее решение данного л.о.р.с. записывается в виде

$$a_n = \beta_1 \cos n\alpha + \beta_2 \sin n\alpha.$$

Из начальных условий получаем

$$\left\{\begin{array}{ll}\beta_1 & = 1,\\ \beta_1\cos\alpha + \beta_2\sin\alpha & = \cos\alpha,\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}\beta_1 = 1,\\ \beta_2 = 0,\end{array}\right.$$

т.е. искомая л.р.п. есть $a_n = \cos n\alpha$.

Применение л.р.с. — метод Прони аппроксимации сигнала суммой экспонент в задачах ЦОС.

5.3 Решение неоднородных л.р.с.

В случае $C \neq 0$ записанное в общем виде неоднородное линейное рекуррентное соотношение

$$C_0a_n + C_1a_{n-1} + C_2a_{n-2} + \ldots + C_ka_{n-k} = C$$

задаёт *неоднородную л.р.п.*

Теорема 5.3. *Общее решение $\overline{a}$ неоднородного л.р.с. представляется в виде суммы некоторого его частного решения $\overline{a}'$ и общего решения $\overline{a}^0$ соответствующего однородного соотношения: $\overline{a} = \overline{a}^0 + \overline{a}'$.*

Доказательство. Пусть $\overline{a}'$ и $\overline{a}''$ — два частных решения неоднородного соотношения. Очевидно последовательность $\overline{a}' \pm \overline{a}''$ удовлетворяет соответствующему однородному соотношению. □

Частное решение неоднородного р.с. можно, например, искать в виде постоянной последовательности $\overline{a}' = (a, a, \ldots)$.
Поскольку в этом случае $C_0 a + C_1 a + \ldots + C_k a = C$, то

1) при условии $C_0 + C_1 + \ldots + C_k \neq 0$ —

$$a = \frac{C}{C_0 + C_1 + \ldots + C_k}.$$

2) Если $\sum\limits_{i=0}^{k} C_i = 0$, но $\sum\limits_{i=1}^{k} iC_i \neq 0$, то существует частное решение вида $\overline{a}' = \{na\}_{n \geqslant 0}$, где константа a находится из уравнения

$$C_0 \cdot a \cdot n + C_1 \cdot a \cdot (n-1) + \ldots + C_k \cdot a \cdot (n-k) = C \quad (\star)$$

(результат подстановки $a_n = an$ в н.л.р.с.).

Поскольку $\sum\limits_{i=0}^{k} C_i = 0$, то $C_0 = -C_1 - C_2 - \ldots - C_k$.
Подставив это значение в $(\star)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{C}{a} &= C_0 \cdot n + C_1 \cdot (n-1) + \ldots + C_k \cdot (n-k) = \\ &= -C_1 n - C_2 n - \ldots - C_k n + (C_1 n - C_1) + \ldots \\ &\qquad \ldots + (C_k n - C_k k) = -\sum_{i=1}^{k} iC_i. \end{aligned}$$

Отсюда $a = -\dfrac{C}{\sum\limits_{i=1}^{k} iC_i}$ и частное решение неоднородного линейного рекуррентного соотношения в этом случае имеет вид
$$a'_n = na.$$

Пример 5.5. Решить рекуррентное соотношение
$$a_{n+3} - 7a_{n+1} + 6a_n = 20,\ a_0 = 2,\ a_1 = -6,\ a_2 = 3.$$

Решение. Характеристическое уравнение данного неоднородного л.р.с. есть:
$$x^3 - 7x + 6 = 0. \qquad (*)$$

Для его решения переберём делители свободного члена: $D(6) = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

1. Убеждаемся, что $\lambda_1 = 1$ — корень $(*)$.
Далее имеем $x^3 - 7x + 6 = (x+1)(x^2+x-6)$ и корни последнего квадратного трёхчлена суть $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -3$.

Следовательно, общее решение однородного л.р.с.
$$a_{n+3} - 7a_{n+1} + 6a_n = 0$$
есть $a_n^0 = \beta_1 + \beta_2 2^n + \beta_3(-3)^n$.

2. Найдём частное решение $\overline{a}'$ исходного неоднородного л.р.с.
Имеем: сумма его коэффициентов $1 - 7 + 6 = 0$, однако
$$\sum_{i=1}^{k} iC_i = 2 \cdot (-7) + 3 \cdot 6 = -14 + 18 = 4 \neq 0,$$
и поэтому частное решение исходного неоднородного л.р.с. —

$$a'_n = -\frac{20n}{4} = -5n,$$

и общее решение $a_n = \beta_1 + \beta_2 2^n + \beta_3(-3)^n - 5n$.

3. Определим по начальным условиям множители β_1, β_2, β_3:

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 & = a_0 = 2, \\ \beta_1 + 2\beta_2 - 3\beta_3 - 5 & = a_1 = -6, \\ \beta_1 + 4\beta_2 + 9\beta_3 - 10 & = a_2 = 3, \end{cases}$$

Вычитаем из 2-го уравнения 1-е: $\beta_2 - 4\beta_3 = -3$, т.е. $\beta_2 = 4\beta_3 - 3$, что влечёт

$$\begin{cases} \beta_1 + 8\beta_3 - 6 - 3\beta_3 & = -1, \\ \beta_1 + 16\beta_3 - 12 + 9\beta_3 & = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 + 5\beta_3 & = 5, \\ \beta_1 + 25\beta_3 & = 25 \end{cases}$$

Вычитая из 2-го уравнения 1-е: $20\beta_3 = 20 \Rightarrow \beta_3 = 1$ и $\beta_1 = 0$ и $\beta_2 = 1$.

Ответ: $a_n = 2^n + (-3)^n - 5n$.

Решение неоднородных линейных рекуррентных соотношений со «стандартной» правой частью — полином или экспонента от n — рассмотрено на примерах в конце следующего раздела.

5.4 Задачи с решениями

Задача 5.1. *Найти решение о.л.р.с.*

$$a_{n+2} + 3a_n = 0, \; a_0 = 1, \; a_1 = 2\sqrt{3}.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$x^2 + 3 = 0$$

имеет комплексно сопряжённые корни

$$\lambda_1 = -i\sqrt{3}, \quad \lambda_1 = i\sqrt{3}.$$

Им соответствует общее решение

$$a_n = \beta_1 3^{\frac{n}{2}} \cos\frac{\pi n}{2} + \beta_2 3^{\frac{n}{2}} \sin\frac{\pi n}{2} = \\ = 3^{\frac{n}{2}} \left(\beta_1 \cos\frac{\pi n}{2} + \beta_2 \sin\frac{\pi n}{2}\right).$$

Найдём β_1, β_2:

$$\begin{cases} \beta_1 & = 1, \\ \sqrt{3}\beta_2 & = 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \beta_2 = 2.$$

Ответ: $a_n = 3^{\frac{n}{2}} \left(\cos\frac{\pi n}{2} + 2\sin\frac{\pi n}{2}\right)$

Задача 5.2. *Найти общее решение о.л.р.с.*

$$a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

имеет один вещественный корень $\lambda = -1$ кратности 2. Т.о. решение есть

$$a_n = (-1)^n (\beta_1 + \beta_2 n)$$

Задача 5.3. *Найти общее решение о.л.р.с.*

$$a_{n+3} + 10a_{n+2} + 32a_{n+1} + 32a_n = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение есть

$$P(x) = x^3 + 10x^2 + 32x + 32 = 0.$$

Пробуем подобрать корень из делителей $32: \pm 1, \pm 2, \pm 4, \ldots, \pm 32.$

Имеем $P(\pm 1) = \pm 1 + 10 \pm 32 + 32 \neq 0,$ $P(\pm 2) = \pm 8 + 40 + \pm 64 + 32$ и $P(-2) = 0.$

Далее —

$$x^3+10x^2+32x+32 = (x+2)(x^2+8x+16) = (x+2)(x+4)^2,$$

т.е. $P(x)$ имеет корень -2 кратности 1 и -4 кратности 2.

Поэтому решение есть

$$a_n = \beta_1(-2)^n + (\beta_2 + \beta_3 n)(-4)^n = \\ = (-2)^n \left(\beta_1 + (\beta_2 + \beta_3 n)2^n\right).$$

Задача 5.4. *Найти общий член рекуррентной последовательности, удовлетворяющей соотношению*

$$a_{n+2} = 6a_{n+1} - 8a_n + 6n + 1, \quad a_0 = 4, \, a_1 = 5.$$

Решение. Представим соотношение в виде

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 8a_n = 6n + 1.$$

Характеристическое уравнение есть

$$P(x) = x^2 - 6x + 8 = 0,$$

его корни суть $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$ и общее решение соответствующего о.л.р.с. есть

$$a_n^0 = \beta_1 2^n + \beta_2 4^n.$$

Поскольку справа — полином 1-й степени, частное решение будем искать в виде $a_n' = \alpha_1 n + \alpha_0$.

Подставляя a_n' в исходное соотношение, получим

$$\begin{aligned}(\alpha_1(n+2)+\alpha_0)-6\,(\alpha_1(n+1)+\alpha_0)+8\,(\alpha_1 n+\alpha_0) = \\ = \alpha_1 n + 2\alpha_1 + \alpha_0 - 6\alpha_1 n - 6\alpha_1 - 6\alpha_0 + 8\alpha_1 n + 8\alpha_0 = \\ = 3\alpha_1 n + (2\alpha_1 + \alpha_0 - \alpha_1 - 6\alpha_0 + 8\alpha_0) = 6n+1,\end{aligned}$$

Откуда $\alpha_1 = 2$, $-4\alpha_1 + 3\alpha_0 = -8 + 3\alpha_0 = 1 \Rightarrow \alpha_0 = 3$ и $a_n' = 2n+3$.

Получено общее решение $a_n = \beta_1 2^n + \beta_2 4^n + 2n + 3$.

Найдём коэффициенты β_1, β_2:

$$\left\{\begin{array}{llll}\beta_1 & +\beta_2 & +3 & = 4\\ 2\beta_1 & +4\beta_2 & +5 & = 5\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lll}\beta_1 & +\beta_2 & = 1\\ 2\beta_1 & +4\beta_2 & = 0\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\beta_1 = 2\\ \beta_2 = -1\end{array}\right.$$

Ответ: $a_n = 2^{n+1} - 4^n + 2n + 3$.

Задача 5.5. *Решить рекуррентное соотношение*

$a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n = 4n, \quad a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 4$

(с полиномиальной правой частью).

Решение. Характеристическое уравнение есть

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

Пробуем подобрать корень из $D(6): \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6.$ Находим, что $x_1 = 1$ — корень,

$$P(x) = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$$

и $x_2 = 2$, также корни $x_3 = 3$ характеристического уравнения.

Т.о. общее решение однородного соотношения есть

$$a_n^0 = \beta_1 + \beta_2 2^n + \beta_3 3^n.$$

Частное решение ищем в виде $a_n' = n(\alpha_1 n + \alpha_2)$.

Подставляя его в исходное соотношение

$$\alpha_1(n+3)^2 + \alpha_2(n+3) - 6\big[\alpha_1(n+2)^2 + \alpha_2(n+2)\big] + \\ + 11\big[\alpha_1(n+1)^2 + \alpha_2(n+1)\big] - 6[\alpha_1 n^2 + \alpha_2 n] = 4n$$

Приравниваем коэффициенты перед степенями n:

$$n^2 : \alpha_1(1 - 6 + 11 - 6) = \alpha_1 \cdot 0 = 0;$$

$$n^1 : 6\alpha_1 + \alpha_2 - 24\alpha_1 - 6\alpha_2 + 22\alpha_1 + 11\alpha_2 - 6\alpha_2 = \\ = 4\alpha_1 = 4n, \quad \text{откуда } \alpha_1 = 1;$$

$$1 : 9\alpha_1 + 3\alpha_2 - 24\alpha_1 - 12\alpha_2 + 11\alpha_1 + 11\alpha_2 = \\ = -4\alpha_1 + 2\alpha_2, \quad \text{откуда } \alpha_2 = 2.$$

Т.е. $a_n' = n^2 + 2n$.

Определяем теперь константы β_1 и β_2 исходя из Н.У:

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + 0 = 1, \\ \beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 + 3 = 3, \\ \beta_1 + 4\beta_2 + 9\beta_3 + 8 = 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 1, \\ \beta_2 = 1, \\ \beta_3 = -1. \end{cases}$$

Окончательно имеем $a_n = 1 + 2^n - 3^n + n(n+2)$.

Задача 5.6. *Решить рекуррентное соотношение (с линейной правой частью)*

$$a_{n+1} - a_n = n, \qquad a_1 = 1.$$

Решение. Очевидно $a_0 = 1$.

Характеристическое уравнение для данного соотношения есть $x - 1 = 0$ и оно имеет корень $x = 1$, откуда общее решение однородного соотношения есть $a_n^0 = \beta$.

Частное решение ищем в виде $a_n' = n(\alpha_1 n + \alpha_2)$. Подставляя его в исходное соотношение, имеем

$$\alpha_1(n+1)^2 + \alpha_2(n+1) - \alpha_1 n^2 - \alpha_2 n = n,$$

откуда $\alpha_1 = 1/2$ и $\alpha_1 = -1/2$, т.е. $a_n' = (n^2 - n)/2$ и $a_n = \beta + (n^2 - n)/2$.

Из начальных условий: $a_0 = \beta = 1$ и окончательно — $a_n = 1 + C_n^2$.

Задача 5.7. *Решить рекуррентное соотношение (с экспоненциальной правой частью)*

$$a_{n+2} + 2a_{n+1} - 8a_n = 27 \cdot 5^n, \quad a_1 = -9, a_2 = 45.$$

Решение. Определяем, что $(n = 0)$:

$$45 - 2 \cdot 9 - 8a_0 = 27 \Rightarrow a_0 = 0.$$

Характеристическое уравнение для данного соотношения есть $x^2 + 2x - 8 = 0$ и оно имеет корни $\lambda_1 = -4$ и $\lambda_2 = 2$, откуда общее решение однородного соотношения есть $a_n^0 = \beta_1(-4)^n + \beta_2 \cdot 2^n$.

Частное решение ищем в виде $a_n' = \alpha \cdot 5^n$.

Подставляя его в исходное соотношение, имеем

$$\alpha \cdot 25 \cdot 5^n + 2\alpha \cdot 5 \cdot 5^n - 8 \cdot 5^n = 27 \cdot 5^n,$$

откуда $\alpha(35-8)=27$ и $\alpha = 1$, т.е.
$a_n = \beta_1(-4)^n + \beta_2 \cdot 2^n + 5^n$.

Из начальных условий находим, что $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = -3$ и окончательно — $a_n = 2\cdot(-4)^n - 3\cdot 2^n + 5^n$.

Задача 5.8. *Решить систему линейных рекуррентных соотношений*

$$\begin{cases} a_{n+1} &= -b_n + n, \\ b_{n+1} &= a_n + 2b_n + 1, \\ a_0 &= 1,\ b_0 = -2. \end{cases}$$

Решение. Сразу находим, что $b_1 = -2$.
Далее, выражая из второго уравнения $b_{n+2} = a_{n+1} + 2b_{n+1} + 1$ и подставляя туда $a_{n+1} = -b_n + n$, получаем л.р.с. относительно b_n:

$$b_{n+2} - 2b_{n+1} + b_n = n+1.$$

Его характеристическое уравнение $x^2 - 2x + 1 = 0$ имеет корень $x = 1$ кратности 2, поэтому общее решение соотношения есть $b_n^0 = \beta_1 + \beta_2 n$, а частное можно искать в виде $b_n' = n^2(\alpha_1 n + \alpha_2) = \alpha_1 n^3 + \alpha_2 n^2$.

Подставляя выражение для b_n в исходное соотношение, находим $\alpha_1 = 1/6$, $\alpha_2 = 0$,
и т.о. $b_n = \beta_1 + \beta_2 + n^2/6$.

Используя Н.У. на b_n, получим $\beta_1 = -2$, $\beta_2 = -1/6$.

Итого решение —

$$b_n = -2 - \frac{n}{6} + \frac{n^3}{6},$$

$$a_n = 2 + \frac{7(n-1)}{6} - \frac{(n-6)^3}{6} = 1 + \frac{2}{3}n + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n^3.$$

Задача 5.9. *Дано*

$$u_{k+2} - u_{k+1} - 2u_k + 4 = 0, \quad u_0 = 0,\ u_1 = 1.$$

Найти явное выражение для u_k.

Решение. Характеристическое уравнение:

$$x^2 - x - 2 = 0,$$

корни которого — $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1$, откуда
$u_n^0 = \beta_1 \cdot 2^n + \beta_2 \cdot (-1)^n$.

Ищем частное решение $u'_n = a = const$ —
$a = 3a - 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow u'_n = 2$, откуда
$u_n = \beta_1 \cdot 2^n + \beta_2 \cdot (-1)^n + 2$.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = \beta_1 + \beta_2 + 2 = 0 \\ u_1 = 2\beta_1 - \beta_2 + 2 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 + \beta_2 = -2 \\ 2\beta_1 - \beta_2 = -1 \end{array} \right.$$

$3\beta_1 = -3 \Rightarrow \beta_1 = -1 \Rightarrow \beta_2 = -1$.

Ответ: $u_n = -2^n - (-1)^n + 2$.

Глава 6

Комбинаторные методы в анализе структур

6.1 Комбинаторика в кластеризации

Пусть даны n-множество объектов, m-множество их признаков и матрица информаций $X_{n\times m}$.

Задача кластерного анализа состоит в том, чтобы на основании данных из X разбить множество объектов на $k<n$ *кластеров* (подмножеств) так, чтобы

- каждый объект принадлежал единственному кластеру;
- объекты одного кластера были сходными, а объекты, принадлежащие разным кластерам — несходными;
- разбиение должно удовлетворять некоторому критерию оптимальности — *целевой функции* (функционалу), выражающему уровень желательности данного разбиения.

Определение 6.1. Неотрицательная вещественная функция $s(X_i, X_j) = s_{ij}$, $i = 1, \ldots, n$ называется *мерой сходства*, если:

1) $0 \leqslant s(X_i, X_j) < 1$ для $X_i \neq X_j$;

2) $s(X_i, X_i) = 1$;

3) $s(X_i, X_j) = s(X_j, X_i)$.

Если X — $(0,1)$-матрица, то s_{ij} — *коэффициент ассоциации* или *сходства.*

$$S = \begin{pmatrix} 1 & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & 1 & \dots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{— } \textit{матрица сходства.}$$

Замечания. При решении задачи кластерного анализа молчаливо принимается, что

1) выбранные характеристики в принципе допускают желательное разбиение на кластеры;
2) единицы измерения (масштаб) выбраны правильно.

Это проблемы формирования признакового пространства.

В данном курсе *не рассматриваются* различные методы определения и вычислений

- коэффициентов сходства,
- компактности кластеров,
- расстояний между кластерами,

а также эвристические алгоритмы кластеризации.

Прямой метод кластеризации — перебором всевозможных разбиений на кластеры находят доставляющее оптимальное значение целевой функции.

Такая процедура практически выполнима лишь при малых n и k: например, если $n = 9$, $k = 4$ число возможных разбиений равно 7770.

<u>*Определение*</u> 6.2. Число $S(n,k) = \left\{ n \atop k \right\}$ разбиений n-элементного множества на k *непустых* частей называется *числом Стирлинга II рода.*

Обозначения:

- $[n] = \{\,1, \ldots, n\,\}$ при $n \in \mathbb{N}$, так что $[0] = \varnothing$.
- $\operatorname{Coef}_n\{f(z)\} = [z^n]f(z)$ — коэффициент при z^n в разложении $f(z)$ по степеням z.

Задача: определить число разбиений множества на непустые части.

Разбиение n-множества на k *непустых* частей $\Leftrightarrow$ распределение n *различных шаров* по k *неразличимым урнам*, ни одна из которых *не должна остаться пустой.*

Замечание. Задача «наоборот» — найти число w распределений n *неразличимых шаров* по k *различимым урнам*, когда некоторые урны *могут остаться пустыми*, решается легко:

- пронумеруем урны $1, \ldots, k$ (это можно сделать — урны различимы) и нарисуем подряд n кружков, обозначающих шары (они неразличимы);
- распределение шаров по урнам будем отмечать вставкой $k-1$ вертикальных штрихов между шарами;

- всего имеется $n+k-1$ мест, из которых $k-1$ занимают отрезки (или n мест — кружки), поэтому
$$w = C_{n+k-1}^{k-1} = C_{n+k-1}^{n}.$$

Энумераторы. *Напоминание основных перечислительных правил* для двух *независимых* событий.

Правило суммы: если первое событие может произойти n способами, а второе — m способами и при этом они *не могут произойти одновременно*, то одно из этих событий может произойти $n+m$ способами.

Правило произведения: если первое событие может произойти n способами, а второе может произойти m способами, то совместная реализация двух событий может произойти $n \cdot m$ способами.

Пример 6.1. В группе из 15 студентов и 10 студенток, возможен выбор
старосты — $15+10=25$ способами;
пары «студент-студентка» — $15 \cdot 10 = 150$ способами.

Определение 6.3. *Энумератором* события называется выражение в котором *независимые* исходы соединены

- *взаимоисключающие* — операцией суммирования,
- *происходящие одновременно* — операцией произведения.

Такой выбор удобен тем, что *выполнение комбинаторных правил суммы и произведения обеспечивается свойством дистрибутивности* указанных арифметических операций.

Метод производящих функций — эффективный способ решения комбинаторных задач.

Пример 6.2. Рассмотрим функцию 4 переменных:

$$F(x_1, \ldots, x_4) = (1 + x_1) \cdot \ldots \cdot (1 + x_4) =$$

$$= (x_1 x_2 x_3 x_4) + \overbrace{(x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4)}^{\text{4 произведения по 3 элемента}} +$$
$$+ \underbrace{(x_1 x_2 + \ldots + x_3 x_4)}_{\text{6 попарных произведений}} + \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)}_{\text{4 слагаемых}} + 1.$$

Обобщим: раскрыв скобки в формуле

$$F(x_1, \ldots, x_n) = (1 + x_1) \cdot (1 + x_2) \cdot \ldots \cdot (1 + x_n),$$

получим сумму произведений, представляющих m-выборки из n-множества $x_1, \ldots, x_n$:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{n_m \subseteq [n] \\ |n_m| = m}} \prod_{i \in n_m} x_i,$$

т.е. $F(x_1, \ldots, x_n)$ — энумератор события, состоящего в выборке m-подмножества из n-множества, если *порядок элементов в выборке несущественен.*

Метод производящих функций: подсчёт числа выборок
Положив, например, $x_1 = \ldots = x_n = x$, получим $[x^m]f(x) = C_n^m$ — число выборок (*без повторений и учёта порядка в них* = сочетаний) m объектов из n:

$$(1 + x)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m \quad \text{—}\textit{производящий полином}$$

(функция, ПФ) для $C_n^0, \ldots, C_n^n$.

Если порядок элементов в выборке существенен:

$$(1+x)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m = \sum_{m=0}^{n} A_n^m \frac{x^m}{m!}$$

— *экспоненциальный производящий полином (функция, ЭПФ)* для $A_n^0, \ldots, A_n^n$.

$A_n^m = C_n^m m! = \frac{n!}{(n-m)!}$ — число m-выборок *с учётом порядка* (= размещений) из n-множества, $m = 0, 1, \ldots, n$.

Выборки и размещения: различные случаи

1. *Выборки с повторениями и с учётом порядка объёма m из n-множества.*

n фиксировано, m — переменная.

1) $n = 1$ — имеется одна такая выборка и ЭПФ последовательности $(1, 1, \ldots)$ данных выборок будет

$$1 + x + 1 \cdot \frac{x^2}{2!} + \ldots + 1 \cdot \frac{x^m}{m!} + \ldots = e^x.$$

2) в общем случае из $n > 1$ таких выборок n^m и ЭПФ последовательности $(1, n, n^2, \ldots)$ будет

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^m}{m!} + \ldots\right)^n = e^{xn} = \sum_{m \geqslant 0} n^m \frac{x^m}{m!}.$$

3) общий случай, *но каждый элемент должен быть выбран не менее одного раза*: ЭПФ чисел таких выборок —

$$\left(x + \frac{x^2}{2!} + \ldots\right)^n = (e^x - 1)^n \overset{\substack{\text{бином}\\\text{Ньютона}}}{=} \sum_{j=0}^{n} C_n^j (-1)^j e^{(n-j)x} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} C_n^j (-1)^j \sum_{m\geqslant 0} \frac{(n-j)^m x^m}{m!} =$$

$$= \sum_{m\geqslant 0} \frac{x^m}{m!} \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{n} C_n^j (-1)^j (n-j)^m \right)}_{\text{число таких выборок}}.$$

Это не то, что нам нужно (разбиение множества из n *различимых* элементов на k *непустых* частей *без учёта порядка* в этих частях и самих частей = размещение различных шаров по неразличимым урнам, пустых урн нет), но пригодится...

2. *Размещения n различных шаров по k различным урнам.*

n фиксировано, k — переменная.

В задаче *размещения* шаров рассуждаем аналогично (здесь урна выбирается неоднократно).

1) ЭПФ для случая, когда *урна i содержит n_i шаров* —

$$(x_1 + \ldots + x_k)^n = \sum_{n_1+\ldots+n_k=n} \underbrace{\frac{n!}{n_1!\ldots n_k!}}_{\substack{\text{число таких размещений} = \\ \text{полиномиальный коэффициент}}} x_1^{n_1} \ldots x_k^{n_k}.$$

Например, распределение 21 голосующих в группы по 8, 7 и 6 человек возможно $\frac{21!}{8!\,7!\,6!} = 349\,188\,840$ способами.

2) ЭПФ числа размещений n *различных шаров в одной урне*, т.е. последовательности $(1, 1, \ldots)$ —

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = e^x.$$

3) ЭПФ числа k^n *размещений* n *различных шаров в* k *различных* урнах (1-й шар – в любой из k урн, 2-й также и т.д., порядок шаров в урне *несущественен*) — для последовательности $(1, k, k^2, \ldots)$:

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots\right)^k = e^{kx} =$$

$$= 1 + kx + k^2\frac{x^2}{2!} + \ldots + k^n\frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$=$ числу выборок объёма n с повторениями из k элементов с учётом порядка в выборке.

Например, пусть имеется $n = 3$ шара A, B, C и $k = 2$ урны, тогда возможны $k^n = 8$ вариантов размещения шаров по урнам ①|②:

$$ABC \mid \varnothing, \quad AB \mid C, \quad AC \mid B, \quad BC \mid A,$$
$$A \mid BC, \quad B \mid AC, \quad C \mid AB, \quad \varnothing \mid ABC.$$

Числа Стирлинга II рода. *Возвращаемся к нашей задаче.*

Утверждение 6.1. *Число $S(n, k)$ способов так распределить $n \geqslant 1$ различных шаров по k неразличимым урнам (порядок шаров в урнах несущественен), что ни одна урна не оказывается пустой, равно*

$$S(n, k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k} C_k^j(-1)^j(k-j)^n, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Доказательство. Если урна одна, то ЭПФ для последовательности $(0, 1, 1, \ldots)$ есть

$$x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = e^x - 1.$$

Если урн k, то

$$\left(x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\right)^k = (e^x - 1)^k =$$

$$= \sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!} \left(\sum_{j=0}^{k} C_k^j (-1)^j (k-j)^n \right).$$

Поскольку урны неразличимы, то

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} C_k^j (-1)^j (k-j)^n$$

— числа Стирлинга II рода. □

Утверждение 6.2 (Числа Стирлинга II рода: рекуррентная формула).

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k), \quad n > 0,\ k > 1.$$

Доказательство. Выделим некоторый элемент x в рассматриваем множестве. Тогда если

1) *x образует отдельный одноэлементный блок* — число таких разбиений столько же, сколько существует разбиений оставшегося $(n-1)$-элементного множества на $k-1$ блоков, т.е. $S(n-1,k-1)$;

2) *x не образует отдельного блока* — такие разбиения могут быть получены присоединением x к любому из k блоков разбиения $(n-1)$-элементного множества на k блоков, т.е. их всего $kS(n-1,k)$. $\square$

По определению полагают $S(0,0)=1$.
Ясно, что $S(n,0)=S(n,k)=0$, $k>n>1$.

Числа $S(n,k)$ Стирлинга II рода могут задаваться таблицей:

$n \diagdown k$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2	1	1						
3	1	3	1					
4	1	7	6	1				
5	1	15	25	10	1			
6	1	31	90	65	15	1		
7	1	63	301	350	140	21	1	
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1

Пример. Все $S(4,2)=7$ разбиений 4-элементного множества $\{1,2,3,4\}$ на 2 блока:

$1 \mid 234,\ 2 \mid 134,\ 3 \mid 124,\ 4 \mid 123,\ 12 \mid 34,\ 13 \mid 24,\ 14 \mid 23$

Утверждение 6.3 (формула суммирования).

$$S(n,k) = \sum_{i=k-1}^{n-1} C_{n-1}^{i} S(i,k-1), \quad k \geqslant 2.$$

Доказательство. Выделим элемент x рассматриваемого n-элементного множества X.

Затем для каждого $j = 0, \ldots, n-k$ выделим из элементов $X \setminus x$ блок размера j — это можно сделать C_{n-1}^{j} способами — и присоединим x к этому блоку.

После этого для каждого j рассмотрим все $S(n-j-1, k-1)$ разбиения оставшегося $(n-j-1)$-элементного множества.

Все вышеописанные ситуации несовместны, т.е. перебирают разные разбиения. Таким образом,

$$S(n,k) = \sum_{j=0}^{n-k} C_{n-1}^{j} S(n-j-1, k-1)\,.$$

Выполняя замену переменной $i = n-j-1$, получаем

$$S(n,k) = \sum_{i=k-1}^{n-1} C_{n-1}^{n-i-1} S(i, k-1) = \sum_{i=k-1}^{n-1} C_{n-1}^{i} S(i, k-1)\,.$$

□

6.2 Числа Белла

Совокупность всех разбиений множества X называют его *беллианом*, символически $\mathcal{B}(X)$.

$$\sum_{k=1}^{n} S(n,k) = B(n).$$

— *числа Белла*, мощность беллиана n-множества

Например, $B(4) = 15$. По определению $B(0) = 1$.

Утверждение 6.4 (рекуррентная формула).

$$B(n+1) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i B(i) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i B(n-i).$$

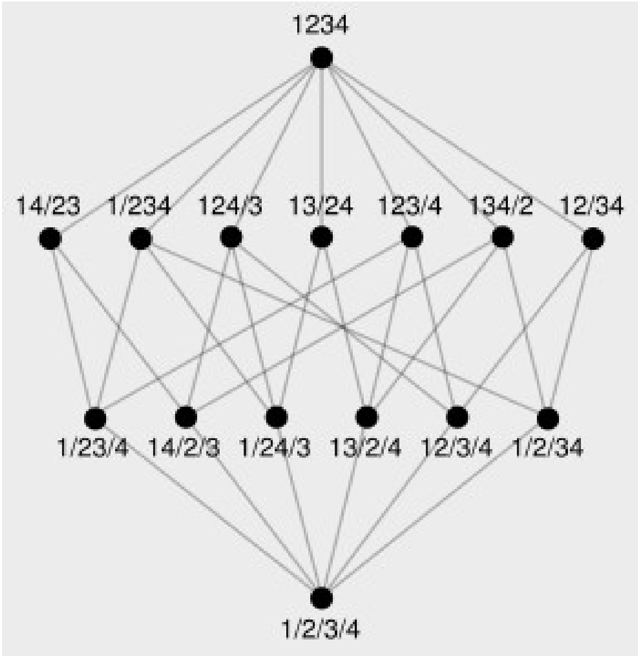


Рис. 6.1. Диаграмма Хассе беллиана множества $\{1, 2, 3, 4\}$

Доказательство. Покажем второе равенство, т.к. первое следует из него в силу симметричности биномиальных коэффициентов.

Выбираем выделенный элемент исходного множества и для $i = 0, \ldots, n$, рассматривая поочерёдно все C_n^i блоков размера i оставшегося n-элементного множества, присоединяя к каждому из них по очереди выделенный элемент.

Для оставшихся $n - i$ элементов рассматриваем их всевозможные разбиения. $\square$

n	$B(n)$
0	1
1	1
2	2
3	5
4	15
5	52
6	203
7	877
8	4 140
9	21 147
10	115 975

Числа Белла быстро растут: например, $B(20) = 51\,724\,158\,235\,371$.

Справедлива *формула Добинского*:

$$B(n) = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}.$$

Числа $B(n)$ могут быть построены при помощи *треугольника Белла.*

Первая строка содержит 1, каждая следующая строка начинается числом, стоящим в конце предыдущей строки, каждое следующее число в строке равно сумме чисел, стоящих *слева* и *слева-сверху* от него.

Числа Белла образуют последние числа в строках.

1							
1	2						
2	3	5					
5	7	10	15				
15	20	27	37	52			
52	67	87	114	151	203		
203	255	322	409	523	674	877	
877	1080	1335	1657	2066	2589	3263	4140

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Убывающие факториальные степени:

$$x^{\underline{n}} = \underbrace{x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)}_{n \text{ сомножителей}},\ n \geqslant 0.$$

Рассмотрим два базиса полиномов:

1. стандартный — $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots;$
2. из убывающих факториалов —

$$1, x^{\underline{1}}, x^{\underline{2}}, \dots, x^{\underline{n}}, \dots .$$

Выразим обычные степени x^n через убывающие $x^{\underline{n}}$. Несколько первых случаев дают

$$\begin{aligned} x^0 &= x^{\underline{0}}, & x^2 &= x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}, \\ x^1 &= x^{\underline{1}}, & x^4 &= x^{\underline{4}} + 6x^{\underline{3}} + 7x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}. \\ x^3 &= x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}, & x^5 &= x^{\underline{5}} + 10x^{\underline{4}} + 25x^{\underline{3}} + 15x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}. \end{aligned}$$

Замечаем, что коэффициенты в полиномах — числа Стирлинга II рода из приведённой ранее таблицы, прочитанные не слева направо, а справа налево.

Определение 6.4 (формальное чисел Стирлинга II рода). *Числами Стирлинга II рода* называются числа $S(n,k)$, удовлетворяющие уравнениям

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)x^{\underline{k}},\ n \geqslant 0,$$

$$S(n,0) = 0,\ S(n,n+k) = 0 \text{ для } k > 0.$$

Утверждение 6.5.

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)x^{\underline{k}}, \quad n \geqslant 0.$$

Доказательство. Докажем формулу по индукции:

$$x \cdot x^{\underline{k}} = x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}, \text{ так как } x^{\underline{k+1}} = x^{\underline{k}}(x-k),$$

следовательно $x^n = x \cdot x^{n-1} =$

$$= x \sum_k S(n-1,k)x^{\underline{k}} =$$

$$= \sum_k S(n-1,k)x^{\underline{k+1}} + \sum_k S(n-1,k)kx^{\underline{k}} =$$

$$= \sum_k S(n-1,k-1)x^{\underline{k}} + \sum_k S(n-1,k)kx^{\underline{k}} =$$

$$= \sum_k \big(kS(n-1,k)+S(n-1,k-1)\big)x^{\underline{k}} = \sum_k S(n,k)x^{\underline{k}}.$$

□

Т.о. числа Стирлинга II рода — *коэффициенты при убывающих факториальных степенях, которые дают обычные степени.*

6.3 Ещё комбинаторные числа

Числа Фибоначчи

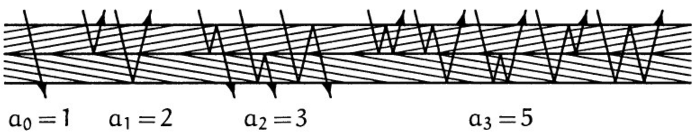
Определение 6.5. *Числа Фибоначчи* — числа $u_0, u_1, \ldots$, определяемые рекуррентным соотношением

$$u_0 = u_1 = 1, \quad u_k = u_{k-1} + u_{k-2},\ k \geqslant 2.$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

Числа Фибоначчи: свойства.

Друг на друга наложены две стеклянные пластинки. Сколько существует способов a_n прохождения света через пластинки или отражения от них после изменения его направления n раз? $a_n = u_{n+1}$:



Справедливо соотношение

$$F_{k+1}F_{k-1} - F_k^2 = (-1)^{k+1},\ n \geqslant 1.$$

Числа Фибоначчи: формула для общего члена. Построим ПФ $F(x) = \sum\limits_{k\geqslant 0} u_k x^k$ для последовательности чисел Фибоначчи

$$u_0 = u_1 = 1,\ u_k = u_{k-1} + u_{k-2},\ k \geqslant 2.$$

$$F(x) = 1+x+\sum_{k\geqslant 2} u_k x^k = 1+x+\sum_{k\geqslant 2}(u_{k-1}+u_{k-2})x^k =$$

$$= 1 + x + x\sum_{k\geqslant 2} u_{k-1}x^{k-1} + x^2\sum_{k\geqslant 2} u_{k-2}x^{k-2} =$$

$$= 1 + x + x(F(x)-1) + x^2F(x)\,.$$

Таким образом

$$F(x) = 1 + \cancel{x} + xF(x) - \cancel{x} + x^2F(x)\,,$$

$$F(x)(1-x-x^2) = 1\,,$$

$$F(x) = \frac{1}{1-x-x^2}\,.$$

Разлагаем полученную ПФ в ряд по x.

Находим разложение $F(x)$ на простые дроби:

$$1 - x - x^2 = (1-ax)(1-bx) = 1-(a+b)x + abx^2$$

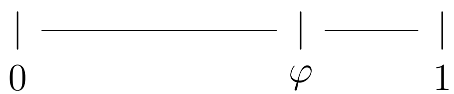
$$\begin{cases} ab = -1, \\ a + b = 1, \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$$a \text{ и } b \text{ — корни } z^2 - z - 1 = 0\,, \text{ т.е. } a, b = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\,.$$

Пусть $a \geqslant b$:

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\varphi} = \varphi + 1,\ b = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\varphi$$

$\varphi \approx 0,61803\ldots$ — золотое сечение (обозначение в честь Фидия).



$$\frac{1-\varphi}{\varphi} = \frac{\varphi}{1} \quad \Rightarrow \quad \varphi^2 + \varphi - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Теперь

$$F(x) = \frac{1}{(1-ax)(1-bx)} = \frac{A}{1-ax} + \frac{B}{1-bx}.$$

$$A - Abx + B - Bax = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A + B & = 1 \\ Ab + Ba & = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{a}{a-b}; \qquad B = -\frac{b}{a-b}.$$

Поскольку $\dfrac{1}{1-\alpha x} = \sum\limits_{k \geqslant 0} (\alpha x)^k$, то

$$F(x) = A\sum_{k\geqslant 0} a^k x^k + B\sum_{k\geqslant 0} b^k x^k = \sum_{k\geqslant 0} \frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a-b} x^k .$$

Учитывая, что $a - b = \sqrt{5}$, окончательно получаем

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right].$$

Методом линейных рекуррентных последовательностей было найдено характеристическое уравнение для чисел Фибоначчи: $P(x) = x^2 - x - 1 = 0$, оно имеет корни $a, b = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, и следовательно,

$$u_k = \beta_1 a^k + \beta_2 b^k = \beta_1 \underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k}_{=a} + \beta_2 \underbrace{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k}_{=b}.$$

Из начальных условий:

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 &= 1 \\ \beta_1 a + \beta_2 b &= 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 &= \dfrac{1-b}{a-b} = \dfrac{a}{a-b} = A \\ \beta_2 &= \dfrac{a-1}{a-b} = \dfrac{-b}{a-b} = B \end{cases}$$

т.к. $a + b = 1$, $a - b = \sqrt{5}$, получаем уже найденную формулу.

Числа Каталана

Задача К-1. *В кассу за билетами стоит очередь из $2n$ человек, у каждого по купюре в 100 или 50 руб., причем этих купюр в очереди поровну — по n 50- и 100-рублевок. Билет стоит 50 руб., в начале продажи касса пуста. Найти число способов расположить очередь так, чтобы кассир всегда мог выдать сдачу.*

Ответ: n-е число Каталана.

Формализуем задачу: закодируем очередь с купюрами двоичным набором, заменяя 50-рублевки единицами, а 100-рублевки — нулями.

Задача К-2. *Найти число различных двоичных наборов длины $2n$, в которых поровну нулей и единиц, и на любом начальном отрезке каждого такого набора число единиц не менее числа нулей.*

Если бы ограничения не было, то ответом было бы число $C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!\,n!}$.

Решим задачу перебором для $n = 3$:

	1	2	3	4	5	6
1)	1	1	1	0	0	0
2)	1	1	0	1	0	0
3)	1	1	0	0	1	0
4)	1	0	1	1	0	0
5)	1	0	1	0	1	0

Задача К-3. *Найти число t_k неизоморфных двоичных деревьев с k вершинами.*

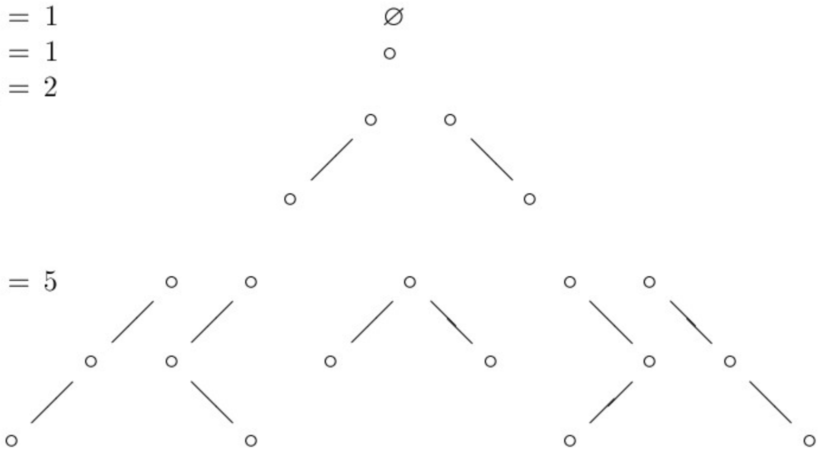
Ответ: это числа Каталана. t_k =?

$t_0 = 1$

$t_1 = 1$

$t_2 = 2$

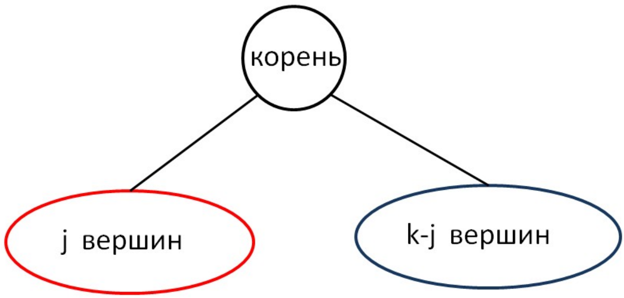
$t_3 = 5$



ПФ для последовательности чисел t_k:

$$C(x) = \sum_{k \geqslant 0} t_k x^k.$$

Идея: представим ВТ с $k + 1$-й вершиной как *корень + левое поддерево + правое поддерево*



Итак, $t_0 = 1,\ t_{k+1} = \sum\limits_{j=0}^{k} t_j t_{k-j},\ k > 0.$

Отсюда:

$$C(x) = 1 + \sum_{k\geqslant 1} t_k x^k = 1 + \sum_{k\geqslant 0} t_{k+1} x^{k+1} =$$

$$= 1 + x\sum_{k\geqslant 0}\Bigl(\sum_{j=0}^{k} t_j t_{k-j}\Bigr)x^k = 1 + xC^2(x)$$

— по правилу перемножения рядов:

$$A = \sum_{i\geqslant 0} a_i, \quad B = \sum_{i\geqslant 0} b_i, \qquad A\cdot B = \sum_{i\geqslant 0}\sum_{j=0}^{i} a_j a_{i-j}.$$

Решая квадратное уравнение

$$xC^2(x) - C(x) + 1 = 0,$$

получим

$$C(x) = \frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}. \qquad (*)$$

Разложим $\sqrt{1-4x}$ в ряд:

$$(1-4x)^{1/2} = \sum_{k\geqslant 0} a_k x^k.$$

Имеем по биному Ньютона

$$a_0 = 1 \quad \text{и для } k > 0: \quad a_k = (-1)^k \binom{1/2}{k} 4^k =$$

$$= \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)\cdot(-2)^k 2^k =$$

умножаем на -2 каждую из k скобок

$$= \frac{1}{k!}(-1)(-1+2)(-1+4)\ldots(-1+2k-2)\cdot 2^k =$$

$$= -\frac{1}{k!}\, 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-3)\cdot 2^k\,.$$

Таким образом

$$(1-4x)^{1/2} = 1 - \sum_{k\geqslant 1} \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-3)\cdot 2^k}{k!} x^k =$$

$\bigl($домножаем числитель и знаменатель на $2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k-2)\bigr)$

$$= 1 - \sum_{k\geqslant 1} \frac{(2k-2)!\cdot 2\cdot 2^{k-1}}{k!\cdot 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k-2)} x^k =$$

$\bigl($делим числитель и знаменатель на $2^{k-1}\bigr)$

$$= 1 - \sum_{k\geqslant 1} \frac{(2k-2)!\cdot 2}{k!(k-1)!} x^k = 1 - \sum_{k\geqslant 1} \frac{2}{k}\binom{2k-2}{k-1} x^k =$$

$$= \bigl(\text{замена } k \mapsto k+1\bigr) = 1 - \sum_{k\geqslant 0} \frac{2}{k+1}\binom{2k}{k} x^{k+1}\,.$$

Этот ряд надо подставить в $(*)$.

Понятно, что из условия $t_k \geqslant 0$ перед радикалом надо брать знак $(-)$:

$$C(x) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k} x^k \qquad \text{и, таким образом}$$

$$t_k = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k} = \frac{1}{k+1}\,C_{2k}^k \qquad \text{— *числа Каталана.*}$$

Убеждаемся, что $\quad t_3 = \frac{1}{4}\binom{6}{3} = \frac{4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 5.$

Замечание. В задаче об очереди в кассу вероятность того, что очередь в кассу задержится, равна $\frac{n}{n+1}$ и стремится к единице с ростом её длины.

n-е число Каталана можно определить как количество —

- разбиений выпуклого $(n+2)$-угольника на n треугольников $n-1$ непересекающимися диагоналями;
- правильных скобочных структур длины $2n$;
- способов соединения $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами;
- неизоморфных упорядоченных бинарных деревьев с корнем и $n+1$ листьями;
- $e(\mathbf{2}\times\mathbf{n})$;
- ...

Во II-м томе монографии *Р. Стенли* «Перечислительная комбинаторика» приведено 66 различных математических задач, в которых появляются числа Каталана.

Числа Стирлинга I рода

Определение 6.6. *Числом Стирлинга I рода (числом циклов Стирлинга)* для $n, k \geqslant 1$ называется число перестановок n-элементного множества, содержащих k циклов, символически $s(n,k)$ или $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

Из определения сразу следует, что

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k) = n!$$

Напоминание: циклическую перестановку $a \mapsto b \mapsto c \mapsto d \mapsto a$ записывают (a,b,c,d), поэтому $(a,b,c,d) = (b,c,d,a) = (c,d,a,b) = (d,a,b,c)$, но $(a,b,c,d) \neq (b,a,c,d)$.

Все 11 разбиений 4-элементного множества $\{1,2,3,4\}$ на 2 цикла:

$$(1)(234),\quad (1)(243),\quad (2)(134),\quad (2)(143),\quad (3)(124),$$
$$(3)(142),\quad (4)(123),\quad (4)(132),\quad (12)(34),\quad (13)(24),$$
$$(14)(23)$$

Понятно, что $s(n,1) = (n-1)!$ и

$$s(n,k) \geqslant S(n,k), \quad n,k \geqslant 0,$$

т.к. каждое разбиение на непустые множества приводит, как минимум, к одному циклу.

Равенство будет, если все циклы циклы эквивалентны подмножествам, т.е. являются единичными или двойными, а это будет или при $k = n$, или $k = n-1$, следовательно

$$s(n,n) = S(n,n) = 1, \quad s(n,k-1) = S(n,k-1) = 2.$$

Утверждение 6.6 (рекуррентное соотношение для чисел Стирлинга I рода).

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) + (n-1)s(n-1,k), \quad n > 0.$$

Доказательство. Каждое представление n объектов в виде k циклов

- либо помещает последний объект в отдельный цикл — $s(n-1,k-1)$ способами,
- либо вставляет этот объект в одно из $s(n-1,k)$ циклических представлений первых $n-1$ объектов — $n-1$ способами
(т.к. существует j способов поместить новый элемент в j-цикл, чтобы получить $(j+1)$-цикл: например, если $j = 3$, то вставка d в цикл (a,b,c) приводит к циклам (a,b,c,d), (a,b,d,c), (a,d,b,c)).

$\square$

Числа $s(n,k)$ Стирлинга I рода задаются таблицей:

$n \diagdown k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	2	3	1				
4	0	6	11	6	1			
5	0	24	50	35	10	1		
6	0	120	274	225	85	15	1	
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1

Элементы таблицы образуются по правилу

$s(n-1,k-1)$	$s(n-1,k)$	$\times(1-n)$
	$s(n,k)$	

Возрастающие факториальные степени:

$$x^{\overline{n}} = \underbrace{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)}_{n \text{ сомножителей}}, \quad n \geqslant 0.$$

Понятно, что $x^{\overline{0}} = x^0 = 1$, $x^{\overline{1}} = x^1$.

Рассмотрим базис из факториальных степеней:

$$1,\ x^{\overline{1}},\ x^{\overline{2}}\ \dots,\ x^{\overline{n}},\ \dots.$$

Выразим первые возрастающие степени $x^{\overline{n}}$ через обычные.

$$\begin{aligned}
x^{\overline{0}} &= x^0\,, & x^{\overline{3}} &= x^3 + 3x^2 + 2x^1\,,\\
x^{\overline{1}} &= x^1\,, & x^{\overline{4}} &= x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x^1\,,\\
x^{\overline{2}} &= x^2 + x^1\,, & x^{\overline{5}} &= x^5 + 10x^4 + 35x^3 + 50x^2 + 24x^1\,.
\end{aligned}$$

Замечаем, что коэффициенты в полиномах — числа Стирлинга I рода из приведённой ранее таблицы, прочитанные не слева направо, а справа налево.

Утверждение 6.7 (другое определение чисел Стирлинга I рода).

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k\,, \quad n \geqslant 0\,.$$

Доказательство. Проведём индукцию по n.
Имеем $(x+n-1)\cdot x^k = x^{k+1} + (n-1)x^k$ и далее, аналогично выводу соотношения для числа Стирлинга II рода —

$$(x+n-1)x^{\overline{n-1}} = (x+n-1)\sum_{k=0}^{n} s(n-1,k)x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k.$$

□

Т.о. числа Стирлинга I рода — коэффициенты при обычных степенях, которые дают возрастающие факториальные степени.

Имеем:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) x^{\underline{k}}, \qquad x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) x^k.$$

Можно показать, что справедливы «двойственные» равенства:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} S(n,k) x^{\overline{k}},$$

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s(n,k) x^k$$

Подстановкой получим симметричную формулу

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} S(n,k) s(k,m) = [m = n].$$

ЭПФ последовательностей $S(n,k)$ и $s(n,k)$ $(k = n, n+1, \ldots)$ имеют вид

$$\sum_{n \geqslant k} S(n,k) \frac{z^n}{n!} = \frac{(e^z - 1)^k}{k!};$$

$$\sum_{n \geqslant k} s(n,k) \frac{z^n}{n!} = \frac{(\ln \frac{1}{1-z})^k}{k!}.$$

Числа Эйлера. Рассмотрим n-перестановку

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_i & \ldots & a_n \end{pmatrix}.$$

Будем говорить, что π имеет k *участков подъёма*, если в этой перестановке есть k мест таких, где $a_j < a_{j+1}$.

Определение 6.7. *Двухпараметрическим числом Эйлера* $E(n,k) = \left\langle {n \atop k} \right\rangle$ называется число перестановок n-элементного множества с k участками подъёма.

По определению $E(0,0) = 1$.

Пример 6.3. Одиннадцать перестановок множества $\{1,2,3,4\}$, содержащие по два участка подъема:

$$\begin{array}{l} (1324),\ (1423),\ (2314),\ (2413),\ (3412), \\ (1243),\ (1342),\ (2341), \\ (2134),\ (3124),\ (4123). \end{array}$$

Перечислены перестановки

в первой строке — вида $a_1 < a_2 > a_3 < a_4$;

во второй строке — вида $a_1 < a_2 < a_3 > a_4$;

в третьей строке — вида $a_1 > a_2 < a_3 < a_4$.

Следовательно, $E(4,2) = 11$.

В таблице приведены начальные двухпарметрические числа Эйлера $E(n,k)$.
При $n > 0$ может быть самое большее $n-1$ участков подъема, так что $E(n,n) = 0$ на диагонали этого треугольника.

$n \diagdown k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0						
1	1	0						
2	1	1	0					
3	1	4	1	0				
4	1	11	11	1	0			
5	1	26	66	26	1	0		
6	1	57	302	302	57	1	0	
7	1	120	119	2 416	1 191	1 20	1	0

Треугольник Эйлера, подобно треугольнику Паскаля, симметричен слева направо:

$$E(n,k) \,=\, E(n, n-k-1)\,, \quad n > 0.$$

Перестановка $a_1, \ldots, a_n$ содержит $(n-1-k)$ участков подъема тогда и только тогда, когда её "отражение" $a_n, \ldots, a_1$ содержит k таких участков.

По определению полагают

$$E(0,k) \,=\, 0\,, \quad k < 0.$$

Утверждение 6.8.

$$E(n,k) \,=\, (k{+}1)E(n{-}1,k){+}(n{-}k)E(n{-}1,k{-}1),\; n > 0.$$

Доказательство. Каждая перестановка $\pi = (a_1, \ldots, a_{n-1})$ множества $[n-1]$ приводит к n перестановкам множества $[n]$, если вставлять новый (выделенный) элемент n во все возможные места.

При вставке n на j-е место получаем подстановку $(a_1, \ldots, a_{j-1}, n, a_j, \ldots, a_n)$ и число участков подъема увеличится на 1, если $a_{j-1} > a_j$ или $j = n$ $((n-2)-$

$(k-1)+1$ вариантов) и останется без изменений, иначе (k вариантов).

Поэтому новая перестановка с k участками подъема получается

• $(k+1)E(n-1,k)$ способами из перестановок π, которые содержат k участков подъема,

$+$

• $(n-k)E(n-1,k-1)$ способами из перестановок π, которые содержат $k-1$ участков подъема. □

Утверждение 6.9 (тождество Ворпицкого[1]).

$$x^n = \sum_k E(n,k)C^n_{x+k},\ n \geqslant 0.$$

Так,

$$\begin{aligned} x^2 &= C^2_x + C^2_{x+1}, \\ x^3 &= C^3_x + 4C^3_{x+1} + C^3_{x+1}, \\ x^4 &= C^4_x + 11C^4_{x+1} + 11C^4_{x+2} + C^4_{x+3}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Доказательство — по индукции.

Числа Бернулли. Положим

$$S_m(n) = 0^m + 1^m + \ldots + (n-1)^m = \sum_{k=0}^{n-1} k^m.$$

Якоб Бернулли заметил, что

$S_0(n) = n$,

[1] Впервые данная формула упоминается в книге Ли Сянь-Ляня, опубликованной в Китае в 1867 г.

$$
\begin{aligned}
S_1(n) &= \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n\,,\\
S_2(n) &= \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\,,\\
S_3(n) &= \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2\,,\\
S_4(n) &= \frac{1}{5}n^5 - \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{30}n\,,\\
S_5(n) &= \frac{1}{6}n^6 - \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^3 - \frac{1}{12}n^2\,,\\
S_6(n) &= \frac{1}{7}n^7 - \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n\,,\\
S_7(n) &= \frac{1}{8}n^8 - \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2\,,\\
S_8(n) &= \frac{1}{9}n^9 - \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 + \frac{1}{30}n\,.
\end{aligned}
$$

Мы видим закономерность: в формуле для $S_m(n)$

коэффициент при	всегда равен
n^{m+1}	$1/(\,m+1\,)$
n^m	$1/2$
n^{m-1}	$m/12$
n^{m-2}	0
n^{m-3}	$-m(m-1)(m-2)/720$
n^{m-4}	0

А если эту закономерность продолжить, то коэффициент при n^{m-k} всегда будет иметь вид некоторой константы, умноженной на m^k.

Именно это и обнаружил (но не оставил доказательства) Бернулли. В современных обозначениях его формула записывается в виде

Утверждение 6.10.

$$S_m(n) = \frac{1}{m+1}\left(B_0 n^{m+1} + C_{m+1}^1 B_1 n^m + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + C_{m+1}^m B_m n \right) =$$
$$= \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} C_{m+1}^k B_k n^{m+1-k}.$$

B_0, B_1, B_2, ... — *числа Бернулли.*

Доказательство — по индукции.

Определение 6.8. *Числа Бернулли* — числа $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$, определяемые рекуррентным соотношением

$$B_0 = 1\,, \quad \sum_{j=0}^{n-1} C_n^j B_j = 0\,,\ n \geqslant 2.$$

Доказательство по индукции.

Так, $C_2^0 B_0 + C_2^1 B_1 = 0$, откуда $B_1 = -\frac{1}{2}$.

Несколько первых этих величин:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{43}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0

6.4 Общая комбинаторная схема

Производящая функция выбора

Мультимножество — обобщение понятия множества, допускающее наличие нескольких экземпляров одного и того же элемента.

Примеры 6.1. • Мультимножество простых множителей целого числа.

Например, разложение числа 120 на простые множители имеет вид: $120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$, поэтому его мультимножество простых делителей есть $\{\,2,\,2,\,2,\,3,\,5\,\}$ или $\{\,3*2,\,1*3,\,1*5\,\}$.

• Мультимножество корней алгебраического уравнения.

Например, уравнение $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$ имеет корни $\{\,1,\,2,\,2\,\}$ или $\{\,1,\,2*2\,\}$.

Если имеется бесконечное число экземпляров: $\{\,*a,\,*b,\,5*c\,\}$ — n-элементное мультимножество.

Пусть имеется n-элементное мультимножество $\{\,*a_1,\,\ldots,\,*a_n\,\}$, из которого берётся выборка объёма m. Тогда ПФ такого выбора:

$$F(x_1,\,\ldots,\,x_n) = \prod_{i=1}^{n}\sum_{j}\alpha_{ij}x_i^j = \\ = \sum_{m_1+\ldots+m_n=m} u_{m_1,\,\ldots,\,m_n}\,x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n},$$

где

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если может быть выбрано} \\ & j \text{ экземпляров } i\text{-го объекта} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases},$$

$$m_i \text{ — число выбранных } i\text{-х элементов,}$$

$$u_{m_1,\,\ldots,\,m_n} \text{ — число соответствующих выборок.}$$

Если выбор элемента i_1 эквивалентен r выборам элемента i_2, то число переменных сокращают, полагая

$x_{i_1} = x_{i_2}^r$. Когда все переменные могут быть выражены через одно них, будем иметь

$$F(x) = \sum_{m \geqslant 0} u_m x^m.$$

Числа Белла, Стирлинга, Каталана и др. могут быть получены как частные случаи данной производящей функции.

Примеры 6.2. 1. Пусть X — обычное (не мульти) множество. Тогда каждый элемент может быть либо выбран, либо не выбран, т.е. $\alpha_{i0} = \alpha_{i1} = 1$, $\alpha_{i2} = \alpha_{i3} = \ldots = 0$. Следовательно

$$F(x) = (1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_n) \,.$$

Если нас интересует только объём выборки m, то полагаем $x_1 = \ldots = x_n = x$ и

$$F(x) = (1 + x)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m,$$

т.е. таких выборок C_n^m (это мы и так знали).

2. Пусть $X = \{\, 2 * a_1,\, 3 * a_2,\, a_3,\, 4 * a_4 \,\}$. Найдём число 5-элементных выборок из X.

Пусть u_m — число m-элементных выборок из X. По общей комбинаторной схеме ПФ таких выборок —

$$\sum_{m=0}^{10} u_m x^m =$$

$$= (1{+}x{+}x^2)(1{+}x{+}x^2{+}x^3)(1{+}x)(1{+}x{+}x^2{+}x^3{+}x^4) =$$

$$= 1+4x+9x^2+15x^3+20x^4+22x^5+20x^6+15x^7+9x^8+ 4x^9+x^{10}, \qquad \text{и } u_5 = 22.$$

3. Дано мультимножество из n элементов, из которого берётся выборка объёма m, причём каждый элемент м/б выбран *не более* r *раз*, тогда

$$F(x) = (1+x+\ldots+x^r)^n = \sum_{m=0}^{nr} u_m x^m.$$

4. Если число выборов элементов неограничено, то

$$F(x) = \big(1+x+x^2+\ldots\big)^n = \frac{1}{(1-x)^n}.$$

Разлагаем данную функцию в ряд, формально рассматривая биномиальные коэффициенты при отрицательных параметрах:

$$\frac{1}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n} = \sum_{m\geqslant 0}(-1)^m\binom{-n}{m}x^m = \sum_{m\geqslant 0} u_m x^m.$$

Итого имеем

$$u_m = (-1)^m\binom{-n}{m} \overset{\text{def}}{=} \left(\!\!\binom{n}{m}\!\!\right) = \\ = (-1)^m\frac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-m+1)}{m!} = \\ = \frac{(n+m-1)(n+m)\ldots n}{m!} = \binom{n+m-1}{m} = \\ = C^m_{n+m-1} = \overline{C}^m_n.$$

Пусть, например, $n = 3$; $A = \{*a, *b, *c\}$ и $m = 2$.
Если бы это было обычное множество, то число выборок —

$$\binom{n}{m} = \binom{3}{2} = 3:\ (a,b),\ (a,c),\ (b,c).$$

Если рассматривается мультмножество, то добавляются (a,a), (b,b), (c,c):

$$\left(\!\!\binom{n}{m}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{3}{2}\!\!\right) = \binom{4}{2} = 6.$$

$\overline{C}_n^m$ есть также и число решений уравнения

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m$$

в целых неотрицательных числах (порядок слагаемых существенен).

Представляем число m в виде набора k одинаковых шариков, лежащих на прямой, и каждому разложению числа m сопоставим расстановку на $n-1$ палочки между шариками. x_i = число шариков между палочками с номерами i и $i-1$. Вместе палочки и шарики составляют $n+m-1$ предмет, а назначить $n-1$ палочек можно $C_{n+m-1}^{n-1} = C_{n+m-1}^{m}$ способами.

Было: число распределений n неразличимых шаров по k различимым урнам, когда некоторые урны могут остаться пустыми — $w = C_{n+k-1}^{k-1} = C_{n+k-1}^{n}$.

5. В том же мультимножестве из n элементов берётся выборка объёма m, причём каждый элемент д/б выбран хотя бы 1 раз (т.е. $m \geqslant n \geqslant 1$).

ПФ искомых выборок есть

$$F(x) = \sum_{m\geqslant 0} u_m x^m = (\,x + x^2 + \ldots\,)^n =$$

$$= \big(\,x(\,1 + x + x^2 + \ldots\,)\,\big)^n = x^n(\,1 + x + x^2 + \ldots\,)^n =$$

$$= x^n \sum_{m\geqslant 0} \left(\!\!\binom{n}{m}\!\!\right) x^m = \sum_{m\geqslant 0} \left(\!\!\binom{n}{m}\!\!\right) x^{m+n}.$$

Заменяя $m \mapsto m - n$, получаем

$$F(x) = \sum_{m\geqslant n} \left(\!\!\binom{n}{m-n}\!\!\right) x^m = \sum_{m\geqslant n} \binom{m-1}{m-n} x^m.$$

<u>Задача</u> (о размене монет). Сколькими способами можно разменять 1 руб. монетами достоинствами 1, 5, 10 и 50 коп.?

Решение. Строим ПФ:

$$F(x) = \sum_{k\geqslant 0} u_k x^k = (1+x_1+x_1^2+\ldots)\cdot\ldots\cdot(1+x_4+x_4^2+\ldots).$$

Учитываем достоинства монет: $x_1 = x$, $x_2 = x^5$, $x_3 = x^{10}$, $x_4 = x^{50}$. Поэтому

$$F(x) = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\frac{1}{1-x^{10}}\cdot\frac{1}{1-x^{50}}\,.$$

Разложение в ряд полученного выражения технически очень громоздко. Нам же нужно лишь значение u_{100}.

Поэтому можно действовать следующим образом. Имеем

$$u_0 = u_1 = u_1 = u_1 = u_4 = 1,$$

$$u_5 = u_6 = u_7 = u_8 = u_9 = 2,\ u_{10} = 4\,.$$

10 коп. $=$ 10 $\cdot$ 1 коп. $=$ 5 коп.$+$5 $\cdot$ 1 коп. $=$ 2 $\cdot$ 5 коп. — итого 4 способа.

Положим

$$A(x) = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\frac{1}{1-x^{10}} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots,$$

$$B(x) = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^5} = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots,$$

причём $b_0 = b_1 = \ldots = b_4 = 1$ (представление 0, 1, 2, 3 и 4 копеек) и, кроме того,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2\ldots\,.$$

Имеем

$$\begin{aligned} A(x) &= (1-x^{50})\cdot F(x)\,;\\ B(x) &= (1-x^{10})\cdot A(x)\,;\\ \frac{1}{1-x} &= (1-x^5)\cdot B(x). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{cases} a_k = u_k - u_{k-50}\,, & \text{при } k \geqslant 50\,,\\ b_k = a_k - a_{k-10}\,, & \text{при } k \geqslant 10\,,\\ 1 = b_k - b_{k-5}\,, & \text{при } k \geqslant 5\,. \end{cases}$$

Из последнего соотношения — $b_k = \left\lfloor \dfrac{k}{5} \right\rfloor + 1\,,\ k \geqslant 0$ или

$$B(x) \risingdotseq (\underbrace{1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1}_{5\text{шт.}},\ \underbrace{2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2}_{5\text{шт.}},\ \underbrace{3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3}_{5\text{шт.}},\ \ldots).$$

Таким образом,

$$\begin{cases} u_k \;=\; a_k + u_{k-50}\,, & k \geqslant 50\,, \\ a_k \;=\; b_k + a_{k-10}\,, & k \geqslant 10\,. \end{cases}$$

Из первого равенства — $u_{100} \;=\; a_{100} + a_{50} + u_0$ и далее:

$$\begin{aligned} a_{100} &= b_{100} + b_{90} + \ldots + b_{60} + b_{50} + \ldots + b_{10} + a_0 \\ a_{50} &= b_{50} + b_{40} + \ldots + b_{10} + a_0\,. \end{aligned}$$

Поскольку $u_0 = a_0 = 1$, имеем

$$\begin{aligned} u_{100} \;=\; & b_{100} + b_{90} + b_{80} + b_{70} + b_{60} + \\ & + 2\cdot(b_{50} + b_{40} + b_{30} + b_{20} + b_{10} + 1) + 1 \;= \\ =\; & 21+19+17+15+13+2\cdot(11+9+7+5+3+1)+1 \;= \\ & = \; 85 + 2\cdot 36 + 1 \;=\; 86 + 72 \;=\; 158. \end{aligned}$$

Замечание. В общем случае, число представлений суммы в k единиц монетами по $r_1, \ldots, r_m$ единиц равно коэффициенту u_k в разложении по x ПФ

$$F(x) \;=\; \frac{1}{1-x^{r_1}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{1-x^{r_m}}\,.$$

Интерес представляет ПФ

$$F(x) \;=\; \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\ldots\,.$$

Коэффициент $u_n \;=\; p(n)$ разложения этой ПФ в ряд по x называется *числом разбиений* n — это число представлений n в виде суммы положительных целых слагаемых без учёта порядка.

Для $p(n)$ *неизвестно выражение в замкнутом виде.*
Для первых значений n имеем

$$p(1) = 1,\ p(2) = 2,\ p(3) = 3,\ p(4) = 5,$$
$$p(6) = 11,\ p(7) = 15\,.$$

Например,

$$4 = 4\cdot 1 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1.$$

С. Рамануджан показал, что

$$p(5n+4) \equiv_5 0\,, \quad p(7n+5) \equiv_7 0\,, \quad p(11n+6) \equiv_{11} 0\,.$$

$$p(n) \sim A_n e^{\pi\left(\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}\right)}$$

$$\text{где}\quad A_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{\sqrt{6}\left(n-\frac{1}{24}\right)} - \frac{1}{2\left(n-\frac{1}{24}\right)^{3/2}}\right)$$

$p(200) = 3\,972\,999\,029\,388$— точное значение

Сриниваса Рамануджан Айенгор
(англ. Srinivasa Ramanujan Iyengar, 1887–1920)
— математический гений Индии.
У него тамильское имя без фамилии: Рамануджа́н — имя, Сринива́са — отчество, Айенго́р — каста.
Не имея специального математического образования, доказал справедливость около 120 ранее неизвестных теоретико-числовых формул.
Его результаты порождены неповторимой математической фантазией и фантастической интуицией.

Доказано Рамануджаном

$$\pi = \frac{9801}{2\sqrt{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(4k)!}{(k!)^4}\cdot\frac{1103+26390k}{(4\cdot 99)^{4k}}\right)}.$$

Уже при $k = 100$ достигается огромная точность — 600 верных значащих цифр!

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\ldots}}}} = 3.$$

$x^3 + y^3 + z^3 = w^3$, где

$$x = 3a^2 + 5ab - 5b^2, \quad z = 4a^2 - 4ab + 6b^2,$$
$$y = 5a^2 - 5ab - 3b^2, \quad w = 6a^2 - 4ab + 4b^2.$$

Сам Рамануджан говорил, что формулы ему во сне внушает богиня Намагири Тхайяр.

6.5 Задачи с решениями

Задача 6.1. *Показать, что* $S(n, n-1) = C_n^2$.

Решение. Из рекуррентного соотношения для чисел Стирлинга II рода:

$$S(n,n-1) = (n-1)\underbrace{S(n-1,n-1)}_{=1} + S(n-1,n-2) = \ldots$$

$$\ldots = (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \frac{n(n-1)}{2} = C_n^2.$$

Задача 6.2. *Показать, что* $S(n, n-2) = 3C_n^4 + C_n^3$.

Решение. Полезная формула суммирования биномиальных коэффициентов по нижнему индексу:

$$\sum_{k=0}^{n} C_k^m = C_{n+1}^{m+1}.$$

Из рекуррентного соотношения для чисел Стирлинга II рода последовательно получаем (подчёркнут итеративный член):

$$S(n,n-2) = (n-2)S(n-1,n-2)+\underline{S(n-1,n-3)} =$$
$$= (n-2)C_{n-1}^2+(n-3)S(n-2,n-3)+S(n-2,n-4) =$$
$$= (n-2)C_{n-1}^2 + (n-3)C_{n-2}^2 + \underline{S(n-2,n-4)} = \ldots$$
$$= \sum_{i=1}^{n-2} C_{n-i}^2(n-i-1) = \sum_{i=1}^{n-2} C_{n-i}^2(n-i-2)+\sum_{i=1}^{n-2} C_{n-i}^2 .$$

Имеем далее

$$C_{n-i}^2(n-i-2) = \frac{(n-i)!(n-i-2)}{2!(n-i-2)!} =$$
$$= \frac{3!}{2!} \cdot \frac{(n-i)!}{3!(n-i-3)!} = 3 \cdot C_{n-i}^3$$

Затем

$$\sum_{i=1}^{n-2} C_{n-i}^3 = \sum_{i=2}^{n-1} C_i^3 = \sum_{i=0}^{n-1} C_i^3 = C_n^4$$

— второе равенство получено по $C_n^k = 0$ при $n < k$, последнее — по формуле суммирования по нижнему индексу.

Аналогично $\sum_{i=1}^{n-2} C_{n-i}^2 = \sum_{i=2}^{n-1} C_i^2 = C_n^3$ и получаем требуемое.

Задача 6.3. *Найти явный вид общего члена последовательности $u_0 = 1$, u_1, u_2, …, удовлетворяющую условиям*

$$\sum_{j=0}^{k} u_j u_{k-j} = 1,\ k \in \mathbb{N}. \qquad (*)$$

Решение. Напоминание:

$$A = \sum_{i\geqslant 0} a_i\,, \quad B = \sum_{i\geqslant 0} b_i\,, \quad A\cdot B = C = \sum_{k\geqslant 0} c_k,$$

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \text{ — } \textit{свёртка коэффициентов } a_i \text{ и } b_i\,.$$

Теперь ясно, что левая часть $(*)$ есть коэффициент при x в $\left(\sum_{k\geqslant 0} u_k x^k\right)^2$.

Положим $F(x) = \sum\limits_{k\geqslant 0} u_k x^k$. Тогда по $(*)$

$$F^2(x) = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}\,.$$

Следовательно,

$$F(x) = (1-x)^{-1/2} = \sum_{k\geqslant 0} \binom{-1/2}{k} (-1)^k x^k\,.$$

Находим u_k:

$$u_k = (-1)^k \binom{-1/2}{k} =$$

$$= (-1)^k \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\ldots\left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!} =$$
$$= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2^k k!} = \frac{(2k-1)!!}{2^k k!}.$$

Задача 6.4. *Для последовательности* $\{2^k + 3^k\}_{k\geqslant 0}$ *найти обычную и экспоненциальную ПФ.*

Решение.

- Обычная ПФ:

$$F(x) = \sum_{k\geqslant 0} u_k x^k = \sum_{k\geqslant 0} 2^k x^k + \sum_{k\geqslant 0} 3^k x^k =$$
$$= \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1-3x} = \frac{2-5x}{1-5x+6x^2}.$$

- Экспоненциальная ПФ:

$$F(x) = \sum_{k\geqslant 0} u_k \frac{x^k}{k!} = \sum_{k\geqslant 0} \frac{2^k x^k}{k!} + \sum_{k\geqslant 0} \frac{3^k x^k}{k!} = e^{2x} + e^{3x}.$$

Задача 6.5. *С помощью ПФ доказать тождество*

$$C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2.$$

Решение.

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n (1+x)^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{2n} C_{2n}^{i} x^{i} = \left(\sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} x^{k}\right)\left(\sum_{m=0}^{n} C_{n}^{m} x^{m}\right).$$

Сравнивая коэффициенты при x^n, получим

$$C_{2n}^{n} = \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} C_{n}^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(C_{n}^{k}\right)^{2}.$$

Задача 6.6. *Найти ПФ для последовательности чётных и нечётных номеров чисел Фиббоначи.*

Решение. Пусть $F(x)$ — ПФ для $(u_0,\, u_1,\, u_2,\, u_3 \ldots)$. Тогда $F(-x)$ — ПФ для $(u_0,\, -u_1,\, u_2,\, -u_3 \ldots)$.

Имеем $\dfrac{F(x)+F(-x)}{2}$ — ПФ для $(u_0,\, 0,\, u_2,\, 0 \ldots)$.

Отсюда $\left.\dfrac{F(y)+F(-y)}{2}\right|_{y^2=x}$ — ПФ для $(u_0,\, u_2,\, u_4,\, \ldots)$

и

$\left.\dfrac{F(y)-F(-y)}{2y}\right|_{y^2=x}$ — ПФ для $(u_1,\, u_3,\, u_5,\, \ldots)$.

ПФ для чисел Фиббоначи: $F(x) = \dfrac{1}{1-x-x^2}$.

Имеем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x-x^2} + \frac{1}{1+x-x^2}\right) = \frac{1-x^2}{1-3x^2+x^4}.$$

$$F(x)_{\text{чётн}} = \frac{1-x}{1-3x+x^2}.$$

$$\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{1-x-x^2}-\frac{1}{1+x-x^2}\right)=\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\cdot(1-3x^2+x^4)}\,.$$

$$F(x)_{\text{нечётн}}=\frac{1}{1-3x+x^2}\,.$$

Задача 6.7. *Вывести формулу для определителя $\triangle_n$ трёхдиагональной матрицы n-го порядка*

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

методами производящих функций и линейных рекуррентных последовательностей; считаем, что $\triangle_0 = 1$.

Решение. 1 — *методом производящих функций*
Имеем $\triangle_1 = 3$ и $\triangle_{n+1} = 3\triangle_n - 2\triangle_{n-1}$ для $n \geqslant 1$.

Найдём производящую функцию

$$F(x)=\sum_{n\geqslant 0}u_nx^n=1+3x+\sum_{n\geqslant 2}u_nx^n=$$

$$=1+3x+\sum_{n\geqslant 2}(3u_{n-1}-2u_{n-2})x^n=$$

$$=1+3x+3x\sum_{n\geqslant 2}u_{n-1}x^{n-1}-2x^2\sum_{n\geqslant 2}u_{n-2}x^{n-2}=$$

$$=1+3x+3x(F(x)-1)-2x^2F(x)=$$

$$= 1 + 3xF(x) - 2x^2F(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x)(1-3x+2x^2) = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{1-3x+2x^2}.$$

$$1 - 3x + 2x^2 = (1-ax)(1-bx) = 1 - (a+b)x + abx^2.$$

$$\begin{cases} a+b = 3, \\ ab = 2, \end{cases} \Rightarrow a = 1, \ b = 2.$$

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A - 2Ax + B - Bx = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B = 1, \\ 2A+B = 0, \end{cases} \Rightarrow A = -1, \ B = 2.$$

$$F(x) = \sum_{n\geqslant 0} u_n x^n = \frac{-1}{1-x} + \frac{2}{1-2x} =$$

$$= \sum_{n\geqslant 0}(-1)x^n + \sum_{n\geqslant 0} 2(2^n)x^n =$$

$$= \sum_{n\geqslant 0}(2^{n+1}-1)x^n \quad \Rightarrow \quad \triangle_n = 2^{n+1} - 1.$$

2 — *методом л.р.с.*

Соотношение: $\triangle_{n+2} - 3\triangle_{n+1} + 2\triangle_n = 0.$

Характеристическое уравнение:

$$P(x) = x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, \ x_2 = 2.$$

Общее решение: $u_n = \beta_1 + \beta_2 \cdot 2^n.$

Используя начальные условия —

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = 1 \\ \beta_1 + 2\beta_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_2 = 2 \\ \beta_1 = -1 \end{cases}.$$

Решение: $u_n = 2^{n+1} - 1$.

Задача 6.8. *Сколькими способами можно разменять монету* 20 *коп. монетами по* 1, 2, 3 *и* 5 *коп.?*

Решение. Строим ПФ по общей комбинаторной схеме.

$$F(x_1, \dots x_5) = (1 + x_1 + x_1^2 + \dots) \cdot (1 + x_2 + x_2^2 + \dots) \cdot$$
$$(1 + x_3 + x_3^2 + \dots) \cdot (1 + x_4 + x_4^2 + \dots) =$$
$$(\text{замена: } x_1 \mapsto x\,, \quad x_2 \mapsto x^2\,, \quad x_3 \mapsto x^3\,, \quad x_4 \mapsto x^5)$$
$$= (1 + x + x^2 + \dots) \cdot (1 + x^2 + x^4 + \dots) \cdot$$
$$(1 + x^3 + x^6 + \dots) \cdot (1 + x^5 + x^{10} + \dots) =$$
$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} = \sum_{k \geqslant 0} u_k x^k\,;$$

u_k — число разменов k копеек.

Обозначим

$$A(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} = \sum_{k \geqslant 0} a_k x^k\,,$$
$$a_0 = a_1 = 1;\ a_2 = 2\,;$$
$$B(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} = \sum_{k \geqslant 0} b_k x^k\,, \quad b_0 = b_1 = 1\,;$$
$$C(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots\,.$$

Непосредственно вычисляется

$u_0 = u_1 = 1;\ u_2 = 2,\ u_3 = 3;\ u_4 = 4,\ u_5 = 6.$

Имеем

$$A(x) = \sum_{k\geqslant 0} a_k x^k = (1-x^5) = \sum_{k\geqslant 0} u_k x^k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_k - u_{k-5} = a_k\,, \quad k \geqslant 5.$$

Аналогично

$$\begin{cases} a_k - a_{k-3} = b_k\,, & k \geqslant 3\,, \\ b_k - b_{k-2} = 1\,, & k \geqslant 2\,. \end{cases}$$

Или

$$\begin{cases} u_k = a_k + u_{k-5}\,, & k \geqslant 5\,, \\ a_k = b_k + a_{k-3}\,, & k \geqslant 3\,, \\ b_k = 1 + b_{k-2}\,, & k \geqslant 2\,. \end{cases}$$

Из последнего соотношения

$$B(x) \risingdotseq (1,\,1,\,2,\,2,\,3,\,3,\,\ldots)\,, \quad \text{или} \quad b_k = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1.$$

Раскрываем

$$u_{20} = u_{15} + a_{20} = a_{20} + a_{15} + u_{10} = a_{20} + a_{15} + a_{10} + u_5.$$

$$\begin{aligned} a_{20} &= b_{20} + b_{17} + b_{14} + b_{11} + b_8 + b_5 + a_2 = 44, \\ a_{15} &= b_{15} + b_{12} + b_9 + b_6 + b_3 + a_0 = 27, \\ a_{10} &= b_{10} + b_7 + b_4 + a_1 = 14. \end{aligned}$$

Окончательно, $\quad u_{20} = 44 + 27 + 14 + 6 = 91.$

Задача 6.9. *Найти асимптотику (скорость роста) чисел Каталана t_k при $k \to \infty$.*

Решение. Имеем

$$t_k = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k} = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{(2k)!}{k!k!},$$

и используя формулу Стирлинга $n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot (n/e)^n$ —

$$t_k \approx \frac{4^k}{k\sqrt{\pi k}}.$$

Глава 7

Случайные графы

7.1 Дискретная вероятность

Обозначения

$\lfloor x \rfloor$ — *пол*: $\arg\max\limits_{n\in\mathbb{N}_0}\{\, n \leqslant x \,\}, \qquad 0 \leqslant x;$

$\lceil x \rceil$ — *потолок*: $\arg\min\limits_{n\in\mathbb{N}_0}\{\, x \leqslant n \,\}, \qquad 0 \leqslant x;$

K_n — полный граф на n вершинах;

$K_k \leqslant K_n$ — подграф K_k графа K_k, $k \leqslant n$.

$K_{p,q}$ — полный двудольный граф на двух подмножествах вершин (долях) по p и q вершин в каждой доле соответственно.

2^M — булеан множества M.

$\mathbf{2}^n$ — конечная булева алгебра с n атомами.

Случайное событие — может произойти или не произойти в результате некоторого испытания (опыта).

$\mathsf{P}[A]$ — вероятность *события* A.

$$\mathsf{P}[A+B] \;=\; \mathsf{P}[A] + \mathsf{P}[B] - \mathsf{P}[A\cdot B],$$

$$\mathsf{P}\left[\sum_i A_i\right] \;\leqslant\; \sum_i \mathsf{P}[A],$$

$$\begin{aligned}\mathsf{P}[A\cdot B] \;&=\; \mathsf{P}[A]\cdot\mathsf{P}[B], \;\; \text{если события независимы},\\ &=\; \mathsf{P}[A]\cdot\mathsf{P}[B \mid A] = \mathsf{P}[B]\cdot\mathsf{P}[A \mid B], \;\; \text{иначе}.\end{aligned}$$

Если проводится n испытаний по схеме Бернулли с вероятностью единичного успеха p, то вероятность $P_{\geqslant 1}$ наблюдать хотя бы один успех —

$$P_{\geqslant 1} = 1 - (1-p)^n \leqslant np$$

Случайной называется *величина*, которая в результате испытания может принять то или иное возможное значение, неизвестное заранее, но обязательно одно.
Или: случайная величина (с.в.) — функция, заданная на множестве элементарных исходов случайного эксперимента и переводящая их в некоторое множество чисел.
$\mathrm{E}[X]$ — математическое ожидание с.в. X.
$\mathrm{D}[X] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2$ — дисперсия с.в. X.

Неравенство Чебышёва для неотрицательной случайной величины X с конечным математическим ожиданием $\mathrm{E}[X]$:

$$\mathsf{P}[X \geqslant \varepsilon] \leqslant \frac{\mathrm{E}[X]}{\varepsilon}.$$

Асимптотика при $n \to \infty$.

O: $f(n) = O(g(n)) \;\Leftrightarrow\; \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| \leqslant const$ — ограниченность сверху;

Ω: $f(n) = \Omega(g(n)) \;\Leftrightarrow\; \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| \geqslant const$ — ограниченность снизу;

Θ: $f(n) = \Theta(g(n)) \;\Leftrightarrow$ — ограниченность и сверху, и снизу;

o: $f(n) = o(g(n)) \;\Leftrightarrow\; \frac{f(n)}{g(n)} \to 0.$

Дискретная случайная величина: определение и примеры

<u>Определение</u> 7.1. Случайная величина называется *дискретной*, если пространство её элементарных исходов (носитель) $\Omega = \{\, \omega_0, \omega_1, \ldots \}$ не более, чем счётно.

Последовательность $p_0, p_1, \ldots$, где $p_k = \mathsf{P}[\omega_k] \geqslant 0$, $k = 0, 1, \ldots$, $\sum_k p_k = 1$, называется *дискретным распределением* или *функцией вероятности*.

Примеры 7.1. • *Распределение Бернулли* $B(p,q)$: $\Omega = \{\, 0, 1 \,\}$, $p_0 = p$, $p_1 = q$.

• *Биномиальное распределение* $Bi(n,k)$: результат n испытаний по схеме Бернулли с вероятностью $0 < p < 1$ каждое, $q = 1 - p$, $\Omega = \{\, 0, 1, \ldots, n \,\}$:

$$1 = (p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}_{p_k}$$

— вероятность наблюдения k успехов, $0 \leqslant k \leqslant n$.

• *Отрицательное биномиальное распределение* (распределение Паскаля) $NBi(k,p)$: $\Omega = \{\, 0, 1, \ldots \}$, $0 < q < 1$, $p = 1 - q$:

$$1 = \left(\frac{1-q}{1-q}\right)^n = (1-q)^n \cdot \frac{1}{(1-q)^n} =$$

$$= (1-q)^n \cdot \sum_{k \geqslant 0} \overline{C}_n^k q^k = \sum_{k \geqslant 0} \underbrace{\binom{n+k-1}{n-1} p^n (1-p)^k}_{p_k}$$

— распределение дискретной случайной величины равной количеству произошедших неудач в последовательности испытаний Бернулли с вероятностью успеха p, проводимой до n-го успеха.

- *Распределение Пуассона* $Po(\lambda)$:
  $\Omega = \{0, 1, \dots\}$, $\lambda > 0$.

$$1 = e^{-\lambda}e^{\lambda} = e^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots\right) = \sum_{k\geqslant 0} \underbrace{\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}}_{p_k}$$

Вероятность $\mathsf{P}[A]$ случайного события $A \subseteq \Omega$ есть $\sum\limits_{\omega\in A} p(\omega)$.

Классический способ задания вероятностей: количество элементарных исходов конечно и все они имеют одинаковую вероятность. Тогда вероятность любого события при конечном $|\Omega|$ определяется как отношение его мощности.

Пример 7.1. *Гипергеометрическое распределение* $HGe(k; N, D, n)$: имеется множество из N объектов, из которых D дефектных; если из данного множества делается случайная n-выборка, то какова вероятность, что в ней окажется ровно d дефектных объектов?

$$\overbrace{\circ\ \circ\ \dots\ \circ}^{N-D}\ \overbrace{\bullet\ \bullet\ \dots\ \bullet}^{D} \qquad N \qquad 0 \leqslant D \leqslant N$$

$$\underbrace{\circ\ \dots\ \circ}_{n-d}\ \underbrace{\bullet\ \dots\ \bullet}_{d} \qquad n \qquad 0 \leqslant d \leqslant n \leqslant N$$

$$p_d = \frac{C_{N-D}^{n-d} \cdot C_D^d}{C_N^n}.$$

7.2 Понятие о вероятностном методе

Вероятностный метод, предложенный П.Эрдёшем в середине XX в., стал мощным инструментом для решения многих задач дискретной математики.

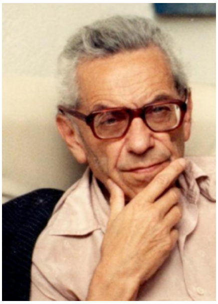
Идея метода очень проста:

для доказательства существования объекта с данными свойствами определяют подходящее вероятностное пространство объектов, а затем показывают, что при случайном выборе объекта вероятность наличия у него интересующих свойств строго положительна.

Грубо говоря, этот метод работает следующим образом: пытаясь доказать, что структура с некоторыми искомыми свойствами существует, мы определяем подходящее вероятностное пространство структур, а затем показываем, что искомые свойства выполняются для случайно выбранного элемента в этом пространстве с положительной вероятностью.

Доказательства в математике:

- *в конструктивных* доказательствах проводится предъявление требуемого объекта или алгоритм его построения;
- *в экзистенциальных* доказательствах доказывается, лишь что объект существует, поскольку является элементом некоторого непустого множества.



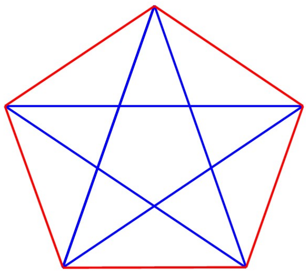
Пал Эрдёш (венг. Erdős Pál, 1913–1996) — венгерский «странствующий математик». Количество написанных им научных статей, так же как и число его соавторов не имеет аналогов среди современных математиков.

Числа Рамсея

<u>*Определение*</u> 7.2. *Число Рамсея* $R(k,l)$ есть наименьшее целое n, такое, что *при любой раскраске ребёр* K_n в синий и красный цвета существует либо красная клика K_k, либо синяя клика K_l.

Рамсей показал, что число $R(k,l)$ конечно для любых k и l. R(3,3)

Гипотеза: $R(3,3) \stackrel{?}{=} 5$.
Т.е. можно ли рёбра полного 5-вершинного графа раскрасить в синий и красный цвета так, чтобы не оказалось ни синего, ни красного треугольника? Можно: $\longrightarrow$



Поэтому $6 \leqslant R(3,3)$.

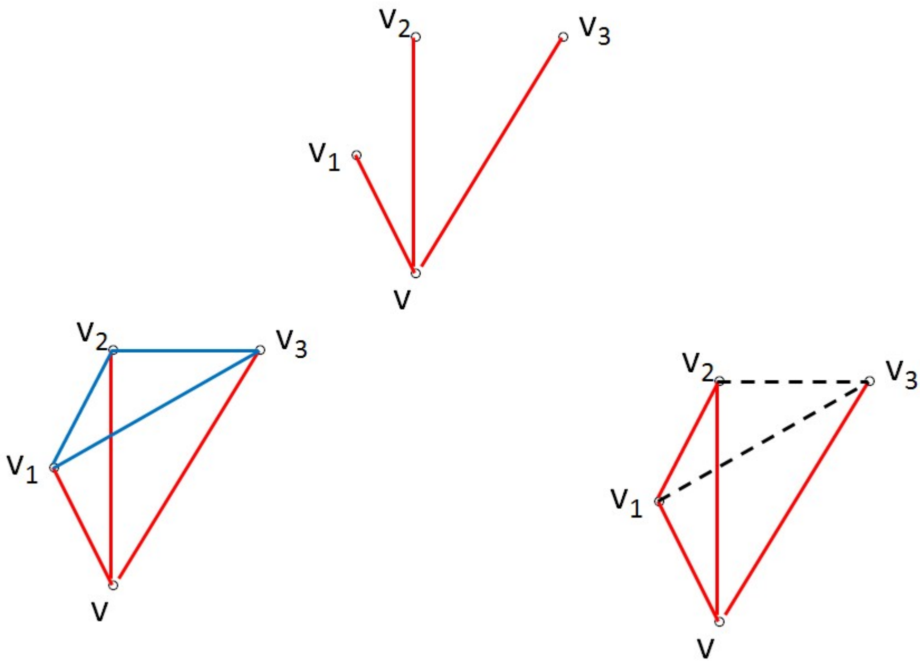
Покажем, что $R(3,3) \leqslant 6$, откуда $R(3,3) = 6$.

1. Ясно, что любой раскраске рёбер графа K_6 в синий и красный цвета каждой его вершине инцидентно либо не менее 3 синих рёбер, либо не менее 3 красных.

2. Рассмотрим произвольную вершину $v \in V(K_6)$ и пусть ей инцидентно 3 красных ребра (v,v_1), (v,v_2), (v,v_3). Тогда для рёбер (v_1,v_2), (v_2,v_3) и (v_3,v_1) возможны 2 случая:

1) все они синие, и тогда они образуют синий треугольник;
2) хотя бы одно из этих рёбер красное, например, (v_1, v_2), и тогда рёбра (v, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v) образуют красный треугольник.

3. Если вершине $v \in V(K_6)$ ей инцидентно 3 синих ребра, рассуждения аналогичны.



Числа Рамсея трудновычислимы: количество C_n всевозможных 2-раскрасок рёбер полного n-вершинного графа равно $2^{\binom{n}{2}}$, и, например

$$|V(K_{40})| = \frac{40 \cdot 39}{2} = 780, \quad C_{40} = 2^{780} \approx 6{,}36 \cdot 10^{234}.$$

Ясно, что $R(1,l)=1$ и $R(2,l)=l$.
Некоторые известные значения $R(k,l)$ и их оценки:

$R(k,l)$	3	4	5	6	7
3	6	9	14	18	23
4	9	18	25	36...41	49...61
5	14	25	43...49	58...87	80...143
6	18	36...41	58...87	102...165	113...298

Эрдёш полагал, что в случае крайней необходимости человечество ещё способно найти $R(5,5)$, но не $R(6,6)$. Он нашёл способ получить нижнюю оценку диагональных чисел Рамсея, используя вероятностный метод.

Нижняя оценка диагонального числа Рамсея — пример применения вероятностного метода.

Утверждение 7.1. *Если* $C_n^k\cdot 2^{1-C_k^2}<1$, *то* $R(k,k)>n$. *Таким образом,* $R(k,k)>\lfloor 2^{k/2}\rfloor$ *для всех* $k\geqslant 3$.

Доказательство. Рассмотрим случайную раскраску ребер графа K_n в красный и синий цвета равновероятно и независимо друг от друга.

Определим для каждой k-клики K_k графа K_n, $k\leqslant n$ событие

$$M(K_k)=1 \Leftrightarrow \textit{подграф } K_k - \textit{ монохроматический}$$

(или *одноцветный*, все его ребра являются либо являются красными, либо синими).

Ясно, что $\mathsf{P}[M(K_k)]=\frac{2}{2^{C_k^2}}=2^{1-C_k^2}=p_k$ (два варианта из $2^{C_k^2}$ возможных 2-цветных раскрасок всех C_k^2 рёбер подграфа).

Т.к. существует C_n^k вариантов выбора подграфа K_k, то вероятность P того, что по крайней мере одно из событий $M(K_k)$ произойдет —

$$\mathsf{P}_{\geqslant 1} = 1 - (1 - p_k)^{C_n^k} \leqslant C_n^k \cdot 2^{1 - C_k^2} < 1.$$

Тогда вероятность $1 - \mathsf{P}_{\geqslant 1}$, что *ни одного такого события не произойдёт* строго положительна, т.е. существует 2-раскраска графа K_n без одноцветных k-клик и $R(k,k) > n$.

Если $k \geqslant 3$ и $n = \lfloor 2^{k/2} \rfloor$, то

$$C_n^k 2^{1 - C_k^2} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot 2^{1 - k^2/2 + k/2} < \frac{n^k}{k!} \cdot \frac{2^{1+k/2}}{2^{k^2/2}} < 1,$$

следовательно, $R(k,k) > n = \lfloor 2^{k/2} \rfloor$ для всех $k \geqslant 3$. $\square$

Принцип Дирихле: если n кроликов рассажены в k клеток, то гарантировать, что в одной из клеток находится более одного кролика, можно если $n > k$, а если $k > n$, то как минимум одна клетка пуста.

Вариант — «принцип голубей и ящиков» (Pigeonhole principle). Теория Рамсея обобщает этот принцип.

Числа Рамсея в общем случае: $R(k_1,\, k_2;\, r)$, $2 \leqslant r$ — мощность подмножеств вершин графа, т.е. рассматриваются гиперграфы, $R(k,\, l) = R(k,\, l;\, 2)$.

Наилучшие оценки для чисел Рамсея получены с помощью вероятностного метода.

Фрэнк Пламптон Рамсей
(Frank Plumpton Ramsey, 1903–1930)
— английский математик, успевший внести также значительный вклад в философию и экономическую науку.

Он доказал, что упорядоченные конфигурации неизбежно присутствуют в любой большой структуре.

...

Если взять пример со звёздами, то всегда можно найти в ней группу, которая с очень большой точностью образует какую-нибудь заданную конфигурацию: прямую линию, прямоугольник и др. Фактически теория Рамсея утверждает, что любая большая структура обязательно содержит упорядоченную подструктуру.

= *полная неупорядоченность невозможна.*

Из доказательства $R(k,k) > \lfloor 2^{k/2} \rfloor$, $k \geqslant 3$ следует, что существует реберная 2-раскраска графа K_n *без одноцветных клик* $K_{2\log_2 n}$.

Как найти такую раскраску явно?

Полная проверка *одного* подграфа K_k — $2^{C_k^2} = 2^{k^2/2-k/2}$ вариантов.

Для больших k при $n = \lfloor 2^{k/2} \rfloor$ выполнено

$$C_n^k \cdot 2^{1-C_k^2} < \frac{2^{1+k/2}}{k!} \left(\frac{n}{2^{k^2/2}}\right)^k \leqslant \frac{2^{1+k/2}}{k!} \ll 1.$$

$\Rightarrow$ случайная раскраска графа K_n с большой вероятностью не содержит одноцветных подграфов подграфов $K_{2\log_2 n}$.

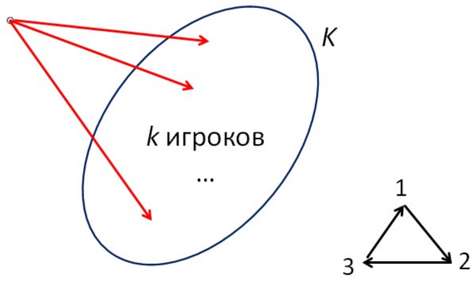
Чтобы представить явно 2-раскраску ребер графа K_{1024} без одноцветных подграфов K_{20}, то можно подбросить правильную монету C^2_{1024} раз и получить требуемую раскраску: вероятность того, что раскрашенный полный граф содержит одноцветный подграф K_{1024} меньше $\frac{2^{11}}{20!} \approx 8,4 \cdot 10^{-16}$.

Применение вероятностного метода: турниры

Определение 7.3. *Турнир T* на множестве из n игроков есть результат ориентации ребер K_n (= полный n-вершинный орграф).

Турнир T обладает свойством S_k, *если для каждого k-элементного подмножества* игроков найдется хотя бы один игрок, который побеждает их всех — *победитель.*

Например, ориентированный треугольник с $V = \{1, 2, 3\}$ и $E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ обладает свойством S_1.



Проблема Шютте — верно ли, что для любого конечного k существует турнир T (с более чем k вершинами), обладающий свойством S_k?

Случайный турнир — турнир, получаемый из полного графа выбором для каждой пары его вершин u

и v независимо и равновероятно либо дуги (u, v), либо дуги (v, u).

При этом все $2^{C_n^2}$ возможных турниров на множестве V равновероятны.

Идея: если n достаточно велико по сравнению с k, то случайный турнир на множестве $V = \{1, \ldots, n\}$ с большой вероятностью обладает свойством S_k.

Теорема 7.1 (Эрдёш, 1963). *Если* $C_n^k \left(1 - 2^{-k}\right)^{n-k} < 1$, *то существует турнир на* n *вершинах, обладающий свойством* S_k.

Доказательство. Рассмотрим случайный турнир на множестве $V = \{1, \ldots, n\}$.

Для каждого k-элементного подмножества вершин $K \subseteq V$ определим событие N_k, состоящее в том, что *не существует* победителя K.

Поскольку для каждой вершины $v \in V \setminus K$ вероятность того, что v *не есть* победитель K равна $1-2^{-k}$, и все $n-k$ событий, соответствующих различным выборам вершин v, независимы, то

$$\mathsf{P}[N_k] = \left(1 - 2^{-k}\right)^{n-k}.$$

Оценим вероятность P того, что *хотя бы одно* событие N_k произошло:

$$P = \mathsf{P}\left[\sum_{\substack{K \subseteq V \\ |K|=k}} N_k\right] \leqslant \sum_{\substack{K \subseteq V \\ |K|=k}} \mathsf{P}[N_k] = C_n^k \left(1 - 2^{-k}\right)^{n-k} < 1.$$

Следовательно, с положительной вероятностью $1-P$ ни одно из событий N_k *не происходит* $\Rightarrow$ существует турнир на n вершинах, обладающий свойством S_k. $\square$

7.3 Модели случайных графов

Модель Эрдёша-Реньи — исторически первая модель случайного графа.

На множестве $V_n = \{1, \ldots, n\}$ вершин вводим множество рёбер E, соединяя пару вершин ребром с заданной вероятностью $p \in (0,1)$ независимо от всех остальных пар вершин.

Т.о. ребра появляются в соответствии со схемой Бернулли, из C_n^2 испытаний с вероятностью единичного успеха p. Ясно, что E — случайное множество.

$G(n,p) = (V_n, E)$ — случайный граф в модели Эрдёша-Реньи.

В аксиоматике Колмогорова получим дискретное вероятностное пространство $G(n,p) = (\Omega_n,\ \mathcal{F}_n,\ \mathrm{Pr}_{n,p})$, в котором

$$\Omega_n = \{G = (V_n, E)\}, \quad \mathcal{F}_n = \mathbf{2}^{\Omega_n},$$
$$\mathrm{Pr}_{n,p}[G] = p^{|E|}(1-p)^{C_n^2 - |E|}.$$

При $p = \frac{1}{2}$ вероятность выбора любого графа равна $2^{-C_n^2}$.

Элементы сигма-алгебры $\mathcal{F}_n$ — наборы графов. Вероятность, с которой граф на n вершинах обладает данным свойством A:

$$\mathrm{Pr}_{n,p}[\mathcal{A}] = \sum_{G \in \mathcal{A}} \mathrm{Pr}_{n,p}[G],$$

где множество $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_n$ состоит из всех графов, для которых выполнено свойство A.

Свойство A *выполнено почти всегда* или *с большой вероятностью* (*whp* — with hight probability), если

$$\mathrm{Pr}_{n,p}[\mathcal{A}] \to 1 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Модель Эрдёша-Реньи: транспортная интерпретация. Представим себе, что в некоторой стране есть n городов, которые попарно соединены дорогами[1].

Допустим, каждая из дорог за определенный срок изнашивается и становится непроезжей с известной вероятностью q, а износ данной дороги никак не зависит от износа остальных дорог.

Вопрос: какова *максимальная вероятность* q, при которой *whp* ещё не исчезнет возможность перемещения между любыми двумя городами?

Сопоставим (1) каждому из n городов — вершину $i \in V_n$, (2) дороге между городами i и j — соответствующее ребро и (3) износу дороги — исчезновение ребра. Тогда утверждение «*дорога изнашивается с вероятностью q*» = утверждению «*ребро появляется с вероятностью $p = 1 - q$*».

Теорема 7.2. *Пусть $p = \frac{c \ln n}{n}$ в модели $G(n, p)$. Если $c > 1$, то почти всегда случайный граф связен, если $c < 1$, то почти всегда случайный граф не является связным.*

[1] сильное предположение, однако

Доказательство. 1. Случай $c > 1$.
Введем случайную величину на пространстве $G(n, p)$:

$$X_n = X_n(G) = \begin{cases} 0, & \text{если } G \text{ связен}, \\ k, & \text{если у } G \text{ ровно } k \text{ компонент}. \end{cases}$$

Т.о. X_n принимает значения 0, 1, 2, ...
Покажем, что $\Pr_{n,p}[X_n = 0] \to 1$ при $n \to \infty$, что равносильно $\Pr_{n,p}[X_n > 1] \to 0$.

По неравенству Чебышёва: $\Pr_{n,p}[X_n \geqslant 1] \leqslant \mathrm{E}[X_n]$, и нам остается обосновать стремление к нулю $\mathrm{E}[X_n]$.

Представим X_n в виде суммы

$$X_n = X_{n,1} + \ldots + X_{n,n-1},$$

где $X_{n,k} = X_{n,k}(G)$ — число k-вершинных компонент графа G.

Занумеруем все k-элементные подмножества множества вершин V_n случайного графа в некотором (произвольном) порядке: $K_1, \ldots, K_{C_n^k}$.

Тогда, в свою очередь — $X_{n,k} = X_{n,k,1} + \ldots + X_{n,k,C_n^k}$, поскольку

$$X_{n,k,i} = X_{n,k,i}(G) = \\ = \begin{cases} 1, & \text{если } K_i \text{ образует компоненту } G, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

В итоге

$$\mathrm{E}[X_n] = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{C_n^k} \mathrm{E}[X_{n,k,i}].$$

Очевидно,

$$\mathrm{E}[X_{n,k,i}] = \Pr_{n,p}[K_i \text{ образует компоненту в } G] \leqslant$$

$$\leqslant \Pr_{n,p}[\text{из } K_i \text{ в } V_n \setminus K_i \text{ нет рёбер в } G].$$

Получая последнее неравенство, мы пренебрегли условием связности той части графа G, которая «сидит» на множестве вершин K_i (такую часть принято называть *индуцированным подграфом*, символически $G|_{K_i}$).

Далее,

$$\Pr_{n,p}[\text{из } K_i \text{ в } V \setminus K_i \text{ нет ребер в } G] = (1-p)^{k(n-k)},$$

и, значит,

$$\mathrm{E}[X_n] \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{C_n^k} (1-p)^{k(n-k)} = \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k (1-p)^{k(n-k)}.$$

Последняя сумма симметрична в том смысле, что её слагаемые при k и $n-k$ равны. Рассмотрим $k = 1$:

$$n(1-p)^{n-1} \leqslant ne^{-p(n-1)} = ne^{-\frac{c(\ln n)(n-1)}{n}} =$$

$$= n\left(\frac{1}{n}\right)^{c(1+o(1))} = o(1), \text{ поскольку } c > 1.$$

Оставшаяся часть рассуждения состоит в доказательстве того, что слагаемые с $k > 1$ и $k < n-1$ пренебрежимо малы по сравнению с первым слагаемым.

Соответствующую выкладку мы пропустим. Если же поверить в её справедливость, то получится, что вся сумма доминируется первым и последним слагаемыми, а стало быть, и она стремится к нулю.

Теорема для случая $c > 1$ доказана.

2. Случай $c < 1$.

Обозначим через X_n количество изолированных вершин в случайном графе. Запишем

$$X_n \;=\; X_{n,1} + \ldots + X_{n,n},$$

где

$$X_{n,k} \;=\; X_{n,k}(G) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{если вершина } k \in V_n \\ & \quad\text{— изолированная в } G; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда $\quad \mathrm{E}[X_n] \;=\; \mathrm{E}[X_{n,1}] + \ldots + \mathrm{E}[X_{n,n}].$

В свою очередь

$$\mathrm{E}[X{+}n,k] \;=\; \mathrm{Pr}_{n,p}[k \text{ — изолированная в } G] \;=\; (1{-}p)^{n-1}.$$

Таким образом,

$$\mathrm{E}[X_n] \;=\; n(1-p)^{n-1} \;=\; n\,(1-p)^n(1+o(1)) \;=\\ \;=\; (1+o(1))\,ne^{-c\ln n} \;=\; (1+o(1))\,n^{1-c}.$$

Заметим, что ввиду неравенства $c < 1$ выполнено $\mathrm{E}[X_n] \to \infty$.

Посчитаем дисперсию случайной величины X_n:

$$D[X_n] \;=\; \mathrm{E}[X_n^2] - (\mathrm{E}[X_n])^2 \;=\\ =\; \mathrm{E}[X_{n,1} + \ldots + X_{n,n}]^2 - (\mathrm{E}[X_n])^2 \;=\\ =\; \mathrm{E}[X_{n,1}^2 + \ldots + \mathrm{E}[X_{n,n}^2] + \sum_{i\neq j} \mathrm{E}[X_{n,i}X_{n,j}] - (\mathrm{E}[X_n])^2 \;=\\ =\; \mathrm{E}[X_{n,1}] + \ldots + \mathrm{E}[X_{n,n}] + \sum_{i\neq j} \mathrm{E}[X_{n,i}X_{n,j}] - (\mathrm{E}[X_n])^2 \;=\\ =\; \mathrm{E}[X_n] + \sum_{i\neq j} \mathrm{E}[X_{n,i}X_{n,j}] - (\mathrm{E}[X_n])^2.$$

Далее,

$$\mathrm{E}[X_{n,i}X_{n,j}] \;=\; \mathsf{P}[i \text{ и } j \text{ изолированы в } G] \;=$$

$$= (1-p)^{2n-1} = (1+o(1))(1-p)^{2n},$$

$$\sum_{i\neq j} \mathrm{E}[X_{n,i}X_{n,j}] = n(n-1)(1+o(1))(1-p)^{2n} =$$
$$= (1+o(1))\, n^{2-2c} = (1+o(1))(\mathrm{E}[X_n])^2.$$

В итоге

$$\mathrm{D}[X_n] = \mathrm{E}[X_n] + (1+o(1))(\mathrm{E}[X_n])^2 - (\mathrm{E}[X_n])^2 =$$
$$= o\left((\mathrm{E}[X_n])^2\right).$$

По неравенству Чебышёва

$$\mathrm{Pr}_{n,p}[G \text{ связен}] \leqslant \mathrm{Pr}_{n,p}[X_n = 0] = \mathrm{Pr}_{n,p}[X_{\leqslant} 0] =$$
$$= \mathrm{Pr}_{n,p}[-X_n \geqslant 0] =$$
$$= \mathrm{Pr}_{n,p}\left[\,\mathrm{E}[X_n] - X_n \geqslant \mathrm{E}[X_n]\right] \leqslant \tfrac{\mathrm{D}[X_n]}{(\mathrm{E}[X_n])^2} = o(1).$$

и вторая часть теоремы доказана. □

Надежность сети: обсуждение результатов

1. *Сохранение связанности графа при* $p \to 0$.

При $n \to \infty$, $p = \frac{c\ln n}{n} \to 0$ (довольно быстро), но при $c > 1$ *граф остаётся связным.*

Например, для 1000 городов мы можем позволить дорогам разрушаться с вероятностью 0,993 и при этом с вероятностью, близкой к единице, перемещение между любыми двумя городами всё ещё останется возможным.

2. *Резкий скачок связаности.*

Функция $p(n) = \frac{\ln n}{n}$ служит границей перехода от «почти всегда связности» к «почти всегда несвязности».

Такой переход принято называть *фазовым*, а соответствующую функцию $p(n)$ — *пороговой.*

~~Теорема~~ 7.3. *Пусть $p = \frac{c \ln n}{n}$ в модели $G(n, p)$. Тогда если $c > 3$, то при $n > 100$*

$$\mathrm{Pr}_{n,p}[G \text{ связен}] \geqslant 1 - \frac{1}{n}.$$

Из этой теоремы следует, что, например, при $n = 1000$ городов и вероятности износа дороги $1 - \frac{3 \ln 1000}{1000} \approx 0{,}98$ вероятность сохранения связанности не менее $0{,}999$!

Теорема 7.4 (Эрдёш и Реньи). *Пусть $p = \frac{c}{n}$ в модели $G(n, p)$. Тогда если*

- *$c < 1$, то найдется такая константа $\beta = \beta(c)$, что почти всегда размер каждой связной компоненты случайного графа не превосходит $\beta \ln n$;*
- *$c > 1$, то найдется такая константа $\gamma = \gamma(c)$, что почти всегда в случайном графе есть ровно одна компонента размера $\geqslant \gamma n$.*

Снова фазовый переход — с пороговой функцией $p = \frac{1}{n}$: если вероятность ребра в $c > 1$ раз

- *ниже порога*, то все связные компоненты графа, скорее всего, крошечные (имеющие логарифмический размер от общего числа вершин n);
- *выше порога*, то, скорее всего, найдется компонента с числом вершин порядка n. Такая компонента называется *гигантской.*

Эволюция графа. Уточнения теоремы Эрдёша–Реньи:

- при $c > 1$, помимо единственной гигантской компоненты, в случайном графе ничего сколь-нибудь крупного почти никогда не возникает: все остальные компоненты снова логарифмические;
- верны не только неравенство $\geqslant \gamma n$, но и асимптотика $\sim \gamma n$.

Изменение свойств случайного графа при изменении вероятности ребра p — *эволюция графа.*

Терминология А.М.Райгородского: *история мира.*

$p \ll \frac{1}{n}$ («*феодализм*») — весь граф поделен на несвязанные между собой логарифмические кусочки;

$p \gg \frac{1}{n}$ («*империя*») — гигантская компонента;

$p \gg \frac{\ln n}{n}$ («*мировое господство*») — «империя» уничтожает «окраины» и добивается всеобщей связности.

Устройство «мира» «внутри фазовых переходов» т.е. при:

$$p \sim \frac{1}{n} \text{ — всё сложно;}$$

$$p \sim \frac{\ln n}{n} \text{ — имеется}$$

Теорема 7.5. *Пусть $p = \frac{\ln n + c + o(1)}{n}$. Тогда*

$$\Pr_{n,p}[\,G \textit{ связен}\,] \to e^{-e^{-c}}.$$

В частности, при $p = \frac{\ln n}{n}$ вероятность стремится к e^{-1}.

Здесь уже речь не идёт о «почти всегда связности» или «почти всегда несвязности»: асимптотическая вероятность связности есть, но она лежит в строгих пределах от 0 до 1.

Обобщения модели Эрдёша-Реньи

1. Пусть на вершинах $V_n = \{1, \ldots, n\}$ графа вероятность ребра между вершинами i и j есть p_{ij}, т.е. ребра появляются независимо друг от друга, но с разными вероятностями.

В формате аксиоматики Колмогорова получаем дискретное вероятностное пространство, элементы которого суть

$$\Omega_n = \{G = (V_n, E)\}, \quad \mathcal{F}_n = \mathbf{2}^{\Omega_n},$$
$$\Pr\nolimits_{n,p_{ij}}[G] = \prod_{(i,j)\in E} p_{ij} \cdot \prod_{(i,j)\notin E} (1 - p_{ij}).$$

2. Фиксируем некоторый граф $H_n = (V_n, E_n)$ и полагаем

$$p_{ij} = \begin{cases} p, & (i,j) \in E, \\ 0, & (i,j) \notin E \end{cases}$$

(ребра графа H_n возникают в случайном графе независимо друг от друга с одной и той же вероятностью $p = p(n) \in [0,1]$, а ребра, которых в нём нет, не возникают вовсе).

Этот вариант модели принято обозначать $G(H_n, p)$, в ней

$$\Pr\nolimits_{n,n_{ij}}\left[G\right] = p^{|E|}(1-p)^{|E_n|-|E|}.$$

Модель $G(H_n, p)$ вполне адекватна вопросу о надежности транспортной сети: с самого начала можно зафиксировать граф дорог H_n и следить за износом его ребер.

Модель $G(H_n, p)$ — более адекватная реальности и более сложная для изучения, чем $G(n, p)$.

Главный результат относительно этой модели — нетривиальная

Теорема 7.6 (Г.А. Маргулис). *Пусть* $\{H_n\}$ *— последовательность графов, реберная связность которых стремится к бесконечности при* $n \to \infty$. *Тогда существует пороговая функция p для свойства связности случайного графа в модели* $G(H_n, p)$.

Поиск пороговой функции, существование которой доказывается в теореме — всякий раз сложная задача, повязанная на специфику графов из последовательности $\{H_n\}$.

Григорий Александрович Маргулис (1946) — российский и американский математик, д.ф.-м.н., научный сотрудник ИППИ РАН, с 1991 г. — профессор Йельскогоуниверситета (США). Лауреат *премии Дж. Филдса* (1978, на церемонии вручения не присутствовал, т.к. ему было отказано в выездной визе) и *премии Вольфа* (2005). Член Национальной академии наук США, действительный членом Американского математического общества.

Законы 0 и 1

Свойство случайного графа *подчиняется закону 0 и 1*, если оно *почти наверное* либо выполнено, либо не выполнено.

Язык LG-I первого порядка для описания свойств графов — содержит символы:

- *предметных переменных* — x, y, ..., обозначают вершины графа;
- *отношения* $\sim$ смежности вершин;
- *логических связок* — $\neg$, $\vee$, $\&$, $\supset$, $\equiv$;
- *кванторов* — $\forall$, $\exists$;
- *отношения* $=$ равенства выражений;
- скобок (,) — *вспомогательные символы*[2].

Правила образования конечных выражений (*формул языка*) — обычные.

Примеры 7.2 (формул LG-I).

1. *Граф содержит треугольник*:

$$\exists\, x\, \exists\, y\, \exists z : (x \sim y)\,\&\,(y \sim z)\,\&\,(z \sim x).$$

2. *Отсутствие изолированной вершины*:

$$\forall\, x\, \exists\, y : x \sim y$$

3. *Радиус графа не больше 2*:

$$\exists\, x\, \forall\, y : \neg(x = y)\,\&\,\neg(x \sim y) \supset \exists\, z : (x \sim z)\,\&(z \sim y)$$

[2] они обеспечивают правильное чтение выражений

Не все свойства графа выразимы на языке LG-I, например «*граф связен*»:

$$\forall x \,\forall y\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \,\exists x_1, \ldots, x_n : \\ (x \sim x_1) \,\&\, (x_1 \sim x_2) \,\&\, \ldots \,\&\, (x_n \sim y)$$

— утверждение $\exists n \in \mathbb{N}_0$ *невыразимо на языке I-го порядка.*

Законы 0 и 1: результаты.

Теорема 7.7. *При $p = const$ свойство графа, которое возможно записать на языке первого порядка, подчиняется закону 0 и 1.*

Теорема 7.8. *При $p = n^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$ свойство графа, которое возможно записать на языке первого порядка, подчиняется закону 0 и 1.*

Теоремы доказываются с помощью игры Эренфойхта. Рассмотрим её вариант на графах.

Игра Эренфойхта $EHR[G, H, t]$.

Правила. Пусть G и H — два графа с непересекающимися множествами вершин.

Игру ведут два игрока — *Новатор* (H) и *Консерватор* (K)[3]. Игроки ходят по очереди, выбирая и отмечая вершины в графах, причём одна и та же вершина может быть выбрана неоднократно.

[3] В оригинале — *Spoiler* (разрушитель) и *Duplicator* (повторитель); используя те же инициалы, их иногда называют *Самсон* и *Далила*.

- Сначала H объявляет натуральное t — количество ходов, которое сделает каждый игрок, выбирает *один из графов и отмечает некоторую вершину в нём.*
- Затем K должен отметить какую-либо вершину *в другом графе.*
- Далее опять H *выбирает граф и отмечает некоторую вершину в нём* и т.д.

К концу игры выбрано, не важно кем, по t вершин из каждого графа.

K выигрывает, если подграфы G и H на выбранных вершинах *изоморфны*, иначе выигрывает H.

Поскольку $EHR[G,H,t]$ — детерминированная игра с полной информацией без ничьих, то *один из игроков должен иметь выигрышную стратегию.*

Утверждение 7.2. 1. *Графы элементарно эквивалентны (изоморфны) iff в игре $EHR[G,H,t]$ Консерватор имеет выигрышную стратегию.*

2. *Для любого свойства S I-го порядка существует такое $t=t(S)$, что для любых графов G и H из которых один обладает, а другой — не обладает свойством S, Новатор имеет выигрышную стратегию в игре $EHR[G,H,t]$.*

Игра Эренфойхта $EHR[G,H,t]$: поиграем

1. Если графы *изоморфны*, то выигрышная стратегия K — помечать вершину, изоморфную выбранной H.

2. Для сигнатуры $\sigma = \{=,<\}$ покажем, что две однотипные алгебраические системы (АС) этой сигнатуры с носителями $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ не являются элементарно

эквивалентными (среди натуральных чисел есть наименьшее, а среди целых — нет).

Покажем, что в игре Эренфойхта для этих АС новатор H имеет выигрышную стратегию.

- H объявляет, что игра будет проведена в $t = 2$ хода и помечает число 1 на графе Хассе $\mathbb{N}$.
- В ответ K обязан пометить некоторое число $m \in \mathbb{Z}$.
- На 2-м ходу H помечает в $\mathbb{Z}$ любое число, строго меньшее m.

Теперь K проигрывает при любом ответном ходе: пометить на $\mathbb{N}$ число, меньшее 1, он не может.

3. Покажем в той же сигнатуре, что АС $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ не элементарно эквивалентны (порядок на рациональных числах плотен, а на целых — нет), т.е. что в игре Эренфойхта новатор H всегда может выиграть.

- H объявляет, что игра будет проведена в $t = 3$ хода и на первых двух ходах помечает числа 0 и 1 из $\mathbb{Z}$.
- В ответ K помечает некоторые числа $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ ($q_1 < q_2$, иначе H заведомо выиграет).
- На 3-м ходу H помечает помечает в $\mathbb{Q}$ любое число, лежащее строго между q_1 и q_2.

Т.к. в $\mathbb{Z}$ между 0 или 1 нет целых чисел, K проигрывает при любом своём ходе.

4. Пусть S обозначает свойство $\forall x\, \exists y : x \sim y$ отсутствия изолированной вершины, граф G имеет изолированную вершину (обладает свойством S), а H — не имеет.

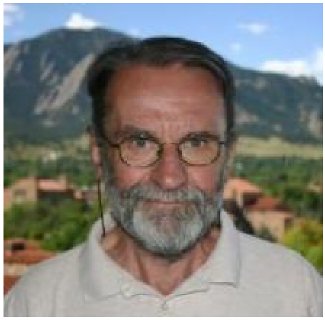
Покажем, что тогда K не имеет выигрышной стратегии в игре Эренфойхта.

- H объявляет, что игра будет проведена в $t = 2$ хода и отмечает изолированную вершину x в G.
- В ответ K помечает произвольную вершину в $y_1 \in H$.
- На 2-м ходу H помечает вершину в $y_2 \in H$, смежную с y_1.

Теперь K гарантировано проигрывает, т.к. не может выбрать в G вершину, смежную с x.

Стратегии: H выбирает некоторые «специфические элементы», а K на другой структуре старается выбрать элементы «максимально похожие» на них.

Роланд Фраисé
(Roland Fraisse, 1920–2008)
— франко-алжирский специалист
в области математической логики,
профессор Университета Прованса,
г. Марсель.



Анже́й Эренфо́йхт (Andrzej Ehrenfeucht, 1932) — польско-американский математик, один из основателей факультета Компьютерной математики Университета Колорадо, г. Болдер, США. Двое его студентов Eugene Myers и David Haussler внесли определяющий вклад в расшифровку генома человека.

Р. Фраисе в своей докторской диссертации (1953) предложил метод «вперёд-назад» для определения, являются ли две алгебраические структуры АС *элементарно эквивалентныи* (в них одновременно истины/ложны одни и те же формулы данной сигнатуры АС).

Чуть позже метод переоткрыл *Асан Дабсович Тайманов* (1917–1990).

В треминах игры метод переформулирован А. Эренфойхтом (1960).

Идея метода Фраисе-Эренфойхта — одна из самых плодотворных в математике XX в.: она оказалась применимой к широкому спектру логик и АС.

Теорема 7.9. *Функция $p = p(n)$ удовлетворяет закону 0 или 1 если и только если для любого t*

$$\lim_{m,n\to\infty} \Pr\left[\, K \text{ выигрывает } EHR\,[G(n,p(n))]\,,\right.$$
$$\left. H(m,p(m)),\, t\right] \,=\, 1,$$

где $G(n,p(n))$, $H(m,p(m))$ — независимые случайные графы в модели Эрдёша-Реньи с непересекающимися множествами вершин.

Замечание. Когда задано вероятностное распределение по (G,H), существует вероятность P того, что игра $EHR\,[\,G,H,t\,]$ будет выиграна K, и эта вероятность P должна стремиться к единице.

Доказательство. Докажем только необходимость.

Предположим, что значение $p = p(n)$ не удовлетворяет закону 0 или 1. Пусть свойство S такое, что для $0 < c < 1$ справедливо

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\Big[\,\text{граф } G(n,p(n))\text{обладает свойством } S\,\Big] \,=\, c.$$

Пусть $t = t(A)$ удовлетворяет условию леммы.
С предельной вероятностью $2c(1-c) > 0$ ровно один из графов $G(n,p(n))$ и $H(n,(n))$ будет обладать свойством S, поэтому победит H, что противоречит предположению. □

Эта теорема — своеобразный мост между математической логикой и случайными графами.

7.4 Модели Интернета

Каким законам подчиняется рост Интернета? — вопрос естественно возник в 1990-е, когда Интернет только зарождался и возникла необходимость построить адекватную модель его «жизни».

А.-Л. Барабаши и Р. Альберт нашли ряд важных эмпирических закономерностей в поведении Интернета.

Эти закономерности впоследствии формализовывали многие авторы.

Модели Барабаши-Альберт применяют для описания также социальных, биологических, транспортных и т.д. сетей.

Альберт-Ласло Бараба́ши (Albert-László Barabási, 1967) — физик, работает в Университетах США. Член Американского физического общества, иностранный член венгерской Академии наук.

Рика́ Альбе́рт (Réka Albert, 1972) — профессор физики и биологии в Пенсильванском университете (США).

А.-Л. Барабаши и Р. Альберт — этнические венгры, родившиеся в Румынии.

На момент публикации совместной работы *Emergence of scaling in random networks* (Science, 1999), Р. Альберт — аспирантка А.-Л. Барабаши.

Терминология

Вершины — структурные единицы в Интернете: сайты (Интернет-граф), хосты (хост-графы), статические-html страницы (HyperText Markup Language, веб-графы), владельцы и пр.

Рёбра (*дуги*) — соединяют вершины, между которыми имеются ссылки, т.е. имеются *кратные* — и ребра, и петли.

Плотный граф — граф, в котором число рёбер близко к максимальному.

Разреженный граф (противоположное свойство) — граф, имеющий малое число рёбер.

Расстояние в графе — число рёбер в кратчайшем рёберном пути.

Диаметр $\mathrm{diam}(G)$ *графа* — максимальное расстояние между вершинами (неопределён для несвязанного графа).

Если диаметр мал, то граф *тесный.*

Независимое множество — совокупность вершин графа никакие две из которых не соединены ребром (индуцированный этим множеством подграф состоит из изолированных вершин). Максимальный размер независимого множества графа G обозначают $\alpha(G)$.

Хроматическое число $\chi(G)$ — минимальное число цветов, в которые можно раскрасить вершины графа так, чтобы концы любого ребра имели разные цвета.

Обхват $girth(G)$ — длина кратчайшего цикла в G.

Гигантская компонента. Пусть дана последовательность графов $\{\, G_n = (\, V_n\, E_n) \,\}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} |V_n| = +\infty$. Говорят, что графы G_n содержат *гигантскую компоненту связности*, если $\exists\, \gamma > 0\ \forall\, n$:

$$\Big|\, \textit{наибольшая компонента связности } G_n \,\Big| \geqslant \gamma \Big|V_n\Big|.$$

Степени вершин — indeg v, outdeg v, $degv$ — входящая, исходящая и полная степень вершины v.

Вторые степени вершин — можно определить поразному:

- число вершин на расстоянии 2 от v;
- число вершин на расстоянии $\leqslant 2$ от v;
- сумма степеней вершин на расстоянии 1 от v и др.

Пейджранк — ... (*рассмотрим далее*).

Наблюдения Барабаши-Альберт

1. Веб-граф весьма *разрежен*: у него в t-вершином подграфе примерно kt ребер, где $k \geqslant 1$ — константа, что отличается по порядку от числа $C_t^2 = \Theta(t^2)$ рёбер у полного t-вершинного графа.

2. *Диаметр* веб-графа *невелик*: в 1999 г. он имел величину 5...7 — граф тесен.

Это — известное свойство социальных сетей — «мир тесен» (small-word phenomenon):

- любые два человека в мире знакомы через 5...6 рукопожатий;

- с любого сайта можно перейти на любой другой за 5...7 переходов (если находимся в гигантской компоненте).

Если учитывать ориентацию рёбер, то диаметр $\approx$ 10...20. Эти параметры не меняются долгие годы.

3. Веб-граф характеризуется *степенным законом распределения степеней вершин*: вероятность того, что вершина веб-графа имеет степень d, оценивается как c/d^λ, где $\lambda = const$, а c — нормирующий множитель, вычисляемый из условия $\sum \Pr = 1$.

Реальные биологические, социальные, транспортные и т.д. сети подчиняются такому же степенному закону с разными $\lambda \in (2, 3)$:

веб-графы $\lambda \approx 2{,}1$; хост-графы $\lambda \approx 2{,}3$.

Попытаемся примененить модель Эрдёша-Реньи для описания роста Интернета и подобных сетей.

1. Подбором вероятности p *можно добиться разреженности и тесноты* (при $p = \Theta(1/n)$, хотя и не с наблюдаемыми параметрами).

2. Степенной закон законом распределения степеней вершин *не может быть получен* в схеме Бернулли: в модели $G(n, p)$ степень каждой вершины случайного графа биномиальна с параметрами $n-1$ и p, и при $p = \Theta(1/n)$ данное биномиальное распределение аппроксимируется пуассоновским, а не степенным.

Вывод: модель Эрдёша-Реньи *не применима* для описания роста Интернета и подобных сетей.

Модели предпочтительного присоединения. Модель Боллобаша-Риордана. Предложения Л.-А. Барабаши и Р.Альберт по моделированию процесса формирования Интернета:

- считаем, что в каждый момент времени появляется новый сайт, который ставит фиксированное количество ссылок на своих предшественников;
- вероятность, с которой новый сайт поставит ссылку на один из прежних сайтов, пропорциональна числу уже имевшихся на тот сайт ссылок.

— модели *предпочтительного присоединения* (preferential attachment). "Имущему дастся, а у неимущего отнимется".

Барабаши и Альберт никак не конкретизировали, какую именно из таких моделей они предлагают рассматривать.

Адекватную формализацию модели Барабаши-Альберт предложили в начале 2000-х годов Б. Боллобаш и О. Риордан.

Бела Боллоба́ш (Béla Bollobás, 1943) — венгерский математик, работающий в Великобритании. В юности принял участие в двух международных математических Олимпиадах, завоевав две золотые медали. Руководителем его Ph.D. был Пал Эрдёш. Стажировался в Москве у И.М. Гельфанда.

Оливер Риордан
(Oliver Maxim Riordan, ?)
— профессор дискретной математики Оксфордского университета.
Учился в Кембриджском университете у Б. Боллобаша.

Модель Боллобаша-Риордана (динамическая модификация)

Сначала строится последовательность случайных графов $\{G_1^n\}_{n\geqslant 1} = G_1^1, G_1^2, \ldots$, в которой у графа с номером n число вершин и ребер равно n;

Затем из неё формируется последовательность $\{G_k^n\}_{n\geqslant 1}$, в которой у графа с номером n число вершин равно n, а число ребер — kn, $k \in \mathbb{N}$.

1. Начинаем с графа G_1^1 с одной вершиной и одной петлёй.

2. Когда граф G_1^{n-1} с $n-1$ вершиной $n-1$ петлями построен, добавим к нему вершину n и ребро (n, i), $i \in \{1, \ldots, n\}$, при этом
   - петля (n, n) возникнет с вероятностью $\frac{1}{2n-1}$;
   - ребро (n, i) возникнет с вероятностью $\frac{\deg i}{2n-1}$, где $\deg i$ — степень вершины i в графе G_1^{n-1}.

   Распределение вероятностей задано корректно:
$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\deg i}{2n-1} + \frac{1i}{2n-1} = \frac{2n-1}{2n-1} + \frac{1}{2n-1} = 1,$$
   Случайный граф G_1^n построен, и он удовлетворяет принципу предпочтительного присоединения.

3. Строим G_k^n:
   - Берем граф G_1^{kn} с kn вершинами и kn рёбрами.
   - Делим множество его вершин на последовательные части размера k:

$$\{1, \ldots, k\}, \{k+1, \ldots, 2k\}, \ldots$$
$$\ldots, \{k(n-1)+1, \ldots, kn\}.$$

   - Объявляем каждую часть вершиной, а ребра сохраняем: ребра внутри части образуют кратные петли, а между двумя различными частями — кратные ребра.
     Вершин стало n, а ребер — по-прежнему kn.

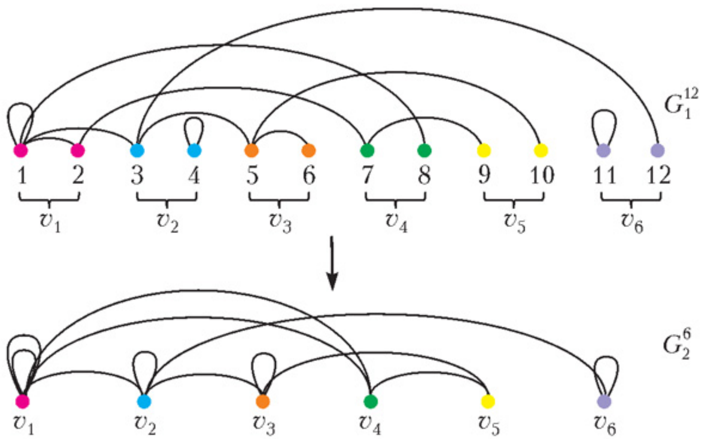


Рис. 7.1. Модель Боллобаша-Риордана: иллюстрация к последнему шагу

Модель Боллобаша-Риордана (статическая модификация) — по своим вероятностным характеристикам практически неотличима от динамической.

Построим *линейную хордовую диаграмму* (linearized chord diagram, LCD):

1) зафиксируем на оси абсцисс на плоскости $2n$ точек $1, 2, 3, \ldots, 2n$;

2) разобьем эти точки на пары, а элементы каждой пары соединим дугой, лежащей в верхней полуплоскости.

Дуги в LCD могут пересекаться, лежать друг под дружкой, но не могут иметь общих вершин.

Количество различных LCD:

$$l_n = (2n-1)(2n-3)\ldots 1 = \\ = \frac{(2n)!}{2n(2n-2)(2n-4)\ldots 2} = \\ = \frac{(2n)!}{2^n n(n-1)(n-2)\ldots 1} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Если LCD случайная, то вероятность появления каждой — $\frac{1}{l_n}$.

По каждой LCD построим граф:

- идём слева направо по оси абсцисс, пока не встретим впервые *правый* конец какой-либо дуги; пусть его номер i_1;
- объявляем набор $\{1, \ldots, i_1\}$ первой вершиной будущего графа (склеиваем их);
- снова идем от $i_1 + 1$ направо до первого правого конца i_2 какой-либо дуги и обявляем второй вершиной графа набор $i_1 + 1, \ldots, i_2$; и т.д.

Получаем n вершин, а ребра порождаем дугами: вершины соединяем ребром, если между соответствующими наборами есть дуга; ребра ориентируем *справа налево*, петли возникают аналогично: граф с n вершинами и n ребрами построен.

Граф с n вершинами и kn ребрами получаем как в динамической модели.

Теорема 7.10 (Боллобаш и Риордан). *Обозначим* $\widehat{D}_n = \frac{\ln n}{\ln\ln n}$; *тогда для любого* $k \geqslant 2$ *и любого* $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left[\,\left|\operatorname{diam} G_k^n - \widehat{D}_n\right| \leqslant \varepsilon\,\right] \to 1, \quad n \to \infty.$$

Вывод: диаметр графа G_k^n *плотно сконцентрирован* около $\widehat{D}_n$.

У веб-графа порядка 10^7–10^8 вершин; подставляя эти значения, получим

$$5{,}8 \leqslant \widehat{D}_n \leqslant 6{,}2$$

— *фантастическое попадание!* ($\widehat{D}_n < 7$ даже при $n = 10^9$).

Теорема 7.11. *Пусть* d_n — *доля вершин степени* n *в графе* G_k^n *и*

$$r_{d,k} = \frac{2k(k+1)}{(d+k+1)(d+k+2)(d+k+3)}.$$

Тогда для любых $k \geqslant 1$ *и* $d \leqslant n^{1/15}$

$$\mathrm{E}\left[\,d_n\,\right] \sim r_{d,k},$$

Т.к. k — константа, $r_{d,k} \approx const/d^3$, т.е. имеем степенной закон с $\lambda = 3$.

Два недостатка теоремы:

1) ограничение $d \leqslant n^{1/15}$: теорема практически неприменима (даже при $n \approx 10^{12}$, имеем $d \leqslant 10^{4/5} \approx 6,31$) — этот недостаток устранён;
2) $\lambda = 3$ — необходимо уточнение модели.

В рамках модели Боллобаша-Риордана получены оценки распределений (при разных её модификациях/упрощениях и ограничениях на параметры)

- вторых степеней вершин;
- количества рёбер между вершинами заданных степеней;
- кластерных коэффициентов;
- числа копий фиксированного графа: треугольников (в модели — $\sim \Theta(\ln^3 n)$, а реально — $\sim n^\alpha$), тетраэдров и т.д.; наличие клик объясняется действиями спамеров, которые искусственно расставляют ссылки, желая повысить рейтинги сайтов, заплативших за раскрутку;
- пейджранка.

Теоретические распределения в разной степени совпадают с эмпирически наблюдаемыми.

Спам в модели Боллобаша-Риордана не учтён, что также её минус.

После Боллобаша-Риордана

1. *Модель Бакли-Остгауза (2004)* — уточнение модели Барабаши-Альберт.

Строится случйный граф $H^n_{a,m}$, a — *начальная притягательность вершины*, параметр модели.

1. Начинаем с графа $H^n_{a,1}$ с одной вершиной и одной петлёй.
2. Когда граф $H^n_{a,1}$ с вершинами $\{1, \ldots, n\}$ и n петлями построен, добавим к нему вершину $n+1$ и ребро $(n+1, i)$, $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, при этом
   - петля $(n+1, n+1)$ возникнет с вероятностью $\frac{a}{(a+1)n+1}$;
   - ребро $(n+1, i)$ возникнет с вероятностью $\frac{\deg i - 1 + a}{(a+1)n+1}$, где $\deg i$ — степень вершины i в графе $H^n_{a,1}$.

   Распределение вероятностей задано корректно ($\sum \mathsf{P} = 1$) и при $a = 1$ имеем модель Боллобаша-Риордана.
3. Граф $H^n_{a,m}$ строится, как и G^n_m.

2. *Модель Мори* — почти совпадает с моделью Бакли-Остгауза.

Строится случйный граф $H^{(n)}_{\beta,m}$, за притягательность вершины отвечает параметр β.

1. В начальный момент времени имеем граф $H^{(2)}_{\beta,1}$ с двумя вершинами и ребром между ними.

2. Когда граф $H_{\beta,1}^{(n)}$ с вершинами $\{1, \ldots, n\}$ и n петлями построен, добавим к нему вершину $n+1$ и ребро $(n+1, i)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ (*петель нет*), при этом ребро $(n+1, i)$ возникнет с вероятностью $\dfrac{\deg i + \beta}{(\beta+2)n - 2}$, где $\deg i$ — степень вершины i в графе $H_{\beta,1}^{(n)}$.

   Легко проверяется, что распределение вероятностей задано корректно и при $\beta = 0$ имеем модель Боллобаша-Риордана.

3. Граф $H_{\beta,m}^{(n)}$ строится, как и G_m^n, при этом появляются петли. В этих моделях оценки некоторых параметров улучшаются, но для кластерных коэффициентов и числа треугольников улучшений нет.

Предложены и другие модели Интернета:

- Боллобаша-Боогса-Риодана-Чайес (2003);
- модель копирования (2000);
- Купера-Фриза (2003);
- Холма-Кима (2002).

7.5 Пейджранк

Пейджранк $PR(i)$ — характеристика вершины i веб-графа (V, E), уточняющая понятие 1-й степени, 2-й степени и т.д.

$$PR(i) = d \sum_{j \to i} \frac{PR(j)}{\operatorname{outdeg} j} + \frac{d}{|V|} \sum_{j \in \{\, v \in V \,|\, \operatorname{outdeg} v = 0 \,\}} PR(j) + \frac{1-d}{|V|},$$

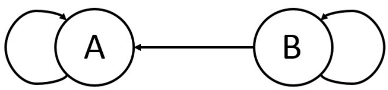
где $d \in (0,1)$ — *демпфирующий фактор* (константа).

Пейджранк (PageRank) страницы —

- учитывает не только количество ссылок на неё, но и их *качество*;
- = сумме качеств страниц, ссылающихся на данную, нормираванная числом исходящих из них ссылок.

$(1-d)$ — *вероятность телепортации*: считаем, что пользователь при блуждании по сети с вероятностью d переходит по ссылке, а с вероятностью $1-d$ — на случайную страницу $\Rightarrow$ *возможен переход на любую страницу*.

Пример 7.2. 1.

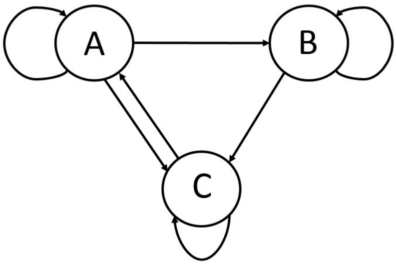


$$\begin{cases} PR(A) = d \cdot PR(A) + \dfrac{d}{2} \cdot PR(B) + \dfrac{1-d}{2}, \\ PR(B) = \dfrac{d}{2} \cdot PR(B) + \dfrac{1-d}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} PR(A) = \dfrac{1}{2-d}, \\ PR(B) = \dfrac{1-d}{2-d}. \end{cases} \qquad d \in (0,1) \Rightarrow PR(A) > PR(B).$$

Например, при $d = 0{,}85$: $PR(A) = 0{,}87$, $PR(B) = 0{,}13$.

2.



$$\begin{aligned} \operatorname{outdeg}\ A &= 3 \\ \operatorname{outdeg}\ B &= 2 \\ \operatorname{outdeg}\ C &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} PR(A) = d\left(\dfrac{PR(A)}{3} + \dfrac{PR(C)}{2}\right) + \dfrac{1-d}{3}, \\ PR(B) = d\left(\dfrac{PR(A)}{3} + \dfrac{PR(B)}{2}\right) + \dfrac{1-d}{3}, \\ PR(C) = d\left(\dfrac{PR(A)}{3} + \dfrac{PR(B)}{2} + \dfrac{PR(C)}{2}\right) + \dfrac{1-d}{3}. \end{cases}$$

При $d \in (0,1):\ PR(C) > PR(A) > PR(B)$,
$d = 0{,}85 \Rightarrow PR(C) \approx 0{,}45$, $PR(A) \approx 0{,}29$, $PR(B) \approx 0{,}26$.

Пейджранк придумали Л. Пейдж и С. Брин — основатели поисковой системы *Google* (1998).

Лоуренс «Ларри» Пейдж (Lawrence «Larry» Page, 1973) — получил степени бакалавра в Мичиганском и магистра — в Стэнфордском университете. С 2011 г. — главный исполнительный директор Google.

Сергей Михайлович Брин
(англ. Sergey Brin, 1973)
— досрочно получил диплом бакалавра в Мэрилендском университете.
Родители Сергея Брина — выпускники Мехмата МГУ (1970 и 1971 годов).

Л. Пейдж и С. Брин входят в число самых богатых людей планеты (17-е и 20-е места в *Forbes-2014*).

Пейджранк: вычисление.
В исходной модели Боллобаша-Риордана G_m^n пейджранк не считали (там трудно работать с петлями).

Позже был предложен алгоритм вычисления пейджранка в ещё одной конкретизации модели Боллобаши-Альберт:

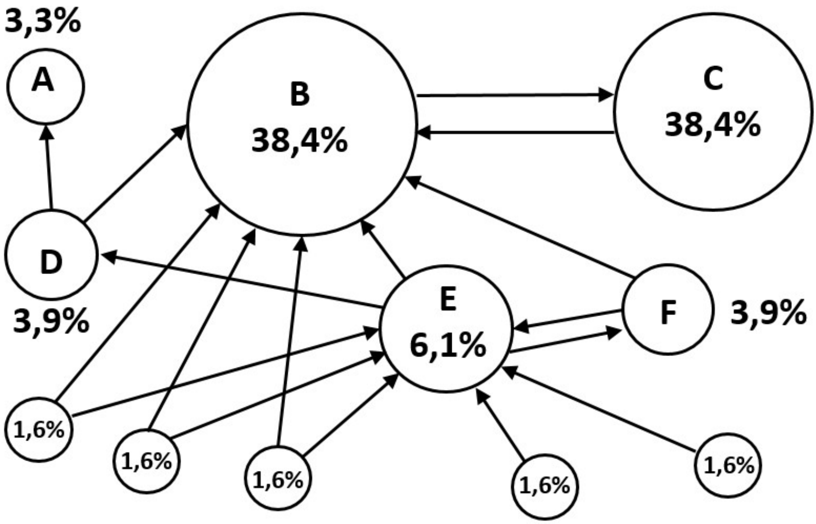
- начинаем с вершины 0 без петель, но полагаем её вес m;
- добавляем вершину 1 и из неё ставим m ссылок на 0, полагаем вес вершины 0 равным $2m$, а вес 1 — m;
- дальнейшие вершины, появляясь на свет, выставляют свои m ссылок независимо, каждую с вероятностью, пропорциональной весам существующих вершин, которые равны сумме их входящих степеней и m:

$$\mathsf{P}[n+1 \to i] = \frac{\operatorname{indeg} \ i + m}{\sum\limits_{k=0}^{n} (\operatorname{indeg} \ k + m)} = \frac{\operatorname{indeg} \ i + m}{2mn + m}.$$

Показано, что в данной модели плотность пейджранка $p_n(x) \approx \Theta\left(x^{-\frac{3+d}{1+d}}\right)$ — *степенной закон.*

При $d = 0,85$ $\lambda \approx 2,1$, что близко к эмпирическим данным.

Пример 7.3 (вычисления PageRank).



$PR(C) > PR(E)$, хотя indeg $C <$ indeg E, но ссылка на C исходит из очень важной страницы B $\Rightarrow$ она имеет большой вес.

Без телепортации все пользователи в конечном итоге попадают на страницы A, B или C. При наличии телепортации из A можно попасть на любую страницу в этой Сети, даже при indeg $A = 0$.

Модель поиска в интернет

- Страницы Интернета неэквивалентны и эта неэквивалентность описывается величиной $PR(v)$, $v \in V_n$.

- Вероятности перехода между страницами содержат две компоненты: обусловленную реальными связями между ними и возможностью попадания на любую страницу (телепортация).
- Если по запросу пользователя найдено множество страниц $W \subset V_n$, то релевантную информацию нужно искать на страницах, имеющих наибольшее значение $PR(v)$, $v \in W$.
- В настоящее время классические пейджранки уже не употребляются.

Надстройка для браузера Google Toolbar

- PageRank каждой веб-страницы — целое число от 0 до 10 (важность этой страницы с точки зрения Google).
- Механизм расчёта PageRank и что в точности обозначает это значение, не раскрывается.
- По некоторым данным, эти значения обновляются лишь несколько раз в год и показывают значения PageRank страниц на логарифмической шкале.

  Замечена особенность: Page Rank выше 5 могут получить сайты только довольно старые или очень большие проекты (сайты) с большим количеством посещений.
- Поисковая система Google использует более 200 ранжирующих сигналов, лишь одним из которых является PageRank, но он до сих пор играет существенную роль.

Борьба со спамом

Линковые кольца: ссылки по кругу. Как «ракрутить» сайт S — он должен поместиться в ТОП выдачи поиска?

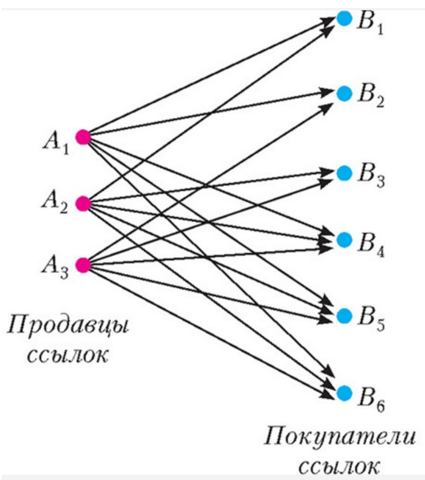
Жульнический метод: заплатить с сайтами S1...Sn, которые обладают высоким индексом цитирования, чтобы они ссылались на S.

С точки зрения поисковой системы, сайт, процитированный респектабельным сайтом, резко повышает свой «вес» при ранжировании в ходе составления списка выдачи по запросу.

1. Самое простое — ссылки по кругу: S1 ставил ссылку на S2, S2 — на S3, ..., Sn — на S1.

Это «линковое кольцо». Такую схему быстро научились отлавливать, но название осталось.

2. Сейчас типичная конструкция — двудольный граф.



Таких линковых колец — сотни тысяч.

Задача поисковой системы — автоматическом выявить такие искусственно завышенные «индексы цитирования».

Как можно обнаружить мошейничество

1) разрабатывают адекватную модель интернета без спама;
2) подсчитывают вероятностные характеристики тех или иных графовых структур в построенной модели и в «подозрительном» фрагменте интернета;
3) если данные характеристики существенно отличаются, то, скорее всего, обнаружено кольцо.

Например, для данного двудольного фрагмента находят реальное количество μ рёбер между долями и математическое ожидание M таких рёбер в модели.
Если $M \ll \mu$, то, скорее всего, данная структура аномальная.

Можно подсчитывать #вершин данной степени, #треугольников, парметры связанности...

Для исключения ошибок (их цена может быть очень большой), сайтам присваивают некоторую числовую характеристику, зависящую от M и μ, которая затем учитывается при ранжировании документов по запросу.

7.6 Задачи с решениями

Задача 7.1. *Доказать неравенство*

$$R(k,l) \leqslant R(k-1,l) + R(k,l-1), \quad k > 2,\, l > 2.$$

Решение. Очевидно $R(2,l) = 2$ и $R(k,2) = k$.
Применим математическую индукцию по числу $s = k + l$.
По доказанному ранее

$$6 = R(3,3) \leqslant R(3,2) + R(2,3) = 3 + 3.$$

Пусть существование чисел $R(k-1,l)$ и $R(k,l-1)$ установлено.

Рассмотрим полный n-граф, где $n = R(k-1,l) + R(k,l-1)$, рёбра которого окрашены в красный и синий цвета.

Обозначим

v — произвольно выбранную вершину графа;

V_r — множество вершин, соединённых с v *красным* ребром, $|V_r| = n_1$;

V_b — множество вершин, соединённых с v *синим* ребром, $|V_b| = n_2$.

Справедливо равенство

$$n = n_1 + n_2 = R(k-1,l) + R(k,l-1).$$

Рассмотрим два случая

1) $n_1 \geqslant R(k-1,l)$, $n_2 < R(k,l-1)$;
2) $n_2 \geqslant R(k-1,l)$, $n_1 < R(k-1,l)$.

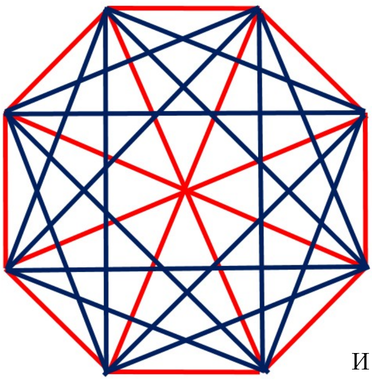
В случае 1) по определению числа $R(k-1,l)$ в подграфе V_r найдутся одноцветные либо синий l-подграф, либо красный $k-1$-подграф, и тогда добавляя к красному $k-1$-подграфу вершину v получим одноцветный красный k-подграф.

Случай 2) рассматривается аналогично.

Задача 7.2. *Показать, что* $R(4,3) > 8$.

Решение. В правильном 8-угольнике раскрасим

- стороны и диагонали, соединяющие противоположные вершины в красный цвет,
- остальные диагонали — в синий.



Будем рассматривать произвольные совокупности из 3 и 4 вершин 8-угольника. Тогда из любых 3 вершин найдётся пара либо противоположных, либо несоседних, и поэтому синего 3-подграфа нет. Из любых 4 вершин найдутся либо 2 соседние, либо 2 противоположные, поэтому красного 4-подграфа нет.

Задача 7.3. *Доказать неравенство* $R(k,l) \leqslant C^{k-1}_{m+k-2}$, $k \geqslant 2$, $l \geqslant 2$.

Решение. Применяем математическую индукцию по числу $s = k + l$.

Если $s = 6$, т.е. $k = l = 3$, то неравенство

$$6 = R(3,3) \leqslant C_{3+3-2}^{3-1} = C_4^2 = 6$$

выполняется.

Пусть $R(k-1, l) \leqslant C_{k+l-3}^{k-2}$, $R(k, l-1) \leqslant C_{k+l-3}^{k-1}$.

Тогда, используя доказанное в задаче 7.1 неравенство

$$R(k,l) \leqslant R(k-1,l) + R(k,l-1), \quad k > 2,\, l > 2$$

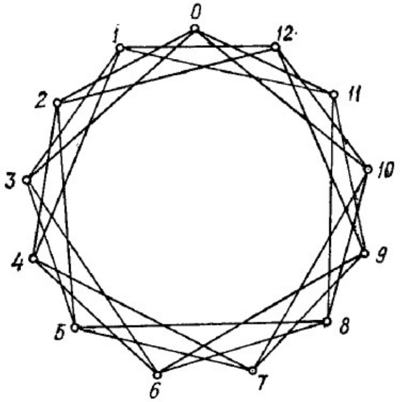
и свойство биномиальных коэффициентов, получим оценку

$$R(k,l) \leqslant R(k-1,l) + R(k,l-1) \leqslant C_{k+l-3}^{k-2} + C_{k+l-2}^{k-1} = \\ = C_{k+l-2}^{k-1}.$$

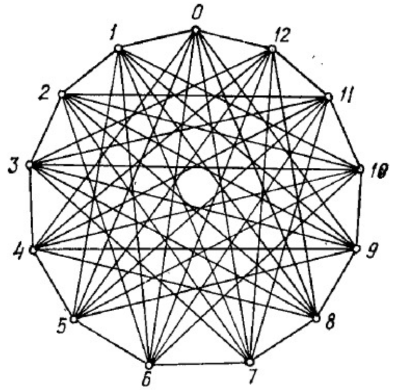
Задача 7.4. *Найти раскраску в два цвета полного 13-графа такую, что ни один 3-подграф не является красным и ни один 5-подграф не является синим.*

Решение. Занумеруем вершины 13-графа числами от 0 до 12.

Ребро, соединяющее вершины i и j будем раскрашивать в красный цвет, если $i-j \equiv_{13} 2$ или $i-j \equiv_{13} 3$, а остальные — в синий.



Красный подграф



Синий подграф