

Графические модели: ориентированное и неориентированное представление

Александр Адуенко

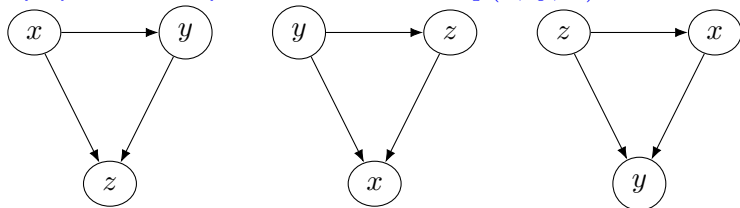
22е марта 2025

- EM-алгоритм. Использование EM-алгоритма для отбора признаков в байесовской линейной регрессии.
- Вариационный EM-алгоритм и его использование для вывода в смеси моделей линейной регрессии.
- Ориентированные графические модели и их представление plate notation. Критерий условной независимости D-separation.

Идея: Представим совместное распределение переменных в виде графа.

Пример: $p(x, y, z) = p(x)p(y|x)p(z|x, y)$.

Графическая вероятностная модель $p(x, y, z)$



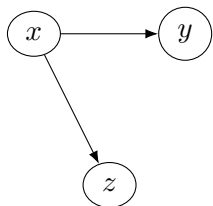
Вопрос 1: Чему соответствуют представления на средней и правой картинке?

$$p(x_1, \dots, x_K) = p(x_1)p(x_2|x_1) \cdot \dots \cdot p(x_K|x_1, \dots, x_{K-1}).$$

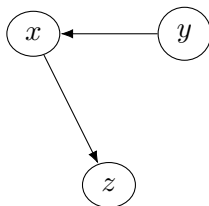
Вопрос 2: Для каких распределений выполнено разложение выше?

Вопрос 3: Какое представление получается для $p(x_1, \dots, x_K)$ при таком разложении?

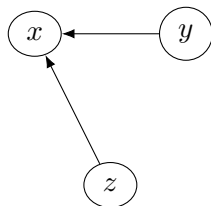
Идея: Представим совместное распределение переменных в виде графа.



Граф 1



Граф 2



Граф 3

Вопрос: Одинаковые ли совместные распределения соответствуют графическим представлениям выше?

Граф 1: $p(x, y, z) = p(x)p(y|x)p(z|x)$;

Граф 2: $p(x, y, z) = p(y)p(x|y)p(z|x)$;

Граф 3: $p(x, y, z) = p(z)p(y)p(x|z, y)$.

Смесь моделей линейной регрессии

Вероятностная модель генерации данных

- Веса моделей в смеси π получены из априорного распределения $p(\pi|\mu)$;
- Векторы параметров моделей \mathbf{w}_k получены из нормального распределения $p(\mathbf{w}_k|\mathbf{A}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{w}_k|\mathbf{0}, \mathbf{A}_k^{-1})$, $k = 1, \dots, K$;
- Для каждого объекта \mathbf{x}_i выбрана модель f_{k_i} , которой он описывается, причем $p(k_i = k) = \pi_k$;
- Для каждого объекта \mathbf{x}_i целевая переменная y_i определена в соответствии с моделью f_{k_i} : $y_i \sim \mathcal{N}(y_i|\mathbf{w}_{k_i}^\top \mathbf{x}_i, \sigma_{k_i}^2)$.

Совместное правдоподобие модели

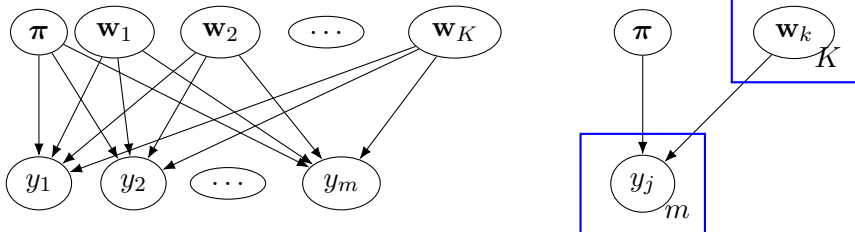
$$p(\mathbf{y}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_K, \pi | \mathbf{X}, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_K, \sigma_1^2, \dots, \sigma_K^2, \mu) = p(\pi|\mu) \prod_{k=1}^K \mathcal{N}(\mathbf{w}_k|\mathbf{0}, \mathbf{A}_k^{-1}) \prod_{i=1}^m \left(\sum_{l=1}^K \pi_l \mathcal{N}(y_i|\mathbf{w}_l^\top \mathbf{x}_i, \sigma_l^2) \right).$$

Введем матрицу скрытых переменных $\mathbf{Z} = \|z_{ik}\|$, где $z_{ik} = 1 \iff k_i = k$.

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_K, \pi, \mathbf{Z} | \mathbf{X}, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_K, \sigma_1^2, \dots, \sigma_K^2, \mu) = p(\pi|\mu) \prod_{k=1}^K \mathcal{N}(\mathbf{w}_k|\mathbf{0}, \mathbf{A}_k^{-1}) \prod_{i=1}^m \prod_{l=1}^K \left(\pi_l \mathcal{N}(y_i|\mathbf{w}_l^\top \mathbf{x}_i, \sigma_l^2) \right)^{z_{il}}.$$

Представление смеси моделей в виде графа

Граф 3: $p(x, y, z) = p(z)p(y)p(x|z, y)$.



Вопрос 1: Как в представлении учитывается то, что смесь составлена из моделей линейной регрессии?

Вопрос 2: Как учесть, что $p(\pi) = \text{Dir}(\mu)$?

Вопрос 3: Как указать наличие наблюдаемого признакового описания x_1, \dots, x_m и гиперпараметров модели \mathbf{A}, σ^2 ?

Вопрос 4: Зачем нам графическое представление вероятностных моделей?

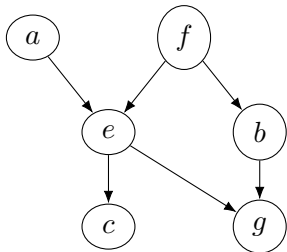
Критерий условной независимости D-separation

Рассмотрим две группы переменных A , B и проверим их условную независимость при условии группы переменных C .

D-separation. Группы переменных A и B условно независимы, если все неориентированные пути из A в B заблокированы C .

Путь из вершины a в вершину b называется заблокированным набором вершин C , если выполнено хотя бы одно из условий

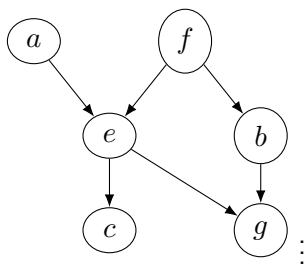
- Стрелки на пути встречаются перед-хвост или хвост-хвост в вершине $c \in C$;
- Стрелки на пути встречаются перед-перед в вершине x , такой, что $x \notin C$ и все ее ориентированные потомки $y \notin C$.



Пути из a в b : $a \rightarrow e \rightarrow g \leftarrow b$; $a \rightarrow e \leftarrow f \rightarrow b$.

Вопрос: Зависимы ли переменные a и b ?

Условия условной независимости:

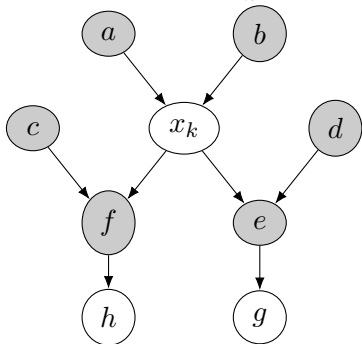


- $a \perp b | \emptyset$;
- $a \perp f | \emptyset$;
- $a \not\perp f | e$;
- $a \not\perp c | \emptyset$;
- $a \perp c | e$;



Утверждение: Множество распределений, представимых ориентированным графом заданного вида, совпадает с множеством распределений, удовлетворяющим всем условиям условной независимости, им порожденным.

$$p(x_1, \dots, x_K) = \prod_k p(x_k | Pa_k).$$



$$p(x_k | \mathbf{x}_{j \neq k}) = \frac{\prod_l p(x_l | Pa_l)}{\int \prod_l p(x_l | Pa_l) dx_k}.$$

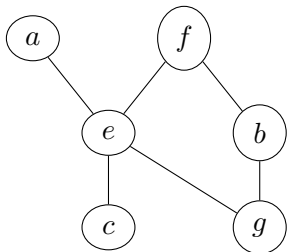
$$p(x_1, \dots, x_K) = p(a)p(b)p(x_k | a, b)p(c)p(d)p(e | d, x_k)p(f | c, x_k)p(g | e)p(h | f).$$

$$p(x_k | \mathbf{x}_{j \neq i}) = \frac{p(x_k | a, b)p(e | d, x_k)p(f | c, x_k)}{\int p(x_k | a, b)p(e | d, x_k)p(f | c, x_k) dx_k}.$$

Вопрос: От каких переменных действительно зависит $x_k | \mathbf{x}_{j \neq k}$?

Неориентированные графические модели

Неориентированные графические модели \equiv марковские случайные поля.



Идея: Определить критерий условной независимости в терминах разделимости, не d -разделимости.

Вопрос: Независимы ли a и b

- Безусловно?
- При условии e ?
- При условии f ?
- При условии f, g ?

Вопрос: Что есть марковское «одеяло» для неориентированных графических моделей?

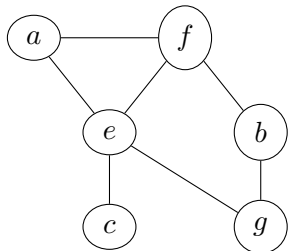
Замечание: Если x_i и x_j не соединены ребром, то они независимы при условии всех остальных переменных:

$$p(x_i, x_j | \mathbf{x} \setminus \{i, j\}) = p(x_i | \mathbf{x} \setminus \{i, j\}) p(x_j | \mathbf{x} \setminus \{i, j\}).$$

Неориентированные графические модели (НГМ)

Замечание: Если x_i и x_j не соединены ребром, то они независимы при условии всех остальных переменных:

$$p(x_i, x_j | \mathbf{x} \setminus \{i, j\}) = p(x_i | \mathbf{x} \setminus \{i, j\}) p(x_j | \mathbf{x} \setminus \{i, j\}).$$



$$p(a, b, c, e, f, g) = \frac{1}{Z} \psi_{afe}(a, f, e) \psi_{ec}(e, c) \psi_{eg}(e, g) \psi_{bg}(b, g) \psi_{bf}(b, f).$$

$$Z = \int \prod_i \psi_{C_i}(\mathbf{x}_{C_i}).$$

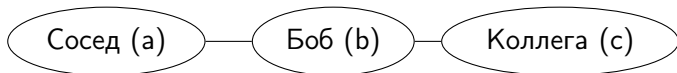
Вопрос: Какими свойствами должны обладать $\psi_{C_i}(\mathbf{x}_{C_i})$, чтобы задать корректное распределение?

Теорема (Hammersley-Clifford). Предположим, что все потенциалы строго положительны $\psi_C(\mathbf{x}_C) > 0 \forall \mathbf{x}_C$. Тогда факторизация по максимальным кликам графа задает то же множество распределений, что и набор условий условной независимости в терминах графовой разделимости.

Пример построения НГМ

Пусть моделируется заболеваемость простудой для трех человек: Боба, его соседа и коллеги.

Метка 0 соответствует тому, что человек здоров, а 1 – болезни.



$$p(a, b, c) = \frac{1}{Z} \psi_{ab}(a, b) \psi_{bc}(b, c), \quad a, b, c \in \{0, 1\}.$$

$$\psi_{a,b}(a, b) = \begin{cases} 20, & a = 0, b = 0, \\ 2, & a = 1, b = 1, \\ 1, & a = 0, b = 1, \\ 1, & a = 1, b = 0. \end{cases}, \quad \psi_{b,c}(b, c) = \begin{cases} 5, & b = 0, c = 0, \\ 0.7, & b = 1, c = 1, \\ 5, & b = 0, c = 1, \\ 0.1, & b = 1, c = 0. \end{cases}$$

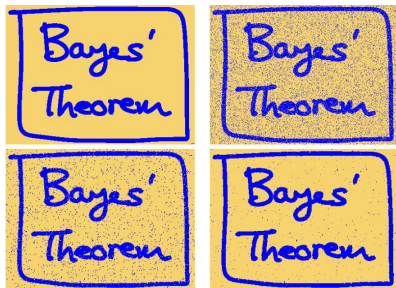
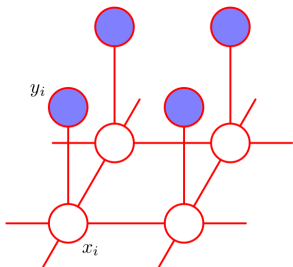
Задание потенциала через энергию

Идея: $\psi_{C_i}(\mathbf{x}_{C_i}) = \exp(-E_{C_i}(\mathbf{x}_{C_i}))$.

Тогда $\log p(\mathbf{x}) \propto -E(\mathbf{x}) = -\sum_i E_{C_i}(\mathbf{x}_{C_i})$.

Пример: Пусть имеется бинарное изображение \mathbf{y} , $y_i \in \{-1, 1\}$, которое зашумлено. Требуется восстановить исходное изображение \mathbf{x} .

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = h \sum_i x_i - \beta \sum_{(i,j) \in \epsilon} x_i x_j - \eta \sum_i x_i y_i.$$

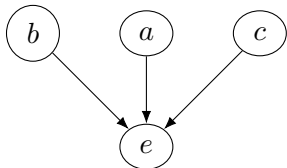


Графическая модель $p(\mathbf{x}, \mathbf{y})$
[Bishop, 2006]

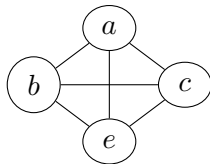
Иллюстрация шумоподавления [Bishop,
2006]

Связь между ориентированными и неориентированными моделями

Вопрос: Можно ли по ориентированной модели построить соответствующую ей неориентированную и наоборот?



$$p(a, b, c, e) = p(a)p(b)p(c)p(e|a, b, c).$$



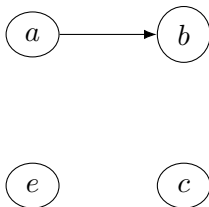
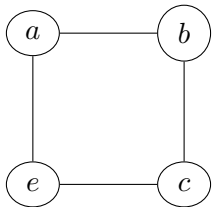
$$p(a, b, c, e) = \psi(a, b, c, e).$$

Конверсия из ориентированного в неориентированный граф:

- Соединяем ребрами попарно всех родителей каждой вершины («moralization»);
- Удаляем ориентацию на ребрах и получаем неориентированный граф;
- Для каждой клики задаем потенциал $\psi_{C_i}(\mathbf{x}_{C_i}) = 1$;
- Для каждого условного распределения, умножаем на него потенциал той клики, к которой относятся все переменные из него.

Из неориентированной модели к ориентированной

Вопрос: Верно ли, что ориентированная модель позволяет всегда «более аккуратно» задать зависимости, не потеряв условных независимостей между переменными?

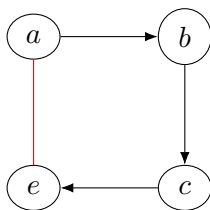
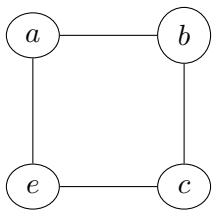


$$p(a, b, c, e) = \psi_1(a, b)\psi_2(b, c)\psi_3(c, e)\psi_4(e, a).$$

Свойства зависимости и независимости переменных:

- $a \not\perp c | \emptyset$;
- $a \perp c | b, e$;
- $b \perp e | a, c$;
- \vdots

Из неориентированной модели к ориентированной 2



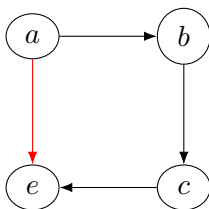
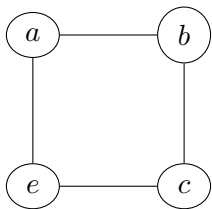
$$p(a, b, c, e) = \psi_1(a, b)\psi_2(b, c)\psi_3(c, e)\psi_4(e, a).$$

Свойства зависимости и независимости переменных:

- $a \not\perp c | \emptyset$;
- $a \perp c | b, e$;
- $b \perp e | a, c$;
- \vdots

Вопрос: Могли ли мы ориентировать ребро (b, c) иначе и выполнить условие $a \perp c | b, e$?

Из неориентированной модели к ориентированной 3



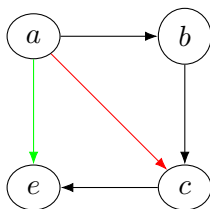
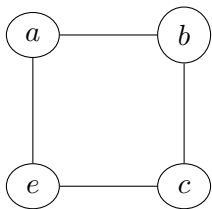
$$p(a, b, c, e) = \psi_1(a, b)\psi_2(b, c)\psi_3(c, e)\psi_4(e, a).$$

Свойства зависимости и независимости переменных:

- $a \not\perp c | \emptyset$;
- $a \perp c | b, e$;
- $b \perp e | a, c$;
- \vdots

Вопрос: Соответствует ли граф справа правдоподобию? Нет ли дополнительной условной независимости?

Из неориентированной модели к ориентированной 4



Слева: $p(a, b, c, e) = \psi_1(a, b)\psi_2(b, c)\psi_3(c, e)\psi_4(e, a)$.

Свойства зависимости и независимости переменных:

$a \perp c | b, e, b \perp e | a, c, \dots$

Справа: $p(a, b, c, e) = p(a)p(b|a)p(c|b, a)p(e|a, c)$.

Замечание 1: Без ребра из a в c , была дополнительная условная независимость $a \perp c | b$.

Вопрос 1: Почему нельзя было бы провести вместо $a \rightarrow c$ ребра $c \rightarrow a, e \rightarrow b$?

Вопрос 2: Помогло ли бы ребро $b \rightarrow e$ убрать $a \perp c | b$?

Вопрос: Какую условную независимость мы потеряли?

- 1 Bishop, Christopher M. "Pattern recognition and machine learning". Springer, New York (2006). Pp. 381-394.
- 2 Goodfellow, Ian, Yoshua Bengio, and Aaron Courville. Deep learning. MIT press, 2016. Pp. 549-576.
- 3 Koller, Daphne, and Nir Friedman. Probabilistic graphical models: principles and techniques. MIT press, 2009.
- 4 Bacchus, Fahiem, and Adam J. Grove. "Graphical models for preference and utility." arXiv preprint arXiv:1302.4928 (2013).
- 5 Mor, Bhavya, Sunita Garhwal, and Ajay Kumar. "A systematic review of hidden markov models and their applications." Archives of computational methods in engineering 28.3 (2021): 1429-1448.
- 6 Pearl, Judea. Probabilistic reasoning in intelligent systems: networks of plausible inference. Morgan kaufmann, 1988.
- 7 Pearl, Judea. "Graphical models for probabilistic and causal reasoning." Quantified representation of uncertainty and imprecision (1998): 367-389.