

# Алгоритмы поиска минимального разреза в графах для вывода в графических моделях

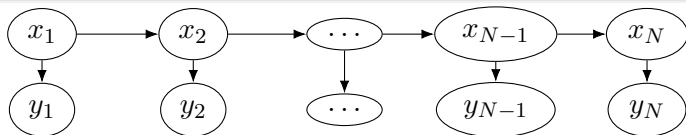
Александр Адуенко

11е мая 2022

## Содержание предыдущих лекций

- Выбор априорного распределения. Неинформативные распределения. Распределение Джеффриса.
- EM-алгоритм. Использование EM-алгоритма для отбора признаков в байесовской линейной регрессии.
- Вариационный EM-алгоритм и его использование для вывода в смеси моделей линейной регрессии.
- Гамильтоновы методы Монте-Карло и сравнение с вариационным EM-алгоритмом.
- Ориентированные графические модели и их представление plate notation. Критерий условной независимости d-separation.
- Неориентированные графические модели и их связь с ориентированными.
- Факторные графы и алгоритм Sum-Product для вывода в ациклических графических моделях.
- Скрытые марковские модели (СММ) и алгоритм Витерби. Алгоритм Max-Sum как обобщение алгоритма Витерби.
- Алгоритм Баума-Велча для определения параметров СММ.

# Скрытые марковские модели



$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = p(x_1) \prod_{i=2}^N p(x_i | x_{i-1}) \prod_{i=1}^N p(y_i | x_i).$$

Пусть  $x_i \in [K]$ ,  $\mathbf{A} = \|a_{ij}\| = \|P(x_l = j | x_{l-1} = i)\|$ ,  $\pi_k = P(x_1 = k)$ .

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{A}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{B}) = p(x_1 | \boldsymbol{\pi}) \prod_{i=2}^N p(x_i | x_{i-1}, \mathbf{A}) \prod_{i=1}^N p(y_i | x_i, \mathbf{B}).$$

Задачи:

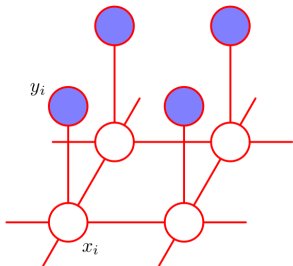
- $p(x_i | \mathbf{y}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \boldsymbol{\pi})$  – алгоритм Sum-Product;
- $p(x_i, x_{i+1} | \mathbf{y}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \boldsymbol{\pi})$  – алгоритм Sum-Product;
- $p(\mathbf{x} | \mathbf{y}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \boldsymbol{\pi}) \rightarrow \max_{\mathbf{x}}$  – алгоритм Витерби / Max-Sum;
- $p(\mathbf{x} | \mathbf{y}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \boldsymbol{\pi})$  – последовательное сэмплирование;
- $p(\mathbf{y} | \mathbf{A}, \mathbf{B}, \boldsymbol{\pi}) \rightarrow \max_{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \boldsymbol{\pi}}$  – алгоритм Баума-Велча.

## Постановка задачи

Пусть имеется наблюдаемое изображение  $y$ .

Требуется восстановить скрытые состояния  $x$  для каждого пикселя.

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \psi_0 \prod_{(i,j) \in \varepsilon} \psi_{ij}(x_i, x_j) \prod_i \psi_i(x_i, y_i).$$



$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \rightarrow \max_{\mathbf{x}} \equiv p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \max_{\mathbf{x}} \equiv$$

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\log \psi_0 - \sum_{(i,j) \in \varepsilon} \log \psi_{ij}(x_i, x_j) +$$

$$\sum_i \log \psi_i(x_i, y_i) \rightarrow \min_{\mathbf{x}} \equiv \tilde{E}(\mathbf{x}) =$$

$$\theta_0 + \sum_{(i,j) \in \varepsilon} \theta_{ij}(x_i, x_j) + \sum_i \theta_i(x_i) \rightarrow \min_{\mathbf{x}}.$$

Графическая модель  $p(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

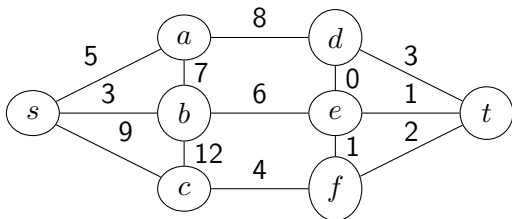
[Bishop, 2006]

**Замечание:** Задача  $\tilde{E}(\mathbf{x}) \rightarrow \min_{\mathbf{x}}$  является NP-трудной для

произвольных  $\theta_{ij}(x_i, x_j)$ ,  $x_i \in \{0, 1\}$ .

**Вопрос:** При каких условиях на  $\theta_i(x_i)$ ,  $\theta_{ij}(x_i, x_j)$  задача разрешима полиномиально?

# Максимальный поток и минимальный разрез в графе



$c(u, v)$  – пропускная  
способность;

$f(u, v) \leq c(u, v)$  – поток

$$\sum_{v: (u, v) \in \epsilon} f(u, v) =$$

$$\sum_{v: (v, u) \in \epsilon} f(v, u) \quad \forall u \notin \{s, t\}.$$

$$M(\mathbf{f}) = \sum_{v: (s, v) \in \epsilon} f(s, v) \rightarrow \max_{\mathbf{f}}$$

**Разрез графа** – разбиение мн-ва вершин  $V = S \sqcup T$ .

$$C(S, T) = \sum_{(u, v) \in \epsilon: u \in S, v \in T} c(u, v) \text{ – величина разреза.}$$

**Теорема (Форд-Фалкерсон).** Максимальный поток равен минимальному разрезу  $\max_{\mathbf{f}} M(\mathbf{f}) = \min_{S, T} C(S, T)$ .

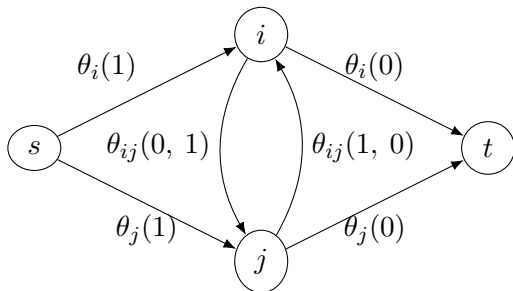
**Замечание:** Максимальный поток / минимальный разрез эффективно вычислимы.

# Минимизация энергии как поиск максимального потока

$$\tilde{E}(\mathbf{x}) = \theta_0 + \sum_{(i,j) \in \varepsilon} \theta_{ij}(x_i, x_j) + \sum_i \theta_i(x_i) \rightarrow \min_{\mathbf{x}}.$$

Пусть потенциалы удовлетворяют условиям:

- $\theta_i(0) \geq 0, \theta_i(1) \geq 0;$
- $\forall (i, j) \in \varepsilon : \theta_{ij}(0, 0) = \theta_{ij}(1, 1) = 0, \theta_{ij}(0, 1) \geq 0, \theta_{ij}(1, 0) \geq 0.$



**Вопрос:** Пусть  $x_i = 0$ , если  $i \in S$  и  $x_i = 1$ , если  $i \in T$ .  
Чему соответствует минимальный разрез такого графа?

$$\tilde{E}(\mathbf{x}) = \theta_0 + \sum_{(i,j) \in \varepsilon} \theta_{ij}(x_i, x_j) + \sum_i \theta_i(x_i) \rightarrow \min_{\mathbf{x}}.$$

Пусть потенциалы удовлетворяют условиям:

- $\theta_i(0) \geq 0, \theta_i(1) \geq 0;$
- $\forall (i, j) \in \varepsilon : \theta_{ij}(0, 0) = \theta_{ij}(1, 1) = 0, \theta_{ij}(0, 1) \geq 0, \theta_{ij}(1, 0) \geq 0.$

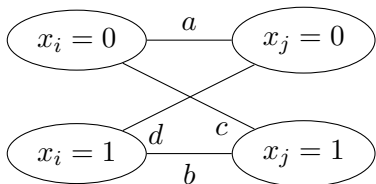
Операции, которые не меняют  $\tilde{E}(\mathbf{x})$ :

- 1  $\theta_i(0) \text{ --} \delta, \theta_i(1) \text{ --} \delta, \theta_0 \text{ +} \delta;$
- 2  $\theta_{ij}(p, 0) \text{ --} \delta, \theta_{ij}(p, 1) \text{ --} \delta, \theta_i(p) \text{ +} \delta.$

**Замечание:**  $\theta_i(0) \geq 0, \theta_i(1) \geq 0$  можно обеспечить с помощью операции 1 с  $\delta = \min(\theta_i(0), \theta_i(1))$ .

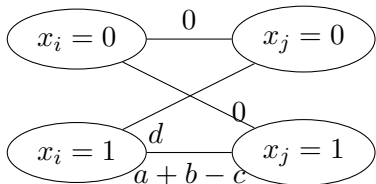
**Вопрос:** Как добиться условия на парные потенциалы?

# Репараметризация для парных потенциалов



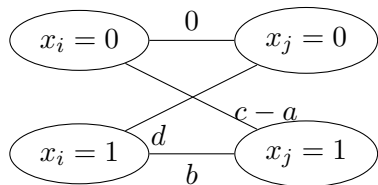
$$\theta_{ij}(0, 0) = a, \theta_{ij}(1, 1) = b$$

$$\theta_{ij}(0, 1) = c, \theta_{ij}(1, 0) = d.$$



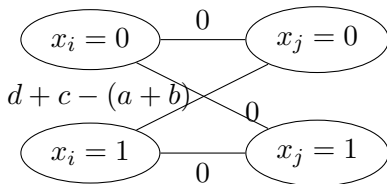
$$\theta_j(1) += c - a, \theta_{ij}(1, 1) -= c - a,$$

$$\theta_{ij}(0, 1) -= c - a.$$



$$\theta_i(0) += a, \theta_{ij}(0, 0) -= a,$$

$$\theta_{ij}(0, 1) -= a.$$



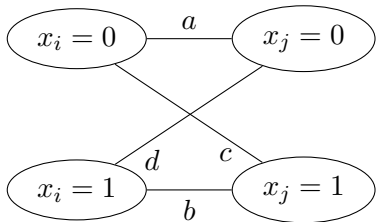
$$\theta_i(1) += a + b - c, \theta_{ij}(1, 0) -=$$

$$a + b - c,$$

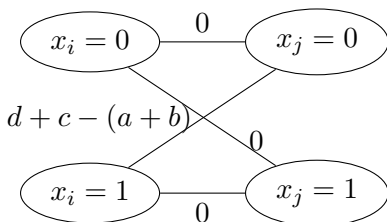
$$\theta_{ij}(1, 1) -= a + b - c.$$



## Репараметризация для парных потенциалов 2



$$\begin{aligned}\theta_{ij}(0, 0) &= a, \theta_{ij}(1, 1) = b \\ \theta_{ij}(0, 1) &= c, \theta_{ij}(1, 0) = d.\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\theta_{ij}(0, 0) &= 0, \theta_{ij}(1, 1) = 0 \\ \theta_{ij}(0, 1) &= 0, \theta_{ij}(1, 0) = d + c - (a + b).\end{aligned}$$

**Условие субмодулярности (УС):**

$$\theta_{ij}(0, 1) + \theta_{ij}(1, 0) \geq \theta_{ij}(0, 0) + \theta_{ij}(1, 1).$$

**Утверждение:** УС необходимо и достаточно для применимости алгоритмов разрезом графов для решения задачи  $\tilde{E}(\mathbf{x}) \rightarrow \min_{\mathbf{x}}$ .

**Вопрос:** Как выбрать потенциалы  $\theta_i(x_i), \theta_{ij}(x_i, x_j)$ ?

Пусть  $x_i = 1$  есть метка объекта, а  $x_i = 0$  метка фона.

$\theta_i(0) = +\infty \equiv C(x_i, t) = +\infty$  гарантирует  $x_i = 1$ .

$\theta_i(1) = +\infty \equiv C(s, x_i) = +\infty$  гарантирует  $x_i = 0$ .

**Выбор парного потенциала:**

- Модель Поттса:  $\theta_{ij}(x_i, x_j) = [x_i \neq x_j]$ ;
- $\theta_{ij}(x_i, x_j) = [x_i \neq x_j] \cdot \exp\left(-\frac{(y_i - y_j)^2}{2\sigma^2}\right)$ .

**Вопрос 1:** Какую поправку выражает второй потенциал по отношению к модели Поттса?

**Вопрос 2:** Как учесть многоканальность (то есть  $y_i \in \mathbb{R}_+^3$ )?

**Вопрос 3:** Как учесть наличие / отсутствие линий / углов в двух пикселях?

# Иллюстрация работы алгоритма GraphCut



Результат сшивки

Исходные изображения

## Алгоритм $\alpha$ – расширение

$$\tilde{E}(\mathbf{x}) = \theta_0 + \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \theta_{ij}(x_i, x_j) + \sum_i \theta_i(x_i) \rightarrow \min_{\mathbf{x}}, x_i \in [K], K \geq 3.$$

**Замечание:** Задача NP-трудна даже для  $K = 3$  и парных потенциалов Поттса.

**Идея ( $\alpha$  – расширение):** Пошагово решать задачи с бинарными переменными.

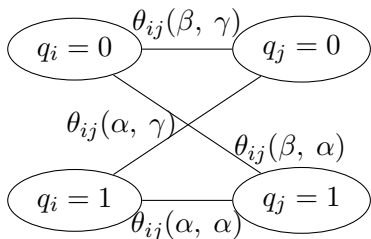
- 1 Выбираем начальное приближение  $\mathbf{x}$ ,  $x_i \in [K]$ ;
- 2 В цикле для каждой метки  $\alpha \in [K]$  заменяем часть меток на данную, минимизируя энергию;
- 3 Останавливаемся, когда нет улучшений ни для одной метки.

Шаг 2 соответствует введению переменных  $q_j \in \{0, 1\}$ , что

- $q_j = 0$ , если  $x_j^{\text{old}} = x_j^{\text{new}}$ ;
- $q_j = 1$ , если  $x_j^{\text{old}} \neq \alpha$ ,  $x_j^{\text{new}} = \alpha$ .

## Алгоритм $\alpha$ – расширение 2

Пусть  $x_i^{\text{old}} = \beta$ ,  $x_j^{\text{old}} = \gamma$ .



Условие субмодулярности для бинарных потенциалов требует  $\theta_{ij}(\beta, \alpha) + \theta_{ij}(\alpha, \gamma) \geq \theta_{ij}(\beta, \gamma) + \theta_{ij}(\alpha, \alpha) \forall \beta, \gamma$ .

**Вопрос 1:** Какое условие получаем при  $\theta_{ij}(\alpha, \alpha) = 0$ ?

**Замечание:** Для  $x_i^{\text{old}} = \alpha$ ,  $c(s, x_i) = +\infty$ ,  $c(x_i, t) = \theta_i(\alpha)$ .

Для  $x_i^{\text{old}} \neq \alpha$ ,  $c(s, x_i) = \theta_i(\alpha)$ ,  $c(x_i, t) = \theta_i(x_i^{\text{old}})$ .

**Вопрос 2:** Какое условие обеспечивает при  $c(s, x_i) = +\infty$ ?

# Иллюстрация работы алгоритма $\alpha$ – расширение



Исходные изображения

Результат сшивки

# Иллюстрация работы алгоритма $\alpha$ – расширение 2



Исходные изображения

Результат шивки

- 1 Boykov, Yuri, and Vladimir Kolmogorov. "An experimental comparison of min-cut/max-flow algorithms for energy minimization in vision." IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence 26.9 (2004): 1124-1137.
- 2 Примеры использования GraphCut. URL: <http://www.f.waseda.jp/hfs/PSIVT2009.pdf>
- 3 Koller, Daphne, and Nir Friedman. Probabilistic graphical models: principles and techniques. MIT press, 2009.
- 4 Mor, Bhavya, Sunita Garhwal, and Ajay Kumar. "A systematic review of hidden markov models and their applications." Archives of computational methods in engineering 28.3 (2021): 1429-1448.
- 5 Pearl, Judea. Probabilistic reasoning in intelligent systems: networks of plausible inference. Morgan kaufmann, 1988.
- 6 Pearl, Judea. "Graphical models for probabilistic and causal reasoning." Quantified representation of uncertainty and imprecision (1998): 367-389.