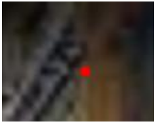
Deformation and Illumination Invariant Feature Point Descriptor

Постановка задачи

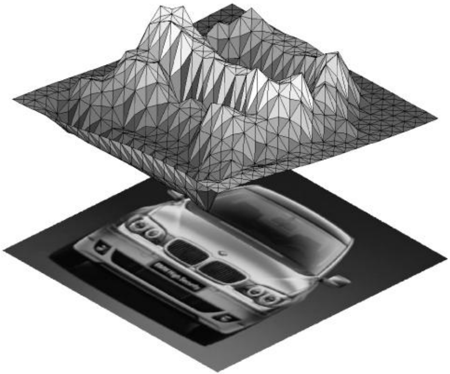
Требуется установить соответствие между исходным и искаженным изображением.

Можно устанавливать соответствие только между ключевыми точками.



Основные идеи подхода

- Сопоставить каждой точке интереса дескриптор, как-то описывающий окрестность и инвариантный к определённым искажениям.
- Рассматривать изображение как поверхность в трёхмерном пространсве.



Теоретическое отступление

- Понятие Риманова многообразия
- Оператор Лапласа-Бельтрами и его спектр
- Уравнение теплопроводности и ядро теплопроводности

Построение дескриптора

Определения

- Метрическое пространство M называется **n-мерным многообразием**, если каждая его точка P содержится в окрестности (не обязательно единственной) $U \in M$, гомеоморфной некоторой области V евклидова пространства R^n. Соответствующие гомеоморфизмы называются координатными и задают **локальные системы координат** $\{x^k = x^k(P)\}_{k=1}^n$.
- Если в некоторой области определены две системы координат x_i^k и x_j^k, то функции $x_i^k(P) = x_i^k(x_j^1(P), ..., x_j^n(P))$ называются функциями замены координат
- Окрестность вместе с координатным гомеоморфизмом называется **картой**.
- Множество карт, покрывающее пространство M называется **атласом карт**.

Ещё определения

- Многообразие с фиксированным на нём атласом карт называется **гладким многообразием** , если для любой пары карт функции замены координат являются непрерывно дифференцируемыми.
- **Касательным вектором** $\vec{\xi}$ в точке P_0 к многообразию M называется соответствие, которое каждой локальной системе координат $\{x_i^1, ..., x_i^n\}$ сопоставляет набор чисел $\{\xi_i^1, ..., \xi_i^n\}$, удовлетворяющий следующему соотношению для каждой пары локальных систем координат:

$$\xi_i^k = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^l}(P_0)\xi_j^l$$

- Множество всех касательных векторов в фиксированной точке P_0 к многообразию M называется **касательным пространством** .

Ещё определения

- Многообразие с фиксированным на нём атласом карт называется **гладким многообразием** , если для любой пары карт функции замены координат являются непрерывно дифференцируемыми.
- **Касательным вектором** $\vec{\xi}$ в точке P_0 к многообразию M называется соответствие, которое каждой локальной системе координат $\{x_i^1, ..., x_i^n\}$ сопоставляет набор чисел $\{\xi_i^1, ..., \xi_i^n\}$, удовлетворяющий следующему соотношению для каждой пары локальных систем координат:

$$\xi_i^k = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^l}(P_0)\xi_j^l$$

- Множество всех касательных векторов в фиксированной точке P_0 к многообразию M называется **касательным пространством** .

Римановым многообразием называется гладкое многообразие, в каждом касательном пространстве которого задано скалярное произведение, меняющееся от точки к точке гладким образом.

Оператор Лапласа-Бельтрами

Пусть M - n-мерное риманово многообразие, вложенное в пространство R^{n+k}. Пусть в некоторой окрестности функция $\psi : R^n \to R^{n+k}$ задаёт отображение из локальной системы координат в M. Введём следующие обозначения:

$$g_{ij} = < \partial_i \psi, \partial_j \psi >$$

$$G = (g_{ij})$$

$$W = \sqrt{detG}$$

$$(g^{ij}) = G^{-1}$$

Оператором Лапласа-Бельтрами Δ_M будем называть оператор, действующий по следующему правилу: $\Delta_M f = \frac{1}{W} \sum_{i,j} \partial_i (g^{ij} W \partial_j f)$

Спектр оператора Лапласа-Бельтрами

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля с оператором Лапласа-Бельтрами:

$$\Delta_M f = -\lambda f$$

.

Собственные значения этого уравнения обладают следующими свойствами:

- $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \uparrow +\infty$
- инвариантность к изометрическим преобразованиям M
- при масштабировании многообразия M на множитель a собственные значения оператора Лапласа-Бельтрами домножаются на $\frac{1}{a^2}$

Масштабирование многообразия

Пусть многообразие $\hat{M}$ получается из многообразия M путём масштабирования, то есть $\hat{\psi} = a\psi$.

$$\hat{g}_{ij} = a^2 g_{ij}$$

$$\hat{g}^{ij} = \frac{1}{a^2} g^{ij}$$

$$\hat{W} = a^2 W$$

$$\Delta_{\hat{M}} f = \frac{1}{\hat{W}} \sum_{i,j} \partial_i (\hat{g}^{ij} \hat{W} \partial_j f) = \frac{1}{a^2} \Delta_M$$

Таким образом, собственные функции операторов Δ_M и $\Delta_{\hat{M}}$ совпадают, собственные значения отличаются на множитель $\frac{1}{a^2}$

Уравнение теплопроводности и ядро теплопроводности

Уравнение теплопроводности на Римановом многообразии задаётся следующим уравнением:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta_M(u) = 0, u : [0, \infty) \times M \to \mathbb{R}$$

Утверждение1: Если задано начальное распределение температуры u(0,x)=f(x) и граничное условие Дирихле (u(t,x)=0, если x лежит на границе M)существует функция $K(x, y, t) : M \times M \times (0, \infty) \to M$, обладающая следующими свойствами

1. K непрерывно дифференцируема по t и дважды непрерывно дифференцируема по x и y.
2. $(\partial K/\partial t) + \Delta_M(K) = 0$
3. K(x,y,t)=0 если x лежит на границе M
4. $\lim_{t\to 0^+} \int_M K(x, y, t) f(y) dV(y) = f(x)$ равномерно, если f непрерывна на M и обращается в 0 на границе.

Чем полезно ядро теплопроводности

- Ядро теплопроводности представляет из себя количество тепла, которое перейдёт из точки x в точку y к моменту t, если изначально в точке x будет находиться точечный излучатель тепла.
- функция K(x,y,t) инвариантна к изометрическим преобразованиям многообразия M.
- $K(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\xi_n(x)\xi_n(y)$

Построение дескриптора

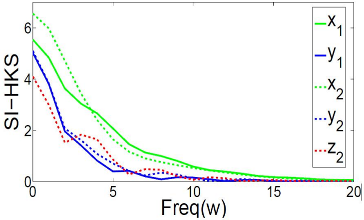
HKS

Преобразуем изображение в поверхность. Для этого пикселю в позиции (x,y) сопоставим точку $p = (x, y, \alpha I)$, где I - интенсивность пикселя.

В качестве дескриптора для точки p предлагается использовать HKS(p,t)=K(p,p,t).

DI

Независимое вычисление дескриптора для каждого пикселя неустойчиво.



Для повышения устойчивости дескриптора предлагается применять гауссово размытие по окрестности точки:

$$DI(p,t) = \sum_{s \in neig(p)} (HKS(s,t)G(s|p,\sigma))$$

Недостаток HKS

Пусть $p = (x, y, z)$, $p_a = (ax, ay, az)$

$$HKS(p_a, t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\frac{\lambda_i}{a^2} t} \frac{-\xi_i^2(p)}{a^2} = \frac{1}{a^2} HKS(p, \frac{t}{a^2})$$

Хотелось бы получить инвариантность к масштабированию.

Преобразование 1

Проведём логарифмическую замену переменной.

$$HKS_1(p, \tau) = HKS(p, \beta^{\tau})$$

$$\frac{1}{a^2} HKS(p, \frac{t}{a^2}) = \frac{1}{a^2} HKS(\frac{\beta^{\tau}}{\beta^{2log_{\beta} a}}) = \frac{1}{a^2} HKS(p, \beta^{\tau - 2log_{\beta} a}) = |s = -2log_{\beta} a| = \frac{1}{a^2} HKS(p, \beta^{\tau + s})) = \frac{1}{a^2} HKS_1(p, \tau + s)$$

Таким образом, вместо дополнительного множителя получаем дополнительное слагаемое.

Преобразование 2

Возьмём частную производную по τ логарифма HKS_1.

$$HKS_2(p,\tau) = \frac{\partial \ln(HKS_1(p,\tau))}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial \ln(\frac{1}{a^2} HKS_1(p,\tau+s))}{\partial \tau} = \frac{\partial(-2\ln a)}{\partial \tau} + \frac{\partial \ln HKS_1(p,\tau+s)}{\partial \tau} = \frac{\partial \ln HKS_1(p,\tau+s)}{\partial \tau} = HKS_2(p,\tau+s)$$

Мы избавились от множителя $\frac{1}{a^2}$ перед функцией.

Финальное преобразование

Теперь возьмём модуль преобразования фурье от HKS_2

$$\text{SI-HKS}(p,\tau) = |\mathcal{F}(HKS_2(p,\tau))|$$

$$|\mathcal{F}(HKS_2(p,\tau+s))| = |\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\textstyle\int_{-\infty}^{\infty} HKS_2(p,\tau+s)e^{-i\tau\omega}d\tau| =$$

$$|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} HKS_2(p,\tau+s)e^{-i(\tau+s)}e^{is\omega}d(\tau+s)|$$

$$= |e^{is\omega}||\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\textstyle\int_{-\infty}^{\infty} HKS_2(p,\bar{\tau})e^{-i\bar{\tau}\omega}d\bar{\tau}| = \text{SI-HKS}(p,\tau)$$

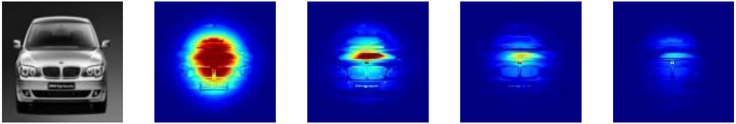
Таким образом, в результате цепочки преобразований удалось построить функцию, инвариантную к масштабированию.

DaLI

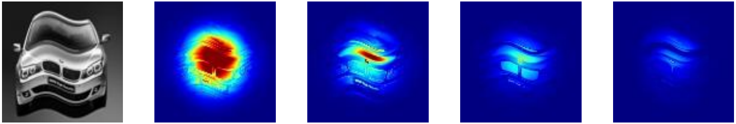
Заменяя в дескрипторе DI функцию HKS на функцию SI-HKS получаем дескриптор

$$DaLI(p) = \sum_{s \in neig(p)} (\text{SI-HKS}(s,t) G(s|p,\sigma))$$

Срезы дескриптора при различных частотах

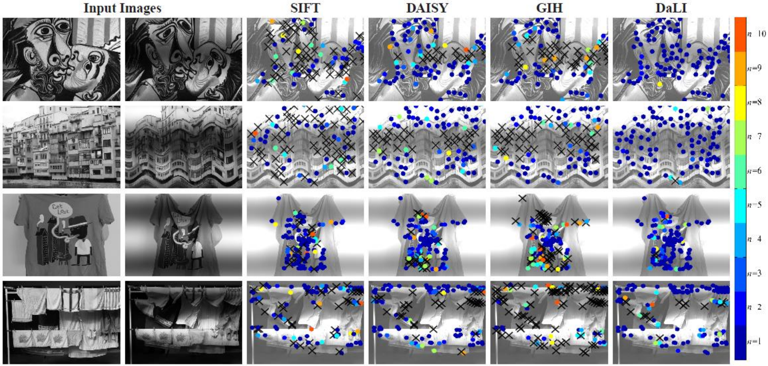


$(\omega = 0)$ $(\omega = 2)$ $(\omega = 4)$ $(\omega = 6)$



$(\omega = 0)$ $(\omega = 2)$ $(\omega = 4)$ $(\omega = 6)$

Сравнение с другими дескрипторами



Здесь цвет точки показывает номер истинного кандидата среди 10 ближайших.