

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (государственный университет)
ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛЕНИЯ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР ИМ. А. А. ДОРОДНИЦЫНА РАН
КАФЕДРА «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ»

Кононенко Даниил Сергеевич

Марковский подход к анализу тренда и сезонности в модели нестационарной регрессии

511656 - Математические и информационные технологии

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

Научный руководитель:

в.н.с. ВЦ РАН, д.т.н.

Моттль Вадим Вячеславович

Москва
2011

Содержание

1	Введение	4
2	Постановка задачи оценивания скрытой компоненты	5
2.1	Байесовский подход к оцениванию модели сигнала	5
2.2	Скрытая марковская модель сигнала	6
2.3	Постановка задачи динамического программирования	7
3	Оценивание скрытого марковского процесса	7
3.1	Функции Беллмана. Прямое и обратное рекуррентные соотношения . .	8
3.2	Маргинальные функции	8
3.3	Линейная нормальная модель	9
3.4	Процедуры фильтрации и интерполяции для линейной нормальной модели	9
4	Модели тренда и сезонности	11
4.1	Модель тренда	11
4.2	Модель сезонности	12
4.3	Скрытые переменные тренда и сезонности	13
4.4	Задача анализа ВВП	14
5	Вычислительный эксперимент	17
6	Заключение	20
	Список литературы	21

Аннотация

В работе рассматривается байесовский подход к задаче оценивания модели сигнала в рамках скрытой марковской модели. Задача решается с помощью обобщенной процедуры динамического программирования. Предлагается способ моделирования тренда и сезонности в рамках линейной нормальной модели нестационарной регрессии. Предложенная модель иллюстрируется на примере задачи анализа ВВП. Описывается вычислительный эксперимент на модельных данных, показывающий работоспособность предложенной модели.

1 Введение

Сигналы являются, пожалуй, наиболее распространенными видами информации, ставшими в последние десятилетия типовыми объектами применения компьютеров для анализа данных. Конечной целью анализа сигнала, как правило, является принятие того или иного решения об их источнике, например, какое слово произнесено, если анализируется сигнал речи, либо какое слово написано, если к анализу предъявлено изображение фрагмента рукописного либо печатного текста.

Под сигналом принято понимать любую физическую величину, изменяющуюся во времени. С формальной точки зрения сигнал есть функция скалярного аргумента $y_t : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{Y}$, принимающая значения в некотором множестве $y_t \in \mathbb{Y}$. Мы будем полагать, что множество значений аргумента $\mathbb{T} = \{1, \dots, N\}$, которое далее будем понимать как множество индексов элементов упорядоченного массива данных $Y = (y_t, t = 1, \dots, N)$.

Существует широкий класс задач анализа сигналов, в которых требуется для предъявленного сигнала $Y = (y_t, t = 1, \dots, N)$, $Y \in \mathcal{Y}$, подобрать наиболее подходящую модель \hat{X} из некоторого класса моделей $X \in \mathcal{X}$. Применительно к сигналам, естественно различать стационарные модели, передающие общую форму предъявленного сигнала в пределах всей области определения $t \in \mathbb{T}$, и нестационарные модели, призванные отражать изменение некоторого локального свойства сигнала вдоль его дискретной оси. Например, среднее значение сигнала является стационарной моделью, а локальное среднее значение — нестационарной моделью. Нестационарную модель сигнала следует искать в виде последовательности локальных моделей либо значений изменяющегося параметра некоторой общей локальной модели в каждой точке оси сигнала $X = (x_t, t = 1, \dots, N)$. Таким образом, требуется для предъявленного сигнала Y подобрать наиболее подходящую модель в виде некоторого другого сигнала $X = (x_t, t = 1 \dots N)$, принимающего значения из некоторого другого множества $x_t \in \mathbb{X}$. Сигнал Y будем называть наблюдаемым, а сигнал X — скрытым.

В качестве априорной информации часто оказывается естественным принять предположение, что локальная модель изменяется, в основном, достаточно плавно, так что смежные локальные модели x_{t-1} и x_t , скорее всего, близки друг к другу за исключением, быть может, относительно редких скачков.

В задаче анализа сигнала речи роль нестационарной модели играет последовательность мгновенных спектров сигнала $\mathbf{x}_t = (x_t^1, \dots, x_t^n) \in \mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ [5].

При анализе данных о доходностях ценных бумаг и оценивании изменяющегося состава портфеля инвестиционной компании [2, 4, 5, 7] общий объем капитала $z_t^{(p)}$ всегда секретен, но компания обязана каждый день сообщить отношение $r_t^{(p)} = \frac{z_t^{(p)} - z_{t-1}^{(p)}}{z_{t-1}^{(p)}}$, называемое дневной доходностью портфеля. При некоторых предположениях оказывается, что $r_t^{(p)} = \sum_{i=1}^n x_t^{(i)} r_t^{(i)}$, где $x_t^{(i)}$ — доля i -ого актива в портфеле. Тогда совокупность значений доходностей портфеля и потенциальных активов, из которых он может быть составлен, образует анализируемый векторный сигнал $\mathbf{y}_t = (r_t^{(p)}, r_t^{(i)}, i = 1, \dots, n)$, а искомое доленое распределение капитала $\mathbf{x}_t = (x_t^{(i)}, i = 1, \dots, n) \in \mathbb{R}^n$ представляет собой нестационарную модель этого сигнала, подлежащую оцениванию.

В задаче сглаживания сигнала [4] наблюдаемый сигнал $y_t = x_t + \xi_t$, где скрытый сигнал x_t есть сглаженный сигнал, который необходимо восстановить, а ξ_t — аддитивный нормальный шум. Если обозначить

$$\begin{cases} x_t^1 = x_t, \\ x_t^2 = x_t^1 - x_{t-1}^1, \\ x_t^3 = x_t^2 - x_{t-1}^2, \\ \dots, \\ x_t^n = x_t^{n-1} - x_{t-1}^{n-1}, \end{cases} \quad (1.1)$$

$\mathbf{x}_t = (x_t^1, \dots, x_t^n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y}_t = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$, то анализируемый сигнал может быть представлен моделью $y_t = \mathbf{x}_t^T \mathbf{y}_t + \xi_t$. Тогда $X = (\mathbf{x}_t, t = 1, \dots, N)$ — искомая последовательность скрытых переменных. Предположение о гладкости $(n - 1)$ -ого порядка выражается в том, что соответствующая разность (1.1) изменяется «не слишком сильно» между соседними точками оси аргумента.

Часто в практических задачах возникает необходимость определить тренд наблюдаемого сигнала и его периодическую составляющую — сезонные колебания. В данной работе предложен способ моделирования тренда и сезонности в рамках линейной нормальной модели нестационарной регрессии. В разделе 2 рассматривается байесовский подход к задаче оценивания скрытой модели сигнала, определяется марковская модель скрытого сигнала и формулируется оптимизационная задача, решением которой является искомый сигнал. В разделе 3 вводятся понятия функций Беллмана и маргинальных функций, рассматривается обобщенная процедура динамического программирования для решения поставленной оптимизационной задачи, определяется линейная нормальная модель сигнала и рассматриваются процедуры фильтрации и интерполяции, решающие поставленную задачу в рамках этой модели. В разделе 4 рассматриваются модели тренда и сезонности, затем предложенные модели объединяются с линейной нормальной моделью сигнала и иллюстрируются на задаче анализа ВВП. В разделе 5 описан вычислительный эксперимент на модельных данных.

2 Постановка задачи оценивания скрытой компоненты

2.1 Байесовский подход к оцениванию модели сигнала

Рассмотрим двухкомпонентный процесс $(X, Y) = [(x_t, y_t), t = 1, \dots, N]$, в котором наблюдаемая компонента $Y = (y_t, t = 1, \dots, N)$, $y_t \in \mathbb{Y}$, есть подлежащий анализу сигнал, а скрытая компонента $X = (x_t, t = 1 \dots N)$, $x_t \in \mathbb{X}$, интерпретируется как его искомая нестационарная модель. Байесовский подход предполагает наличие вероятностного распределения $H(X, Y)$ на множестве всех реализаций двухкомпонентного процесса $(X, Y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Также предполагается наличие априорного распределения $\Psi(X)$ на множестве моделей и условного распределения $\Phi(Y|X)$.

$$H(X, Y) = \Psi(X)\Phi(Y|X).$$

Определено также апостериорное распределение

$$P(X|Y) = \frac{H(X, Y)}{\int_{X' \in \mathcal{X}} H(X', Y) dX'} = \frac{\Psi(X)\Phi(Y|X)}{\int_{X' \in \mathcal{X}} \Psi(X')\Phi(Y|X') dX'}.$$

Пусть оператор оценивания скрытой компоненты по наблюдаемой имеет вид $\hat{X}(Y)$ и задана функция потерь $\lambda(X, \hat{X}) : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ — «штраф за несовпадение» оценки и истинной реализации. Оптимальной будем считать оценку, минимизирующую средний риск ошибки — математическое ожидание функции потерь $r[\hat{X}] = M(\lambda(X, \hat{X}))$. Сингулярная функция потерь $\lambda(X, \hat{X}) = 1 - \delta(X, \hat{X})$ приводит к оптимизационной задаче максимизации апостериорной плотности распределения скрытого процесса [5]:

$$\hat{X}(Y) = \arg \max_{X \in \mathbb{X}^N} [\log \Psi(X) + \log \Phi(Y|X)]. \quad (2.1)$$

2.2 Скрытая марковская модель сигнала

В рамках этой модели скрытый процесс будем считать марковским, т.е. для условных плотностей распределения выполнено

$$\psi_t(x_t|x_1, \dots, x_{t-1}) = \psi_t(x_t|x_{t-1}).$$

Таким образом, в дальнейшем мы будем предполагать, что априорная плотность распределения скрытого процесса $\Psi(X)$ задана как плотность распределения марковского случайного процесса. Причем будем считать, что имеется некоторая априорная информация о значении процесса в момент $t = 0$, выраженная в виде безусловной плотности распределения $\psi_0(x_0)$. Тогда полагая, что $X = (x_t, t = 0, 1, \dots, N)$, получаем

$$\Psi(X) = \psi_0(x_0) \prod_{t=1}^N \psi_t(x_t|x_{t-1}). \quad (2.2)$$

Также будем считать, что каждое из мгновенных условных распределений наблюдаемого процесса определяется единственным значением скрытого процесса в текущий момент времени:

$$\varphi_t(y_t|y_1, \dots, y_{t-1}, X) = \varphi_t(y_t|y_1, \dots, y_{t-1}, x_t). \quad (2.3)$$

Обозначим через $Y^t = (y_s, s \leq t)$ фрагмент наблюдаемого процесса, заканчивающийся справа моментом t , рассматриваемым как последний момент наблюдения. Будем называть фильтрационной условную плотность распределения значения скрытой компоненты в текущий момент времени при известных значениях наблюдаемой компоненты вплоть до текущего момента:

$$p_{t|t}(x_t) = p_t(x_t|Y^t). \quad (2.4)$$

Также будем называть интерполяционной условную плотность распределения значения скрытой компоненты в текущий момент времени при всех известных значениях наблюдаемой компоненты:

$$p_{t|N}(x_t) = p_t(x_t|Y). \quad (2.5)$$

Задачей фильтрации назовем задачу нахождения оптимальной оценки скрытой переменной \hat{x}_t , если известен только фрагмент наблюдаемого процесса Y^t , а задачей интерполяции — задачу нахождения оптимальной оценки скрытой переменной \hat{x}_t , если известен весь наблюдаемый процесс Y . Из определения видно, что решение задачи интерполяции есть искомое оптимальное значение скрытых переменных.

2.3 Постановка задачи динамического программирования

Для определения байесовской оценки скрытого процесса в случае сингулярной функции потерь надо решить задачу оптимизации (2.1). Согласно предположению о связи наблюдаемого случайного процесса со скрытым процессом (2.3) первый член есть сумма, в которой каждое слагаемое связано с очередной точкой интервала наблюдения и зависит только от одного значения скрытого процесса:

$$\log \varphi(Y|X) = \sum_{t=1}^N \log \varphi_t(y_t|Y^{t-1}; x_t).$$

В силу предположения о марковском свойстве скрытого процесса (2.2) второй член также является суммой по точкам интервала наблюдения, причем слагаемые этой суммы, кроме нулевого слагаемого, зависят от пар смежных значений скрытого процесса:

$$\log \Psi(X) = \log \psi_0(x_0) + \sum_{t=1}^N \log \psi_t(x_t|x_{t-1}).$$

Вводя обозначения

$$\eta_0(x_0) = \log \psi_0(x_0), \quad \eta_t(x_t|Y^t) = \log \varphi_t(y_t|Y^{t-1}; x_t), \quad (2.6)$$

$$\gamma_t(x_{t-1}, x_t) = \log \psi_t(x_t|x_{t-1}), \quad t = 1, \dots, N, \quad (2.7)$$

приходим к следующей оптимизационной задаче для оценки скрытого процесса:

$$\begin{cases} \hat{X}(Y) = [\hat{x}_0(Y), \dots, \hat{x}_N(Y)] = \arg \max_{X \in \mathcal{X}} J(x_0, \dots, x_N|Y), \\ J(x_0, \dots, x_N|Y) = \sum_{t=0}^N \eta_t(x_t|Y^t) + \sum_{t=1}^N \gamma_t(x_{t-1}, x_t). \end{cases} \quad (2.8)$$

Функции $\eta_t(x_t|Y^t)$ будем называть узловыми, а функции $\gamma_t(x_{t-1}, x_t)$ — функциями связи.

3 Оценивание скрытого марковского процесса

Задачи оптимизации вида (2.8) детально рассмотрены в работе [6]. Они решаются с помощью метода динамического программирования, изначально изложенного в [1].

3.1 Функции Беллмана. Прямое и обратное рекуррентные соотношения

Рассмотрим последовательность частичных целевых функций $J_t(x_0, \dots, x_t)$, в точности повторяющих структуру полной функции (2.8) с тем единственным различием, что суммирование ведется лишь по аргументам, индексы которых не превосходят текущего значения t :

$$J_t(x_0, \dots, x_t | Y^t) = \sum_{s=0}^t \eta_s(x_s | Y^s) + \sum_{s=1}^t \gamma_t(x_{s-1}, x_s). \quad (3.1)$$

Центральная идея метода динамического программирования заключается в понятии последовательности функций Беллмана одного аргумента $J_{t|t}(x_t)$, каждая из которых равна минимальному значению соответствующей частичной функции по всем переменным, кроме последней:

$$J_{t|t}(x_t) = \min_{x_0, \dots, x_{t-1}} J_t(x_0, \dots, x_t | Y^t).$$

Теорема 3.1 *Функции Беллмана связаны рекуррентным соотношением*

$$J_{t|t}(x_t) = \eta_t(x_t | Y^t) + \min_{x_{t-1} \in \mathbb{X}} [\gamma_t(x_{t-1}, x_t) + J_{t-1|t-1}(x_{t-1})]. \quad (3.2)$$

Эта теорема позволяет определять функции Беллмана последовательно для возрастающих моментов времени, начиная с известной нулевой функции. Непосредственно из определения (3.1) следует, что точка минимума функции Беллмана $J_{t|t}(x_t)$ дает решение задачи фильтрации. Решение задачи фильтрации в последней точке $\hat{x}_{N|N}$ является также решением задачи интерполяции. Остальные элементы искомого решения могут быть найдены путем применения обратного рекуррентного соотношения, представляющего собой обращенную форму прямого соотношения (3.2):

$$\hat{x}_{t-1|N} = \arg \min_{x_{t-1} \in \mathbb{X}} [\gamma_t(x_{t-1}, x_t) + J_{t-1|t-1}(x_{t-1})]. \quad (3.3)$$

3.2 Маргинальные функции

Рассмотрим последовательность маргинальных функций

$$J_{t|N}(x_t) = \min_{x_s, s \neq t} J(x_0, \dots, x_N | Y). \quad (3.4)$$

Теорема 3.2 *Маргинальные функции удовлетворяют следующему обратному рекуррентному соотношению:*

$$J_{t-1|N}(x_{t-1}) = \min_{x_t \in \mathbb{X}} \left\{ J_{t|N}(x_t) + [J_{t-1|t-1}(x_{t-1}) + \gamma_t(x_{t-1}, x_t)] - \min_{x'_{t-1} \in \mathbb{X}} [J_{t-1|t-1}(x'_{t-1}) + \gamma_t(x'_{t-1}, x_t)] \right\}. \quad (3.5)$$

По своему определению (3.4) маргинальные функции дают оптимальные значения скрытых переменных

$$\hat{x}_{t|N} = \arg \min_{x_t \in X} J_{t|N}(x_t),$$

которые, вообще говоря, могут быть вычислены и непосредственно по рекуррентному правилу (3.3). Однако предварительное вычисление маргинальных функций позволяет получить дополнительную информацию о форме целевой функции в точке минимума, которая часто оказывается не менее важной, чем сами оптимальные значения переменных.

Доказательства теорем 3.1 и 3.2 можно найти, например, в [5].

3.3 Линейная нормальная модель

Во введении мы говорили, что в качестве априорной информации о скрытой компоненте естественно взять предположение о «близости» смежных локальных моделей x_{t-1} и x_t . Одной из самых простых и в то же время часто встречаемых на практике форм такой близости является линейная связь. Как это часто бывает на практике, каждое следующее значение оказывается зашумленным. Мы будем рассматривать нормальный шум с нулевым математическим ожиданием. Пусть в каждый момент времени скрытой компоненте отвечает вектор скрытых переменных $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$, наблюдаемой компоненте — скалярная величина $y_t \in \mathbb{R}$. Предположим также зашумленную линейную связь между наблюдаемой и скрытой компонентой. Таким образом, мы определили линейную нормальную модель:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_t = \mathbf{V}_t \mathbf{x}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, & t = 2, \dots, N; \\ y_t = \mathbf{c}_t^T \mathbf{x}_t + \xi_t, & t = 1, \dots, N; \\ \mathbf{V}_t [n \times n], M(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{0}, M(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_s^T) = 0 \text{ при } t \neq s, \\ Cov(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = M(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t^T) = \sigma^2 \mathbf{U}_t^{-1}; \\ \mathbf{c}_t [n \times 1], M(\xi_t) = 0, D(\xi_t) = \sigma_y^2, M(\xi_{t_1} \xi_{t_2}) = 0 \text{ при } t_1 \neq t_2, M(\boldsymbol{\varepsilon}_t \xi_s) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Здесь \mathbf{U}_t^{-1} — ковариационные матрицы внутреннего шума, \mathbf{U}_t — матрицы точности внутреннего шума.

Будем полагать, что аддитивные шумы $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ и ξ_t нормальны

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{U}_t^{-1}), \quad \varphi(\xi_t) = \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

а также нормально распределено случайное начальное значение скрытого процесса

$$\psi_0(\mathbf{x}_0) = \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_{0|0}, \mathbf{B}_{0|0}^{-1}) \quad (3.7)$$

с некоторым известным математическим ожиданием $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}$ и известной ковариационной матрицей $\mathbf{B}_{0|0}^{-1}$. Очевидно, что условные распределения $\psi_t(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})$ и $\varphi_t(y_t | \mathbf{x}_t)$ также нормальны:

$$\begin{aligned} \psi_t(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}) &= \mathcal{N}(\mathbf{V}_t \mathbf{x}_{t-1}, \sigma^2 \mathbf{U}_t^{-1}), \\ \varphi_t(y_t | \mathbf{x}_t) &= \mathcal{N}(\mathbf{c}_t^T \mathbf{x}_t, \sigma^2). \end{aligned}$$

3.4 Процедуры фильтрации и интерполяции для линейной нормальной модели

В рамках линейной нормальной модели для узловых функций (2.6) и функций связи (2.7) имеем

$$\eta_t(x_t | Y^t) = \log \varphi_t(y_t | \mathbf{x}_t) = \left\{ -\log \sigma - \frac{1}{2} \log(2\pi) \right\} - \frac{1}{2\sigma^2} (y_t - \mathbf{c}_t^T \mathbf{x}_t)^2, \quad (3.8)$$

$$\gamma_t(x_{t-1}, x_t) = \log \psi_t(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}) = \left\{ -\log \sigma - \frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log |\mathbf{U}_t^{-1}| \right\} - \frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{x}_t - \mathbf{V}_t \mathbf{x}_{t-1})^T \mathbf{U}_t (\mathbf{x}_t - \mathbf{V}_t \mathbf{x}_{t-1}). \quad (3.9)$$

Очевидно, что слагаемые, являющиеся константами относительно целевых переменных (значений скрытого процесса) могут быть отброшены. Кроме того, все узловые функции и функции связи имеют общий множитель $\frac{1}{2\sigma^2}$, который также можно отбросить. Как следствие, результат обработки сигнала не будет зависеть от принятой дисперсии шума наблюдения σ^2 , поскольку он входит также и в ковариационную матрицу внутреннего шума скрытого процесса $\sigma^2 \mathbf{U}_t^{-1}$.

Минимизация критерия (2.8) может быть осуществлена по схеме динамического программирования — с помощью процедур фильтрации и интерполяции.

Суть процедуры фильтрации заключается в вычислении фильтрационных плотностей распределения (2.4). С помощью рекуррентного соотношения (3.2) можно показать [5], что в рамках линейной нормальной модели (3.6) и предположения о нормальности начального значения скрытого процесса фильтрационные плотности также распределены нормально: $p_{t|t}(\mathbf{x}_t) = \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_{t|t}, \mathbf{B}_{t|t}^{-1})$, $\mathbf{B}_{t|t}$ — матрица точности. Кроме того, процедура фильтрации сводится к рекуррентному определению математических ожиданий и ковариационных матриц фильтрационных плотностей:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{t|t} = \mathbf{V}_t \hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1} + \mathbf{B}_{t|t}^{-1} \mathbf{c}_t (y_t - \mathbf{c}_t^T \mathbf{V}_t \hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}), \\ \mathbf{B}_{t|t} = \mathbf{c}_t \mathbf{c}_t^T + \left(\mathbf{V}_t \mathbf{B}_{t-1|t-1}^{-1} \mathbf{V}_t^T + \mathbf{U}_t^{-1} \right)^{-1}. \end{cases} \quad (3.10)$$

Процедура начинается с $t = 0$, при котором из априорной модели (3.7) уже известны математическое ожидание $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}$ и ковариационная матрица $\mathbf{B}_{0|0}^{-1}$ для случайного начального значения скрытого вектора \mathbf{x}_0 . В частности, если нет никакой априорной информации о начальном значении \mathbf{x}_0 , то это может быть легко выражено, например, как

$$\mathbf{B}_{0|0}^{-1} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \rho & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \rho \end{pmatrix}, \quad \rho \rightarrow \infty,$$

что даст $\mathbf{B}_{1|1} = \mathbf{c}_t \mathbf{c}_t^T$.

В ходе процедуры интерполяции вычисляются интерполяционные плотности распределения (2.5). Интерполяционная плотность $p_{N|N}(\mathbf{x}_N)$ получена нами на последнем шаге процедуры фильтрации. С помощью обратного рекуррентного соотношения (3.3) можно показать [5], что в рамках линейной нормальной модели (3.6) все интерполяционные плотности распределены нормально: $p_{t|N}(\mathbf{x}_t) = \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_{t|N}, \mathbf{B}_{t|N}^{-1})$. Кроме того, процедура интерполяции сводится к рекуррентному определению математических ожиданий и ковариационных матриц интерполяционных плотностей:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{t|N} = \hat{\mathbf{x}}_{t|t} + \mathbf{H}_t (\hat{\mathbf{x}}_{t+1|N} - \mathbf{V}_{t+1} \hat{\mathbf{x}}_{t|t}), \\ \mathbf{B}_{t|N}^{-1} = \mathbf{H}_t \mathbf{B}_{t+1|N}^{-1} \mathbf{H}_t^T + \left(\mathbf{V}_{t+1}^T \mathbf{U}_{t+1} \mathbf{V}_{t+1} + \mathbf{B}_{t|t}^{-1} \right)^{-1}, \\ \mathbf{H}_t = \mathbf{B}_{t|t}^{-1} \mathbf{V}_{t+1}^T \left(\mathbf{V}_{t+1} \mathbf{B}_{t|t}^{-1} \mathbf{V}_{t+1}^T + \mathbf{U}_{t+1}^{-1} \right)^{-1}. \end{cases} \quad (3.11)$$

4 Модели тренда и сезонности

4.1 Модель тренда

Пусть трендовая часть наблюдаемого сигнала выражается полиномом степени не выше k : $g(t) = a_k t^k + \dots + a_1 t + a_0$, $k < N$. Обозначим через g_t значения полинома в момент времени t .

Зная значения $g(t_0), \dots, g(t_k)$, $t_i \neq t_j$ при $t \neq j$, можно однозначно восстановить все коэффициенты полинома и значение $g(t)$ в любой момент времени. Действительно, система линейных уравнений для определения коэффициентов имеет вид

$$\begin{cases} a_0 + a_1 t_0 + \dots + a_k t_0^k = g_0, \\ a_0 + a_1 t_1 + \dots + a_k t_1^k = g_1, \\ \dots, \\ a_0 + a_1 t_k + \dots + a_k t_k^k = g_k. \end{cases}$$

Ее определитель называется определителем Вандермонда, и он отличен от нуля, если $t_i \neq t_j$ при $t \neq j$:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & t_0 & \dots & t_0^k \\ 1 & t_1 & \dots & t_1^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_k & \dots & t_k^k \end{pmatrix} = \prod_{i,j=1}^k (t_i - t_j), \quad 0 \leq j < i \leq k.$$

Утверждение 4.1 $\forall t \ g_{t+k+1} = \alpha_0 g_t + \alpha_1 g_{t+1} + \dots + \alpha_k g_{t+k} = \sum_{i=0}^k \alpha_i g_{t+i}$, причем коэффициенты $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ не зависят от коэффициентов конкретного полинома a_0, \dots, a_k , а только от его степени k и задаются выражением

$$\alpha_i = (-1)^{k-i} C_{k+1}^i. \quad (4.1)$$

Доказательство.

Введем функции $\phi_k^i(t)$ — полиномы степени k , каждый из которых сопоставлен со своей точкой $t_i = t + i$ таким образом, что

$$\phi_k^i(t_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Легко угадать явное выражение для $\phi_k^i(t)$:

$$\phi_k^i(t) = \prod_{j=0, j \neq i}^k \frac{t - t_j}{t_i - t_j}.$$

Теперь можно написать явное выражение для полинома $g(t)$, называемое формулой Лагранжа для интерполяционного полинома [3]:

$$g(t) = g_t = \sum_{j=0}^k g_j \phi_k^j(t). \quad (4.2)$$

При $t = t_{k+1}$ получаем выражение для коэффициентов $\alpha_0, \dots, \alpha_k$:

$$\alpha_i = \phi_k^i(t_{k+1}) = \prod_{j=0, j \neq i}^k \frac{t_{k+1} - t_j}{t_i - t_j} = \prod_{j=0, j \neq i}^k \frac{t + k + 1 - (t + j)}{t + i - (t + j)} = (-1)^{k-i} C_{k+1}^i.$$

Тогда можно записать

$$\begin{pmatrix} g_t \\ \vdots \\ g_{t+k} \end{pmatrix} = V^g \begin{pmatrix} g_{t-k-1} \\ \vdots \\ g_{t-1} \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

где матрица V^g размера $[(k+1) \times (k+1)]$ зависит только от степени полинома k .

4.2 Модель сезонности

Пусть сезонная (периодическая) часть наблюдаемого сигнала выражается l гармониками: $h(t) = a_0 + \sum_{i=1}^l a_i \cos(\Omega_i t) + b_i \sin(\Omega_i t)$, $\Omega_1, \dots, \Omega_l$ фиксированы. Обозначим через h_t значения $h(t)$. Зная $2l+1$ значений $h(t_0), \dots, h(t_{2l})$, можно однозначно восстановить коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_l и b_1, \dots, b_l и значение $h(t)$ в любой момент времени.

Рассмотрим случай $\Omega_i = 2\pi i$.

Утверждение 4.2 $\forall t \ h_{t+2l+1} = \alpha_0 h_t + \alpha_1 h_{t+1} + \dots + \alpha_{2l} h_{t+2l} = \sum_{i=0}^{2l} \alpha_i h_{t+i}$, причем коэффициенты $\alpha_0, \dots, \alpha_{2l}$ не зависят от коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_l и b_1, \dots, b_l , а только от l .

Доказательство.

Для тригонометрической интерполяции существует аналог формулы Лагранжа (4.2):

$$h(t) = \sum_{i=0}^{2l} h_i \prod_{j=0, j \neq i}^{2l} \frac{\sin\left(\frac{t-t_j}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t_i-t_j}{2}\right)}.$$

Отсюда при $t = t_{2l+1}$ непосредственно получается выражение для коэффициентов $\alpha_0, \dots, \alpha_{2l}$:

$$\alpha_i = \prod_{j=0, j \neq i}^{2l} \frac{\sin\left(\frac{t+2l+1-(t+j)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t+i-(t+j)}{2}\right)} = \prod_{j=0, j \neq i}^{2l} \frac{\sin\left(\frac{2l+1-j}{2}\right)}{\sin\left(\frac{i-j}{2}\right)}. \quad (4.4)$$

Тогда можно записать

$$\begin{pmatrix} h_t \\ \vdots \\ h_{t+2l} \end{pmatrix} = V^h \begin{pmatrix} h_{t-2l-1} \\ \vdots \\ h_{t-1} \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

где матрица V^h размера $[(2l+1) \times (2l+1)]$ зависит только от l .

4.3 Скрытые переменные тренда и сезонности

Объединим линейную нормальную модель (3.6) с моделями тренда (4.3) и сезонности (4.5). Для это в каждый момент времени t добавим к скрытому вектору \mathbf{x}_t вектор тренда $\mathbf{g}_t = (g_t^1, \dots, g_t^{k+1})^T$ и вектор сезонности $\mathbf{h}_t = (h_t^1, \dots, h_t^{2l+1})$. Размерность полученного вектора скрытых переменных $\mathbf{z}_t = (\mathbf{x}_t^T, \mathbf{g}_t^T, \mathbf{h}_t^T)^T$ равна $\tilde{n} = n + k + 2l + 2$, здесь n – размерность \mathbf{x}_t .

Компоненты тренда и сезонности будем считать незашумленными, тогда для них справедливы соотношения (4.3) и (4.5). Так как мы рассматриваем тренд и периодическую составляющую наблюдаемого сигнала y_t , то соответствующие координаты вектора \mathbf{c}_t единичны:

$$c_t^{n+1} = c_t^{n+2} = \dots = c_t^{\tilde{n}} = 1.$$

Обозначим $\mathbf{c}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_t^x \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} [\tilde{n} \times 1]$.

Отсутствию шума в компонентах тренда и сезонности соответствует нулевой шумовой вектор, поэтому шумовой вектор для всех скрытой компоненты

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_t^x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} [\tilde{n} \times 1].$$

Получаем следующую модель:

$$\begin{cases} \mathbf{z}_t = \mathbf{V}_t \mathbf{z}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, & t = 2, \dots, N; \\ y_t = \mathbf{c}_t^T \mathbf{z}_t + \xi_t = (\mathbf{c}_t^x)^T \mathbf{x}_t + g_t^1 + \dots + g_t^{k+1} + h_t^1 + \dots + h_t^{2l+1} + \xi_t. \end{cases} \quad (4.6)$$

Здесь

$$\mathbf{V}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_t^x & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V^g & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & V^h \end{pmatrix} [\tilde{n} \times \tilde{n}],$$

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{V}_t^x \mathbf{x}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t^x, \quad \mathbf{V}_t^x [n \times n],$$

$$\mathbf{g}_t = \mathbf{V}^g \mathbf{g}_{t-1}, \quad \mathbf{V}^g [(k+1) \times (k+1)], \quad (4.7)$$

$$\mathbf{h}_t = \mathbf{V}^h \mathbf{h}_{t-1}, \quad \mathbf{V}^h [(2l+1) \times (2l+1)]. \quad (4.8)$$

Для шума справедливы соотношения

$$\begin{aligned} M(\boldsymbol{\varepsilon}_t^x) &= \mathbf{0}, \quad M(\boldsymbol{\varepsilon}_t^x (\boldsymbol{\varepsilon}_s^x)^T) = 0 \text{ при } t \neq s, \\ M(\xi_t) &= 0, \quad D(\xi_t) = \sigma_y^2, \quad M(\xi_{t_1} \xi_{t_2}) = 0 \text{ при } t_1 \neq t_2, \quad M(\boldsymbol{\varepsilon}_t^x \xi_s) = \mathbf{0}. \\ \text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_t^x) &= M(\boldsymbol{\varepsilon}_t^x (\boldsymbol{\varepsilon}_t^x)^T) = \sigma^2 (\mathbf{U}_t^x)^{-1}, \quad (\mathbf{U}_t^x)^{-1} (n \times n), \\ \text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_t) &= M(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t^T) = \sigma^2 \mathbf{U}_t^{-1}, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{U}_t^{-1} = \begin{pmatrix} (\mathbf{U}_t^x)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} [\tilde{n} \times \tilde{n}]. \quad (4.9)$$

Замечание 4.1 В данной модели одному моменту времени t соответствуют сразу несколько значений тренда и сезонности: $(k + 1)$ значение тренда и $(2l + 1)$ значение сезонности. Однако такая модель имеет физический смысл в часто встречающемся на практике случае, когда наблюдаемый сигнал $Y = (y_t, t = 1, \dots, N)$ есть дискретизация некоторой непрерывной величины $y(t)$. Тогда, например, наличие $(k + 1)$ значения тренда можно интерпретировать как разбиение интервала $(t - 1, t)$ на $(k + 1)$ часть. Таким образом, трендовая и сезонная компоненты определены на более точной дискретизации по времени, то есть на более мелком разбиении всего интервала времени $(1, N)$.

Замечание 4.2 К данной модели напрямую не применимы процедуры фильтрации (3.10) и интерполяции (3.11) в силу необратимости ковариационной матрицы шума (4.9). В этом случае для получения корректных процедур следовало бы в рекуррентных соотношениях (3.2) и (3.3) проводить минимизацию не по всем возможным значениям вектора скрытых переменных $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$, а ввести линейные ограничения вида (4.7) и (4.8). Однако в данной работе мы будем по-прежнему пользоваться процедурами (3.10) и (3.11), искусственно вводя небольшой диагональный шум в компоненты тренда и сезонности:

$$\mathbf{U}_t^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma^2(\mathbf{U}_t^x)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \varepsilon \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

где \mathbf{I} — единичная матрица, ε мало по сравнению σ^2 .

4.4 Задача анализа ВВП

В данной задаче наблюдаемым процессом является ВВП за квартал y_t , $t = 1 \dots N$ — кварталы. Скрытый процесс $\mathbf{z}_t = (\mathbf{x}_t^T, \mathbf{g}_t^T, \mathbf{h}_t^T)^T$, где

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t &= \begin{pmatrix} x_{t,1} \\ x_{t,2} \\ x_{t,3} \end{pmatrix} \text{ — сигнал без учета тренда и сезонности для квартала,} \\ \mathbf{g}_t &= \begin{pmatrix} g_{t,1} \\ g_{t,2} \\ g_{t,3} \end{pmatrix} \text{ — тренд за квартал,} \\ \mathbf{h}_t &= \begin{pmatrix} h_{t,1} \\ h_{t,2} \\ h_{t,3} \end{pmatrix} \text{ — сезонность за квартал.} \end{aligned}$$

Компоненты скрытого процесса \mathbf{x}_t , \mathbf{g}_t , \mathbf{h}_t будем называть скрытыми компонентами. Каждая из скрытых компонент состоит из трех отсчетов, что соответствует отсчетам за месяц. Подобное разделение сигнала по времени (по кварталам и месяцам) обусловлено особенностями прикладной задачи.

Общая модель соответствует полученной ранее (4.6), для нее справедливы все соотношения, полученные в разделе 4.3. Модель наблюдения сигнала

$$\begin{aligned} y_t &= \mathbf{c}^T(\mathbf{x}_t + \mathbf{g}_t + \mathbf{h}_t) + \xi_t = \mathbf{c}^T \mathbf{z}_t + \xi_t = \\ &= x_{t,1} + x_{t,2} + x_{t,3} + g_{t,1} + g_{t,2} + g_{t,3} + h_{t,1} + h_{t,2} + h_{t,3} + \xi_t, \\ &t = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где $\mathbf{c} = (1 \dots 1)^T$ $[9 \times 1]$.

$$M(\xi_t) = 0, \quad D(\xi_t) = \sigma_y^2, \quad M(\xi_{t_1}\xi_{t_2}) = 0 \text{ при } t_1 \neq t_2.$$

Введем помесечную индексацию скрытых компонент $\tau = 3(t-1) + k$, $\tau = 1 \dots 3N$ — месяцы:

$$x_{t,k} = x_\tau = x_{3(t-1)+k},$$

$$g_{t,k} = g_\tau = g_{3(t-1)+k},$$

$$h_{t,k} = h_\tau = h_{3(t-1)+k},$$

$t = 1 \dots N$ — кварталы, $k = 1, 2, 3$ — номера месяцев в квартале.

Модели скрытых компонент:

$$x_\tau = x_{\tau-1} + \eta_\tau, \quad \tau = 2, \dots, 3N; \quad (4.12)$$

$$g_\tau = 3g_{\tau-1} - 3g_{\tau-2} + g_{\tau-3}, \quad \tau = 4, \dots, 3N; \quad (4.13)$$

$$h_\tau = 2 \left[\cos \left(\frac{2\pi}{T} \right) \right] h_{\tau-1} - h_{\tau-2}, \quad \tau = 3, \dots, 3N. \quad (4.14)$$

$$M(\eta_\tau) = 0, \quad D(\eta_\tau) = \sigma_x^2, \quad M(\eta_{\tau_1}\eta_{\tau_2}) = 0 \text{ при } \tau_1 \neq \tau_2. \quad (4.15)$$

Модель тренда (4.13) предполагает не более чем квадратичный тренд на последовательности месяцев. Модель сезонности (4.14) предполагает одну гармонику — периодический сигнал с периодом T и некоторой фазой. В задаче анализа ВВП периодом является, как правило, год, поэтому $T = 12$. Далее будем обозначать $\Omega = \frac{2\pi}{T}$. Выражения (4.13) и (4.14) получены из общих формул (4.1) и (4.4).

Получим выражения для матриц \mathbf{V}^x , \mathbf{V}^g , \mathbf{V}^h , $(\mathbf{U}^x)^{-1}$ из общей модели (4.6).

Скрытая компонента \mathbf{x}_t

$$\begin{cases} x_\tau = x_{\tau-1} + \eta_\tau, \\ x_{\tau+1} = x_\tau + \eta_{\tau+1} = x_{\tau-1} + \eta_\tau + \eta_{\tau+1}, \\ x_{\tau+2} = x_{\tau+1} + \eta_{\tau+2} = x_{\tau-1} + \eta_\tau + \eta_{\tau+1} + \eta_{\tau+2}. \end{cases}$$

Тогда, считая $\tau = 3(t-1) + 1$, получаем

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} x_{t,1} \\ x_{t,2} \\ x_{t,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{3(t-1)+1} \\ x_{3(t-1)+2} \\ x_{3(t-1)+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\tau \\ x_{\tau+1} \\ x_{\tau+2} \end{pmatrix} = \mathbf{V}^x \begin{pmatrix} x_{\tau-3} \\ x_{\tau-2} \\ x_{\tau-1} \end{pmatrix} + \boldsymbol{\zeta}_t = \mathbf{V}^x \mathbf{x}_{t-1} + \boldsymbol{\zeta}_t, \quad (4.16)$$

$$\text{где } \mathbf{V}^x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\zeta}_t = \begin{pmatrix} \eta_\tau \\ \eta_\tau + \eta_{\tau+1} \\ \eta_\tau + \eta_{\tau+1} + \eta_{\tau+2} \end{pmatrix}.$$

Из свойств шума (4.15) нетрудно получить, что $M(\boldsymbol{\zeta}_t) = \mathbf{0}$,

$M(\boldsymbol{\zeta}_t \boldsymbol{\zeta}_s^T) = \sigma_x^2 (\mathbf{U}^x)^{-1}$, $M(\boldsymbol{\zeta}_t \boldsymbol{\zeta}_s^T) = 0$ при $t \neq s$, где

$$(\mathbf{U}^x)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Скрытая компонента тренда \mathbf{g}_t

$$\begin{cases} g_\tau = 3g_{\tau-1} - 3g_{\tau-2} + g_{\tau-3}, \\ g_{\tau+1} = 3g_\tau - 3g_{\tau-1} + g_{\tau-2} = 6g_{\tau-1} - 8g_{\tau-2} + 3g_{\tau-3}, \\ g_{\tau+2} = 3g_{\tau+1} - 3g_\tau + g_{\tau-1} = 10g_{\tau-1} - 15g_{\tau-2} + 6g_{\tau-3}. \end{cases}$$

Тогда, считая $\tau = 3(t-1) + 1$, получаем

$$\mathbf{g}_t = \begin{pmatrix} g_{t,1} \\ g_{t,2} \\ g_{t,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{3(t-1)+1} \\ g_{3(t-1)+2} \\ g_{3(t-1)+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_\tau \\ g_{\tau+1} \\ g_{\tau+2} \end{pmatrix} = \mathbf{V}^g \begin{pmatrix} g_{\tau-3} \\ g_{\tau-2} \\ g_{\tau-1} \end{pmatrix} = \mathbf{V}^g \mathbf{g}_{t-1}, \quad (4.17)$$

где $\mathbf{V}^g = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -8 & 6 \\ 6 & -15 & 10 \end{pmatrix}$.

Скрытая компонента сезонности \mathbf{h}_t

$$\begin{cases} h_\tau = 2 \cos(\Omega) h_{\tau-1} - h_{\tau-2}, \\ h_{\tau+1} = 2 \cos(\Omega) h_\tau - h_{\tau-1} = (4 \cos^2(\Omega) - 1) h_{\tau-1} - 2 \cos(\Omega) h_{\tau-2}, \\ h_{\tau+2} = 2 \cos(\Omega) h_{\tau+1} - h_\tau = (8 \cos^3(\Omega) - 4 \cos(\Omega)) h_{\tau-1} - (4 \cos^2(\Omega) - 1) h_{\tau-2}. \end{cases}$$

Тогда, считая $\tau = 3(t-1) + 1$, получаем

$$\mathbf{h}_t = \begin{pmatrix} h_{t,1} \\ h_{t,2} \\ h_{t,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{3(t-1)+1} \\ h_{3(t-1)+2} \\ h_{3(t-1)+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_\tau \\ h_{\tau+1} \\ h_{\tau+2} \end{pmatrix} = \mathbf{V}^h \begin{pmatrix} h_{\tau-3} \\ h_{\tau-2} \\ h_{\tau-1} \end{pmatrix} = \mathbf{V}^h \mathbf{h}_{t-1}, \quad (4.18)$$

где $\mathbf{V}^h = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \cos(\Omega) \\ 0 & -2 \cos(\Omega) & 4 \cos^2(\Omega) - 1 \\ 0 & -(4 \cos^2(\Omega) - 1) & 8 \cos^3(\Omega) - 4 \cos(\Omega) \end{pmatrix}$.

Объединяя выражения (4.11), (4.16), (4.17), (4.18), а также добавляя в соответствии с (4.10) небольшой диагональный шум к компонентам тренда и сезонности, получаем модель вида (4.6):

$$\begin{cases} \mathbf{z}_t = \mathbf{V} \mathbf{z}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, & t = 2, \dots, N; \\ y_t = \mathbf{c}^T \mathbf{z}_t + \xi_t, & t = 1, \dots, N; \end{cases} \quad (4.19)$$

где $\mathbf{z}_t = (\mathbf{x}_t, \mathbf{g}_t, \mathbf{h}_t)^T$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{c} = (1 \dots 1)^T \quad [9 \times 1]; \\ \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}^x & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}^g & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{V}^h \end{pmatrix} \quad [9 \times 9], \\ \mathbf{V}^x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{V}^g = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -8 & 6 \\ 6 & -15 & 10 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{V}^h = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \cos(\Omega) \\ 0 & -2 \cos(\Omega) & 4 \cos^2(\Omega) - 1 \\ 0 & -(4 \cos^2(\Omega) - 1) & 8 \cos^3(\Omega) - 4 \cos(\Omega) \end{pmatrix}; \end{array} \right. \quad (4.20)$$

$M(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{0}$, $M(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_s^T) = 0$ при $t \neq s$,

$$M(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t^T) = \sigma_x^2 \mathbf{U}^{-1} = \sigma_x^2 \begin{pmatrix} (\mathbf{U}^x)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad [9 \times 9], \quad (4.21)$$

$$(\mathbf{U}^x)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$M(\xi_t) = 0$, $D(\xi_t) = \sigma_y^2$, $M(\xi_{t_1} \xi_{t_2}) = 0$ при $t_1 \neq t_2$.

Необходимо по наблюдаемому процессу y_t восстановить скрытый сигнал \mathbf{x}_t , $t = 1 \dots N$.

5 Вычислительный эксперимент

Для демонстрации результатов теоретической части работы был проведен вычислительный эксперимент на модельных данных. Был взят квадратичный тренд $g(\tau) = \frac{-\tau^2 + 61\tau - 60}{700}$ и сезонность $h(\tau) = 1.25 \sin\left(\frac{2\pi}{12}\tau\right)$. Начальное значение $x_1 = 0$. Дисперсии шумов брались равными $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 0.3$. В соответствии с моделью порождения данных (4.12)-(4.15) были сгенерированы сигналы x_τ , g_τ , h_τ , $\tau = 1, \dots, 60$, что соответствует 60 месяцам или 5 годам. В соответствии с моделью (4.19) был получен квартальный наблюдаемый сигнал ($y_t, t = 1, \dots, 20$).

Для определения оптимальных скрытых параметров использовались процедуры фильтрации (3.10) и интерполяции (3.11). Матрица \mathbf{V} и вектор \mathbf{c} брались из выражения (4.20). Диагональный шум в матрице (4.21) брался равным $\varepsilon = 10^{-5}$. Метод реализован в среде MATLAB.

Результаты эксперимента представлены на Рис. 1-4. Видно, что неточности в определении тренда и зашумленной компоненты скомпенсировали друг друга, обеспечивая практически точное восстановление наблюдаемой компоненты. Причины

ошибок в определении тренда и зашумленной компоненты в том, что при оптимизации критерия (2.8) в условиях линейной нормальной модели, то есть при узловых функциях и функциях связи, определяемых выражениями (3.8) и (3.9) мы, фактически, минимизируем сумму отклонений от наблюдаемой компоненты и от линейной модели связи соседних скрытых переменных. Оптимальные в этих условиях тренд и зашумленная компонента, могут, как мы видим, достаточно сильно отличаться от заранее загаданных, давая при этом в сумме точную оценку наблюдаемой компоненты.

Фактически, данный эксперимент показывает что один и тот же наблюдаемый сигнал может быть образован в результате достаточно разных комбинаций трендовой, сезонной и зашумленной компоненты. В связи с этим важно точно задавать априорные предположения о тренде и сезонности конкретной практической задачи в виде априорного математического ожидания и ковариационной матрицы скрытой компоненты (3.7).

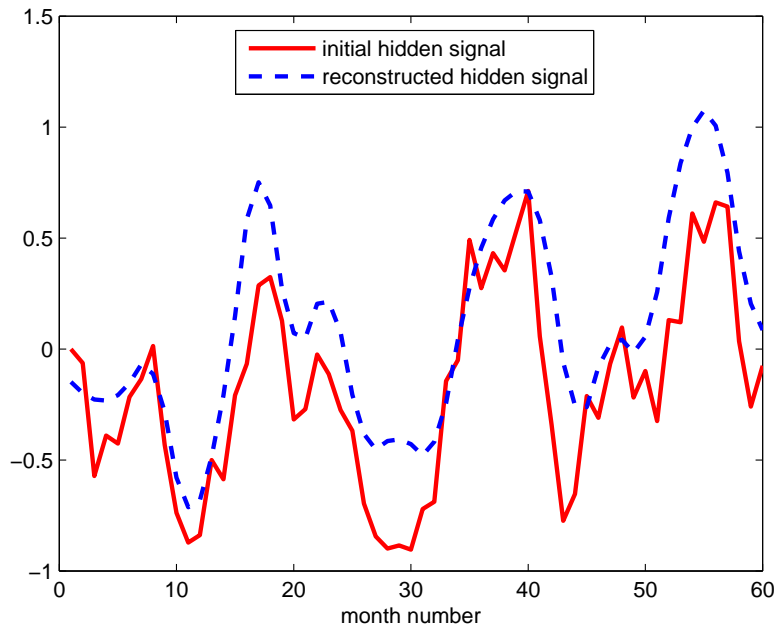


Рис. 1: Зашумленная скрытая компонента

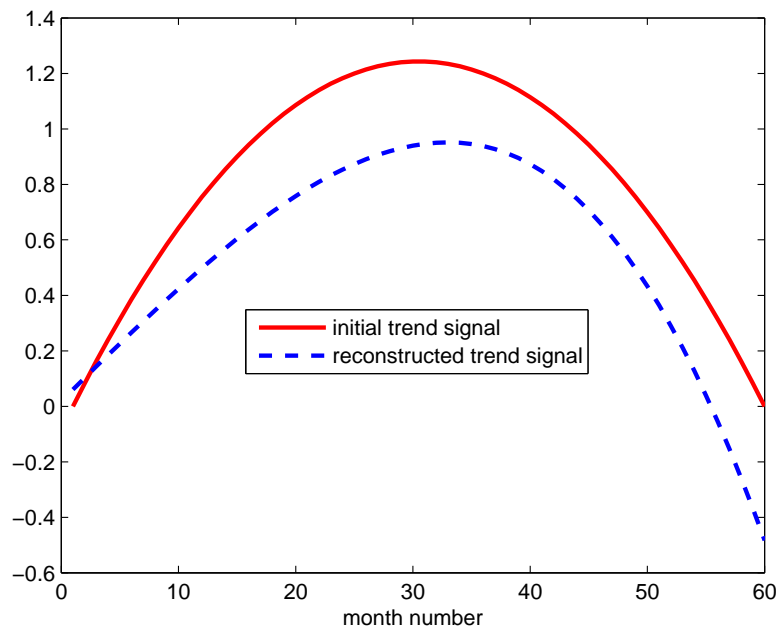


Рис. 2: Скрытая компонента тренда

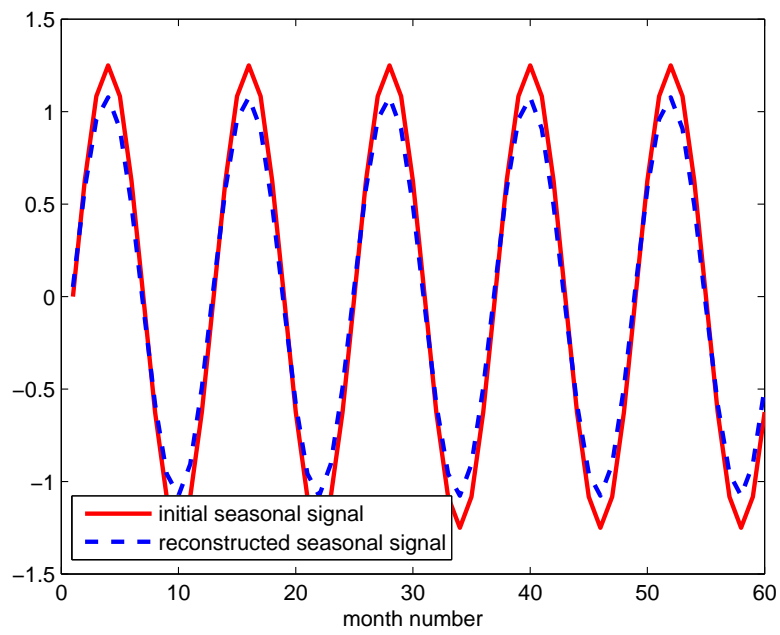


Рис. 3: Скрытая компонента сезонности

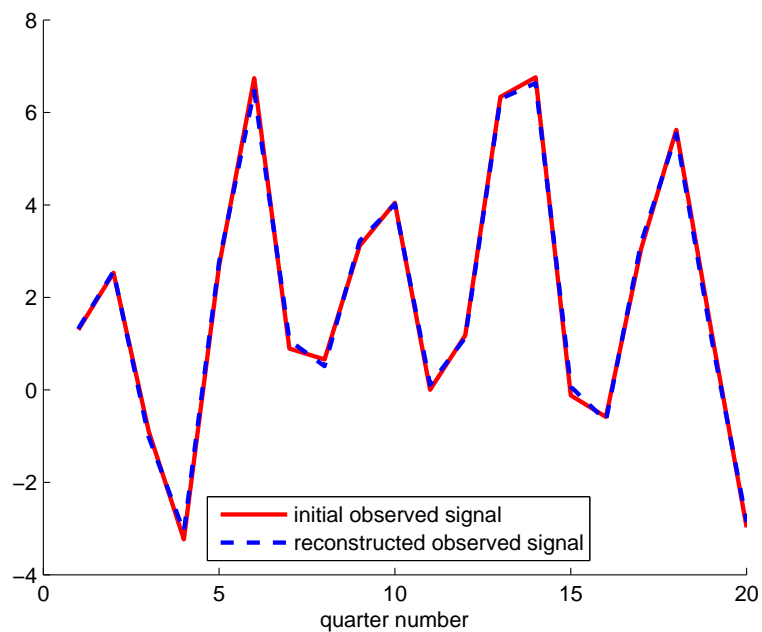


Рис. 4: Наблюдаемый сигнал

6 Заключение

Можно выделить следующие основные результаты.

- Предложен способ моделирования тренда и сезонности в рамках линейной нормальной модели нестационарной регрессии.
- Предложенный метод реализован в среде MATLAB.
- Предложенные модели проиллюстрированы на задаче анализа ВВП.
- Проведен вычислительный эксперимент, который показал работоспособность предложенного метода, но также и выявил некоторые его недостатки.

Направление дальнейших исследований — решение оптимизационной задачи с линейными ограничениями, о которых говорится в Замечании 4.2.

Список литературы

- [1] *Bellman R.* Динамическое программирование. — М.:Мир, 1960.
- [2] Dynamic analysis of hedge funds / V. Mottl, O. Krasotkina, M. Markov, I. Muchnik. — 2006.
- [3] *Fedorenko R.* Введение в вычислительную физику. — МФТИ, 1994.
- [4] *Krasotkina O.* Алгоритмы оценивания моделей нестационарных сигналов при наличии ограничений: Ph.D. thesis / Тульский государственный университет.
- [5] *Mottl V.* Статистические методы анализа сигналов и массивов упорядоченных данных.
- [6] *Muchnik I., Mottl V.* Bellman functions on trees for segmentation, generalized smoothing, matching and multi-alignment in massive data sets: Tech. rep.: DIMACS, Technical Report, 1998.
- [7] Time-varying regression model with unknown time-volatility for nonstationary signal analysis / V. Mottl, O. Krasotkina, M. Markov, I. Muchnik. — 2006.