

# Вероятностные тематические модели

## Лекция 5.

### Классика тематических моделей: PLSA, LDA и EM-алгоритм

К. В. Воронцов  
vokov@forecsys.ru

Этот курс доступен на странице вики-ресурса  
<http://www.MachineLearning.ru/wiki>  
«Вероятностные тематические модели (курс лекций, К.В.Воронцов)»

МФТИ – ФИЦ ИУ РАН • 2 октября 2019

- 1 Классические модели PLSA, LDA**
  - Модель PLSA
  - Модель LDA
  - Максимизация апостериорной вероятности для LDA
- 2 Теория EM-алгоритма**
  - Максимум маргинализованного правдоподобия
  - Общий EM-алгоритм и его сходимость
  - Вывод формул ARTM из общего EM-алгоритма
- 3 Эксперименты с моделями PLSA, LDA**
  - Проблема неустойчивости (на синтетических данных)
  - Проблема неустойчивости (на реальных данных)
  - Проблема переобучения и робастные модели

## Напоминание. Задача тематического моделирования

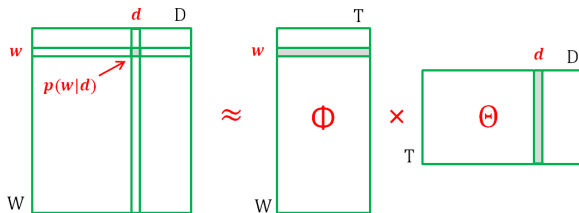
**Дано:** коллекция текстовых документов

- $n_{dw}$  — частоты термов в документах,  $\hat{p}(w|d) = \frac{n_{dw}}{n_d}$

**Найти:** параметры тематической модели  $p(w|d) = \sum_{t \in T} \phi_{wt} \theta_{td}$

- $\phi_{wt} = p(w|t)$  — вероятности термов  $w$  в каждой теме  $t$
- $\theta_{td} = p(t|d)$  — вероятности тем  $t$  в каждом документе  $d$

Это задача стохастического матричного разложения:



## Напоминание. PLSA (Probabilistic Latent Semantic Analysis)

Задача максимизации логарифма правдоподобия:

$$\sum_{d,w} n_{dw} \ln \sum_t \phi_{wt} \theta_{td} \rightarrow \max_{\Phi, \Theta}$$

EM-алгоритм: метод простой итерации для системы уравнений

$$\begin{array}{l} \text{E-шаг:} \\ \text{M-шаг:} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} p_{tdw} = \mathop{\text{norm}}_{t \in T}(\phi_{wt} \theta_{td}) \\ \phi_{wt} = \mathop{\text{norm}}_{w \in W} \left( \sum_{d \in D} n_{dw} p_{tdw} \right) \\ \theta_{td} = \mathop{\text{norm}}_{t \in T} \left( \sum_{w \in d} n_{dw} p_{tdw} \right) \end{array} \right.$$

где  $\mathop{\text{norm}}_{t \in T}(x_t) = \frac{\max\{x_t, 0\}}{\sum_{s \in T} \max\{x_s, 0\}}$  — операция нормировки вектора.

## Недостатки PLSA (и необходимость его регуляризации)

- 1 Большая размерность пространства параметров
- 2 Якобы из-за этого сильное переобучение
- 3 Якобы невозможность моделирования новых документов
- 4 Неединственность и неустойчивость решения:  
если  $\Phi\Theta$  — решение, то  $(\Phi S)(S^{-1}\Theta)$  — тоже решение
- 5 Нет управления разреженностью  $\Phi$  и  $\Theta$ , т.к.  
(в начале  $\phi_{wt} = 0$ )  $\Leftrightarrow$  (в финале  $\phi_{wt} = 0$ ),  
(в начале  $\theta_{td} = 0$ )  $\Leftrightarrow$  (в финале  $\theta_{td} = 0$ )
- 6 Темы не всегда интерпретируемы
- 7 Нет выделения нетематических (фоновых) слов
- 8 Не ясно, как учитывать дополнительную информацию

---

Blei D., Ng A., Jordan M. Latent Dirichlet Allocation. JMLR, 2003.

## Гипотеза об априорных распределениях Дирихле

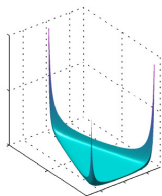
**Гипотеза:** вектор-столбцы  $\phi_t = (\phi_{wt})_{w \in W}$  и  $\theta_d = (\theta_{td})_{t \in T}$  порождаются распределениями Дирихле,  $\alpha \in \mathbb{R}^{|T|}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}^{|W|}$ :

$$\text{Dir}(\phi_t | \beta) = \frac{\Gamma(\beta_0)}{\prod_w \Gamma(\beta_w)} \prod_w \phi_{wt}^{\beta_w - 1}, \quad \phi_{wt} > 0; \quad \beta_0 = \sum_w \beta_w, \quad \beta_w > 0;$$

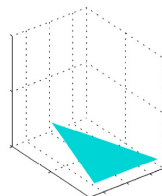
$$\text{Dir}(\theta_d | \alpha) = \frac{\Gamma(\alpha_0)}{\prod_t \Gamma(\alpha_t)} \prod_t \theta_{td}^{\alpha_t - 1}, \quad \theta_{td} > 0; \quad \alpha_0 = \sum_t \alpha_t, \quad \alpha_t > 0;$$

**Пример:**

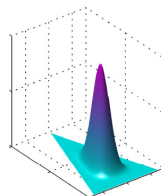
$\text{Dir}(\theta | \alpha)$ ,  
 $|T| = 3$ ,  
 $\theta, \alpha \in \mathbb{R}^3$



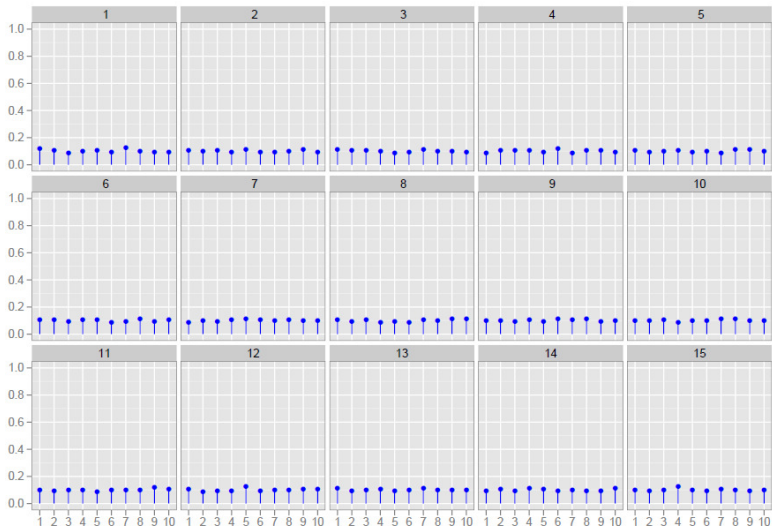
$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.1$



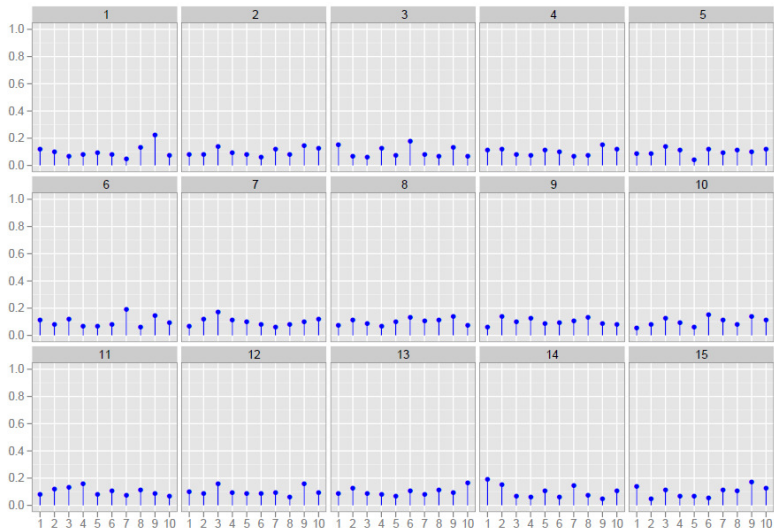
$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$



$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 10$

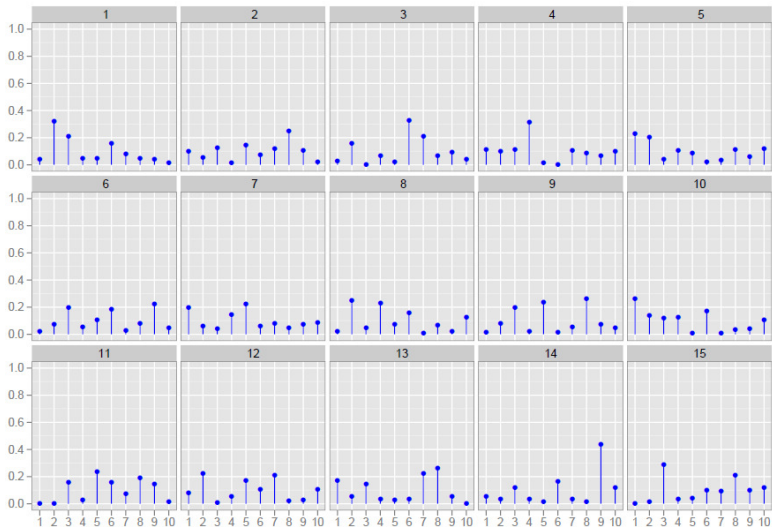
Распределение  $\text{Dir}(\theta_d|\alpha)$  при  $\alpha_t \equiv 100$ , 10 тем, 15 документов

# Распределение $\text{Dir}(\theta_d|\alpha)$ при $\alpha_t \equiv 10$ , 10 тем, 15 документов

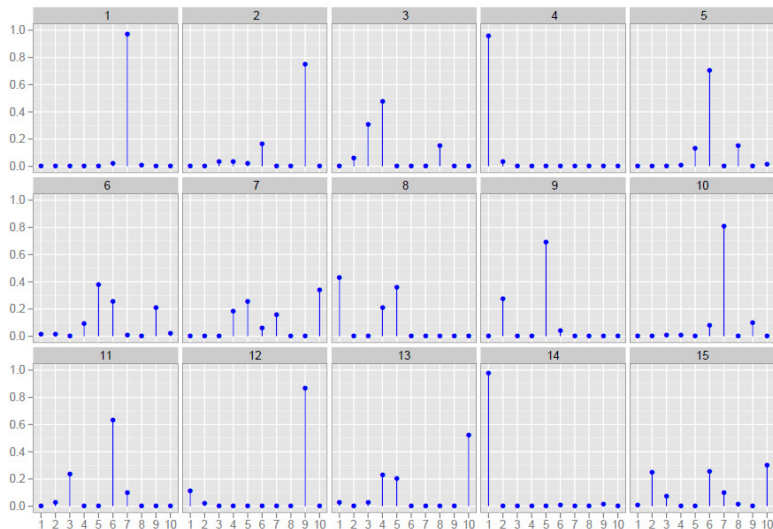




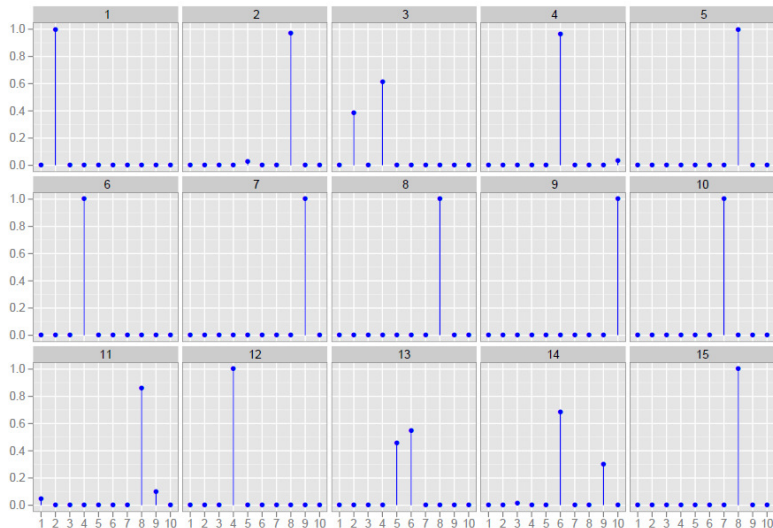
# Распределение $\text{Dir}(\theta_d|\alpha)$ при $\alpha_t \equiv 1$ , 10 тем, 15 документов



# Распределение $\text{Dir}(\theta_d|\alpha)$ при $\alpha_t \equiv 0.1$ , 10 тем, 15 документов



# Распределение $\text{Dir}(\theta_d|\alpha)$ при $\alpha_t \equiv 0.01$ , 10 тем, 15 документов



## Вероятностная модель порождения текста

Тематическая модель LDA (Latent Dirichlet Allocation):

$$p(w|d) = \sum_{t \in T} \phi_{wt} \theta_{td}, \quad \phi_t \sim \text{Dir}(\phi|\beta), \quad \theta_d \sim \text{Dir}(\theta|\alpha).$$

Процесс порождения документов  $d = \{w_1 \dots w_{n_d}\}$  коллекции  $D$ :

**Вход:** векторы гиперпараметров  $\beta, \alpha$ ;

**Выход:** коллекция документов;

выбрать вектор  $\phi_t$  из  $\text{Dir}(\phi|\beta)$  для каждой темы  $t \in T$ ;

выбрать вектор  $\theta_d$  из  $\text{Dir}(\theta|\alpha)$  для каждого документа  $d \in D$ ;

**для всех** документов  $d \in D$

**для всех** позиций термов  $i = 1, \dots, n_d$  в документе  $d$

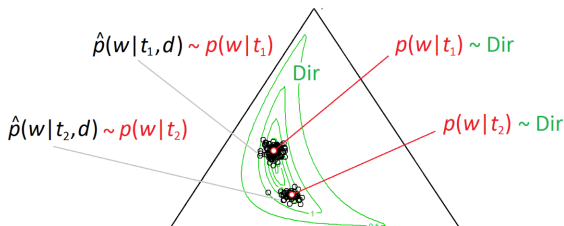
выбрать тему  $t_i$  из  $p(t|d) \equiv \theta_{td}$ ;

выбрать терм  $w_i$  из  $p(w|t_i) \equiv \phi_{wt_i}$ ;

## Почему именно распределение Дирихле?

- оно способно порождать разреженные векторы;
- имеет параметры, управляющие степенью разреженности;
- описывает кластерные структуры на симплексе (см. рис.);
- является сопряжённым с мультиномиальным распределением, что сильно упрощает байесовский вывод (в след. лекции).

Распределение  $\text{Dir}(\phi|\alpha)$  порождает векторы тем  $\phi_t = p(w|t)$ , которые порождают мультиномиальные распределения  $\hat{p}(w|t, d)$ .



## Формула Байеса для апостериорного распределения

Введём более общие обозначения:

$X = (d_i, w_i)_{i=1}^n$  — исходные данные, *наблюдаемые переменные*

$\Omega = (\Phi, \Theta)$  — параметры порождающей модели  $p(X|\Omega)$

$\gamma = (\beta, \alpha)$  — гиперпараметры *априорного распределения*  $p(\Omega|\gamma)$

**Задача:** по  $X$  найти  $\Omega$ .

Формула Байеса даёт *апостериорное распределение*  $p(\Omega|X, \gamma)$ , где символ  $\propto$  означает «равно с точностью до нормировки»:

$$p(\Omega|X, \gamma) = \frac{p(\Omega, X|\gamma)}{p(X|\gamma)} \propto p(\Omega, X|\gamma) \propto p(X|\Omega) p(\Omega|\gamma)$$

Далее есть два пути:

- Максимизация правдоподобия:  $\Omega = \arg \max_{\Omega} \ln p(\Omega|X, \gamma)$
- Байесовский вывод: вычисление распределения  $p(\Omega|X, \gamma)$

## Максимизация апостериорной вероятности для модели LDA

Максимизация *совместного правдоподобия* данных и модели, называется также *maximum a posteriori probability* (MAP):

$$\begin{aligned} \ln p(X|\Omega) p(\Omega|\gamma) &= \ln \prod_{i=1}^n p(d_i, w_i | \Phi, \Theta) p(\Phi|\beta) p(\Theta|\alpha) = \\ &= \ln \prod_{d \in D} \prod_{w \in D} p(d, w | \Phi, \Theta)^{n_{dw}} \prod_{t \in T} \text{Dir}(\phi_t | \beta) \prod_{d \in D} \text{Dir}(\theta_d | \alpha) \rightarrow \max_{\Phi, \Theta} \end{aligned}$$

Это задача максимизации регуляризованного log-правдоподобия:

$$\sum_{d,w} n_{dw} \ln \sum_t \phi_{wt} \theta_{td} + \sum_{t,w} \ln \phi_{wt}^{\beta_w - 1} + \sum_{d,t} \ln \theta_{td}^{\alpha_t - 1} \rightarrow \max_{\Phi, \Theta}$$

при ограничениях неотрицательности и нормировки

$$\phi_{wt} \geq 0; \quad \sum_{w \in W} \phi_{wt} = 1; \quad \theta_{td} \geq 0; \quad \sum_{t \in T} \theta_{td} = 1.$$

## Регуляризованный EM-алгоритм для модели LDA в ARTM

Максимизация апостериорной вероятности эквивалентна регуляризатору логарифма априорного распределения:

$$\underbrace{\sum_{d,w} n_{dw} \ln \sum_t \phi_{wt} \theta_{td}}_{\ln \text{ правдоподобия}} + \underbrace{\sum_{t,w} (\beta_w - 1) \ln \phi_{wt} + \sum_{d,t} (\alpha_t - 1) \ln \theta_{td}}_{\text{регуляризатор } R(\Phi, \Theta) = \ln p(\Phi, \Theta | \alpha, \beta)} \rightarrow \max_{\Phi, \Theta}$$

EM-алгоритм: метод простой итерации для системы уравнений

$$\begin{cases} \text{E-шаг:} & p_{tdw} = \mathop{\text{norm}}_{t \in T} (\phi_{wt} \theta_{td}) \\ \text{M-шаг:} & \begin{cases} \phi_{wt} = \mathop{\text{norm}}_{w \in W} \left( \sum_{d \in D} n_{dw} p_{tdw} + \beta_w - 1 \right) \\ \theta_{td} = \mathop{\text{norm}}_{t \in T} \left( \sum_{w \in W} n_{dw} p_{tdw} + \alpha_t - 1 \right) \end{cases} \end{cases}$$



## Общая вероятностная модель со скрытыми переменными

Вернёмся к нашим общим обозначениям:

$X = (d_i, w_i)_{i=1}^n$  — исходные данные, *наблюдаемые переменные*

$Z = (t_i)_{i=1}^n$  — *скрытые переменные*

$\Omega = (\Phi, \Theta)$  — параметры порождающей модели  $p(X|\Omega)$

$\gamma = (\beta, \alpha)$  — гиперпараметры *априорного распределения*  $p(\Omega|\gamma)$

**Задача:** по  $X$  найти  $\Omega$ .

*Апостериорное распределение:*

$$p(\Omega|X, \gamma) \propto p(X|\Omega) p(\Omega|\gamma) = \sum_Z p(X, Z|\Omega) p(\Omega|\gamma)$$

**Принцип максимума апостериорной вероятности:**

$$\ln p(X|\Omega) + \underbrace{\ln p(\Omega|\gamma)}_{R(\Omega)} \rightarrow \max_{\Omega}$$

$R(\Omega)$  может и не иметь вероятностной интерпретации.

## Общий EM-алгоритм для задачи со скрытыми переменными

**Теорема.** Точка  $\Omega$  локального максимума *маргинализованного правдоподобия* (Regularized Marginal log-Likelihood)

$$\ln \sum_Z p(X, Z|\Omega) + R(\Omega) \rightarrow \max_{\Omega} \quad (\text{RML})$$

удовлетворяет системе уравнений, решение которой методом простых итераций сводится к чередованию двух шагов:

$$\text{E-шаг: } q(Z) = p(Z|X, \Omega);$$

$$\text{M-шаг: } \sum_Z q(Z) \ln p(X, Z|\Omega) + R(\Omega) \rightarrow \max_{\Omega}.$$

Это общий вид EM-алгоритма, используемый не только в тематическом моделировании.

---

A.P.Dempster, N.M.Laird, D.B.Rubin. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. 1977.

## Доказательство теоремы

Необходимые условия локального экстремума:

$$\frac{\partial}{\partial \Omega} \left( \ln \sum_Z p(X, Z | \Omega) + R(\Omega) \right) = \frac{1}{p(X | \Omega)} \sum_Z \frac{\partial p(X, Z | \Omega)}{\partial \Omega} + \frac{\partial R(\Omega)}{\partial \Omega} = 0$$

По формуле условной вероятности  $p(X | \Omega) = \frac{p(X, Z | \Omega)}{p(Z | X, \Omega)}$ , подставляем:

$$\sum_Z \frac{p(Z | X, \Omega)}{p(X, Z | \Omega)} \frac{\partial p(X, Z | \Omega)}{\partial \Omega} + \frac{\partial R(\Omega)}{\partial \Omega} = 0$$

$$\sum_Z \underbrace{p(Z | X, \Omega)}_{q(Z)} \frac{\partial}{\partial \Omega} \ln p(X, Z | \Omega) + \frac{\partial R(\Omega)}{\partial \Omega} = 0$$

Это необходимые условия локального экстремума задачи M-шага, если  $q(Z)$  рассматривать как константу, а не как функцию от  $\Omega$ . ■

## Ещё более общий EM-алгоритм и его сходимость

**Теорема.** Значение маргинализованного правдоподобия

$$\ln \sum_Z p(X, Z | \Omega) + R(\Omega) \rightarrow \max_{\Omega} \quad (\text{RML})$$

не убывает на каждом шаге итерационного процесса

$$\text{E-шаг: } \text{KL}(q(Z) \parallel p(Z|X, \Omega)) \rightarrow \min_q;$$

$$\text{M-шаг: } \sum_Z q(Z) \ln p(X, Z | \Omega) + R(\Omega) \rightarrow \max_{\Omega}.$$

$q(Z) = p(Z|X, \Omega)$  является точным решением задачи E-шага.

Минимизация KL на E-шаге используется в тех случаях, когда  $p(Z|X, \Omega)$  не удаётся вычислить в явном виде.

Сходимость в слабом смысле: глобальный max не гарантируется.

## Доказательство теоремы

По формуле условной вероятности  $p(X|\Omega) = \frac{p(X, Z|\Omega)}{p(Z|X, \Omega)}$ .

Для произвольного распределения  $q(Z)$

$$\begin{aligned} \ln p(X|\Omega) &= \sum_Z q(Z) \ln p(X|\Omega) = \sum_Z q(Z) \ln \frac{p(X, Z|\Omega)}{p(Z|X, \Omega)} = \\ &= \underbrace{\sum_Z q(Z) \ln \frac{p(X, Z|\Omega)}{q(Z)}}_{L(q, \Omega)} + \underbrace{\sum_Z q(Z) \ln \frac{q(Z)}{p(Z|X, \Omega)}}_{\text{KL}(q(Z) \parallel p(Z|X, \Omega)) \geq 0} \end{aligned}$$

Максимизируем достижимую нижнюю оценку RML то по  $q$ , то по  $\Omega$ :

E-шаг:  $L(q, \Omega) + \cancel{R(\Omega)} \rightarrow \max_q \Leftrightarrow \text{KL}(q(Z) \parallel p(Z|X, \Omega)) \rightarrow \min_q$

M-шаг:  $L(q, \Omega) + R(\Omega) \rightarrow \max_\Omega \Leftrightarrow \sum_Z q(Z) \ln p(X, Z|\Omega) + R(\Omega) \rightarrow \max_\Omega$

На каждом шаге значение функционала может только возрастать. ■

## Регуляризованный EM-алгоритм для тематической модели

Напоминание:  $X = (d_i, w_i)_{i=1}^n$ ,  $Z = (t_i)_{i=1}^n$ ,  $\Omega = (\Phi, \Theta)$ .

**Лемма.** Точка  $(\Phi, \Theta)$  локального максимума RML (регуляризованного маргинализованного log-правдоподобия)

$$\ln \sum_Z p(X, Z | \Omega) + R(\Omega) = \sum_{d,w} n_{dw} \ln \sum_t \phi_{wt} \theta_{td} + R(\Phi, \Theta)$$

удовлетворяет системе уравнений, решение которой методом простых итераций сводится к чередованию двух шагов:

E-шаг:  $p(t|d, w) = \operatorname{norm}_{t \in T}(\phi_{wt} \theta_{td}), \quad \forall (d \in D, w \in d, t \in T)$

M-шаг:  $\sum_{d,w,t} n_{dw} p(t|d, w) \ln(\phi_{wt} \theta_{td}) + R(\Phi, \Theta) \rightarrow \max_{\Phi, \Theta}$

## Доказательство леммы

**E-шаг:** в силу независимости элементов выборки

$$q(Z) = p(Z|X, \Omega) = \prod_{i=1}^n p(t_i|d_i, w_i) = \prod_{i=1}^n \operatorname{norm}_{t_i \in T}(\phi_{w_i t_i} \theta_{t_i d_i})$$

**M-шаг:** подставим  $q(Z)$  и  $p(X, Z|\Omega)$  в общую формулу M-шага:

$$\begin{aligned} & \sum_{Z \in T^n} q(Z) \ln p(X, Z|\Omega) + R(\Omega) \rightarrow \max_{\Omega} \\ & \sum_{t_1 \in T} \cdots \sum_{t_n \in T} \prod_{k=1}^n p(t_k|d_k, w_k) \sum_{i=1}^n \ln p(d_i, w_i, t_i|\Omega) + R(\Omega) \rightarrow \max_{\Omega} \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{t_1 \in T} \cdots \sum_{t_n \in T} \prod_{k=1}^n p(t_k|d_k, w_k) \ln p(d_i, w_i, t_i|\Omega) + R(\Omega) \rightarrow \max_{\Omega} \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{t \in T} p(t|d_i, w_i) \ln p(d_i, w_i, t|\Omega) + R(\Omega) \rightarrow \max_{\Omega} \\ & \sum_{d \in D} \sum_{w \in W} \sum_{t \in T} n_{dw} p(t|d, w) \ln(\phi_{wt} \theta_{td}) + R(\Phi, \Theta) \rightarrow \max_{\Phi, \Theta} \end{aligned}$$

## Вывод формул M-шага ARTM, теперь из общего EM-алгоритма

Напоминание:  $n_{wt} = \sum_d n_{dw} p(t|d, w)$ ,  $n_{td} = \sum_w n_{dw} p(t|d, w)$ .

$$\sum_{w,t} n_{wt} \ln \phi_{wt} + \sum_{d,t} n_{td} \ln \theta_{td} + R(\Phi, \Theta) \rightarrow \max_{\Phi, \Theta}$$

Чтобы применить условия ККТ, выписываем лагранжиан:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Phi, \Theta) = & \sum_{w,t} n_{wt} \ln \phi_{wt} - \sum_t \lambda_t \left( \sum_w \phi_{wt} - 1 \right) + \\ & + \sum_{d,t} n_{td} \ln \theta_{td} - \sum_d \mu_d \left( \sum_t \theta_{td} - 1 \right) + R(\Phi, \Theta) \end{aligned}$$

Условия ККТ для стационарной точки лагранжиана:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{wt}} = \frac{n_{wt}}{\phi_{wt}} + \frac{\partial R}{\partial \phi_{wt}} - \lambda_t = 0$$

$$\left( n_{wt} + \phi_{wt} \frac{\partial R}{\partial \phi_{wt}} \right)_+ = \lambda_t \phi_{wt}$$

$$\phi_{wt} = \underset{w \in W}{\text{norm}} \left( n_{wt} + \phi_{wt} \frac{\partial R}{\partial \phi_{wt}} \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_{td}} = \frac{n_{td}}{\theta_{td}} + \frac{\partial R}{\partial \theta_{td}} - \mu_d = 0$$

$$\left( n_{td} + \theta_{td} \frac{\partial R}{\partial \theta_{td}} \right)_+ = \mu_d \theta_{td}$$

$$\theta_{td} = \underset{t \in T}{\text{norm}} \left( n_{td} + \theta_{td} \frac{\partial R}{\partial \theta_{td}} \right)$$



## Резюме по теории

### Модель латентного размещения Дирихле LDA

- LDA проще вводить через KL-дивергенцию, как регуляризатор сглаживания/разреживания
- Заодно снимаются ограничения  $\beta_w > 0$ ,  $\alpha_t > 0$
- Распределение Дирихле играет особую роль в байесовских методах тематического моделирования
- ARTM — это более простая альтернатива байесовским методам, но в статьях по тематическому моделированию они преобладают, поэтому в них надо уметь разбираться
- Мы рассмотрим байесовские методы в следующей лекции

### Общий вариант EM-алгоритма

- также снабжён возможностью регуляризации
- имеет обоснование слабой сходимости

## Способны ли PLSA и LDA восстановить истинные темы?

Матрицы  $\Phi_0$  и  $\Theta_0$  порождаются распределением Дирихле.  
Синтетическая коллекция порождается матрицами  $\Phi_0$  и  $\Theta_0$ .  
Размеры:  $|D| = 500$ ,  $|W| = 1000$ ,  $|T| = 30$ ,  $n_d \in [100, 600]$ .

**Цель** — сравнить восстановленные распределения  $p(i|j)$   
с исходными синтетическими распределениями  $p_0(i|j)$   
по среднему расстоянию Хеллингера:

$$H(p, p_0) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \sqrt{p(i|j)} - \sqrt{p_0(i|j)} \right)^2},$$

как для самих матриц  $\Phi$  и  $\Theta$ , так и для их произведения:

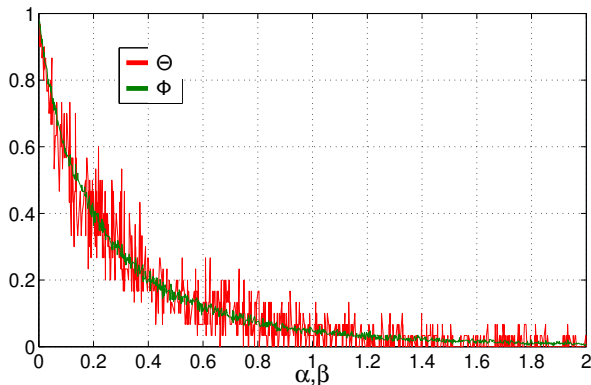
$$D_\Phi = H(\Phi, \Phi_0);$$

$$D_\Theta = H(\Theta, \Theta_0);$$

$$D_{\Phi\Theta} = H(\Phi\Theta, \Phi_0\Theta_0).$$

## Разреженность векторов, порождаемых распределением Dir

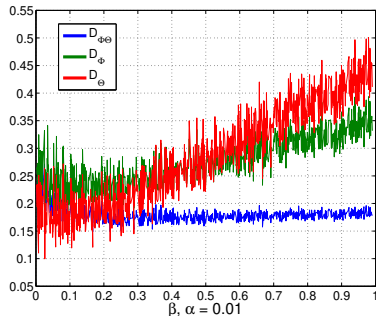
Зависимость разреженности (доли почти нулевых элементов) распределений  $\theta_d^0 \sim \text{Dir}(\alpha)$  и  $\phi_t^0 \sim \text{Dir}(\beta)$  от параметров  $\alpha$  и  $\beta$  симметричного распределения Дирихле:



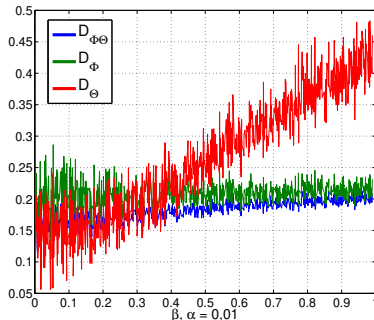
## Неустойчивость восстановления матриц $\Phi$ и $\Theta$

Зависимость точности восстановления матриц  $\Phi$ ,  $\Theta$  и  $\Phi\Theta$  от разреженности матрицы  $\Phi_0$  при фиксированном  $\alpha = 0.01$

PLSA



LDA

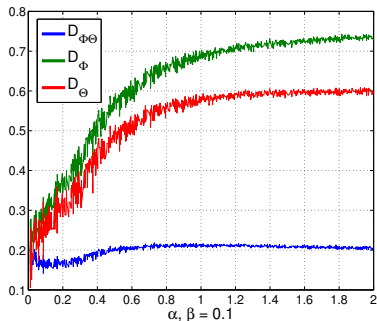


Виталий Глушаченков. Устойчивость матричных разложений в задачах тематического моделирования. Магистерская диссертация, МФТИ, 2013.

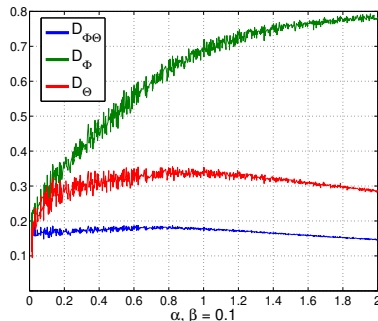
## Неустойчивость восстановления матриц $\Phi$ и $\Theta$

Зависимость точности восстановления матриц  $\Phi$ ,  $\Theta$  и  $\Phi\Theta$  от разреженности матрицы  $\Theta_0$  при фиксированном  $\beta = 0.1$

PLSA



LDA



Виталий Глушаченков. Устойчивость матричных разложений в задачах тематического моделирования. Магистерская диссертация, МФТИ, 2013.

## Второй эксперимент — на реальных данных

Посты ЖЖ:  $|D|=300$  К,  $|W|=154$  К,  $n=35$  М,  $|T|=120$ .

LDA: симметричное распределение Дирихле,  $\beta = 0.1$ ,  $\alpha = 0.5$ .

**Цель эксперимента** — оценить различность тем, получаемых в нескольких запусках алгоритма LDA Gibbs Sampling.

**Проблема** «проклятия размерности»:

длинные хвосты мешают сравнивать распределения.

Доля существенных слов в темах (word ratio):

$$WR = \frac{1}{|W|} \frac{1}{|T|} \sum_{w \in W} \sum_{t \in T} [\phi_{wt} > \frac{1}{|W|}] \quad (\text{в эксперименте } \sim 3.5\%)$$

Доля существенных тем в документах (document ratio):

$$DR = \frac{1}{|D|} \frac{1}{|T|} \sum_{d \in D} \sum_{t \in T} [\theta_{td} > \frac{1}{|T|}] \quad (\text{в эксперименте } \sim 11.5\%)$$

---

*Koltcov S., Koltsova O., Nikolenko S.* Latent Dirichlet Allocation: Stability and applications to studies of user-generated content. ACM WebSci, 2014.

## Методика эксперимента

Оставлены слова  $w$ , имеющие  $\phi_{wt} > \frac{1}{|W|}$  хотя бы в одной теме  
 Сокращение словаря (vocabulary reduction): 154 К  $\rightarrow$  8 К.

Дивергенция Кульбака–Лейблера между темами  $t$  и  $s$ :

$$\text{KL}(t, s) = \sum_{w \in W} p(w|t) \ln \frac{p(w|t)}{p(w|s)}$$

Нормированная KL-близость пар тем  $t$  и  $s$ :

$$\text{NKLS}(t, s) = \left( 1 - \frac{\text{KL}(t, s)}{\max_{t', s'} \text{KL}(t', s')} \right)$$

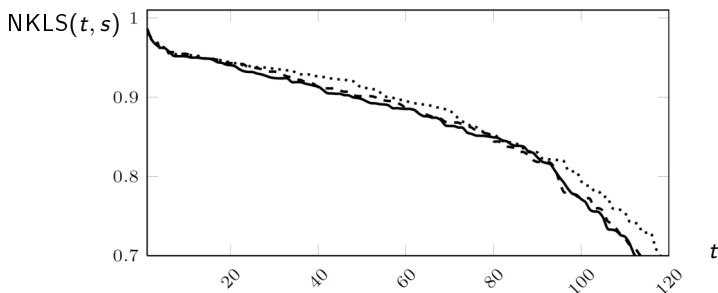
При  $\text{NKLS}(t, s) > 0.9$  в темах совпадают 30–50 топовых слов,  
 и эксперты-социологи признают такие темы одинаковыми.

---

*Koltcov S., Koltsova O., Nikolenko S.* Latent Dirichlet Allocation: Stability and applications to studies of user-generated content. ACM WebSci, 2014.

## Неустойчивость LDA в разных запусках

Результат эксперимента: нормированная KL-близость NKLS между темой  $t$  и ближайшей к ней  $s$  в другом запуске.



1. Менее 50% тем воспроизводятся от запуска к запуску.
2. Плохо воспроизводятся как мусорные темы, так и хорошие.

---

*Koltcov S., Koltsova O., Nikolenko S.* Latent Dirichlet Allocation: Stability and applications to studies of user-generated content. ACM WebSci, 2014.



## Выводы из экспериментов

- Матрицы  $\Phi$ ,  $\Theta$  устойчиво восстанавливаются только при сильной разреженности  $\Phi_0$ ,  $\Theta_0$  (более 90% нулей)
- Произведение  $\Phi\Theta$  восстанавливается устойчиво, независимо от разреженности исходных  $\Phi_0$ ,  $\Theta_0$
- В разных запусках со случайной инициализацией или сэмплированием строятся существенно различные темы
- PLSA не переобучается, а лишь хуже моделирует малые вероятности редких слов, которые не интересны.
- Распределение Дирихле — слишком слабый регуляризатор

---

*Vorontsov K. V., Potapenko A. A. Additive Regularization of Topic Models. Machine Learning. Springer, 2015.*

*Koltcov S., Koltsova O., Nikolenko S. Latent Dirichlet Allocation: Stability and applications to studies of user-generated content. ACM WebSci, 2014.*

## Робастная тематическая модель

**Гипотеза:** каждое слово в документе  $(d, w)$  является

- либо тематическим, связанным с какой-то темой  $t$ ,
- либо специфичным для данного документа (шум),
- либо общеупотребительным (фон).

Модель смеси тематической, шумовой и фоновой компонент  
SWB (Special Words with Background):

$$p(w|d) = \gamma\pi_{dw} + \varepsilon\pi_w + (1 - \gamma - \varepsilon) \sum_{t \in T} \phi_{wt}\theta_{td}$$

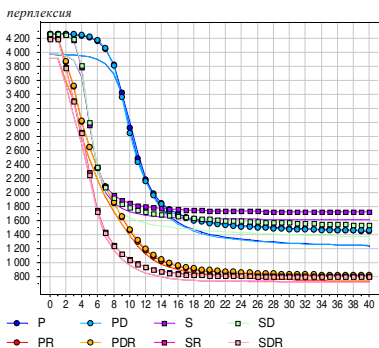
$\pi_{dw} \equiv p_{\text{ш}}(w|d)$  — шумовая компонента,  $\gamma$  — параметр;

$\pi_w \equiv p_{\text{ф}}(w)$  — фоновая компонента,  $\varepsilon$  — параметр.

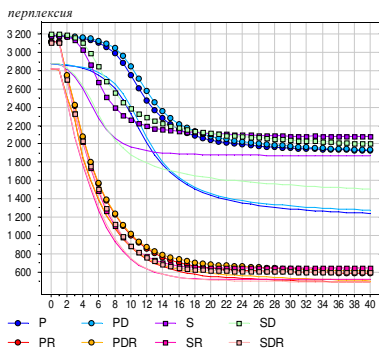
---

*Chemudugunta C., Smyth P., Steyvers M. Modeling general and specific aspects of documents with a probabilistic topic model. NIPS, 2006.*

# Эксперименты с робастными PLSA и LDA



Коллекция RuDis



Коллекция NIPS

Обозначения: P – PLSA, D – LDA ( $\alpha_t = 0.5$ ,  $\beta_w = 0.01$ )  
 S – сэмплирование темы из  $p(t|d, w)$  для каждого  $d, w$   
 R – робастность (шум  $\gamma = 0.3$ , фон  $\varepsilon = 0.01$ )

A. Potapenko, K. Vorontsov. Robust PLSA performs better than LDA. ECIR-2013.

## Выводы

- 1 Переобучение проявляется только на редких словах
- 2 LDA точнее моделирует вероятности редких слов
- 3 Но они как раз не интересны для тематической модели!
- 4 Робастные PLSA и LDA почти одинаковы по перплексии
- 5 Робастные PLSA и LDA почти не переобучаются
- 6 Робастный PLSA лучше, чем обычный LDA
- 7 Перплексия — не вполне адекватная мера качества

---

*Potapenko A. A., Vorontsov K. V. Robust PLSA performs better than LDA // European Conference on Information Retrieval ECIR-2013.*

*Воронцов К.В., Потапенко А.А. Модификации EM-алгоритма для вероятностного тематического моделирования // JMLDA, 2013.*

## Общее резюме. Мифы про LDA

- LDA существенно меньше переобучается, чем PLSA
- LDA строит разреженные тематические модели
- LDA имеет меньше параметров по сравнению с PLSA
- LDA == тематическое моделирование

На самом деле,

- LDA и PLSA почти не отличаются на больших данных
- LDA не максимизирует разреженность моделей
- LDA имеет больше параметров по сравнению с PLSA
- LDA — лишь самая простая базовая модель
- LDA не имеет убедительных лингвистических обоснований

---

*Asuncion A., Welling M., Smyth P., Teh Y. W. On smoothing and inference for topic models. Int'l Conf. on Uncertainty in Artificial Intelligence, 2009.*