Прикладные задачи анализа данных

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

Дьяконов А.Г.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Спектральная теория графов

Spectral Graph Theory

изучает свойства графов с помощью анализа

1) **собственных значений,**
2) **собственных векторов,**
3) **характеристических полиномов**

матриц, которые связаны с графами:

1) **матрица сопряжённости,**
2) **матрица Лапласа,**
3) **беззнаковая матрица Лапласа.**

Спектр конечного графа – спектр её матрицы смежности, спектр Лапласа – спектр матрицы Лапласа графа [**дальше****].**

Спектры не зависят от нумерации вершин.

Спектр

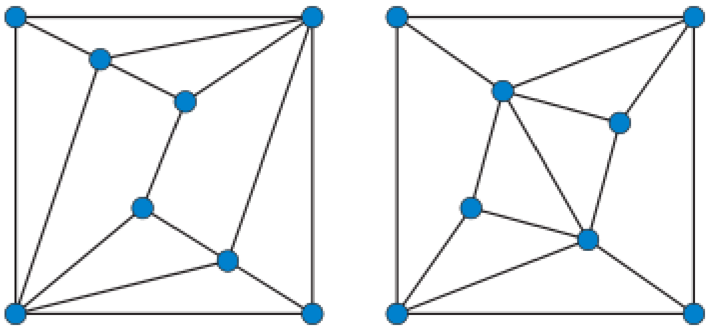
– мультимножество собственных значений.

Графы с одинаковыми спектрами – изоспектральные.

Изоспектральные графы не всегда изоморфны: $K_{1,4}$ и $C_4 \cup K_1$.

[Skiena, S. Implementing Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica. Reading, MA: Addison-Wesley, p. 85, 1990.]

Ещё пример (из полиэдральных графов).



Теорема. **Почти все деревья изоспектральны.**

Есть перечень известных изоспектральных графов, см.
http://mathworld.wolfram.com/CospectralGraphs.html

Спектр

Матрица сопряжённости неориентированного графа симметричная

$$\Rightarrow$$

собственные значения вещественные,

существует базис из ортонормированных собственных векторов.

Зачем нужен «алгебраический» подход к анализу графов.

Инвариант Колен де Вердьера $\mu(G)$ — наибольший коранг $(n-\operatorname{rank}(M))$ среди всех матриц $M \in \mathbf{R}^{n\times n}$:

1) $M_{ij} = \begin{cases} <0, & (i,j) \in E, \\ 0 & (i,j) \notin E. \end{cases}$

2) только одно отрицательное собственное значение (кратности 1),

3) выполняется строгая гипотеза Арнольда

Пример матрицы – матрица смежности

Строгая гипотеза Арнольда:

не существует симметричной матрицы $O^{n\times n} \neq X \in R^{n\times n}$: $MX = 0$,

$$X_{ij} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} i = j, \\ M_{ij} \neq 0. \end{array}\right.$$

в монографиях – чуть по-другому

Критерии, связанные с инвариантом.

$\mu \le 0$ тогда и только тогда, когда нет рёбер

$\mu \le 1$ тогда и только тогда, когда линейный лес

объединение путей

$\mu \le 2$ тогда и только тогда, когда внешнепланарный граф

при добавлении вершины и рёбер, которые соединяют текущие вершины с добавленной получаем планарный граф

$\mu \le 3$ тогда и только тогда, когда планарный граф

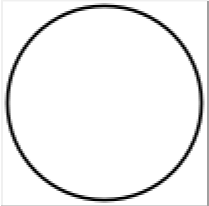
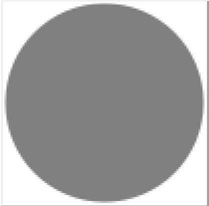
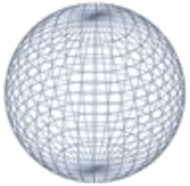
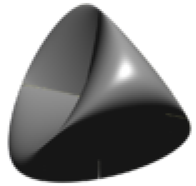
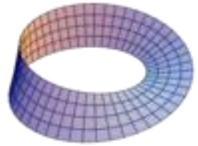
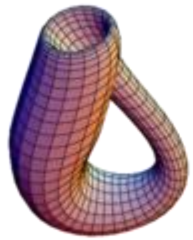
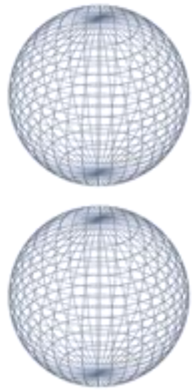
$\mu \le 4$ тогда и только тогда, когда G *linklessly embeddable graph*

Если вложим в бутылку Клейна, то $\mu \le 5$

Если вложим в тор, то $\mu \le 6$

Если вложим в пов-ть с отрицательной характеристикой Эйлера k, то $\mu \le 4-2k$

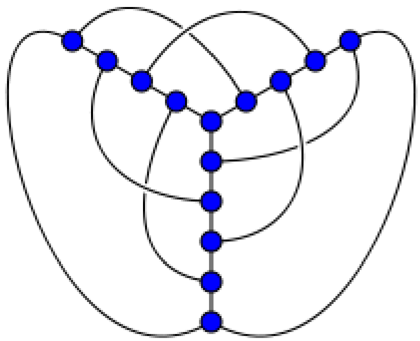
off topic – характеристикой Эйлера

Название	Вид	Эйлерова характеристика
Окружность		0
Круг		1
сфера		2
Тор		0
Двойной тор		−2
Тройной тор		−4
Проективная поверхность		1
Лист Мёбиуса		0
Бутылка Клейна		0
Две сферы		4

Свойства

Любой граф может быть раскрашен в $\mu(G)+1$ цвет (не доказано?)

Минимальное число пересечений при изображении графа на плоскости $\geq \mu(G)-3$.



Свойства

Если дополнение графа является линейным лесом, то $\mu(G) \geq |G| - 3$

Если дополнение графа является внешнепланарным графом, то $\mu(G) \geq |G| - 4$

Если дополнение графа G **является планарным графом, то** $\mu(G) \geq |G| - 5$

Монотонность

Если H **получен из** G **с помощью следующих операций (минорирование):**

1) удалением изолированных вершин,

2) удалением рёбер,

3) сжатием (схлопыванием) рёбер ,

тогда $\mu(H) \leq \mu(G)$**.**

Для справки

Теорема Робертсона-Сеймура-Томаса

Любое наследуемое свойство графов характеризуется конечным числом запрещенных подграфов.

Наследуемые свойства

планарность, внешнепланарность, вложение в поверхность.

Проблема

вычисление инварианта

Итак, начнём... Граф $G=(V,E)$.

Чаще – неориентированные простые (без кратных рёбер и петель) конечные графы.

иногда – взвешенные.

Матрицы	
сопряжённости	$A\in\{0,1\}^{n\times n}$: $A_{ij}=1\Leftrightarrow(i,j)\in E$
диагональная матрица степеней	$D_{ij}=\begin{cases}\deg(i), & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$
Распределений (diffusion)	$W=D^{-1}A$
Лапласа	$L=D-A$, $L=NN^{\mathrm{T}}$
Беззнаковая Лапласа	$Q=D+A$, $Q=MM^{\mathrm{T}}$
инциденций	$M_{ij}=1\Leftrightarrow i\in e_j$
инциденций орграфа	$N_{ij}=\begin{cases}+1, & e_j=(i,*),\\ -1, & e_j=(*,i),\\ 0, & \text{иначе}.\end{cases}$

Напомним...

Собственный вектор (матрицы M) – ненулевой вектор x, для которого справедливо

$$Mx = \lambda x.$$

У симметричных матриц (такие будут у нас)

- из с.в. можно составить ортонормированный базис (запишем по столбцам в Ψ)
- вещественные с.з. (запишем на диагональ Λ)

$$\Psi^{\mathrm{T}} M \Psi = \Lambda$$

$$M = \Psi \Lambda \Psi^{\mathrm{T}} = \sum_i \lambda_i \psi_i \psi_i^{\mathrm{T}}$$

Отношение Релея –

$$\frac{x^{\mathrm{T}}Mx}{x^{\mathrm{T}}x}.$$

Для собственного вектора – $\frac{x^{\mathrm{T}}Mx}{x^{\mathrm{T}}x}=\lambda$.

Теорема. **Пусть** M **– симметричная матрица, тогда максимум отношения Релея равен максимальному собственному значению.**

Простое доказательство

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2Mx(x^{\mathrm{T}}x)-2x(x^{\mathrm{T}}Mx)}{(x^{\mathrm{T}}x)^2}=0,\quad Mx=\frac{x^{\mathrm{T}}Mx}{(x^{\mathrm{T}}x)}x.$$

Другое доказательство:

взять базис из ортогональных собственных векторов M**,**
расписать вектор x**, подставить.**

Отношение Релея

Кстати, почему максимальное значение всегда существует…

$$\frac{x^{\mathrm{T}}Mx}{x^{\mathrm{T}}x}$$

можно рассматривать только векторы: $\|x\|=1$

(компактное множество)

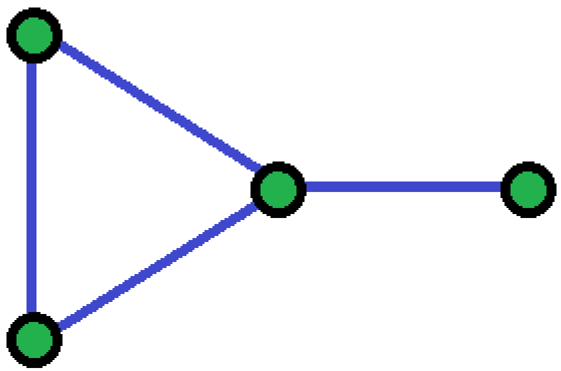
На этом множестве функция непрерывна

Что есть в матрицах...

A_{ij} **– число путей из вершины** i **в вершину** j

$$\mathrm{tr}(A^2) = 2\,|\,E\,|$$

$\mathrm{tr}(A^3) = 6k$**,** k **– число треугольников в графе**



A

0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1
0	0	1	0

A^2

2	1	1	1
1	2	1	1
1	1	3	0
1	1	0	1

A^3

2	3	4	1
3	2	4	1
4	4	2	3
1	1	3	0

Что есть в матрицах…

Теорема **Если граф связный (неориентированный) с диаметром d, то существует как минимум $d+1$ различное с.з. матрицы A (аналогично L, Q).**

Доказательство. **Пусть $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ – все различные с.з., тогда**

$$(A-\lambda_1 I)\cdot\ldots\cdot(A-\lambda_k I)=0,$$

поэтому $A^k \in \Lambda(I, A, \ldots, A^{k-1})$. Но если диаметр достижим для пары вершин (i, j), то

$$A_{ij}^t = \begin{cases} 0, & t<d, \\ >0, & t=d. \end{cases}$$

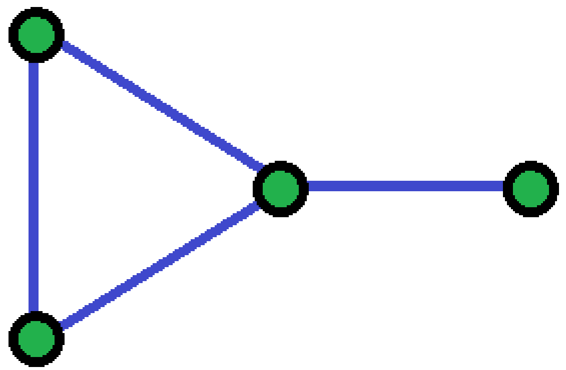
Поэтому $k>d$.

Матрица Лапласа

$$L = D - A$$

Квадратичная форма Лапласа –

$$x^{\mathrm{T}} L x = \sum_{(i,j)} (x_i - x_j)^2, \quad \mathbf{R}^{|V|} \to \mathbf{R}.$$



$$[x_1, x_2, x_3, x_4] \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{matrix} x_1(2x_1 - x_2 - x_3) + \\ x_2(2x_2 - x_1 - x_3) + \\ x_3(3x_3 - x_1 - x_2 - x_4) + \\ x_4(x_4 - x_3) \end{matrix} = \begin{matrix} x_1(x_1 - x_2) + x_1(x_1 - x_3) + \\ x_2(x_2 - x_1) + x_2(x_2 - x_3) + \\ x_3(x_3 - x_1) + x_3(x_3 - x_2) + x_3(x_3 - x_4) + \\ x_4(x_4 - x_3) \end{matrix}$$

Теорема. Минимальное с.з. матрицы Лапласа = 0

Доказательство:

1 способ) т.к. все с.з.неотрицательны, а матрица вырождена.

2 способ) КФЛ неотрицательна, обращается в ноль. Вспоминаем отношение Релея (по теореме Куранта-Фишера).

Кстати, для беззнаковой матрицы Лапласа

$$x^{\mathrm{T}}Qx = \sum_{(i,j)} (x_i + x_j)^2$$

Собственные значения матрицы Лапласа

Пусть $0=\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n$ **– с.з. матрицы Лапласа**

Теорема. $\lambda_2 = 0 \Leftrightarrow$ **граф несвязный**

Доказательство.

Если несвязный – в явном виде строятся два ортогональных собственных вектора.

Если связный, то берём вектор ортогональный к константному, в нём есть два различных элемента x_i, x_j**, учитывая, что вершины** i, j **соединяет путь, выражение**

$$x^{\mathrm{T}} Lx = \sum_{(i,j)} (x_i - x_j)^2$$

будет положительно. Поэтому это не может быть с.в. с нулевым с.з.

Алгебраическая связность графа

λ_2 называют **алгебраической связностью графа / индексом связности** [Fiedler]

Соответствующий с.в. – **вектор Фидлера**

Монотонно не убывает при добавлении рёбер, так как

$$\min_{x^{\mathrm{T}}\tilde{1}=0} \frac{x^{\mathrm{T}}Lx}{x^{\mathrm{T}}x} = \lambda_2.$$

Помним: max – max с.з., min – min с.з.=0.

Важное равенство!

См. также теорему Куранта-Фишера.

Кстати,

$$\min \frac{x^{\mathrm{T}} L x}{x^{\mathrm{T}} x} = \lambda_1$$

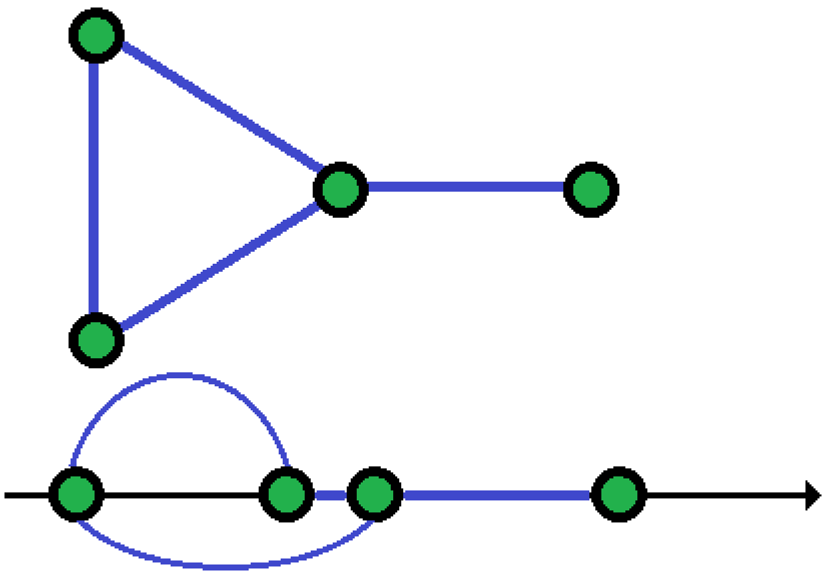
$$\min_{x:\, x^{\mathrm{T}} \tilde{1} = 0} \frac{x^{\mathrm{T}} L x}{x^{\mathrm{T}} x} = \lambda_2$$

$$\min_{x:\, x^{\mathrm{T}} \tilde{1} = 0,\; x^{\mathrm{T}} \psi_2 = 0} \frac{x^{\mathrm{T}} L x}{x^{\mathrm{T}} x} = \lambda_3$$

и т.д.

Что получится если min заменить на argmin?

Проблема вложения графа [Hall, 70]



Вложить граф в прямую:

$$x^{\mathrm{т}} L x = \sum_{(i,j)} (x_i - x_j)^2 \to \min_x,$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – координаты наших вершин.

Избежать очевидного константного решения:

$$\tilde{1}^{\mathrm{т}} x = 0,$$

учесть масштаб:

$$\| x \| = 1.$$

Решение – собственный вектор, соответствующий второму по величине с.з. матрицы Лапласа.

Проблема вложения графа [Hall, 70]

Теперь вкладываем в плоскость:

$$\sum_{(i,j)\in E} \| (x_i, y_i) - (x_j, y_j) \|^2 = \sum_{(i,j)\in E} (x_i - x_j)^2 + \sum_{(i,j)\in E} (y_i - y_j)^2 \to \min$$

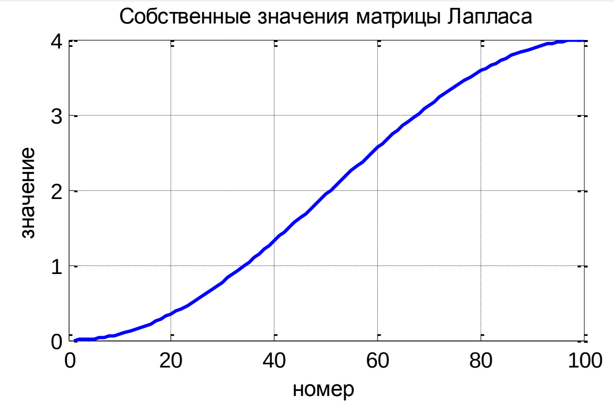
при условии

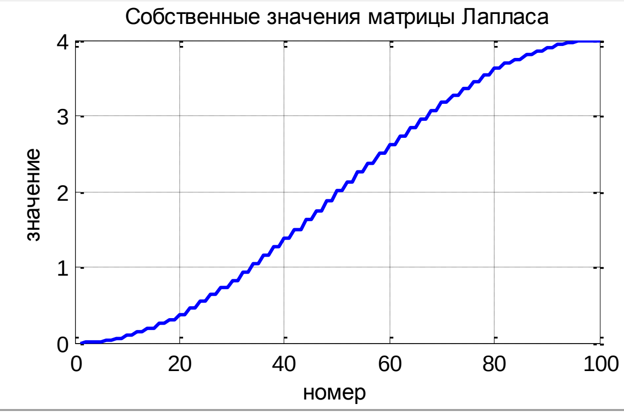
$$\sum_{i\in V} (x_i, y_i) = (0,0).$$

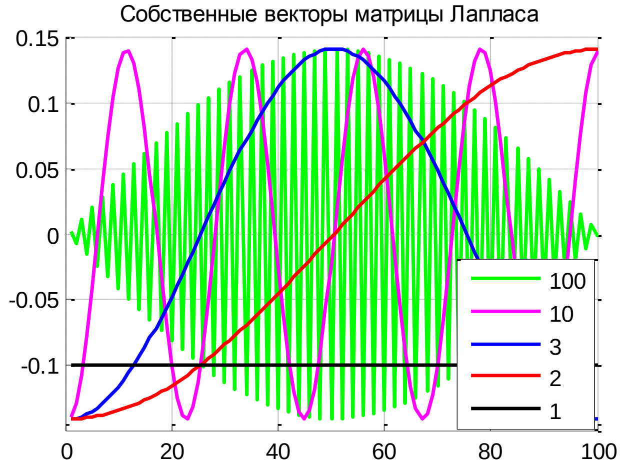
Если добавить условие ортогональности x и y, то получим, что решение – с.в., соответствующие второму и третьему с.з. матрицы Лапласа.

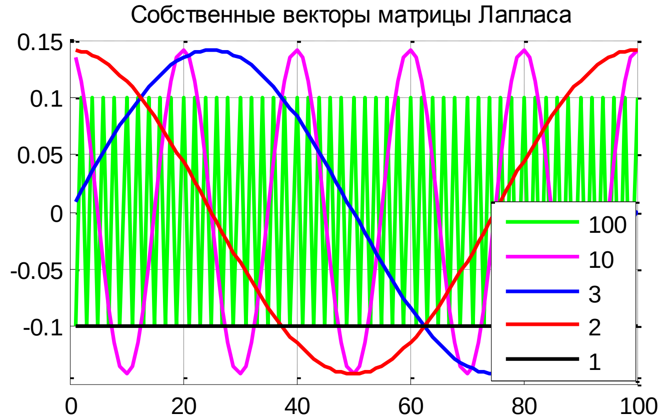
Вот почему визуализация графа по с.в.!

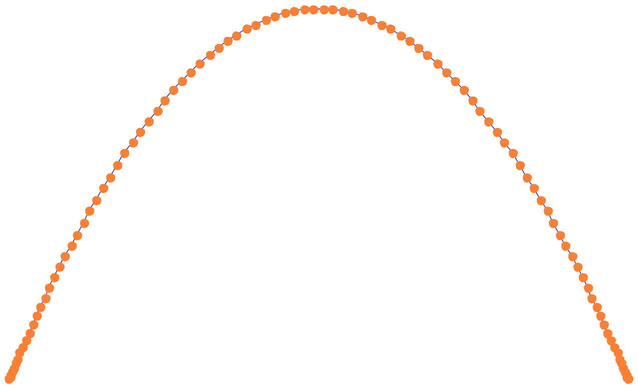
Сейчас будут картинки… откуда берутся синусоиды?

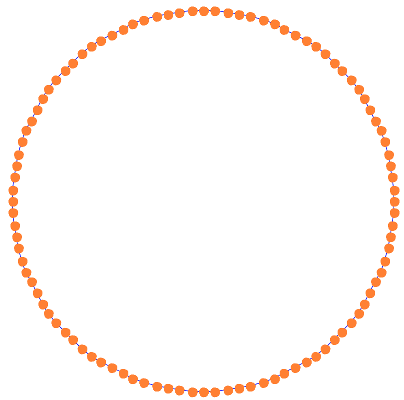

Собственные значения матрицы Лапласа
значение
номер
0
1
2
3
4
0
20
40
60
80
100

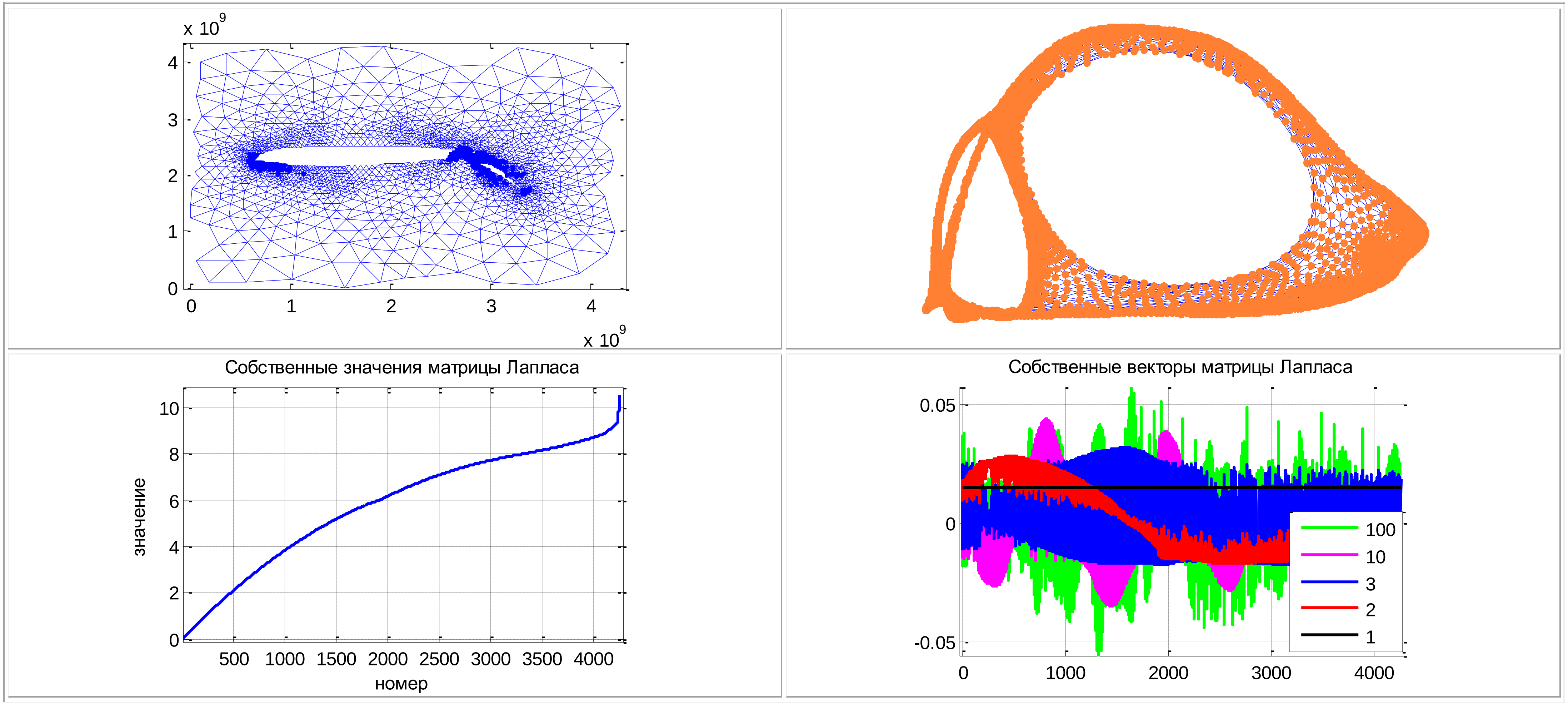

Собственные значения матрицы Лапласа
значение
номер
0
1
2
3
4
0
20
40
60
80
100


Собственные векторы матрицы Лапласа
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
0
20
40
60
80
100
100
10
3
2
1


Собственные векторы матрицы Лапласа
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
0
20
40
60
80
100
100
10
3
2
1

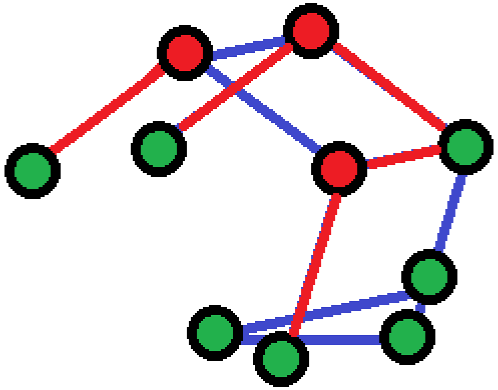






[Hal70] K. M. Hall. An r-dimensional quadratic placement algorithm. Management Science, 17:219-229, 1970.

Разбиение графа



Рёберная граница –
$\partial S = \{(i, j) \in E \mid i \in S, j \notin S\}$.

Число Чигера (изопериметрическое число) – $h(G) = \min_{0<|S|\leq n/2} \frac{|\partial S|}{S}$.

Оценивает, есть ли в графе "узкое горло".

Разбиение графа

Теорема. $h(G) \geq \lambda_2 (1-s)/2$**, где** $s = |S|/|V|$**.**

Если λ_2 – большое с.з., то граф «сильно связан».

Неравенство Чигера [Wiki, без доказательства]
В k-регулярном графе $(k-\lambda_2)/2 \leq h(G) \leq \sqrt{2k(k-\lambda_2)}$

Часто называют одним из основных результатов в СТК.

Теорема. $h(G) \geq \lambda_2 (1-s)/2$, **где** $s = |S|/|V|$.

Доказательство. Известно, что

$$\min_{x^{\mathrm{T}}\tilde{1}=0} \frac{x^{\mathrm{T}} L x}{x^{\mathrm{T}} x} = \lambda_2.$$

Поэтому для любого вектора x ортогонального к $\tilde{1}$ выполняется

$$x^{\mathrm{T}} L x \geq \lambda_2 x^{\mathrm{T}} x.$$

Если $x = x_S - s\tilde{1}$, где x_S – характеристический вектор множества S (поправка x_S до ортогональности к $\tilde{1}$), то

$$x^{\mathrm{T}} L x = \sum_{(i,j)\in E} (x_i - x_j) = |\delta S|$$

и $x^{\mathrm{T}}\tilde{1} = 0$.

Из

$$x^{\mathrm{T}} x = |S|(1-s)^2 + (|V| - |S|)s^2 = |S|(1-s)$$

следует утверждение теоремы.

Применение в комбинаторике

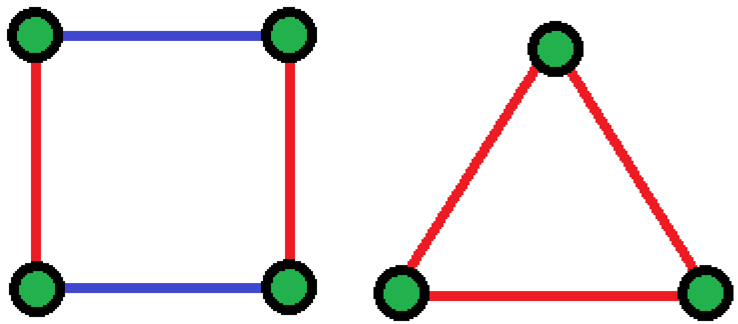
Теорема. $h(G) \geq \lambda_2 (1 - s)/2$**, где** $s = |S|/|V|$**.**

Следствие (можно показать, зная спектр гиперкуба), что для любого подмножества вершин $S : |S| \leq 2^{n-1}$ **справедливо** $|\partial S| \geq |S|$ **(это простое некомбинаторное доказательство).**

Теорема [без доказательства]. В неориентированном мультиграфе число остовных деревьев равно

$$\det(L + J/n^2) = \mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_n / n.$$

Теорема [без доказательства]. $|V| = n = 2k$, с.з. Лапласа $0 \leq \mu_1 \leq \ldots \leq \mu_n$, если $\mu_n \leq 2\mu_2$, то в графе есть совершенное соответствие (подмножество рёбер такое, что любая вершина инцидентна только одному ребру множества).



Теорема [без доказательства]. Кратность нуля как с.з. (неориентированного графа) равна числу компонент связности.

Как быть с двудольностью

Спектр Лапласа не распознаёт двудольность: $K_{1,3}$ и $K_1 \cup K_3$

Теорема [без доказательства]. Кратность нуля как с.з. (неориентированного графа) беззнакового Лапласа равна числу компонент двудольности.

Теорема [без доказательства]. Граф двудольный тогда и только тогда, когда спектр Лапласа равен "беззнаковому" спектру Лапласа.

Матрица смежности

Пошли другие обозначения

$$A \sim \text{с.з. } \lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$$

$$L = kI - A \sim \text{с.з. } 0 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_n$$

Теорема $d_{\mathrm{avr}} \leq \lambda_1 \leq d_{\max}$.

Доказательство

$$\lambda_1 = \max_x \frac{x^{\mathrm{T}} A x}{x^{\mathrm{T}} x} \geq \frac{\tilde{1}^{\mathrm{T}} A \tilde{1}}{\tilde{1}^{\mathrm{T}} \tilde{1}} = \frac{\sum A_{ij}}{n} = \frac{\sum \deg(i)}{n}$$

Пусть v **– собственный вектор, соответствующий** μ_1 **с** i**-м максимальным элементом (можно считать ненулевым), тогда**

$$\lambda_1 = \frac{(Av)_i}{v_i} = \frac{\sum\limits_{j:(i,j)\in E} v_j}{v_i} \leq \sum_{j:(i,j)\in E} \frac{v_j}{v_i} \leq \sum_{j:(i,j)\in E} 1 = \deg(i) \leq d_{\max}.$$

Теорема $d_{\text{avr}} \le \lambda_1 \le d_{\max}$.

Замечание Если удалить вершину с наименьшей степенью, то средняя степень d_{avr} неубывает, а λ_1 невозрастает, т.е. не смотря на оценку они ведут себя по-разному!

$$\lambda_1 = \max_x \frac{x^{\mathrm{T}} A x}{x^{\mathrm{T}} x} \ge \max_y \frac{\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} A \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Замечание Из этой схемы доказательства понятно, что

$$\lambda_{\min}(A) \le \lambda_{\min}(A') \le \lambda_{\max}(A') \le \lambda_{\max}(A),$$

где A' – подматрица A, образованная строками и столбцами из $\{i_1, \ldots, i_k\}$

Следствие. Граф раскрашиваем в $d_{\max}+1$ цвет (очевидно). Граф раскрашиваем в $\lfloor \lambda_1 \rfloor + 1$ цвет. **По индукции. Оценка точна! ДЗ Почему?**

Замечание [без доказательства]. Хроматическое число

$$\geq \frac{\lambda_n}{\lambda_n - d_{\mathrm{avr}}}$$

$$\geq 1 + \frac{\lambda_1}{-\lambda_n}$$

[через оценку сумм с.з. для блоковых матриц]

Напоминалка

Граф 2-раскрашиваем $\Leftrightarrow$ двудольный

Граф 3-раскрашиваем – NP-полная задача

Граф планарный $\Rightarrow$ 4-раскрашиваем

Лемма. Если в конечном графе $\lambda_1 = d_{\max}$, то он $d_{\max}$-регулярный.

Доказательство. У нас при доказательстве было неравенство

$$\lambda_1 = \frac{(Av)_i}{v_i} = \frac{\sum\limits_{j:(i,j)\in E} v_j}{v_i} \le \sum_{j:(i,j)\in E} \frac{v_j}{v_i} \le \sum_{j:(i,j)\in E} 1 = \deg(i) \le d_{\max}$$

Теперь – это равенство:

$$\frac{v_j}{v_i} = 1,\ (i,j) \in E,$$

не только у i-й вершины максимальная степень, но и у всех соседей.
Из связности графа $\Rightarrow$ у всех вершин в графе максимальная степень.

Для DM. Спектр пополнять другими характеристиками графа.

Теорема (Фробениуса-Перрона) [без доказательства].

Пусть граф связный и взвешенный, тогда

1) $\lambda_1 \geq -\lambda_n$ **[они все вещественные, пока не больше]**

2) $\lambda_1 > \lambda_2$

3) для λ_1 **есть положительный собственный вектор**

[Можно добавить доказательство + вспомогательная лемма]

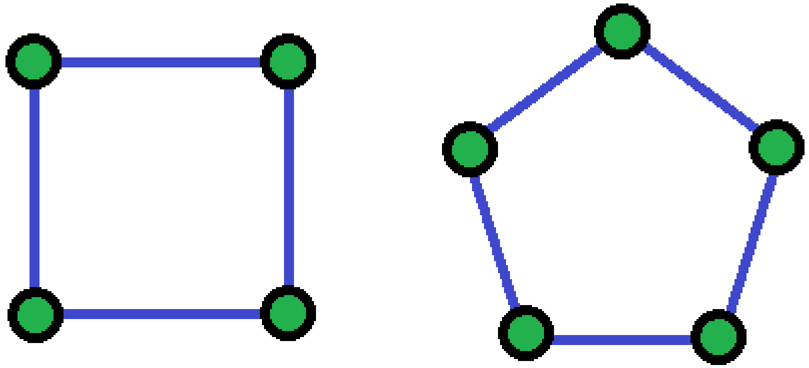
Теорема (Ф-П для Лапласианов) [без доказательства].

Пусть матрица M **имеет неположительные недиагональные элементы, граф ненулевых недиагональных элементов связен. Пусть** λ_1 **– наименьшее с.з. с с.в.** v^1**. Тогда можно выбрать** v^1 **положительным и** λ_1 **имеет кратность 1.**

Теорема Граф двудольный тогда и только тогда, когда для любого с.з. λ величина $(-\lambda)$ тоже является с.з.

Связный граф с наибольшим с.з. λ двудольный тогда и только тогда, когда $(-\lambda)$ тоже является с.з.

Сильно регулярный граф – простой, ориентированный, без петель, существуют параметры (n, k, k_1, k_2) такие, что $|V| = n$, $\forall i \deg(i) = k$, $\forall (i, j) \in E \deg(i, j) = k_1$, $\forall (i, j) \notin E \deg(i, j) = k_2$.



(4,2,0,2), (5,2,0,1)

$\deg(i, j) = k$ – вершины i, j имеют k общих соседей.

Теорема Для простого нетривиального (не полного и не пустого) * графа порядка n следующие утверждения эквивалентны:

1) граф (n, k, k_1, k_2)-сильно регулярный

2) $A^2 = (k_1 - k_2)A + (k - k_2)I + k_2 J$ для некоторых вещественных k, k_1, k_2

3) есть два с.з. с с.в. ортогональными к $\tilde{1}$

Доказательство Первые два утв. очевидно эквивалентны. Пусть верно второе и v – с.в. с с.з. λ, тогда

$$A^2 v = (k_1 - k_2)Av + (k - k_2)Iv + k_2 Jv$$

$$\lambda^2 v = (k_1 - k_2)\lambda v + (k - k_2)v + k_2 (\sum v_i) v$$

Для вектора ортогонального к $\tilde{1}$ –

$$\lambda^2 = (k_1 - k_2)\lambda + (k - k_2)$$

Здесь два разных решения.

Если верно третье утв. и соответствующие с.з. λ, λ', то

$$(A - \lambda I)(A - \lambda' I) = sJ$$

для некоторого J, поэтому $A^2 \in \Lambda(A, I, J)$.

Теорема.

Граф с одним с.з. – без рёбер

Связный граф с двумя с.з. – полный

Связный регулярный граф с 3 с.з. – строго регулярный

Связный регулярный граф с 4 с.з. – "walk-regular" (для любого $k \geq 2$ число путей через вершину длины k не зависит от вершины)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СТГ

Теорема (Куранта-Фишера) / Min-max theorem

Пусть A – симметричная матрица с с.з. $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$, тогда

$$\lambda_k = \max_{\substack{S\subseteq \mathbf{R}^n \\ \dim(S)=k}} \min_{x\in S} \frac{x^{\mathrm{T}}Ax}{x^{\mathrm{T}}x} = \min_{\substack{T\subseteq \mathbf{R}^n \\ \dim(S)=n-k+1}} \max_{x\in T} \frac{x^{\mathrm{T}}Ax}{x^{\mathrm{T}}x}.$$

Следствие. **Если A – симметричная матрица с с.з. $\alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_n$, матрица B получена из неё удалением i-й строки и i-го столбца, её с.з. $\beta_1 \geq \ldots \geq \beta_n$, тогда**

$$\alpha_1 \geq \beta_1 \geq \ldots \geq \alpha_n \geq \beta_n.$$

тут ошибочка;)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СТГ

$L \succ 0$**, если** L **– неотрицательно(!) определённая матрица**
$G \succ H$**, если** $L_G \succ L_H$**, если** $L_G - L_H \succ 0$

Лемма. Если $G \succ cH$**, то** $\mu_k(G) \geq c\mu_k(H)$ **для всех** k **(здесь умножение на** c **– умножение весов графа).**

Доказательство очевидно из

$$\lambda_k(G) = \max_{\substack{S \subseteq \mathbf{R}^n \\ \dim(S)=k}} \min_{x \in S} \frac{x^{\mathrm{T}} L_G x}{x^{\mathrm{T}} x} \geq c \max_{\substack{S \subseteq \mathbf{R}^n \\ \dim(S)=k}} \min_{x \in S} \frac{x^{\mathrm{T}} L_H x}{x^{\mathrm{T}} x} \geq c\lambda_k(H).$$

Аналогична монотонность при добавлении рёбер и увеличении отдельных весов.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СТГ

Теорема об аппроксимации

Для любого $\varepsilon > 0$ существует $d > 0$, что для всех достаточно больших n существует d-регулярный граф G:
$(1+\varepsilon)G \succ K_n \succ (1/(1+\varepsilon))G$.

Полные графы аппроксимируются графами с малым числом рёбер!