

Задание 3. Метод опорных векторов

Курс: Практикум на ЭВМ, осень 2014

Начало выполнения задания: 5 ноября.

Срок сдачи: **22 ноября, 23:59.**

Среда для выполнения задания: Python 3.4.

1 Ликбез

Зафиксируем обозначения:

- N — число объектов в обучающей выборке.
- D — размерность признакового пространства. Для удобства предлагается добавить в признаковое описание объектов константный признак равный 1, чтобы решающее правило приняло вид $\mathbf{w}^\top \mathbf{x}$, и не требовалось отдельно рассматривать параметр сдвига.
- $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^D$ — вектор признаков объекта n .
- $y_n \in \{-1, 1\}$ — правильный ответ для объекта n .

Прямая задача SVM

$$\min_{\mathbf{w}, \xi \geq 0} \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + C \sum_{n=1}^N \xi_n,$$

$$\text{s.t. } y_n \mathbf{w}^\top \mathbf{x}_n \geq 1 - \xi_n, \quad n = 1, \dots, N.$$

Прямая задача SVM без ограничений В предыдущей задаче можно избавиться от переменных ξ_n , если учесть, что $\xi_n \geq 0$ и $\xi_n \geq 1 - y_n \mathbf{w}^\top \mathbf{x}_n$:

$$\min_{\mathbf{w}} \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + C \sum_{n=1}^N \max\{0, 1 - y_n \mathbf{w}^\top \mathbf{x}_n\}.$$

Двойственная задача SVM

$$\max_{\mathbf{a}} \sum_{n=1}^N a_n - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N a_n a_m y_n y_m k(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m)$$

$$\text{s.t. } 0 \leq a_n \leq C, \quad n = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{n=1}^N a_n y_n = 0,$$

где $k(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m)$ — ядровая функция, в линейном случае ее значение равно $\mathbf{x}_n^\top \mathbf{x}_m$.

Субградиент Вектор $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$ является субградиентом выпуклой функции $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ в точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, если $\forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$f(\mathbf{z}) \geq f(\mathbf{x}) + \mathbf{g}^\top (\mathbf{z} - \mathbf{x}).$$

Если функция f дифференцируема в точке \mathbf{x} , ее субградиент в этой точке совпадает с градиентом. *Субдифференциалом* функции f в точке \mathbf{x} называют множество субградиентов в этой точке, обозначают $\partial f(\mathbf{x})$.

Рассмотрим пример вычисления субдифференциала для функции $f(x) = |x|$. При $x < 0$ субградиент единственен: $\partial f(x) = -1$; аналогично при $x > 0$: $\partial f(x) = 1$. При $x = 0$ субдифференциал определяется неравенством $|z| \geq gz$ для любого $z \in \mathbb{R}$, это неравенство выполнено только при $g \in [-1, 1]$, таким образом $\partial f(0) = [-1, 1]$.

Субградиентный спуск — метод аналогичный методу градиентного спуска, в котором вместо градиента используется субградиент.

2 Формулировка задания

Требуется реализовать следующие методы для решения задачи SVM:

1. Метод внутренней точки для решения прямой задачи. Рекомендуется использовать библиотеку `cvxopt`, метод `cvxopt.solvers.qp`.
2. Метод внутренней точки для решения двойственной задачи. Рекомендуется использовать библиотеку `cvxopt`, метод `cvxopt.solvers.qp`.
3. Метод субградиентного спуска для решения прямой задачи, а также его стохастический вариант. Рассмотреть критерий останова как по значению целевой функции, так и по норме аргумента. Реализовать полностью самостоятельно. Для этого потребуется вывести формулу для субградиента функционала в прямой задаче SVM без ограничений, вывод вставить в отчет.
4. Метод, используемый в библиотеке `liblinear`. Рекомендуется использовать биндинги из библиотеки `scikit-learn`, класс `sklearn.svm.LinearSVC`.
5. Метод, используемый в библиотеке `libsvm`. Рекомендуется использовать биндинги из библиотеки `scikit-learn`, класс `sklearn.svm.SVC`.

Исследовательская часть. Для проведения исследований необходимо генерировать модельные данные, которые не являются линейно разделимыми, для этого удобно использовать многомерные нормальные распределения. Минимальный размер выборки — по 100 объектов в каждом классе.

Требуется провести следующие исследования:

1. Исследовать зависимость времени работы реализованных методов для решения задачи линейного SVM от размерности признакового пространства и числа объектов в обучающей выборке. Исследовать скорость сходимости методов. Сравнить методы по полученным значениям целевой функции (кроме `libsvm`).
2. Провести эти исследования для случая SVM с RBF ядром для тех методов, где возможен ядровой переход.
3. Реализовать процедуру поиска оптимального значения параметра C и ширины RBF ядра с помощью кросс-валидации (можно воспользоваться библиотекой `scikit-learn`). Исследовать зависимость ошибки на валидационной выборке от значений этих параметров. Рассмотреть случаи хорошо и трудно разделимых выборок.
4. Сравнить (по скорости сходимости и точности решения) несколько стратегий выбора шага α_t в методе субградиентного спуска: α , $\frac{\alpha}{t}$, $\frac{\alpha}{t^\beta}$, где α , β — некоторые константы, t — номер итерации.
5. Исследовать, как размер подвыборки, по которой считается субградиент, в методе стохастического субградиентного спуска влияет на скорость сходимости метода и на точность решения. В этом и предыдущем пунктах за точное решение можно взять решение, полученное с помощью одного из методов внутренней точки.
6. Реализовать методы для решения многоклассовой задачи классификации по стратегиям `one-vs-all` и `one-vs-one`. Сравнить эти подходы, рассмотреть случаи линейного SVM и SVM с RBF ядром.
7. Для двумерного случая:
 - Провести визуализацию выборки.
 - Для линейного SVM и для SVM с RBF ядром провести визуализацию разделяющей поверхности для двухклассового и многоклассового случаев.
 - Отобразить объекты, соответствующие опорным векторам.
8. Протестировать многоклассовые методы на наборе данных MNIST. Использовать стандартное разбиение на обучающую и тестовую выборки. Из обучающей выборки отобрать объекты для валидационной выборки, которую использовать для подбора гиперпараметров (C , ширина RBF ядра). Максимальное время работы процедуры обучения — 1 час. Требуется определить максимальный размер обучающей выборки для различных методов. Какой из методов показывает лучшую точность? Полученные результаты вставить в отчет с указанием всех параметров для воспроизведения эксперимента. Сделать выводы о том, какой алгоритм лучше всего использовать на этом наборе данных.

3 Требования к оформлению

Для сдачи задания необходимо предоставить:

1. Отчет в формате pdf (оформленный в системе L^AT_EX) с описанием всех проведенных исследований со всеми графиками и выводами.
2. Python notebook с кодом для воспроизведения всех результатов из отчета: таблиц, графиков и проч.
3. Python модуль со всеми требуемыми функциями, в соответствии со спецификациями, приведенными ниже.

4 Спецификация

В предоставленном модуле должны быть реализованы функции:

1. Функции подсчета целевой функции SVM, для прямой и двойственных задач:

```
compute_primal_objective(X, y, w, C)
compute_dual_objective(X, y, A, C, gamma=0)
```

Описание параметров:

- X — переменная типа `numpy.array`, матрица размера $N \times D$, признаковые описания объектов из обучающей выборки,
- y — переменная типа `numpy.array`, матрица размера $N \times 1$, правильные ответы на обучающей выборке,
- w — переменная типа `numpy.array`, матрица размера $D \times 1$, вектор весов SVM,
- A — переменная типа `numpy.array`, матрица размера $N \times 1$, значения двойственных переменных.
- C — параметр регуляризации,
- γ — ширина RBF ядра. Если $\gamma=0$, рассматривается линейный случай.

Функции должны возвращать одно число — значение целевой функции.

2. Функции для решения задачи SVM:

```
svm_subgradient_solver(X, y, C, tol=1e-6, max_iter=100, verbose=False)
svm_qp_primal_solver(X, y, C, tol=1e-6, max_iter=100, verbose=False)
svm_qp_dual_solver(X, y, C, tol=1e-6, max_iter=100, verbose=False, gamma=0)
svm_liblinear_solver(X, y, C, tol=1e-6, verbose=False)
svm_libsvm_solver(X, y, C, tol=1e-6, max_iter=100, verbose=False, gamma=0)
```

Описание параметров:

- X — переменная типа `numpy.array`, матрица размера $N \times D$, признаковые описания объектов из обучающей выборки,
- y — переменная типа `numpy.array`, матрица размера $N \times 1$, правильные ответы на обучающей выборке,
- C — параметр регуляризации,
- tol — требуемая точность,
- max_iter — максимальное число итераций,
- $verbose$ — в случае `True`, требуется выводить отладочную информацию на экран (номер итерации, значение целевой функции),
- γ — ширина RBF ядра. Если $\gamma=0$, рассматривается линейный случай.

Функции должны возвращать словарь с полями:

- `'w'` — `numpy.array`, матрица размера $K \times 1$,
- `'A'` — только в случае решения двойственной задачи, `numpy.array`, матрица размера $N \times 1$, значения двойственных переменных,
- `'status'` — 0 или 1, 0 — если метод вышел по критерию останова, 1 — если по числу итераций, кроме `svm_liblinear_solver`, `svm_libsvm_solver`,
- `'objective_curve'` — список значений целевой функции по итерациям метода, только для `svm_subgradient_solver`,
- `'time'` — время работы метода.

3. Функция определения опорных векторов:

```
compute_support_vectors(X, y, A)
```

Описание параметров:

- X — переменная типа `numpy.array`, матрица размера $N \times D$, признаковые описания объектов из обучающей выборки,
- y — переменная типа `numpy.array`, матрица размера $N \times 1$, правильные ответы на обучающей выборке,
- A — переменная типа `numpy.array`, матрица размера $N \times 1$, значения двойственных переменных.

Функция должна возвращать `numpy.array`, матрицу размера $K \times D$, где K — число найденных опорных векторов.

4. Функция получения прямых переменных w по двойственным a_n :

```
compute_w(X, y, A)
```

Описание параметров:

- X — переменная типа `numpy.array`, матрица размера $N \times D$, признаковые описания объектов из обучающей выборки,
- y — переменная типа `numpy.array`, матрица размера $N \times 1$, правильные ответы на обучающей выборке,
- A — переменная типа `numpy.array`, матрица размера $N \times 1$, значения двойственных переменных.

Функция должна возвращать `numpy.array`, матрицу размера $D \times 1$.

Все описанные выше функции должны работать для бинарного случая, в этом случае метки классов принимают значения 1 и -1 . В случае $K \geq 2$ классов они нумеруются от 0 до $K - 1$.

Требуется также реализовать функцию визуализации, соответствующую требованиям пункта 7 исследовательской части задания:

```
visualize(X, y, w, A=None)
```

Описание параметров:

- X — переменная типа `numpy.array`, матрица размера $N \times D$, признаковые описания объектов из обучающей выборки,
- y — переменная типа `numpy.array`, матрица размера $N \times 1$, правильные ответы на обучающей выборке,
- w — переменная типа `numpy.array`, матрица размера $D \times K$ или $D \times 1$ в случае двух классов, вектор весов SVM,
- A — переменная типа `numpy.array`, матрица размера $N \times K$ или $N \times 1$ в случае двух классов, значения двойственных переменных. Если этот параметр не задан, функция не должна отображать опорные вектора.