Задачи для подготовки к контрольной работе по курсу «прикладная алгебра»

1. Записать таблицу сложения и умножения для
   (a) поля $\mathbb{F}_3^2 = \mathbb{F}_3[x]/(x^2 - x + 2)$;
   (b) кольца $\mathbb{F}_2[x]/(x^3+x^2+x+1)$; по построенным таблицам убедиться, что данное кольцо не является полем.

2. Для всех ненулевых элементов поля построить таблицу соответствий между полиномиальным представлением и степенным представлением для некоторого примитивного элемента α:
   (a) Рассмотреть поле $\mathbb{F}_2^4 = \mathbb{F}_2[x]/(x^4+x^3+1)$. С помощью построенной таблицы вычислить значение полинома $w(x) = \alpha x^{10} + (\alpha^{11} + \alpha^{13})x^6 + \alpha^2 \in \mathbb{F}_2^4[x]$ в точке α;
   (b) Рассмотреть поле $\mathbb{F}_5^2 = \mathbb{F}_5[x]/(x^2 - 2x + 3)$. С помощью построенной таблицы вычислить $\frac{\alpha^{32}+\alpha^{12}}{\alpha^2+\alpha^5}$.

3. Найти порядок элемента $x^3 + x$ в поле $\mathbb{F}_2[x]/(x^4 + x + 1)$ без перебора по всем степеням элемента.

4. Найти все примитивные элементы в поле $\mathbb{F}_3[x]/(x^2 + 1)$.

5. В фактор-кольце $\mathbb{F}_2[x]/(x^4 + 1)$ найти все элементы главного идеала:
   (a) идеал $(x + 1)$;
   (b) идеал $(x^2 + x + 1)$.

6. Найти общее число неприводимых многочленов степени n над $\mathbb{F}_p$ для случаев:
   (a) $n = 11, p = 5$;
   (b) $n = 12, p = 3$.

7. Найти все неприводимые многочлены степени 2 над $\mathbb{F}_5$.

8. С помощью расширенного алгоритма Евклида:
   (a) Найти обратный элемент для $x^3 + 4x^2 + 3$ в поле $\mathbb{F}_5^5 = \mathbb{F}_5[x]/(x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 2)$;
   (b) Решить сравнение
   $$(x^4 + x^3 + x^2 + 1)f(x) \equiv x^2 + x \mod x^3 + 1$$
   (c) Найти НОД для двух многочленов из кольца $\mathbb{F}_2^3[x]$ $f(x) = \alpha^3x^4 + \alpha^7x^3 + 2\alpha^2x^2 + x + \alpha^6$ и $g(x) = \alpha^4x^2 + \alpha^7x + 2\alpha^7$, где α – примитивный элемент поля $\mathbb{F}_2^3 = \mathbb{F}_2[x]/(x^2 + x + 2)$.

9. В поле $\mathbb{F}_7^2 = \mathbb{F}_7[x]/(x^2 + x + 3)$ решить следующую СЛАУ:
   $$(2x + 2)a + (3x + 2)b = 6x + 6,$$
   $$(3x + 5)a + (4x + 1)b = 5x + 3.$$

10. Разложить на неприводимые множители следующие многочлены:

    (a) $f(x) = x^5 + x^4 + 1$ над $\mathbb{F}_2$;

    (b) $f(x) = x^5 + 3x^3 + 2x^2 + 1$ над $\mathbb{F}_5$.

11. Построить изоморфизм между полями $F_1 = \mathbb{F}_2[x]/(x^3 + x + 1)$ и $F_2 = \mathbb{F}_2[x]/(x^3 + x^2 + 1)$. С помощью найденного изоформизма найти образы для $x^2 + x + 1 \in F_1$ в F_2 и $x^2 + 1 \in F_2$ в F_1.

12. Найти количество и степени неприводимых множителей в разложении следующих многочленов над $\mathbb{F}_p$:

    (a) $p = 2$, $f(x) = x^{21} + 1$;

    (b) $p = 3$, $f(x) = x^{42} - 1$.

    В каком минимальном поле характеристики p данные многочлены разлагаются на линейные множители?

13. Найти минимальное поле характеристики 3, в котором многочлен $x^3 + x + 2 \in \mathbb{F}_3[x]$ раскладывается на линейные множители. В данном поле найти все корни этого многочлена.

14. Найти минимальный многочлен $m(x) \in \mathbb{F}_5[x]$ для элемента α^3, где α – примитивный элемент поля $\mathbb{F}_5^2 = \mathbb{F}_5[x]/(x^2 + x + 2)$

15. Линейный код задан своей проверочной матрицей

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

    Требуется найти минимальное расстояние кода d, построить порождающую матрицу кода G для систематического кодирования, а также осуществить систематическое кодирование для векторов $\boldsymbol{u}_1 = [1\ 1\ 0]^T$, $\boldsymbol{u}_2 = [1\ 0\ 1]^T$.

16. Доказать, что линейный $(9, 3)$-код, заданный порождающим многочленом $g(x) = x^6 + x^3 + 1$, является циклическим. С помощью данного кода осуществить систематическое кодирование для полиномов $u_1(x) = x^2 + 1$ и $u_2(x) = x + 1$.

17. Рассмотрим код Хэмминга с параметрами $n = 7, k = 4$ с порождающим многочленом $g(x) = x^3 + x^2 + 1$. Требуется декодировать принятый полином $w(x) = x^6 + x^3 + x^2$:

    (a) с помощью алгоритма декодирования для кодов Хэмминга;

    (b) с помощью общего алгоритма декодирования БЧХ кода.