Реконструкции в теории графов. Обзор

В. А. Алексеев

Московский физико-технический институт (МФТИ)

64-я научная конференция МФТИ
4 декабря 2021

Цель работы

Цель

Рассказать

- о задаче восстановления графов;
- о нескольких результатах про восстановление графов.

Содержание

Восстановление объектов по частичной информации

- Есть *множество объектов* некоторой природы.
- Когда можно однозначно определить (*восстановить*) объект по *неполной информации* о его *частях*?

“Восстановление” пазла из разноцветных фигурок по информации о его частях: доске с отверстиями и собственно фигурок.[1]

[1] https://chocolatbaby.es

Пример

Двоичные слова: $u = 0110$ и $v = 1001$.

У них одинаковы:

- множества подслов длины 2:

  011**0**   **01**10   0**1**1**0**   0**11**0

  1**00**1   1**0**0**1**   **10**01   **1**00**1**

- мультимножества подслов длины 2:

  011**0**   **01**10   **0**1**1**0   0**1**1**0**   01**10**   0**11**0

  1**00**1   1**0**0**1**   10**01**   **10**01   **1**0**0**1   **1**00**1**

Таким образом, слова u и v *невосстановимы* по множеству и мультимножеству подслов длины 2.

Постановка задачи о восстановлении графа

Определение (Граф)

Граф G — это пара (V, E), где V — множество вершин, E — множество рёбер. Каждое ребро из E однозначно определяется парой двух различных вершин из V, соединённых этим ребром.

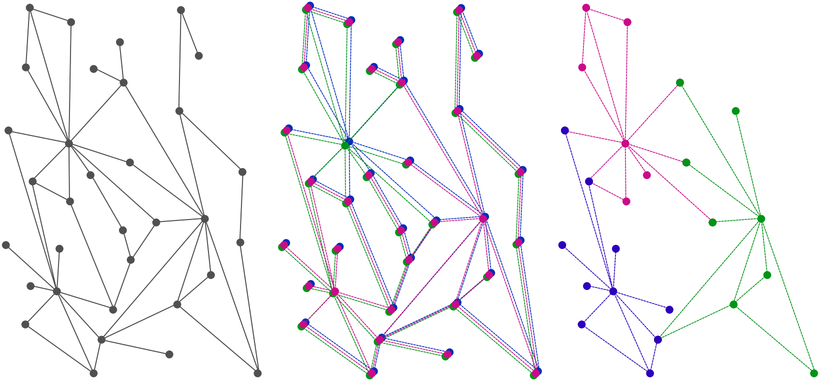
Определение (Подграф)

Подграф $G'(V', E')$ графа $G(V, E)$ — это граф, где $V' \subseteq V$, а E' образовано всеми ребрами из E, соединяющими пары вершин из V'. *Вершиноудалённый* подграф — такой, что $|V'| = |V| - 1$.

Задача

Дано множество графов $\mathcal{G}$. Можно ли восстановить граф $G \in \mathcal{G}$ по неполной информации о его подграфах?

Возможные ограничения на информацию о подграфах



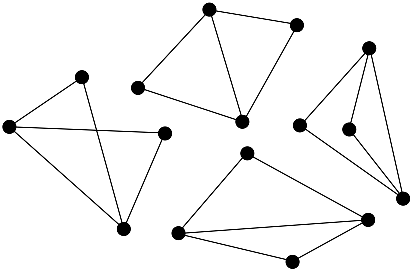
Слева — граф. Правее — два подхода к его восстановлению по подграфам. Первый — восстановление по *деке* (приведены три вершиноудалённых подграфа). Второй — восстановление по *окрестностям вершин* (приведены окрестности[2] единичного радиуса для трёх вершин).

[2]Расстояние между вершинами — длина кратчайшего пути в рёбрах.

Содержание

Определение (Изоморфные графы)

Графы G и H изоморфны ($G \cong H$), если существуют биективные отображения $f : V(G) \to V(H)$ и $g : E(G) \to E(H)$, такие что ребро e инцидентно вершине v в графе G, если и только если ребро $g(e)$ инцидентно вершине $f(v)$ в графе H. *Класс изоморфизма* графа G — множество графов, изоморфных G.



Четыре изоморфных графа на четырёх вершинах.

Постановка задачи

Определение (Дека)

Дека $D(G)$ графа G — это мультимножество классов изоморфизма всех его вершиноудалённых подграфов.

Определение (Гипоморфные графы и восстановимость)

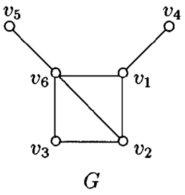
Два графа G и H гипоморфны ($H \sim G$), если у них одинаковые деки. При этом H называется *реконструкцией* G. Граф G *восстановим*, если каждая его реконструкция изоморфна ему: $H \sim G \Rightarrow H \cong G$. Параметр графа $t(G)$ *восстановим*, если $t(G) = t(H)$ при $H \sim G$.

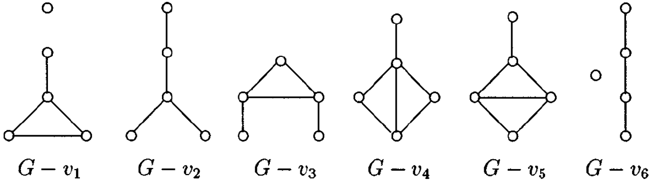
Гипотеза (О восстановлении графов)

Любые два гипоморфных графа на хотя бы трёх вершинах изоморфны.[3]

[3] Kelly и др. 1957; Ulam 1960

Пример восстановимого графа





Восстановимый граф G на шести вершинах и его дека (John Adrian Bondy 1991).

Леммы Келли и Кокея

Лемма (Kelly и др. 1957)

Пусть $s(X, G)$ *– количество подграфов* G*, изоморфных графу* X*. Тогда для любого графа* F*, такого что* $V(F) < V(G)$*, восстановим параметр* $s(F, G)$*, то есть* $s(F, G) = s(F, G')$ *при* $G' \sim G$*.*

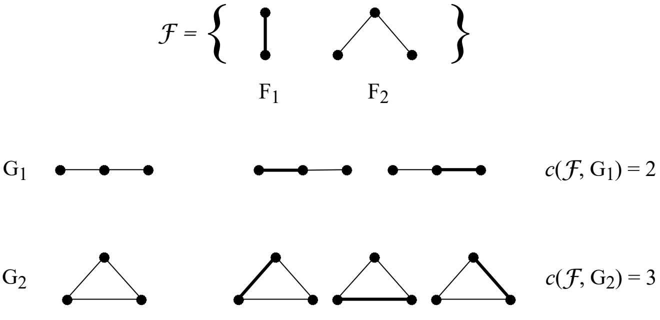
Лемма (Kocay 1981)

Для любого графа G *и любой последовательности графов* $\mathcal{F} = (F_1, \ldots, F_m)$*, где* $V(F_i) < V(G)$*,* $1 \leqslant i \leqslant m$ *восстановим параметр*

$$\sum_{X:\ V(X)=V(G)} c(\mathcal{F}, X)\, s(X, G)$$

где $c(\mathcal{F}, X)$ *– количество покрытий графа* X *графами из последовательности* $\mathcal{F}$*, то есть число последовательностей подграфов* $(X_1, \ldots, X_m)$ *графа* X*, таких что* $X_i \cong F_i, 1 \leqslant i \leqslant m$ *и* $\bigcup_i X_i = X$*.*

Пример покрытия графа



Покрытия графов G_1 и G_2 графами из множества $\mathcal{F}$. Множество $\mathcal{F}$ состоит из двух графов: полного на двух вершинах F_1 и полного двудольного графа F_2 с размерами долей 1 и 2. (John Adrian Bondy 1991).

Результаты о восстановлении графов

- Гипотеза о восстановимости была доказана в случае некоторых классов графов: *регулярные* графы[4], *полные графы*[5], *несвязные графы*[6], и *деревья*[7] (Kelly и др. 1957).
- Показана восстановимость *разделимых графов*[8] без вершин единичной степени (J Adrian Bondy 1969).
- Гипотеза о восстановимости была проверена для всех графов на *не более чем* 11 *вершинах* (McKay 1997).

---

[4] Регулярный граф — граф, степени всех вершин которого равны: каждая вершина инцидентна одному и тому же количеству рёбер.

[5] Полный граф — граф, в котором каждая пара вершин соединена ребром.

[6] Связный граф — граф, в котором существует путь между любой парой вершин. Несвязный граф — граф, не являющийся связным.

[7] Дерево — связный граф без циклов. Цикл в графе — путь, в котором первая и последняя вершины одинаковы, а остальные различны.

[8] Разделимый граф — связный граф, связность которого нарушается путём удаления некоторой одной вершины.

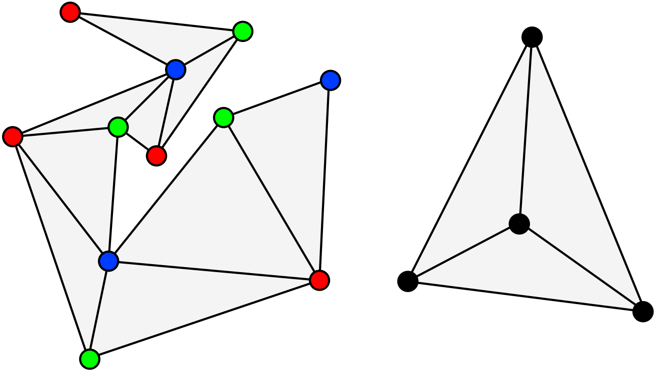
Результаты о восстановлении графов

- Максимальные внешнепланарные графы[9] восстановимы (Manvel 1972).
- Внешнепланарные графы восстановимы (Giles 1974).
- Максимальные планарные графы[10] восстановимы (Fiorini и Lauri 1981).

[9] *Планарный граф* — граф, который можно нарисовать на плоскости без пересечений рёбер (не по вершинам). *Внешнепланарный граф* — планарный граф, который допускает такое планарное расположение вершин, что все вершины оказываются принадлежащими внешней грани. *Максимальный внешнепланарный граф* — внешнепланарный граф, к которому нельзя добавить ни одного ребра без потери свойства внешнепланарности.

[10] Максимальный планарный граф — планарный граф, между вершинами которого нельзя провести ни одного ребра так, чтобы сохранялось свойство планарности.

Результаты о восстановлении графов



Слева: максимальный внешнепланарный граф. Справа: полный граф на четырёх вершинах — наименьший планарный граф, не являющийся внешнепланарным.[11]

[11] https://en.wikipedia.org/wiki/Outerplanar_graph

Результаты о восстановлении графов

- Индифферентные[12] графы восстановимы (Von Rimscha 1983).
- *Почти все* графы восстановимы (Bollobás 1990), то есть если обозначить за $\mathbb{P}_n$ вероятность того, что случайно выбранный граф на n вершинах не восстановим, то:

$$\mathbb{P}_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Также показано, что почти все графы обладают тем свойством, что из их деки можно выделить три графа, которые будут однозначно определять исходный граф — то есть *для реконструкции достаточно неполной информации о деке.*

[12] Индифферентный граф — граф, каждой вершине которого можно поставить в соответствие действительное число, так что те и только те вершины соединены ребром, соответствующие числа которых отличаются не более чем на единицу.

Содержание

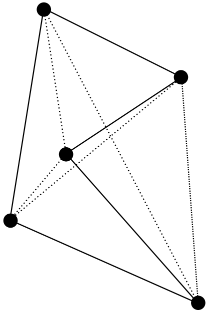
Постановка задачи

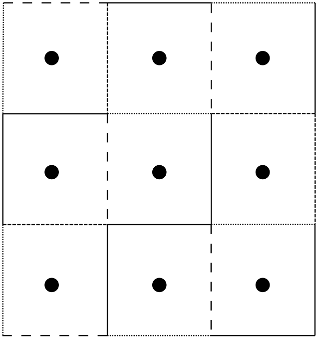
1. Граф G на N вершинах.
2. Вершинам или рёбрам поставлены в соответствие метки из конечного множества из q элементов.
3. Граф *случайный*: рёбра и/или метки.
4. Понятие окрестности вершины: $\mathcal{N}_r(v)$.

Задача

- Можно ли восстановить граф по окрестностям вершин некоторого радиуса?
- Какое минимальное число окрестностей нужно для того, чтобы граф был восстановим с заданной вероятностью?

Графовые модели Эрдёша — Реньи и пазла





Слева: граф на четырёх вершинах с некоторой вероятностью ребра $0 < p < 1$ (Rényi 1959). Сплошная линия означает ребро, пунктирная — отсутствие ребра. *Справа*: пазловый граф (Mossel и Ross 2017) с четырьмя метками рёбер. Граф в виде сетки размера 3×3. Центр пазла соответствует вершине графа. Сторона пазла — ребру между вершинами графа. Метки рёбер выбираются равновероятно. Метка вершины — кортеж из меток инцидентных рёбер.

Результаты о восстановлении графов

- Если $q \geqslant n^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, то вероятность восстановимости пазла стремится к единице (Bordenave, Feige и Mossel 2016; Nenadov, Pfister и Steger 2016).
- Если $\mathcal{N}_{r-1}(v) \neq \mathcal{N}_{r-1}(w)\ \forall v \neq w$, то существует алгоритм восстановления графа по всем r-окрестностям его вершин (Mossel и Ross 2017).
- Если $\exists r$, такой что $\mathcal{N}_{r-1}(v) \neq \mathcal{N}_{r-1}(w)\ \forall v \neq w$, то минимальное число выборов из общей совокупности r-окрестностей (с повторами), необходимое для того, чтобы вероятность восстановления графа по подвыборке окрестностей была не меньше $1 - \varepsilon$, не превосходит $\lceil N \log N - N \log \varepsilon \rceil$ (Mossel и Ross 2017).

Заключение

- Постановка задачи о восстановлении графов.
- Леммы Келли и Кокея — важные положения в теории о восстановимости графов. Связаны с возможностью восстановления величины $s(X, G)$ — количества подграфов G, изоморфных графу X.
- Возможность восстановления случайного графа по окрестностям вершин.

Осталось за кадром

- *Рёберная дека* (Harary 1965).
- *Узнаваемые свойства* графа — одинаковые для всех реконструкций графа (определяются только декой графа): число вершин, число рёбер, степенная последовательность[13], планарность графа[14], хроматический многочлен[15], многочлен Татта[16] (Kelly и др. 1957; Tutte 1979).

---

[13] Невозрастающая последовательность степеней вершин графа

[14] Может ли граф быть изображён на плоскости без пересечений рёбер вне вершин.

[15] Определяет число раскрасок графа (вершинных или рёберных) в зависимости от числа цветов.

[16] Многочлен от двух переменных, определённый для неориентированного графа, содержащий информацию о том, насколько граф связен

$$T_G(x,y) = \sum\nolimits_{A \subseteq E} (x-1)^{k(A)-k(E)} (y-1)^{k(A)+|A|-|V|}$$

где $k(A)$ — число компонент связности графа на V вершинах и A рёбрах.

Осталось за кадром

- Восстановимость *ориентированных графов* (Frank Harary и Palmer 1967; Stockmeyer 1977; Stockmeyer 1981). Ориентированный граф — такой, в котором каждое ребро определяется не просто парой, а *упорядоченной* парой вершин. Гипотеза о восстановимости в случае ориентированных графов не верна.
- *Гиперграфы, графы с повторными рёбрами*. Понятие о графе G как о тройке (V, E, φ), где V — множество вершин, E — множество *гиперрёбер*, и отображение $\varphi : E \to 2^V \setminus \varnothing$. Количество рёбер, инцидентных всем вершинам (то есть количество рёбер $e \in E$, таких что $\varphi(e) = V$) не восстановимо.