Конспект лекций по курсу

ПРИКЛАДНАЯ АЛГЕБРА

группы 320–325, 327, 328 (III поток)
осенний семестр 2017/18 уч. года

Лектор *С. И. Гуров*

ассистент *Д. А. Кропотов*

(кафедра *Математических методов прогнозирования*)

2017

Предисловие

Мне бы хотелось, ... чтобы все добрые люди, как мужского, так и женского пола, почерпнули бы отсюда урок, что во время чтения надо шевелить мозгами.

Лоренс Стерн. Жизнь и мнения
Тристрама Шенди, джентльмена

Данный конспект лекций предназначен, прежде всего, для студентов III-го («программистского») потока студентов-бакалавров факультета ВМК МГУ изучающих в 5-м семестре курс указанный курс.

Заметим, что стиль изложения в учебнике и конспекте лекций различен. Последний более свободный, «разговорный», и содержит, в основном, лишь формулировки определений и теорем (возможно, с доказательствами). В учебнике же данный материал обычно предваряется пояснениями и часто включается в более широкий контекст.

В данном пособии мы, в связи со спецификой преподавания курса, включаем в текст лекций достаточное количество примеров и задач.

Глава 3 написана совместно с Д. А. Кропотовым.

Оглавление

Глава 1

Группы, кольца, поля (напоминание)

1.1 Группы

Определение 1.1. *Группой* называется тройка $\langle\, G, \circ, e \,\rangle$, где G — непустое множество (*носитель*), $e \in G$ — единица группы, а $\circ$ — такая бинарная операция на носителе, что для любых его элементов x, y, z выполняются следующие *законы* или *аксиомы группы*:

[0) $x \circ y \in G$ — *устойчивость* (замкнутость) носителя;]

1) $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ — *ассоциативность*;
2) $e \circ x = x \circ e = x$ — *свойство единицы*;
3) $\forall\, x\, \exists!\, y : y \circ x = x \circ y = e$ — *существование обратного элемента* к x, символически $y = x^{-1}$.

В записи группы обозначение единичного элемента иногда опускают: $\langle\, G, \circ \,\rangle$.

Группы со свойством $x \circ y = y \circ x$ называются *коммутативными* или *абелевыми*. Для них используют *аддитивную запись* $x + y$ групповой операции, единичный элемент называют *нулем (0)*, а обратный к x — *противоположным $(-x)$*.

Если $|G| = n$, то G — *конечная группа* и n — её *порядок*. В конечной группе операцию $\circ$ удобно задавать *таблицей умножения* (*таблицей Кэли*).

Пример 1.1 (Таблица умножения группы Клейна V_4).

$\circ$	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

$V_4 = \{e, a, b, ab\}$
— четверная группа Клейна
ab — один элемент,
группа абелева.

Мультипликативная запись групповой операции:

$$x \cdot y \text{ или } xy, \ a^0 = e, \ a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}, \ n \in \mathbb{N},$$

и справедливы все обычные свойства степени:

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n, \ a^{m^n} = a^{mn}, \ a^{-1}a = e, \ a^{-n} = (a^{-1})^n, \ \ldots.$$

Пример 1.2.

1. *Числовые группы* — все они абелевы:

- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — группы относительно *сложения*.
- *Ненулевые* элементы множеств $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — группы относительно *умножения*.

2. *Бинарные наборы*: $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B^n$ относительно $\oplus$. Аддитивная запись:

$$\widetilde{\alpha} \oplus \widetilde{\beta} = (\alpha_1 \oplus \beta_1, \ldots, \alpha_n \oplus \beta_n)$$

Нуль группы: $\widetilde{0} = (0, \ldots, 0)$.

3. *Симметрическая группа* S_n: все перестановки n-элементного множества $X = \{1, \ldots, n\}$ относительно композиции $*$. Нуль группы — единичная перестановка 1_X. Ясно, что $|S_n| = n!$.

Перестановки можно записывать в виде:

а) таблицы —

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & n \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_i & \ldots & t_n \end{pmatrix},$$

Например (сначала выполняется 2-я перестановка, потом — 1-я):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \neq$$
$$\neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

б) разложения на циклы —

$$\pi = \left(t_1^1 t_2^1 t_3^1 \ldots t_{k_1}^1\right)\left(t_1^2 t_2^2 t_3^2 \ldots t_{k_2}^2\right) \ldots \left(t_1^m t_2^m t_3^m \ldots t_{k_m}^m\right).$$

Внутри каждой пары скобок числа переставляются циклически:

$$\pi(t_1) = t_2,\ \pi(t_2) = t_3,\ \ldots,\ \pi(t_k) = t_1$$

и перестановка π содержит m циклов.

Циклы длины 1, т. е. вида (t), обычно опускают:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow (154)(26)$$

Каноническое представление цикла $(t_1 t_2 \ldots t_k)$:
t_1 — наименьшее из чисел $\{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$.

Например, для предыдущей композиции перестановок:

$$(123) * (23) = (12) \neq (13) = (23) * (123).$$

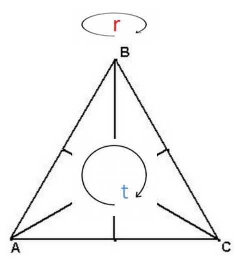
4. *Группы симметрии (самосовмещений) объекта — совокупность преобразований, совмещающих объект с самим собой.*

4.1. Группы *симметрии* правильного n-угольника — *группы диэдра* D_n

а) *У группы* D_{2k+1}, $k \in \mathbb{N}$ — *две* образующих:
(1) вращение вокруг центра на $\frac{360^\circ}{2k+1}$ в выбранном направлении — t и
(2) симметрия относительно оси, проходящей через выбранную вершину и середину противоположной стороны — r.

Например: группа симметрии правильного треугольника — перестановка его вершин

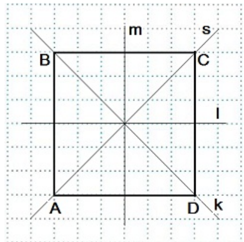
$$D_3 = \langle t, r \rangle = \{ e, (ABC), (ACB), \\ (A)(BC), (B)(AC), (C)(AB) \} = S_3.$$



t — вращение на 120° в выбранном направлении,
r — симметрия относительно выбранной оси симметрии.
Любая перестановка вершин (сторон) описывается через образующие и имеет вид $t^m r^n$.

б) *У группы* D_{2k}, $k \in \mathbb{N}$ — *три* образующих:
(1) вращение вокруг центра (в выбранном направлении) на $\frac{360^\circ}{2k}$ и две осевых симметрий — относительно фиксированных осей, проходящих через середины противоположных (2) сторон и (3) вершин.

Пример: группа симметрии квадрата

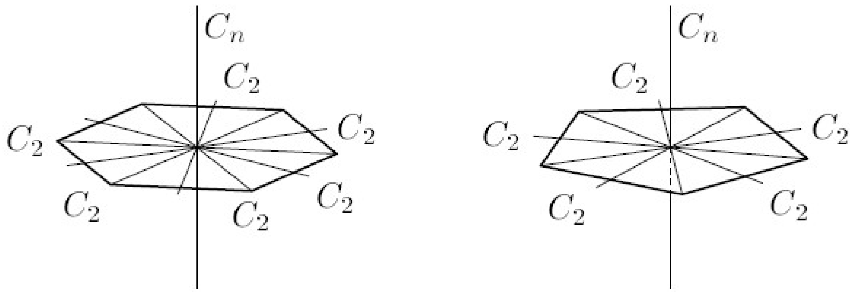


$D_4 = \langle t, r, f \rangle = \{ e, (ABCD), (AC)(BD), (ADCB), (AD)(BC), (AB)(CD), (BD), (AC) \}$.

t — вращение на 90° в выбранном направлении,
r — симметрия относительно оси m,
f — симметрия относительно оси симметрии A-C.

Любая перестановка вершин (сторон) описываться через образующие и имеет вид $t^m r^n f^k$.

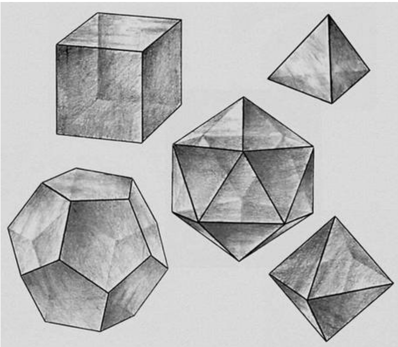
Пример: группы диэдра D_6 и D_5.



$|D_n| = 2n$: тождественная перестановка $+$ $(n-1)$ поворотов вокруг оси C_n $+$ n отражений вокруг осей C_2.

4.2. Группы *вращений* правильного многогранника — это не все симметрии многогранника, а только повороты, т. е. зеркальные отражения исключены.

Пять платоновых тел —

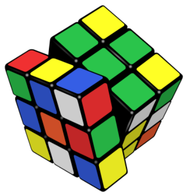


T — группа тетраэдра,

O — группа октаэдра (вращение октаэдра и куба),

Y — группа икосаэдра (вращение икосаэдра и додекаэдра).

Эти группы будут рассмотрены позже.



Ещё один пример: группа внутренних вращений *кубика Рубика.*

Порядок группы —

$$\frac{1}{2}\cdot 2^{11}\cdot 12!\cdot 3^7\cdot 8! = 43252003274489856000 \approx 4{,}3\cdot 10^{19}.$$

что является совсем небольшим числом по стандартам современной теории конечных групп ($\approx$ объём Мирового океана в кубометрах).

Подгруппы и смежные классы. Если $\langle G, \circ \rangle$ — группа, а H — подмножество G, само являющееся группой, то $\langle H, \circ \rangle$ — *подгруппа* G, символически $H \leqslant G$.

Единичная группа $E = \{e\}$ — подгруппа любой группы.

Определение левого и правого *смежных классов по подгруппе* H *(с представителем* x*)* соответственно:

$$\begin{aligned} H \leqslant G,\ x \in G \ \Rightarrow xH \ &= \{\, xh \mid h \in H \,\}, \\ Hx \ &= \{\, hx \mid h \in H \,\}. \end{aligned}$$

Утверждение 1.1. *Смежные классы (левые или правые) с разными представителями либо не пересекаются, либо совпадают.*

Если $\forall\, x \in G : xH = Hx$, то подгруппа H — *нормальная*. Нормальность — ослабленное условие коммутативности: *в абелевой группе все подгруппы нормальны.*

Определение 1.2. Множество смежных классов группы G по её нормальной подгруппе H снабжённое операцией

$$(aH) \circ (bH) \ = \ (ab)H.$$

называется *факторгруппой*, символически G/H.

Легко видеть, что результат $x \circ y$ находится $(ab)H$ не зависимо от выбора элементов x и y в классах смежности aH и bH.

Пример 1.3. $\quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ \cong \ \mathbb{Z}_2.$

Определение 1.3. Для групп $\langle\, G, * \,\rangle$ и $\langle\, G', \circ \,\rangle$ отображение $\varphi : G \to G'$ называется *изоморфизмом*, если оно

1) взаимно однозначно (биективно);
2) сохраняет групповую операцию:

$$\forall\, a, b \in G\colon\ \varphi(a * b) \ = \ \varphi(a) \circ \varphi(b),$$

а такие группы — *изоморфными*, символически $G \cong G'$.

Свойства изоморфизма φ: $\varphi(e) = e'$ (сохранение единицы), $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$ (образ обратного элемента — обратный к его образу)...

Теорема 1.1 (Кэли). *Любая конечная группа порядка n изоморфна некоторой подгруппе симметрической группы S_n.*

Если в определении изоморфизма снять требование биективности φ, то получим определение *гомоморфизма групп. Например*, всегда существует гомоморфизм произвольной группы в единичную E.

Циклические группы. В *циклических группах* имеется *порождающий элемент* (*образующий элемент, генератор*) c такой, что каждый элемент группы может быть получен многократным (с учётом $c^0 = e$) применением к нему или к c^{-1} групповой операции, т. е. C — циклическая группа, если

$$\underset{C}{\exists}\, c \,\underset{C}{\forall}\, x \,\underset{\mathbb{Z}}{\exists}\, k \,:\, c^k = x, \quad \text{символически } \langle c \rangle = C.$$

Пример циклической группы: группа $\left\langle \frac{2\pi}{n} \right\rangle$ поворотов n-угольника вокруг центра с совпадающими исходным и полученным положениями.

Для циклических групп возможны два случая.

1. *Все степени порождающего элемента различны* — группа бесконечна, состоит из элементов

$\ldots, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, \ldots$, т. е. она изоморфна группе $\langle\, \mathbb{Z},\, +,\, 0\,\rangle$ целых чисел *по сложению*. Ясно, что это единственная с точностью до изоморфизма бесконечная циклическая группа.

Сколько в ней генераторов? Два: -1 и $+1$.

2. *Две различные степени порождающего элемента совпадают*: $a^{n+m} = a^n a^m = a^n \;\Rightarrow\; a^m = e$.

   $\operatorname{ord} a \;=\; \arg\min\limits_{m\,\in\,\mathbb{N}_0} \{a^m = e\}$ — *порядок элемента* a.

   В этом случае получаем конечную группу

   $$\mathbb{Z}_n \;=\; \langle\, \{0, 1, \ldots, n-1\},\, +_{\bmod n},\, 0\,\rangle\,,$$

   которой изоморфны все конечные циклические группы с n элементами.

Все циклические группы абелевы и любая подгруппа циклической группы — циклическая.

В применении к единственной бесконечной циклической группе $\mathbb{Z}$ это даёт, что любая конечная подгруппа H группы $\mathbb{Z}$ имеет вид $H = \{\, mn \mid n \in \mathbb{Z}\,\} = m\mathbb{Z}$, где m — наименьшее положительное число из H. Поэтому *любая циклическая группа является гомоморфным образом группы* $\mathbb{Z}$.

Определение 1.4. Значение *функции Эйлера* $\varphi(n)$ — количество чисел из интервала $[\,1, \ldots, n-1\,]$, взаимно простых с n. По определению $\varphi(1) = 1$.

$\varphi(2) = 1$, при $n > 2$ значения функция Эйлера чётные

$$\varphi(3) = \varphi(4) = 2,\ \varphi(5) = 4,$$
$$\varphi(6) = \big|\{1,5\}\big| = 2,\ \varphi(7) = 6,\ \varphi(8) = 4,\ \ldots$$

Свойства (p здесь и далее — простое):

- $\varphi(p) = p - 1$;
- $\varphi(n^k) = n^{k-1}\varphi(n)$, откуда $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$,
- если m и n *взаимно просты*, то $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$.

Примеры: $\varphi(15) = \varphi(3{\cdot}5) = \varphi(3){\cdot}\varphi(5) = 2{\cdot}4 = 8$
$\varphi(16) = \varphi(2^4) = 2^3 \cdot 1 = 8.$

$\varphi(n)$	+0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9
0+		1	1	2	2	4	2	6	4	6
10+	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18
20+	8	12	10	22	8	20	12	18	12	28
30+	8	30	16	20	16	24	12	36	18	24
40+	16	40	12	42	20	24	22	46	16	42
50+	20	32	24	52	18	40	24	36	28	58
60+	16	60	30	36	32	48	20	66	32	44
70+	24	70	24	72	36	40	36	60	24	78
80+	32	54	40	82	24	64	42	56	40	88
90+	24	72	44	60	46	72	32	96	42	60

Рис. 1.1. Первые 99 значений $\varphi(\cdot)$

- $\sum\limits_{d|n} \varphi(d) = n$. *Пример:*
  $\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \varphi(6) + \varphi(12) = 12$;

У циклической группы порядка n существует ровно $\varphi(n)$ порождающих элементов (генераторов).

Теорема Лагранжа и следствия из неё

Теорема 1.2 (Лагранжа). *Порядок подгруппы конечной группы делит порядок самой группы:*

$$|G| = |H| \cdot [G : H].$$

$[G : H]$ — *индекс* подгруппы H по группе G.

Следствия. 1. *Порядок любого элемента конечной группы делит порядок группы.*

2. *Группа G простого порядка p:*
   - *не имеет нетривиальных (отличных от E и G) подгрупп;*
   - *циклическая и любой её отличный от единицы элемент — порождающий.*

1.2 Кольца и поля

Кольца: определение, основные свойства

Определение 1.5. Абелева группа $\langle R, +, 0 \rangle$ называется *кольцом*, символически $\langle R, +, \cdot, 0 \rangle$, если на ней определена бинарная операция *умножения* $\cdot$, связанная со сложением *дистрибутивными законами*

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \text{ и } (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x.$$

Обычно рассматривают *ассоциативные кольца* с ассоциативной операцией умножения:

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

Важный случай — *коммутативные кольца* с коммутативной операцией умножения:

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

Если в кольце имеется единичный элемент 1 по умножению ($x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$), то кольцо называется *кольцом с единицей* или *унитальным*, символически $\langle\, R, +, \cdot, 0, 1\,\rangle$. *Тривиальное кольцо* — $\{0\}$, в нём и только в нём $0 = 1$.

Элемент a унитального кольца называется *обратимым*, если существует элемент b такой, что

$$a \cdot b = b \cdot a = 1.$$

Кольцо R *без делителей нуля* — со свойством

$$\underset{R}{\forall}\, a, b : (a \cdot b = 0) \;\Rightarrow\; (a = 0) \vee (b = 0).$$

Важное для нас

Определение 1.6. *Целостным кольцом* (областью целостности) называют нетривиальное унитальное ассоциативно-коммутативное кольцо без делителей нуля.

Пример 1.4. 1. Классический пример кольца — кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ с обычными операциями сложения и умножения. Это кольцо целостно и имеет два обратимых элемента: $+1$ и -1.

2. $2\mathbb{Z}$ — кольцо без единицы.

3. $\mathbb{Z}_n = \{\, 0, 1, \ldots, n-1\,\}$ — *кольцо классов вычетов по модулю* n (*вычет = остаток*), результаты операций $+$ и $\cdot$ — по $\mod n$.

   Это кольцо нецелостно при составном n: например в $\mathbb{Z}_6$: $3 \cdot 2 = 0$.

Определение 1.7. Непустое подмножество S кольца $\langle\, R, +, \cdot, 0 \,\rangle$ называется его *подкольцом*, если оно устойчиво относительно вычитания (тогда и $0 \in S$) и произведения своих элементов.

Подкольцо *собственное*[1], если $S \neq R$.

При $n < m$ кольцо $\mathbb{Z}_n$ не есть подкольцо $\mathbb{Z}_m$: например, в $\mathbb{Z}_5$ — $3 \cdot 3 = 4$ и $3 + 3 = 1$, а в $\mathbb{Z}_8$ — $3 \cdot 3 = 1$ и $3 + 3 = 6$. Образно говоря, элементы 3 в этих кольцах суть *омонимы* — одинаково звучащие слова с разным смыслом.

Определение 1.8. Целостное кольцо, в котором каждый ненулевой элемент либо обратим, либо однозначно представляется в виде произведения неразложимых элементов с точностью до перестановки сомножителей и умножения на обратимый элемент, называется *факториальным* или *гауссовым*.

Примеры:

- $\mathbb{Z}$ — факториальное кольцо: для любого целого n справедливо представление
$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$
- Кольцо $\mathbb{Z}_n$ является факториальным если и только если n просто.
- Кольцо $\left\{ a \pm i\sqrt{5} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ не факториально, т. к., например, число 9 имеет два представления в виде произведения неразложимых:
$$9 = 3 \cdot 3 = \left(2 + i\sqrt{5}\right) \cdot \left(2 - i\sqrt{5}\right).$$

[1] Кстати, термин *собственный* — неудачный перевод слова *proper*, следовало бы говорить *правильный* или *настоящий*, но так уж исторически сложилось и не исправить...

Идеалы колец и фактирко́льца

<u>*Определение*</u> 1.9. Подмножество I коммутативного кольца $\langle R, +, \cdot, 0 \rangle$ называется его *(двусторонним) идеалом* [2], символически $I \lhd R$, если оно устойчиво относительно вычитания и $\underset{I}{\forall} i \underset{R}{\forall} r : i \cdot r \in I$.

Ясно, что идеал кольца R является его подкольцом и 0 принадлежит любому идеалу. Само кольцо и его нуль 0 — *тривиальные идеалы* кольца. Идеалы, не совпадающие со всем кольцом — *собственные*.

Можно определить сумму и произведение идеалов и работать с ними как с «идеальными числами» (это понятие вводится в работах Э. Куммера).

<u>*Определение*</u> 1.10. Идеал I унитального коммутативного кольца R называется *главным* и *порождённым элементом* $a \in R$, если

$$I = \{ a \cdot r \mid r \in R \} = (a).$$

Целостные кольца, в которых все идеалы главные, называются *кольцами главных идеалов* (*КГИ*).

Все КГИ факториальны.

Кольцо целых $\mathbb{Z}$ — КГИ, и все его идеалы имеют вид $(n) = n\mathbb{Z}$.

Пример правого неглавного идеала в кольце матриц порядка n: совокупность матриц, у которых все столбцы, кроме 1-го — нулевые.

[2] Для некоммутативного кольца вводят понятия *правых* и *левых идеалов*, но они нам не понадобятся.

Классом вычетов по модулю идеала I *кольца* $\langle R, +, \cdot, 0 \rangle$ с представителем $r \in R$, называют множество

$$\overline{r}_I = \{ r + i \mid i \in I \}$$

(когда идеал фиксирован, класс вычетов вычетов обозначаем $\overline{r}$). Классы вычетов разных представителей по модулю данного идеала либо совпадают, либо не пересекаются и в объединении дают R, т. е. образуют *разбиение* кольца.

Множество классов вычетов кольца R по модулю идеала I образуют *факторкольцо*, символически R/I. В факторкольце естественным образом определены операции сложения и умножения, индуцированные операциями над представителями.

Пример 1.5. $I = (4) \lhd \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/(4) = \{ 0, 1, 2, 3 \}.$

$$\overline{1} + \overline{2} = \overline{3}, \quad \overline{3} + \overline{1} = \overline{0},$$

$$\overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{0}, \quad \overline{3} \cdot \overline{2} = \overline{2} \text{ и т. д.}$$

Бинарное отношение $\lhd$ на множестве идеалов кольца является *частичным порядком*.

Определение 1.11. *Максимальным идеалом* коммутативного кольца называется всякий собственный идеал кольца, не содержащийся ни в каком другом собственном идеале.

Пример 1.6. В кольце $\mathbb{Z}$

1) идеалы (2) и (3) максимальны;
2) идеал (6) не максимален: он содержится и в (2), и в (3): любое число, делящееся на 6 делится также и на 2, и на 3.

Ясно, что в $\mathbb{Z}$ максимальные идеалы имеют вид (p), где p — простое число.

Утверждение 1.2. *В ассоциативно-коммутативном унитальном кольце существует максимальный идеал.*

Евклидовы кольца

Определение 1.12. Целостное кольцо $\langle\, R,\, +,\, \cdot,\, 0,\, 1\,\rangle$ называется *евклидовым*, если для каждого его ненулевого элемента x определена норма $N(x) \in \mathbb{N}_0$ со свойствами для любых элементов a и $b \neq 0$:

1) существуют такие его элементы q и r, что
$$a = q \cdot b + r \quad \text{и либо } r = 0, \text{ либо } N(r) < N(b);$$

2) $a \mid b \Rightarrow N(a) \leqslant N(b)$.

Наличие нормы даёт возможность производить деление элементов кольца друг на друга с остатком.

Пример 1.7.
- Кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ евклидово, норма — абсолютная величина числа.
- Кольцо многочленов $\mathbb{R}[x]$ с действительными коэффициентами евклидово. Норма — степень многочлена.

Все евклидовы кольца — КГИ.

Поле

Определение 1.13. Целостное кольцо $\langle R, +, \cdot, 0, 1 \rangle$, в котором все элементы кроме 0 обратимы, называется *полем.*

Для нас важны следующие свойства поля:

1. Ненулевые элементы поля образуют группу относительно *умножения*, её называют *мультипликативной группой* данного поля.
2. Факторкольцо R/I является полем если и только если идеал I кольца R *максимальный*.
3. Кольцо многочленов $\Bbbk[x]$ над полем $\Bbbk$
$$\Bbbk[x] = \{ a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \mid a_0, \ldots, a_n \in \Bbbk, \\ n = 0, 1, \ldots \}$$
евклидово.

Подмножество поля K, само являющееся полем и устойчивое относительно сужения на него операций из K, называется *подполем. Примеры бесконечных полей и подполей*: числовые поля $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Поле K, не обладающее никаким собственным подполем, называется *простым.* Например, поле $\mathbb{Q}$ — простое.

Утверждение 1.3. *В каждом поле содержится только одно простое подполе, которое изморфно либо* $\mathbb{Q}$, *либо* $\mathbb{Z}_p$, p — *простое.*

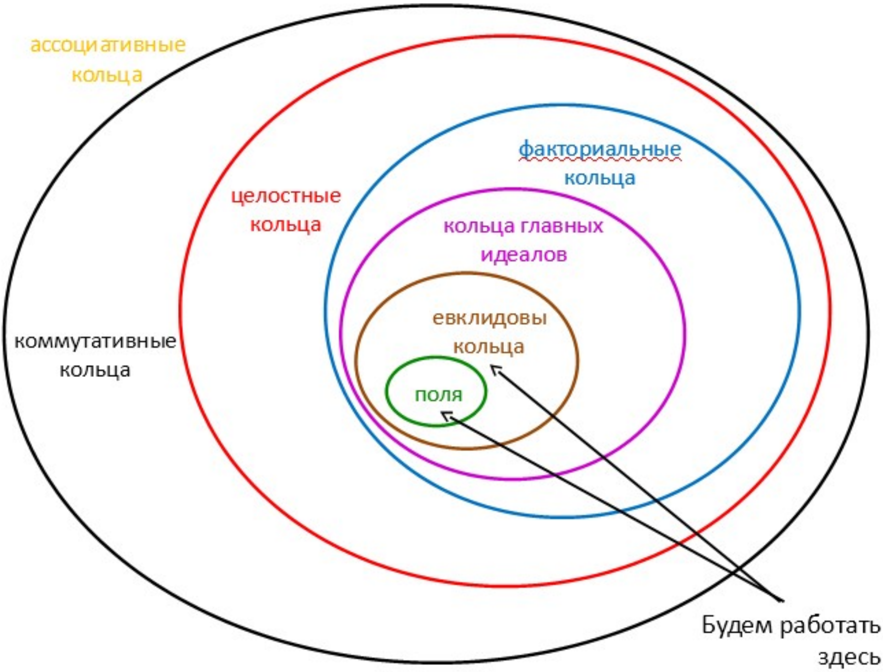


Рис. 1.2. От колец к полям

1.3 Задачи с решениями

Задача 1.1. *Выяснить, образуют ли группы следующие множества при указанной операции над элементами:*

1. Целые числа, кратные данному натуральному числу n, относительно сложения? *Да.*
2. Неотрицательные целые числа относительно сложения? *Нет* (противоположного элемента)
3. Нечетные целые числа относительно сложения? *Нет* (устойчивости)
4. Целые числа относительно вычитания? *Нет* (ассоциативности).

5. Рациональные числа относительно умножения? *Нет* (обратного у 0).
6. Рациональные числа, отличные от нуля, относительно умножения? *Да.*
7. Положительные рациональные числа относительно умножения? *Да.*
8. Положительные рациональные числа относительно деления? *Нет* (ассоциативности).
9. Корни n-й степени из единицы (как действительные, так и комплексные) относительно умножения? *Да.*
10. Матрицы порядка n с действительными элементами относительно умножения? *Нет* (обратных у всех).
11. Невырожденные матрицы порядка n с действительными элементами относительно умножения? *Да.*
12. Перестановки чисел $1, 2, \ldots, n$ относительно композиции перестановок? *Да.*
13. Преобразования множества M, т. е. взаимно однозначные отображения этого множества на себя, относительно композиции отображений? *Да.*
14. Элементы n-мерного векторного пространства $\mathbb{R}^n$ относительно сложения? *Да.*
15. Параллельные переносы трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ относительно композиции движений? *Да.*

16. Повороты трехмерного пространства $\mathbb{R}^n$ вокруг прямых, проходящих через данную точку O относительно композиции движений? *Да.*
17. Все движения трехмерного пространства $\mathbb{R}^n$ относительно композиции движений? *Да.*

Задача 1.2. *Найти степени и порядки всех элементов циклической группы 6-го порядка.*
Какие из них являются порождающими?

Решение. Любая циклическая 6-элементная группа изоморфна $\mathbb{Z}_6 = \langle \{0, 1 \ldots, 5\}, +, 0 \rangle$.

$\operatorname{ord} 0 = 1;$

$1,\ 1+1 = 2, \ldots = 6 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{ord} 1 = 6;$

$2,\ 2+2 = 4,\ 4+2 = 0 \Rightarrow \operatorname{ord} 2 = 3;$

$3,\ 3+3 = 0 \Rightarrow \operatorname{ord} 3 = 2;$

$4,\ 4+4 = 2,\ 2+4 = 0 \Rightarrow \operatorname{ord} 4 = 3;$

$5,\ 5+5 = 4,\ 4+5 = 3, \ldots, 6 \cdot 5 = 0 \Rightarrow \operatorname{ord} 5 = 6.$

Порождающие элементы — 1 и 5 с порядком 6.

Задача 1.3. *Найти все подгруппы и порождающие элементы циклической группы порядка* 24.

Решение. Любая циклическая 24-элементная группа изоморфна $Z_{24} = \langle \{0, 1, \ldots, 23\}, +, 0 \rangle$.

1. Все подгруппы циклической группы — циклические. Порождающими элементами подгрупп Z_{24} будут делители m порядка группы 24: т. е. $m = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24 \equiv 0$.
Порядок соответствующей подгруппы — $24/m$.

$m = 1\ : \{\,1,\,2,\,\ldots,\,23,\,0\,\} = \langle 1\rangle = C \cong \mathbb{Z}_{24};$

$m = 2\ : \{\,2,\,4,\,6,\,\ldots,\,22,\,0\,\} = \langle 2\rangle \cong \mathbb{Z}_{12};$

$m = 3\ : \{\,3,\,6,\,9,\,\ldots,\,21,\,0\,\} = \langle 3\rangle \cong \mathbb{Z}_{8};$

$m = 4\ : \{\,4,\,8,\,12,\,\ldots,\,20,\,0\,\} = \langle 4\rangle \cong \mathbb{Z}_{6};$

$m = 6\ : \{\,6,\,12,\,18,\,0\,\} = \langle 6\rangle \cong \mathbb{Z}_{4};$

$m = 8\ : \{\,8,\,16,\,0\,\} = \langle 8\rangle \cong \mathbb{Z}_{3};$

$m = 12\ : \{\,12,\,0\,\} = \langle 12\rangle \cong \mathbb{Z}_{2};$

$m = 24\ : \{\,0\,\} = \langle 0\rangle \cong E$ — единичная.

2. Циклическая группа Z_{24} имеет $\varphi(24) = \varphi(2^3\cdot 3) = 2^2\cdot\varphi(2)\cdot\varphi(3) = 4\cdot 1\cdot 2 = 8$ генераторов m, взаимно простых с 24, т. е. $m = 1,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23$.

Задача 1.4. *Показать, что*

$$\varphi(n) = n\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right),$$

если $n = p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ *— примарное разложение* n.

Решение.

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= \varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(p_k^{\alpha_k}\right) = p_1^{\alpha_1-1}\varphi(p_1)\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k-1}\varphi(p_k) = \\ &= p_1^{\alpha_1-1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k-1}\varphi(p_1)\cdot\ldots\cdot\varphi(p_k) = \\ &= \frac{n}{p_1\cdot\ldots\cdot p_k}(p_1-1)\cdot\ldots\cdot(p_k-1) = \\ &= n\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right).\end{aligned}$$

Задача 1.5. *Выяснить, какие из следующих множеств являются кольцами, а какие полями относительно естественных операций на них.*

1. Рациональные числа $\mathbb{Q}$? Поле.
2. Квадратные матрицы порядка n с *действительными* элементами относительно сложения и умножения матриц?
   Кольцо (обратной матрицы может не быть).
3. Многочлены от одного неизвестного x с целыми коэффициентами относительно обычных операций сложения и умножения?
   Кольцо (многочлены $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ в случае $a_0 = 0$ необратимы).
4. Многочлены от одного неизвестного x с действительными коэффициентами относительно обычных операций?
   Кольцо (многочлены $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ в случае $a_0 = 0$ необратимы).

Задача 1.6.

Определение 1.14. Пусть $\langle R, +, \cdot \rangle$ и $\langle R', \oplus, \otimes \rangle$ — кольца. Отображение $\varphi : R \to R'$ называется *гомоморфизмом*, если

$$\varphi(r_1 + r_2) = \varphi(r_1) \oplus \varphi(r_2), \quad \varphi(r_1 \cdot r_2) = \varphi(r_1) \otimes \varphi(r_2).$$

Взаимно-однозначный гомоморфизм колец называется их *изоморфизмом*, символически $R \cong R'$.

Является ли отображение $f : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$, $f(x) = 2x$ *гомоморфизмом колец?*

Решение. Нет!
Хотя $f(x+y) = 2(x+y) = 2x+2y = f(x)+f(y)$, но $f(xy) = 2xy \neq (2x)\cdot(2y) = f(x)\cdot f(y)$.

Задача 1.7. *Является ли поле* $\mathbb{Z}_2$ *подполем поля* $\mathbb{Z}_5$*?*

Решение. Нет!
В $\mathbb{Z}_2 : 1+1=0$, а в $\mathbb{Z}_5$: $1+1=2$,
т. е. операция сложения в $\mathbb{Z}_5$ неустойчива при переходе к своему подмножеству $\{0,1\}$.

Глава 2

Конечные поля

2.1 Поля вычетов

- $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел.
- p — простое число.
- $(p) = p\mathbb{Z} = \left\{ 0, \pm p, \pm 2p, \ldots \right\}$ — *идеал*, порождённый числом p.
- $\mathbb{Z}/(p) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \left\{ \overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{p-1} \right\}$ — *кольцо вычетов по модулю этого идеала* = классы остатков от деления на p:

$$\left.\begin{array}{ll} \overline{0} & = 0 + (p)\,, \\ \overline{1} & = 1 + (p)\,, \\ \ldots & \ldots\ldots \\ \overline{p-1} & = p - 1 + (p) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{Z} = \overline{0} \cup \overline{1} \cup \ldots \cup \overline{p-1}.$$

Черту над символами классов вычетов часто не ставят.

Поскольку p — простое, то $\mathbb{Z}/(p)$ — не просто p-элементное факторкольцо, а *поле*, точнее *простое поле Галуа*, обозначение — $\mathbb{F}_p$ или $GF(p)$[1]. В нём результаты всех операций берутся по $\mod p$ и каждый ненулевой элемент обратим.

[1] первым обозначением обычно пользуются математики, а вторым — специалисты computer science

Примеры: таблицы сложения и умножения в поле $\mathbb{F}_3$ и фактор-кольце $\mathbb{Z}/(4)$ —

$\mathbb{F}_3$:

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\times$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

$\mathbb{Z}/(4)$:

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\times$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

В факторкольце $\mathbb{Z}/(4) \cong \mathbb{Z}_2$: $2 \times 2 = 0$!
Однако поле из 4-х элементов существует...

Характеристика поля. Пусть $\Bbbk$ — произвольное поле, 1 — его единица.
Складываем единицы: $1 = 1\,, \quad 1 + 1 = 2\,, \quad \ldots.$

В конечном поле всегда найдётся первое k такое, что

$$\underbrace{1 + \ldots + 1}_{k \text{ раз}} = 0.$$

Тогда k — *порядок аддитивной группы поля* $\Bbbk$ =
= *характеристика поля* $\Bbbk$, символически $\operatorname{char}\Bbbk$.

Ясно, что $\operatorname{char}\Bbbk$ — простое число: иначе, если $\operatorname{char}\Bbbk = p \cdot q$, то получим $(p \cdot 1) \cdot (q \cdot 1) = 0$, т. е. наличие делителей нуля.

Если все суммы вида $1 + \ldots + 1$ различны, то полагают $\operatorname{char}\Bbbk = 0$ (а не ∞). Числовые поля $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — нулевой характеристики.

$\{0, 1, \ldots, \operatorname{char} \Bbbk - 1\} \cong \mathbb{Z}_{\operatorname{char} \Bbbk}$ — минимальное *подполе* любого поля $\Bbbk$ положительной характеристики.

Пример 2.1 (бесконечное поле с положительной характеристикой). Пусть $\Bbbk$ — некоторое поле. Построим:

1. $\Bbbk[x]$ — *кольцо многочленов* (от *формальной* переменной x) над полем $\Bbbk$:
$$\left\{\, P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \mid a_0, \ldots, a_n \in \Bbbk \,\right\};$$
$$\Bbbk[x] \leftrightarrow \left\{\, (a_0, \ldots, a_n) \in \Bbbk^n \mid n \in \mathbb{N}_0 \,\right\}.$$

2. $\Bbbk(x)$ — *поле рациональных функций над* $\Bbbk$. Его элементами являются “дроби” P/Q (если $Q \neq 0$), где $P, Q, U, V \in \Bbbk[x]$ с отношением эквивалентности и операциями сложения, умножения и деления аналогичными для рациональных чисел в форме простых дробей.
При этом каждый многочлен $P \in \Bbbk[x]$ отождествляется с $P/1 \in \Bbbk(x)$, т. е. $\Bbbk[x] \subset \Bbbk(x)$.

Если в качестве $\Bbbk$ взять $\mathbb{F}_p$, то $\mathbb{F}_p(x)$ — *бесконечное поле положительной характеристики* p.

В конечном поле возможно сильное упрощение вычисления степеней сумм:

Лемма 2.1 (тождество Фробениуса). *В поле характеристики* $p > 0$ *выполнено тождество*
$$(a + b)^p \;=\; a^p + b^p.$$

Доказательство. В любом коммутативном кольце верна формула для степени бинома

$$(a+b)^p = a^p + \underbrace{C_p^1 a^{p-1} b + \ldots + C_p^{p-1} a b^{p-1}}_{=0} + b^p,$$

а при $i = 1, \ldots, p-1$

$$C_p^i = \frac{p!}{i!(p-i)!} = p \cdot \frac{(p-1)!}{i!(p-i)!} \equiv_p 0. \qquad \square$$

Следствие. *В поле характеристики $p > 0$ справедливо*

$$(a+b)^{p^n} = a^{p^n} + b^{p^n}.$$

Мультипликативная группа и примитивный элемент конечного поля.

Обозначим $\mathbb{F}_q^* = \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$ мультипликативную группу поля Галуа $GF(q)$, содержащего q элементов.

Утверждение 2.1. *$\mathbb{F}_q^*$ — циклическая по умножению группа порядка $|q-1|$.*

Мультипликативная циклическая группа $\mathbb{F}_p^*$ простого поля Галуа $\mathbb{F}_p$ содержит $p-1$ элементов, из них $\varphi(p-1)$ генераторов (любой элемент является одной из степеней $\{1, \ldots, p-1\}$ генератора).

Генераторы мультипликативной группы называют *примитивными элементами* поля.

Пример. Рассмотрим поле $\mathbb{F}_{11}$. Его мультипликативная группа есть $\mathbb{F}_{11}^* \cong \langle \{1, 2 \ldots, 10\}, \cdot 1 \rangle$ и она имеет $\varphi(10) = \varphi(2 \cdot 5) = \varphi(2) \cdot \varphi(5) = 1 \cdot 4 = 4$ генераторов.

Поскольку элемент 1 не примитивен, проверяем элемент 2:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^k	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1

— т. е. элемент 2 — примитивный в $\mathbb{F}_{11}^*$, т. к. $\operatorname{ord} 2 = 10$.

Проверяем элемент 3:

k	1	2	3	4	5
3^k	3	9	5	4	1

— т. е. $\operatorname{ord} 3 = 5$ и 3 — не примитивный, и т.д.

Как ускорить процесс?

Если примарное разложение числа $p-1$

— *известно* $\Rightarrow$ элемент $\alpha \in \mathbb{F}_p^*$ примитивен iff
$\alpha^{\frac{p-1}{q}} \not\equiv_p 1$ для каждого простого $q \mid (p-1)$.

Пример: 1) $p = 11$ (наш случай), $p-1 = 10 = 2 \cdot 5$, проверяем степени q из множества $\left\{ \frac{10}{2} = 5, \frac{10}{5} = 2 \right\}$:
$2^2 = 4 \neq 1,\ 2^5 = 32 \equiv_{11} 10 \neq 1 \Rightarrow 2$ — *примитивный*,
$3^2 = 9 \neq 1,\ 3^5 = 243 \equiv_{11} 1 \Rightarrow 3$ — не примитивный.

2) $p = 37$, $p-1 = 36 = 2^2 \cdot 3^2$. Находим: $\frac{36}{2} = 18$, $\frac{36}{3} = 12$; поэтому для выяснения, является ли α генератором, нужно проверить не более двух равенств: $\alpha^{12} = 1$ и $\alpha^{18} = 1$.

— *неизвестно* $\Rightarrow$ эффективного алгоритма не найдено; используют таблицы, вероятностные алгоритмы...

Если найден один примитивный элемент α поля $\mathbb{F}_p$, то любой другой его примитивный элемент может быть получен как степень α^k, где k — взаимно просто с $p-1$.

Пример (наш): $p = 11$ и 2 — примитивный элемент $\mathbb{F}_{11}$; $k \in \{1, 3, 7, 9\}$ — взаимно простые с 10, получим

$$2^1 = 2, \qquad 2^3 = 8,$$
$$2^7 = 128 \equiv_{11} 7, \qquad 2^9 = 512 \equiv_{11} 6,$$

т. е. 6, 7 и 8 — также примитивные элементы $\mathbb{F}_{11}$.

Деление в кольце многочленов. Поскольку кольцо многочленов $\Bbbk[x]$ над полем $\Bbbk$ евклидово, значит многочлены можно делить друг на друга с остатком.

Пример 2.2. В кольце $\mathbb{Z}_2[x]$ разделим «уголком» многочлен $f(x) = x^7 + x^4 + x^2 + 1$ на $g(x) = x^3 + x + 1$ с остатком:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,x^7+\quad x^4+x^2+1 & x^3+x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^7+x^5+x^4\qquad\quad} & x^4+x^2+1 \\
-\,x^5+\quad x^2+1 & \\
\underline{x^5+x^3+x^2\quad} & \\
-\,x^3+\quad 1 & \\
\underline{x^3+x+1} & \\
x\quad &
\end{array}
$$

Итак, $f(x) = g(x)(x^4 + x^2 + 1) + x$.

Самостоятельно: покажите, что частное от деления многочлена $2x^5 + x^4 + 4x + 3$ на многочлен $3x^2 + 1$ в кольце $\mathbb{F}_5[x]$ есть $4x^3+2x^2+2x+1$, а остаток — $2x+2$.

Неприводимые многочлены. Кольцо многочленов $\Bbbk[x]$ над полем $\Bbbk$ евклидово, следовательно оно факториально, и каждый многочлен однозначно с точностью до перестановок разлагается в произведение неразложимых (неприводимых).

Неразложимые элементы колец $\Bbbk[x]$ называют *неприводимыми многочленами*; например, все линейные многочлены (1-й степени) неразложимы.

Свойство «неприводимости» зависит от поля: многочлен x^2+1 неприводим в над $\mathbb{R}[x]$, но приводим над $\mathbb{F}_2[x]$: $\quad x^2 + 1 = (x+1)\cdot(x+1)$.

Вопрос: как находить неприводимые многочлены в кольце многочленов над данным полем?

Многочлены с коэффициентами из:

$\mathbb{Q}$ — существуют неприводимые многочлены произвольной степени;

$\mathbb{R}$ — неприводимы линейные многочлены и квадратные с отрицательным дискриминантом;

$\mathbb{C}$ — неприводимы только линейные многочлены.

Далее нас будут интересовать неприводимые многочлены в кольцах над простыми полями Галуа.

Ясно, что количество *нормированных многочленов* степени n над полем $\mathbb{F}_p$, т. е. вида

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \;\; a_i \in \mathbb{F}_p, \; i = \overline{0, n-1},$$

равно p^n.

Неприводимые многочлены кольца $\mathbb{F}_2[x]$ степеней $2, \ldots, 5$.

Вторая степень: $x^2 + ax + b$.
Ясно, что $b = 1$, иначе $x^2 + ax = x(x + a) \;\Rightarrow\;$ ищем неприводимый многочлен в виде $x^2 + ax + 1$.
Если $a = 0$, то $x^2 + 1 = (x + 1)^2$;
$a = 1$, то получаем *единственный* неприводимый многочлен степени 2 над $\mathbb{F}_2$: $\qquad x^2 + x + 1$.

Третья степень: $x^3 + ax^2 + bx + 1$.

Исключая, как сделано ранее, делимость на $x + 1$, получаем условие $a + b = 1$, т. е.

$$\text{либо } a = 0,\ b = 1, \quad \text{либо } a = 1,\ b = 0.$$

Следовательно над $\mathbb{F}_2$ существует два неприводимых многочлена степени 3:

$$x^3 + x^2 + 1 \quad \text{и} \quad x^3 + x + 1\,.$$

Четвёртая степень: $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$.
Исключение делимости на $x + 1$ приводит к условию $a + b + c = 1$, т. е. имеется 4 варианта, которые дают:

a	b	c	многочлен
0	0	1	$x^4 + x + 1$
0	1	0	$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)^2$ — *приводимый*
1	0	0	$x^4 + x^3 + 1$
1	1	1	$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

Пятая степень: $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 1$.
Исключение делимости на $x + 1$ приводит к условию: число ненулевых коэффициентов a, b, c, d должно быть нечётно, т. е. либо 1, либо 3, что даёт 8 многочленов. Далее необходимо исключить делимость на многчлены 2-й и 3-й степени, но неприводимых многочленов 2-й степени один, а 3-й — два, и их произведение даёт два многочлена.

Итого: существует 6 неприводимых многочленов 5-й степени, вот они —

$$\begin{array}{ll} x^5 + x^2 + 1, & x^5 + x^3 + 1, \\ x^5 + x^3 + x^2 + x + 1, & x^5 + x^4 + x^2 + x + 1, \\ x^5 + x^4 + x^3 + x + 1, & x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1. \end{array}$$

Неприводимые многочлены кольца $\mathbb{F}_3[x]$.

Все линейные многочлены:

$$\begin{array}{ccc} x & x+1 & x+2 \\ 2x & 2x+1 & 2x+2 \end{array}$$

Неприводимые многочлены *степени* 2 в $\mathbb{F}_3[x]$ (они не имеют корней 0, 1, 2):

$$\begin{array}{ll} x^2+1 & 2x^2+2 \\ x^2+x+2 & 2x^2+x+1 \\ x^2+2x+2 & 2x^2+2x+1 \end{array}$$

Теорема 2.1 (о существовании неприводимых многочленов). *Для любых простого p и натурального n в $\mathbb{F}_p[x]$ существует неприводимый многочлен степени n.*

— докажем позже.

Итак, в кольцах $\mathbb{F}_p[x]$ есть неприводимые многочлены любой степени, но как их найти?
Ответ: *нет эффективных алгоритмов*; имеются таблицы, алгоритм из 5-й главы «Алгебры» Ван дер Вардена, алгоритм Берлекэмпа...

Расширения простых полей. *Зачем нужны неприводимые многочлены?* С их помощью можно строить *новые конечные поля* — *расширения* простых полей аналогично построению самого простого поля $\mathbb{F}_p$:

1. Выбираем простое p — фиксируем поле $\mathbb{F}_p$.
2. Рассматриваем кольцо $\mathbb{F}_p[x]$ многочленов над $\mathbb{F}_p$.

3. Выбираем натуральное n и *неприводимый многочлен* над $\mathbb{F}_p$ —
$$a(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{F}_p[x],\ a_n \neq 0.$$
4. Идеал $(a(x))$ порождает фактор-кольцо $\mathbb{F}_p[x]/(a(x))$, элементы которого суть совокупности $\overline{r(x)}$ многочленов, дающих при делении на $a(x)$ остаток $r(x)$.

Иногда говорят, что элементы $f, g \in \overline{r(x)}$ *сравнимы по двойному двойному модулю* — p и $a(x)$:
$$a(x), f(x), g(x) \in \mathbb{F}_p[x], \quad f(x) \equiv_{a(x)} g(x).$$

Утверждение 2.2. *Множество $\left\{\overline{r(x)}\right\}$ является полем Галуа $GF\left(p^n\right)$.*

Доказательство. Кольцо многочленов $\mathbb{F}_p[x]$ евклидово, идеал $(a(x))$ — максимальный $\Rightarrow \left\{\overline{r(x)}\right\}$ — поле.

Его мощность $=$ число многочленов над $\mathbb{F}_p$ степени не выше $n-1 = |\{a_0, \ldots, a_{n-1}\}| = p^n$. □

Поле $\left\{\overline{r(x)}\right\} = GF\left(p^n\right) = \mathbb{F}_p^n$ называется *расширением n-й степени* простого поля $\mathbb{F}_p$.

Почему в обозначении $\mathbb{F}_p^n$ не используется многочлен $a(x)$, с помощью которого построено поле?

Теорема 2.2. *Любое конечное поле изоморфно какому-нибудь полю Галуа $\mathbb{F}_p^n$, p — простое, n — натуральное.*

Пример 2.3 (построение поля $\mathbb{F}_3^2$). Выберем в $\mathbb{F}_3[x]$ неприводимый многочлен: пусть это будет x^2+1. Тогда искомое поле 9-элементное поле есть

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_3^2 &\cong \mathbb{F}_3[x]/\bigl(x^2+1\bigr) = \\ &= \bigl\{\,\overline{0},\,\overline{1},\,\overline{2},\,\overline{x},\,\overline{x+1},\,\overline{x+2},\,\overline{2x},\,\overline{2x+1},\,\overline{2x+2}\,\bigr\}.\end{aligned}$$

Можно составить таблицы сложения и умножения в этом поле с учётом $x^2 = -1 \equiv_3 2$.
Например:

$$\overline{x+1}+\overline{x+2} = \overline{2x}, \qquad \overline{x}\cdot\overline{2x} = \overline{1},$$
$$\overline{2x+1}+\overline{x} = \overline{1}, \qquad \overline{2x+1}\cdot\overline{x} = \overline{x+1}, \quad \text{и т.д.}$$

Черту над элементами поля $\mathbb{F}_p[x]/(a(x))$ обычно не ставят и называют их «многочленами». Но надо помнить, что это *совокупности* многочленов, дающих при делении на $a(x)$ один и тот же остаток.

Заметим, что в построенном поле $\mathbb{F}_3^2$:

$$\begin{aligned}(x+1)^1 &= x+1, & (x+1)^5 &= 2x+2,\\ (x+1)^2 &= 2x, & (x+1)^6 &= x,\\ (x+1)^3 &= 2x+1, & (x+1)^7 &= x+2,\\ (x+1)^4 &= 2, & (x+1)^8 &= 1.\end{aligned}$$

Это значит, что $x+1$ — примитивный элемент $\mathbb{F}_3^2$ (а x — нет, поскольку $x^4 = 4 \equiv_3 1$).

А что будет, если при построении поля вместо x^2+1 взять другой неприводимый в $\mathbb{F}_3[x]$ многочлен? Например, $2x^2+x+1$? Получится поле, *изоморфное построенному*.

Пример 2.4. Определить, является ли:

1. Многочлен $a(x) = x^3 + 2x + 4 \in \mathbb{F}_5[x]$ — неприводимым?
2. Элемент $4x^2 + 2$ — корнем $a(x)$ в факторкольце/поле $\mathbb{F}_5[x]/\bigl(x^3 + 2x + 4\bigr)$?

Решение. 1. Перебором элементов из $GF(5)$ —

$$a(0) = 4,\ a(1) = 2,\ a(2) = 1,\ a(3) = 2,\ a(4) = 1,$$

убеждаемся квадратный многочлен $a(x)$ неприводим.

Следовательно, фактор-кольцо $\mathbb{F}_5[x]/\bigl(x^3 + 2x + 4\bigr)$ *является полем* и в нём $x^3 = -2x - 4 = 3x + 1$.

2. $a(4x^2 + 1) = \bigl(2(2x^2 + 1)\bigr)^3 + 2 \cdot 2(2x^2 + 1) + 4 = 3(3x^6 + 2x^4 + x^2 + 1) + 3x^2 + 3 = 4x^6 + x^4 + x^2 + 1 = 4(3x + 1)^2 + 3x^2 + x + x^2 + 1 = x^2 + 4x + 4 + 3x^2 + x + x^2 + 1 = 0$ — да, является.

Аналогично простому полю Галуа, если α — примитивный элемент поля $F = \mathbb{F}_p^n$ и m взаимно просто с $p^n - 1$, то α^m — другой его примитивный элемент, и так могут быть получены *все* примитивные элементы F (их всего $\varphi(p^n - 1)$).

Например, в рассмотренном 9-элементном поле $\mathbb{F}_3^2$ имеется $\varphi(8) = 4$ примитивных элемента, образованных степенями 1, 3, 5, 7 (взаимно просты с 8) уже найденного генератора:

$$x + 1, \qquad (x+1)^3 = 2x + 1,$$
$$(x+1)^5 = 2x + 2, \qquad (x+1)^7 = x + 2.$$

Вопрос от студента: я что-то не понимаю: неприводимые многочлены — это примитивные элементы? Ведь было: для поиска и тех, и других нет эффективных алгоритмов...
Ответ: это — разные вещи.

- *Неприводимые многочлены* ищут в *кольце многочленов* $\mathbb{F}_p[x]$ над простым полем $\mathbb{F}_p$ — например, чтобы построить расширение последнего.
- *Примитивные элементы* ищут в *мультипликативной группе* поля — например, чтобы иметь удобное представление ненулевых элементов поля через степени примитивного элемента.

Замечание. В *поле* понятие «неприводимый многочлен» не имеет смысла: там любой многочлен делится на любой ненулевой.

Примитивные многочлены. Заметим, что, например, в поле $F = \mathbb{F}_5[x]/\big(x^2+x+1\big)$ корень x многочлена $\big(x^2+x+1\big)$ *не есть* примитивный элемент F.

Действительно, в этом поле имеем

$$x^2 = -x-1 = 4x+4,$$
$$x^3 = 4x^2+4x = 16x+16+4x = 1.$$

Вопрос: когда же корень x неприводимого многочлена $a(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ будет примитивным элементом поля $\mathbb{F}_p[x]/(a(x))$?

Ответ: это будет если и только если многочлен $a(x)$ *примитивен* для x, т.е. $m = p^n - 1$ — наименьший показатель, при котором $a(x) \mid x^m - 1$.

Пример 2.5. 1. Неприводимый над $\mathbb{F}_2$ многочлен x^3+x+1 *примитивен*:

$$x^{2^3-1}-1 \,=\, x^7+1 \,=\, (x^3+x+1)\cdot(x^4+x^2+x+1)$$

и $x^t-1 \not\vdots\, x^3+x+1$ ни при каком $1\leqslant t<7=m$.

Или, что то же, $\operatorname{ord} x \,=\, 7$ и

$$\mathbb{F}_2^*[x]/\big(x^3+x+1\big) \,=\, \big\{\, x^0=1,\, x^1,\, x^2,\, x^3=x+1,\\ x^4=x^2+x,\, x^5=x^2+x+1,\, x^6=x^2+1 \,\big\}$$

— все *многочлены* степени не выше 2.

2. Неприводимый над $\mathbb{F}_2$ многочлен $x^4+x^3+x^2+x+1$ *не примитивен*: он делит не только бином $x^{2^4-1}-1 \,=\, x^{15}-1$, но и бином x^5-1:

$$x^5-1 \,=\, x^5+1 \,=\, (x^4+x^3+x^2+x+1)\cdot(x+1),$$

или, что тоже, $\operatorname{ord} x \,=\, 5 \,\neq\, 15$:

$$x^5 \,=\, \underbrace{(x^4+x^3+x^2+x+1)\cdot(x+1)}_{=0}+1 \,=\, 1.$$

2.2 Вычисления в конечных полях по алгоритмам Евклида

Алгоритм Евклида — применяют для нахождения НОД(a,b) *натуральных* чисел a и b (считая, что $a\geqslant b$).

Поскольку общий делитель пары чисел (a,b) остаётся им и для пары $(a-kb,b)$, $a-kb\geqslant 0$, то вместо $a-kb$ можно взять *остаток* от деления нацело a на

b, и затем, переставив числа в паре, можно повторить процедуру; она закончится, т. к. числа в паре уменьшаются, но остаются неотрицательными. В результате за конечное число шагов образуется пара $(r_n, 0)$ и ясно, что $\text{НОД}(a, b) = r_n$ (НОД — англ. gcd).

Алгоритм Евклида: общая схема, $a \geqslant b$, $a, b \in \mathbb{N}$

Шаг (-2): $r_{-2} = a$ — полагаем для удобства;

Шаг (-1): $r_{-1} = b$ — полагаем для удобства;

Шаг 0: $r_{-2} = r_{-1}q_0 + r_0$ — делим r_{-2} на r_{-1}, остаток r_0;

Шаг 1: $r_{-1} = r_0 q_1 + r_1$ — делим r_{-1} на r_0, остаток r_1;

... *всегда делим с остатком большее число на меньшее, на следующем шаге меньшее число становится большим, а остаток — меньшим*;

Шаг n: $r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$ — делим r_{n-2} на r_{n-1}, остаток r_n;

Шаг $n+1$: $r_{n-1} = r_n q_{n+1}$ — *деление нацело* $\Rightarrow$ *ОСТАНОВ*, $\text{НОД}\,(a, b) = r_n$.

Всегда $r_{-2} \geqslant r_{-1} > r_0 > r_1 > \ldots > r_n \geqslant 1$.

Данный алгоритм дважды описан в *Началах* Евклида, но не был им открыт (упоминается в *Топике* Аристотеля).

Пример 2.6. По алгоритму Евклида найдём $\text{НОД}\,(252, 105)$.

Шаг (-2): $r_{-2} = 252;$

Шаг (-1): $r_{-1} = 105 \qquad \Rightarrow (252, 105);$

Шаг 0: $252 = 105 \cdot 2 + 42 \qquad \Rightarrow (105, 42);$

Шаг 1: $105 = 42 \cdot 2 + 21 \qquad \Rightarrow (42, 21);$

Шаг 2: $42 = 21 \cdot 2 + 0 \qquad \Rightarrow (\mathbf{21}, 0).$

Ясно, что

$$\text{НОД}\,(a, b, c) = \text{НОД}\,(a, (\text{НОД}\,(b, c))$$

Утверждение 2.3 (соотношение Безу[2]). *Для любых натуральных* a, b *и* $d = \text{НОД}\,(a, b)$ *найдутся* целые *коэффициенты Безу* x, y *такие, что* $d = ax + by$.

Доказательство. Рассматриваем алгоритм Евклида с конца к началу: $d = r_n = r_{n-2} - r_{n-1}q_n$, затем, подставляя сюда значение $r_{n-1} = r_{n-3} - r_{n-2}q_{n-1}$, получаем

$$d = -q_n r_{n-3} + (1 + q_n q_{n-1})r_{n-2} = \alpha r_{n-3} + \beta r_{n-2}$$

для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ и т.д. $\square$

Замечание. Коэффициенты Безу определяются неоднозначно, например

$$\text{НОД}\,(12, 30) = 6 = 3 \cdot 12 + (-1) \cdot 30 = (-2) \cdot 12 + 1 \cdot 30.$$

[2] открыто Клодом Гаспаром Баше за 106 лет до рождения Э. Безу

Расширенный алгоритм Евклида — находит по двум *натуральным числам* a *и* b их *натуральный* НОД d и два *целых* x, y коэффициента Безу таких, что $|x| < |b/d|$, $|y| < |a/d|$.

Расширенный алгоритм Евклида повторяет схему простого алгоритма Евклида, при этом на каждом шаге:

1) дополнительно вычисляются x_i и y_i по формулам

$$x_i = x_{i-2} - q_i x_{i-1},\ y_i = y_{i-2} - q_i y_{i-1},\ i = 0, 1, \ldots;$$
$$x_{-2} = y_{-1} = 1\,,\ x_{-1} = y_{-2} = 0\,;$$

2) справедливо соотношение

$$\begin{aligned} r_i &= r_{i-2} - q_i r_{i-1} = \\ &= (a x_{i-2} + b y_{i-2}) - q_i (a x_{i-1} + b y_{i-1}) = \\ &= a(x_{i-2} - q_i x_{i-1}) + b(y_{i-2} - q_i y_{i-1}) = a x_i + b y_i. \end{aligned}$$

Пример 2.7. Расширенным алгоритмом Евклида найдём натуральное d и целые x и y такие, что

$$d = \text{НОД}\,(252, 105) = 252x + 105y.$$

Имеем $x_i = x_{i-2} - q_i x_{i-1}$, $y_i = y_{i-2} - q_i y_{i-1}$. Сведём все вычисления в таблицу:

шаг i	r_{i-2}	r_{i-1}	q_i	r_i	x_i	y_i
-2				252	1	0
-1				105	0	1
0	252	105	2	42	1	-2
1	105	42	2	21	-2	5
2	42	21	2	0		

Ответ: $d = 21$, $x = -2$, $y = 5$, т. е.
$$21 = 252 \cdot (-2) + 105 \cdot 5.$$

Пример 2.8. В поле $\mathbb{Z}/(101)$ решить уравнение
$$4x = 1. \tag{$*$}$$

Решение.

1. Перебор: $4x = 1 + k \cdot 101 = 102, 203, \mathbf{304} \,\vdots\, 4$; $x = 304/4 = 76$.
2. Поскольку $101y \equiv_{101} 0$, вместо $(*)$ можно расширенным алгоритмом Евклида решать уравнение
$$4x + 101y = 1\,.$$
В результате работы алгоритма получим:
$$4 \cdot 76 + 101 \cdot (-3) = 1.$$

Аналогично решаются уравнения
$$ax = c \quad \text{и} \quad ax + by = c$$
(a, b и c надо поделить на их общий НОД).

Алгоритм Евклида и его расширенная версия остаются справедливыми в любом *евклидовом кольце*, следовательно, и в любом *поле Галуа*.

Поэтому в поле $\mathbb{F}_p[x]/(a(x))$ обратный к элементу $b(x)$ элемент $y(x)$, определяемый соотношением
$$\underbrace{a(x) \cdot \chi(x)}_{=0} + b(x) \cdot y(x) = 1$$
может быть найден расширенным алгоритмом Евклида, применённым к паре многочленов $(a(x), b(x))$.

Решение данных соотношений существует *всегда*: т. к. $a(x)$ — неприводимый многочлен и $\deg b(x) < \deg a(x)$, то $\text{НОД}\,(a(x), b(x)) = 1$.

Пример 2.9. Найдём $(x^2+x+3)^{-1}$ в поле
$$\mathbb{F}_7[x]/\big(x^4+x^3+x^2+3\big).$$

Для этого расширенным алгоритмом Евклида решим соотношение
$$(x^4+x^3+x^2+3)\cdot\chi(x) + (x^2+x+3)\cdot y(x) = 1. \quad (*)$$

Шаг 0: // *Задание начальных значений*
$$r_{-2}(x)=x^4+x^3+x^2+3,$$
$$r_{-1}(x)=x^2+x+3,$$
$$y_{-2}(x)=0,$$
$$y_{-1}(x)=1.$$

Шаг 1: $r_{-2}(x)=r_{-1}(x)q_0(x)+r_0(x),$
$$q_0(x)=x^2+5,$$
$$r_0(x)=2x+2, \quad \deg r_0(x) = 1,$$
$$y_0(x)=y_{-2}(x)-y_{-1}(x)q_0(x)=-q_0(x)= \\ =-x^2-5.$$

Шаг 2: $r_{-1}(x)=r_0(x)q_1(x)+r_1(x),$
$$q_1(x)=4x,$$
$$r_1(x)=3, \quad \deg r_1(x) = 0,$$
$$y_1(x)=y_{-1}(x)-y_0(x)q_1(x)= \\ =1+4x(x^2+5)=4x^3+6x+1.$$

Алгоритм заканчивает свою работу на шаге 2, т. к.
$$\deg r_1(x) = \deg 1 = 0$$
("1" — *многочлен* в правой части $(*)$).

Замечание: при итерациях алгоритма нет необходимости вычислять $\chi_i(x)$, т. к. нас интересует только значения $y_i(x)$, $i=0, 1, \ldots$.

Остаток $r_1(x) = 3$, отличается от 1 на множитель-константу. Чтобы получить решение уравнения $(*)$ вычисляем элемент $3^{-1} \equiv_7 5$ и домножаем на него y_1:

$$5y_1(x) = 5(4x^3 + 6x + 1) \equiv_7 6x^3 + 2x + 5.$$

Ответ: в поле $\mathbb{F}_7[x]/\big(x^4 + x^3 + x^2 + 3\big)$ имеем

$$(x^2 + x + 3)^{-1} = 6x^3 + 2x + 5.$$

2.3 Алгебра векторов над конечным полем

Векторное пространство

<u>Определение</u> 2.1. *Абстрактным векторным пространством* над полем $\Bbbk = \{1, \alpha, \beta, \dots\}$ называется двухосновная алгебраическая система $\mathcal{V} = \langle V, \Bbbk; +, \cdot \rangle$, где

- $V = \{0, v, \dots\}$ — множество *векторов*,
- $+$ — бинарная операция *сложения элементов* V: $V \times V \xrightarrow{+} V$,
- $\cdot$ — бинарная операция *умножения элемента* («числа́») *из* $\Bbbk$ *на вектор из* V: $\Bbbk \times V \xrightarrow{\cdot} V$,

причём операции $+$ и $\cdot$ удовлетворяют следующим аксиомам:

1) V — коммутативная группа по сложению и 0 — её нейтральный элемент;
2) $\alpha\cdot(v_1+v_2) = \alpha\cdot v_1+\alpha\cdot v_2$, $(\alpha_1+\alpha_2)\cdot v = \alpha_1\cdot v+\alpha_2\cdot v$;
3) $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$;

4) $1 \cdot v = v$.

Также имеет место дистрибутивность относительно вычитания $(\alpha - \beta) \cdot v = \alpha \cdot v - \beta \cdot v$:

$$(\alpha - \beta) \cdot v + \beta \cdot v = (\alpha - \beta + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v$$

Отсюда получаем, что

- $0 \cdot v = 0$, так как $0 \cdot v = (1 - 1) \cdot v = v - v = 0$,
- и $-v = (-1) \cdot v$, так как
  $v + (-1) \cdot v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = (1 - 1) \cdot v = 0 \cdot v = 0$.

Пример 2.10. Пусть $V = \mathbb{k}^n$ — *множество конечных последовательностей длины* n элементов поля $\mathbb{k}$.
Сложение и умножение на число из $\mathbb{k}$ элементов из V определяются покомпонентно.

Получившаяся структура — векторное пространство, которое называют *n-мерным координатным пространством* над полем $\mathbb{k}$.

Утверждение 2.4. *Поле $GF(q)$ характеристики простого p есть векторное пространство над $GF(p)$.*

Доказательство. В поле $GF(q)$, $q \geqslant p$:

сложение — наследуется операция сложения в $GF(p)$;

умножение — поскольку

$$GF(p) = \left\{ \overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{p-1} \right\} \subseteq GF(q),$$

то при умножении «чисел» из поля $GF(p)$ на векторы из $GF(q)$ можно заменять на умножение элементов $GF(q)$;

аксиомы векторного пространства — выполняются в силу свойств арифметических операций в поле $GF(q)$. □

Следствие. *Поле Галуа $GF(q)$ характеристики p состоит из p^n элементов: $q = p^n$.*

Представление элементов конечных полей. Поле $\mathbb{F}_p^n$ с элементами

$$M_{p,n}(x) = \\ = \{\, a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} \mid a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_{n-1} \in \mathbb{F}_p \,\}$$

можно рассматривать как

1) *фактор-кольцо* $\mathbb{F}_p[x]/\bigl(a(x)\bigr)$ вычетов $\mathbb{F}_p[x]$ по идеалу некоторого неприводимого многочлена

$$a(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,\ a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_n \in \mathbb{F}_p$$

или как

2) *n-мерное координатное пространство* над $\mathbb{F}_p$:

$$\langle\, \mathcal{M}_{p,n}(x),\, \mathbb{F}_p;\, +,\, \cdot \,\rangle$$

(все операции — по $\mod p$) и в обоих случаях можно определить операцию деления на ненулевой элемент.

Теорема 2.3. *Базис $\mathbb{F}_p^n$ образуют элементы $\overline{1},\, \overline{x},\, \ldots,\, \overline{x^{n-1}}$.*

Доказательство. 1. Любой элемент $\mathbb{F}_p^n$ представим в виде линейной комбинации указанных векторов:

$$\overline{b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}} = b_0\overline{1} + b_1\overline{x} + \ldots + b_{n-1}\overline{x^{n-1}}.$$

2. Пусть

$$c(x) = c_0\overline{1} + c_1\overline{x} + \ldots + c_{n-1}\overline{x^{n-1}} = \overline{0}.$$

Это означает, что многочлен $c(x)$ степени $n-1$ делится на некоторый многочлен n-й степени, что возможно лишь при $c_0 = c_1 = \ldots = c_{n-1} = 0$, т. е. система $\left\{ \overline{1}, \overline{x}, \ldots, \overline{x^{n-1}} \right\}$ *линейно независима.* □

Замечание. Построение поля с помощью вычетов по модулю некоторого неприводимого многочлена и аналоги доказанных теорем справедливы *не только в случае конечных полей.*

Например:

1) рассмотрим поле действительных чисел $\mathbb{R}$ и кольцо многочленов $\mathbb{R}[x]$ над ним;
2) в $\mathbb{R}[x]$ возьмём неприводимый многочлен x^2+1;
3) построим поле F как фактор-кольцо: $F = \mathbb{R}[x]/\big(x^2+1\big)$;
4) F также и векторное пространство над $\mathbb{R}$; его базис — $\left\{ \overline{1}, \overline{x} \right\}$ и каждый его элемент $z \in F$ можно представить в виде $z = a\overline{1} + b\overline{x}$, $a, b \in \mathbb{R}$;
5) поле F изоморфно полю *комплексных чисел*

$$\mathbb{C} = \left\{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R},\, i^2 = -1 \right\},$$

изоморфизм задаётся соответствием
$\overline{1} \mapsto 1$, $\overline{x} \mapsto i$.

Лемма 2.2. *Поле $\mathbb{F}_p^n$ содержит подполе $\mathbb{F}_p^k$ iff $k \mid n$.*

Доказательство. Если поле $\Bbbk_1$ содержится в поле $\Bbbk_2$, то элементы $\Bbbk_2$ можно умножать на элементы из $\Bbbk_1$, а результаты складывать.

Поэтому поле $\Bbbk_2$ является векторным пространством над полем $\Bbbk_1$ некоторой размерности d — значит, в нём $|\Bbbk_1|^d$ элементов.

Наш случай: $p^n = (p^k)^d$, что и означает $k \mid n$.

Обратное следует из существования и единственности (с точностью до изоморфизма) полей Галуа. □

Ясно, что $\mathbb{F}_p$ — всегда подполе $\mathbb{F}_p^n$ (случай $k = 1$).

Наиболее употребимы два представления элементов конечного поля $F = \mathbb{F}_p^n$:

векторное — каждый элемент F записывается как вектор в базисе $\left\{\overline{1}, \overline{x^1}, \overline{x^2}, \ldots, \overline{x^{n-1}}\right\}$;

степенное — каждый ненулевой элемент F записывается как некоторая степень генератора мультипликативной группы F^*.

Кстати, что такое $\overline{x}$ в поле $\mathbb{F}_p^n = \mathbb{F}_p[x]/(a(x))$?
$\overline{x}$ можно понимать либо как

- совокупность всех многочленов из $\mathbb{F}_p[x]$, дающих при делении на $a(x)$ остаток x;

либо как

- вектор $(0, 1, 0, \ldots, 0) \in (\mathbb{F}_p)^n$.

Далее, как принято, вместо $\overline{x}$ обычно пишем просто x.

Замечание. Переход от степенного представления к векторному достаточно прост, а обратный переход — очень сложен, т. к. связан с вычислением *дискретного логарифма* — натурального z в равенстве $a^z = b$, $a, b \in A$.

На сложности этой задачи (известны не более, чем субэкспоненциальные алгоритмы её решения) базируются многие методы криптографии с отрытым ключом.

2.4 Корни многочленов над конечным полем

Минимальный многочлен. Рассмотрим элемент β конечного поля и будем интересоваться многочленами, для которых он является *корнем*.

Определение 2.2. *Минимальным многочленом (м.м.)* элемента $\beta \in GF(p^n)$ называется *приведённый* многочлен $m_\beta(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ наименьшей степени, для которого β является корнем.

Сразу заметим, что минимальный многочлен для $\overline{x}$ можно получить из порождающего поле неприводимого. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_p[x]/(a(x))$, порождаемое неприводимым многочленом

$$a(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

и убедимся, что многочлен $a_n^{-1} a(x)$ — минимальный для элемента $\overline{x} = (\,0,\, 1,\, 0,\, \ldots,\, 0\,) \in F$.

Ясно, что

$$\overline{x}^2 = \overline{x^2} = (0, 0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad \overline{x^{n-1}} = (0, \ldots, 0, 1)$$

Далее, с одной стороны $\overline{x}$ — корень $a(x)$, т. к.

$$a_0 + a_1\overline{x} + \ldots + a_n(\overline{x})^n = \overline{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n} = \overline{0},$$

а значит и $a_n^{-1}a(x)$.

С другой —

если $\exists\, b(x) = b_0 + b_1\overline{x} + \ldots + b_{n-1}(\overline{x})^{n-1} = \overline{0}$,

то $b_0\overline{1} + b_1\overline{x} + \ldots + b_{n-1}\overline{x^{n-1}} = \overline{0}$,

т. е. имеем линейную зависимость между элементами $\left\{\overline{1}, \overline{x}, \ldots, \overline{x^{n-1}}\right\}$ — базиса поля F как векторного пространства над $\mathbb{F}_p$, что возможно только при $b_0 = b_1 = \ldots = b_{n-1} = 0$.

Вопрос: являются ли минимальные многочлены примитивными?

Проверим на примерах.

1. Многочлен $a(x) = x^3 + x + 1$ неприводим в $\mathbb{F}_2[x]$, следовательно $F = \mathbb{F}_2[x]/(a(x))$ — поле и по доказанному ранее $a(x)$ — *минимальный многочлен для* x.

   Примитивен ли этот элемент $x \in F^*$?

   Проверяем, что в $F = GF(2^3)$ $a(x) \nmid (x^t - 1)$ при $t = 3, 4, 5, 6$ (а делимость $x^7 - 1$ на $a(x)$ всегда будет иметь место:
   $x^7 + 1 = (x^3 + x + 1)(x^4 + x^2 + x + 1)$).

   Это означает, что x — *примитивный элемент* поля $F \Leftrightarrow$ генератор $F^* \Leftrightarrow \operatorname{ord} x = 7$.

2. Многочлен $a(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ неприводим в $\mathbb{F}_2[x]$, следовательно $F = \mathbb{F}_2[x]/(a(x))$ —

поле и по доказанному ранее $a(x)$ — минимальный многочлен для x.

Примитивен ли элемент x?

Имеем в $F = GF(2^4)$:
$a(x) \mid (x^5-1) : x^5+1 = (x^4+x^3+x^2+x+1)(x+1)$.
Или: $|F^*| = 15 = 3 \cdot 5$, $x^3 \neq 1$, но

$$x^5 = x \cdot x^4 = x \cdot (x^3 + x^2 + x + 1) = 1.$$

Это означает, что x — *не есть примитивный многочлен* и x — не генератор F^*, т. к. $\operatorname{ord} x = 5 \neq 15$.

Определение 2.3 (эквивалентное данному ранее). Минимальный многочлен примитивного элемента поля называется *примитивным многочленом.*

Свойства минимальных многочленов. Мы докажем далее, что м.м. для каждого элемента β: (а) существует, (б) единственен и (в) неприводим. Эти свойства позволят указать простой алгоритм нахождения м.м. для любого элемента поля.

Утверждение 2.5. *Минимальные многочлены неприводимы.*

Доказательство. Пусть $m_\beta(x)$ — м.м. степени m для β и $m_\beta(x) = m_1(x) \cdot m_2(x)$.

Тогда

$$m_\beta(\beta) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m_1(\beta) = 0 \\ m_2(\beta) = 0 \end{array} \right. ,$$

но степени многочленов $m_1(x)$ и $m_2(x)$ меньше m, и поэтому β не может быть их корнем. □

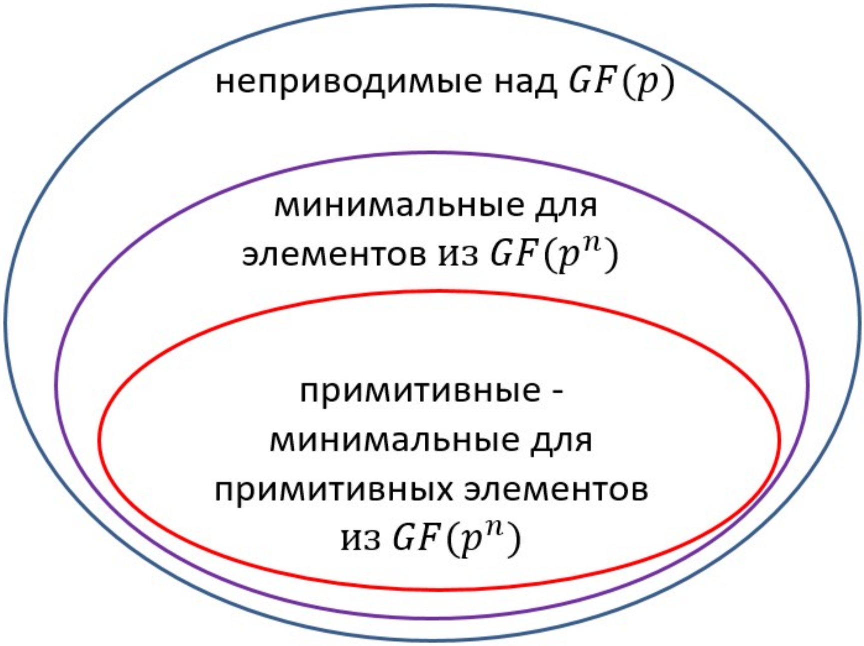


Рис. 2.1. Соотношение множеств неприводимых, минимальных и примитивных многочленов

Утверждение 2.6. *Пусть в некотором поле Галуа $m_\beta(x)$ — м.м. для элемента β, а $f(x)$ — многочлен такой, что $f(\beta) = 0$. Тогда $f(x)$ делится на $m_\beta(x)$ без остатка.*

Доказательство. Разделим $f(x)$ на $m_\beta(x)$ с остатком:

$$f(x) = u(x) \cdot m_\beta(x) + v(x), \quad 0 \leqslant \deg v < \deg m_\beta(x).$$

Подставляя в это равенство β вместо x, получаем

$$0 = f(\beta) = u(\beta) \cdot \underbrace{m_\beta(\beta)}_{=0} + v(\beta) = v(\beta)\,,$$

т. е. β — корень $v(x)$, что противоречит минимальности $m_\beta(x)$ и поэтому $v(x) \equiv 0$. □

Следствие. *Для каждого элемента поля существует не более одного м.м.*

Доказательство. Пусть минимальных многочленов два. Они взаимно делят друг друга, а значит, различаются на обратимый множитель-константу.

Поскольку минимальный многочлен нормирован, эта константа равна 1, т. е. данные многочлены совпадают. □

Утверждение 2.7. *Для каждого элемента β поля $\mathbb{F}_p^n$ существует м.м. $m_\beta(x)$ и его степень не превосходит n:* $\deg m_\beta(x) = d \leqslant n$.

Доказательство. Рассмотрим следующие элементы поля $\mathbb{F}_p^n$: $1, \beta, \beta^2, \ldots, \beta^n$. Их $n+1$ штук, а размерность $\mathbb{F}_p^n$ как векторного пространства равна n $\Rightarrow$ эти элементы линейно зависимы, т. е. существуют такие не все равные 0 коэффициенты $c_0, \ldots, c_n$, что

$$c_0 1 + c_1\beta + \ldots + c_n\beta^n = 0,$$

$\Rightarrow$ β — корень многочлена $f(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$.

Минимальным многочленом для β будет некоторый нормированный неприводимый делитель $f(x)$. □

Далее будут доказаны ещё два свойства м.м. $m_\beta(x)$ элемента β поля $\mathbb{F}_p^n$, $\deg m_\beta(x) = d$:

1. $m_\beta(x) \mid \left(x^{p^n} - x\right)$.
2. $m_\beta(x)$ минимален также и для *сопряжённых* с β элементов $\beta^p, \beta^{p^2}, \ldots, \beta^{p^{d-1}}$.

Свойства многочленов над конечным полем

Поле разложения многочлена $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ — наименьшее по n расширение $\mathbb{F}_p^n$ поля $\mathbb{F}_p$, над которым $f(x)$ разлагается в *произведение линейных множителей.*

Теорема 2.4 (о поле разложения). *Любой ненулевой элемент поля $F = \mathbb{F}_p^n$ является корнем бинома $x^{p^n-1}-1$:*

$$x^{p^n-1} - 1 = (x - \beta_1) \cdot \ldots \cdot (x - \beta_{p^n-1})$$

где $\left\{ \beta_1, \ldots, \beta_{p^n-1} \right\} = F^*$, т. е. F — поле разложения данного бинома.

Доказательство. F^* — циклическая группа по умножению порядка $p^n - 1$.

Порядок $\operatorname{ord}\alpha$ любого её элемента α (= порядок циклической подгруппы $\langle\alpha\rangle$ — по теореме Лагранжа) делит порядок группы.

Поэтому $p^n - 1 = q \cdot \operatorname{ord}\alpha$ и

$$\alpha^{p^n-1} - 1 = \alpha^{q \operatorname{ord}\alpha} - 1 = (\alpha^{\operatorname{ord}\alpha})^q - 1 = 1^q - 1 = 0,$$

т. е. α — корень $x^{p^n-1} - 1$. □

Следствие (теорема Ферма). *Все элементы поля $\mathbb{F}_p^n$, не исключая нуля, являются корнями бинома $x^{p^n} - x$.*

Доказательство. Вынесем x за скобку:

$$x^{p^n} - x = x \cdot \left(x^{p^n-1} - 1\right).$$

У второго сомножителя корнями будут все ненулевые элементы поля, а у первого — 0. □

Теорема 2.5. *В кольце многочленов над конечным полем*

$$(x^n - 1) \,\vdots\, (x^m - 1) \;\Leftrightarrow\; n \,\vdots\, m.$$

Доказательство.

- Пусть $n = mk$. Сделаем замену $x^m = y$, тогда $x^n - 1 = y^k - 1$ и $x^m - 1 = y - 1$.
  Делимость очевидна, т. к. 1 — корень $y^k - 1$.

- Предположим, что $n \not\vdots\, m$, т. е. $n = km + r$, $0 < r < m$, тогда

$$x^n - 1 = \frac{x^r(x^{mk} - 1)}{x^m - 1} \cdot (x^m - 1) + x^r - 1.$$

Это выражение задает результат деления $x^n - 1$ на $x^m - 1$ с остатком, поскольку $x^{mk} - 1$ делится на $x^m - 1$ по доказанному выше. Остаток $x^r - 1 \neq 0$ в силу $r > 0$.

Следовательно $x^n - 1$ *не делится* на $x^m - 1$. □

Теорема даёт возможность раскладывать биномы $x^n - 1$ при *составных* n на (возможно разложимые далее) многочлены над $\mathbb{F}_p$.

Пример 2.11. Многочлен $x^{15} + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ (где $-1 = +1$) должен делиться на $x^3 + 1$ и на $x^5 + 1$.

Действительно,

$$\begin{aligned} x^{15} + 1 &= (x^3 + 1)(x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1) = \\ &= (x^5 + 1)(x^{10} + x^5 + 1). \end{aligned}$$

Возможность раскладывать биномы *специального вида* на *неприводимые* даёт следующая

Теорема 2.6. *Бином* $x^{p^n} - x$ *делят все неприводимые многочлены* n*-й степени над* $\mathbb{F}_p$.

Доказательство.

$n = 1$. Убеждаемся, что $(x - a) \mid (x^p - x)$, где $a \in \mathbb{F}_p$: поскольку $a^p = a$, оба данных многочлена имеют корень a.

$n > 1$. Выбираем неприводимый нормированный многочлен $f(x)$ степени n из $\mathbb{F}_p[n]$ (*пока не доказано!*[3]) и строим поле $\mathbb{F}_p[x]/\big(f(x)\big)$.
В нём x — корень и своего м.м. $f(x) = m_x(x)$, и бинома $x^{p^n-1} - 1$.
По свойствам м.м. (Утверждение (2.6)) $x^{p^n-1} - 1$ делится на $f(x)$.

□

Пример 2.12 (продолжение *Примера* 2.11). Продолжаем разложение $x^{15} + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$.

Поскольку $15 = 2^4 - 1$, все неприводимые многочлены 4-й степени будут делителями $x^{16} - x$ и, следовательно, $x^{15} + 1$. Таких многочленов 3:

$$x^4 + x + 1, \;\; x^4 + x^3 + 1 \;\text{ и }\; x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Имеем

$$x^{15}+1 = (x^3+1)(x^4+x+1)(x^4+x^3+1)(x^4+x^3+x^2+x+1).$$

Замечаем, что $3 = 2^2 - 1$, и поэтому все неприводимые многочлены 2-й степени будут делителями $x^4 - x$ и, следовательно, x^3+1. Такой многочлен только один: $x^2 + x + 1$.

[3] Теорема 2.1

Окончательно получаем разложение $x^{15}+1$ на неразложимые над $\mathbb{F}_2$ многочлены:

$$x^{15}+1 = (x+1)(x^2+x+1)\cdot$$
$$\cdot(x^4+x+1)(x^4+x^3+1)(x^4+x^3+x^2+x+1).$$

Теорема 2.7. *Любой неприводимый многочлен, делящий бином $x^{p^n}-x$, имеет степень, не превосходящую n.*

Доказательство. Пусть φ — неприводимый делитель $x^{p^n}-x$ степени k.

Тогда $F \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{F}_p/(\varphi)$ — поле, которое рассмотрим как векторное пространство над $\mathbb{F}_p$ с базисом $\left\{\overline{1}, \overline{x}, \ldots, \overline{x^{k-1}}\right\}$.

Обозначим $\overline{x}=\alpha$. Поскольку $(x^{p^n}-x) \vdots \varphi$, то в F имеем $\alpha^{p^n}-\alpha=0$.

Любой элемент F выражается через базис:

$$\beta = \sum_{i=0}^{k-1} a_i\alpha^i.$$

Возведя обе части этого равенства в степень p^n, получим

$$\beta^{p^n} = \left(\sum_{i=0}^{k-1} a_i\alpha^i\right)^{p^n} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i\alpha^i = \beta,$$

т. е. β — корень уравнения

$$x^{p^n}-x = 0 \qquad (*)$$

Итак, каждый элемент поля F является корнем $(*)$, но у $(*)$ не более p^n различных корней, а $|F| = p^k$; поэтому $n \geqslant k$. $\square$

Вывод. Бином $x^{p^n} - x$ делится на следующие неприводимые многочлены из $\mathbb{F}_p[x]$: любые степени n и, возможно, некоторые степени $< n$.

Следующая теорема позволяет находить все корни неприводимого многочлена по одному известному.

Теорема 2.8 (свойство корней неприводимого многочлена). *Если $\beta \in \mathbb{F}_p^n$ — корень неприводимого многочлена $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$, то элементы β, β^p, β^{p^2}, $\ldots$, $\beta^{p^{n-1}}$ все различны и исчерпывают список всех n его корней.*

Доказательство. 1. Покажем, что если β — корень $f(x)$, то β^p — тоже корень.

Поскольку $a^p = a$ для всех $a \in \mathbb{F}_p$, то справедливо

$$\begin{aligned}&\left(a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k\right)^p = \\ &\qquad = a_0^p + a_1^p x^p + a_2^p x^{2p} + \ldots + a_k^p x^{kp} = \\ &\qquad\qquad = a_0 + a_1(x^p) + a_2(x^p)^2 + \ldots + a_k(x^p)^k,\end{aligned}$$

т. е. для любого многочлена $\varphi(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ выполняется равенство

$$(\varphi(x))^p = \varphi(x^p). \qquad (*)$$

Отсюда $f(\beta) = 0 \;\Leftrightarrow\; (f(\beta))^p = 0 \;\Leftrightarrow\; f(\beta^p) = 0$ и β, β^p, $\ldots$, $\beta^{p^{n-1}}$ — корни многочлена $f(x)$.

2. Осталось доказать, что все β, β^p, $\ldots$, $\beta^{p^{n-1}}$ различны, и тогда (многочлен степени n имеет не более n корней) можно утверждать, что найдены *все* корни многочлена $f(x)$.

Предположим, что $\beta^{p^l} = \beta^{p^k}$, считая $l \leqslant k$. Далее, поскольку

$$\beta = \beta^{p^n} = \beta^{p^k \cdot p^{n-k}} = \left(\beta^{p^k}\right)^{p^{n-k}} = \left(\beta^{p^l}\right)^{p^{n-k}} = \beta^{p^{n-k+l}},$$

то β — корень уравнения $x^{p^{n-k+l}-1} - 1 = 0$.

По *Теореме* 2.7 получаем $n - k + l \geqslant n \;\Rightarrow\; l \geqslant k$, т. е. $l = k$ и все вышеописанные корни различны. □

Корни β, β^p, β^{p^2}, …, $\beta^{p^{n-1}}$ неприводимого многочлена $f(x)$ степени n называют *сопряжёнными* и ясно, что они лежат в поле $\mathbb{F}_p[x]/(f(x))$.

Нахождение корней неприводимого многочлена. Для нахождения всех корней *неприводимог*о многочлена $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ нужно построить поле $\mathbb{F}_p[x]/(f(x))$. Первый искомый корень есть x, а остальные получаются применением Теоремы 2.8.

Пример 2.13. 1. Найти корни неприводимого над $\mathbb{F}_2$ многочлена

$$f(x) = x^4 + x^3 + 1.$$

Решение. Один корень получаем немедленно — это x, а остальные корни в поле $\mathbb{F}_2[x]/(f(x))$ суть

$$\begin{aligned}
&x^2, \quad x^4 = x^3 + 1,\\
&x^8 = x^6 + 1 = (x^5 + x^2) + 1 =\\
&\;= (x^4 + x) + x^2 + 1 = x^3 + 1 + x + x^2 + 1 =\\
&\;= x^3 + x^2 + x.
\end{aligned}$$

Покажем, что, например, x^2 — действительно корень $f(x)$: поскольку

$$f(x^2) = x^4 + x^3 + 1\Big|_{x \mapsto x^2} = x^8 + x^6 + 1$$

и $x^8 = x^6 + 1$, то $f(x^2) = 0$.

2. Решить уравнение

$$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0, \quad f(x) \in \mathbb{F}_2[x].$$

Решение. Убеждаемся, что многочлен $f(x)$ неприводим в $\mathbb{F}_2[x]$. Поэтому один его корень — x, а остальные в поле $\mathbb{F}_2[x]/(f(x))$ суть

$$x^2,\ \ x^4 = x^3 + x^2 + x + 1,\ \ x^8 = x^6 + x^4 + x^2 + 1 = \ldots = x^3.$$

Покажите самостоятельно, что x^3 — действительно корень $f(x)$, т. е. что

$$f(x^3) = x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1 = 0.$$

3. Решить уравнение

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 = 0, \text{ где } f(x) \in \mathbb{F}_3[x].$$

Решение. Перебором элементов $x \in \mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ убеждаемся $f(x)$ — неприводимый многочлен.
Но тогда в поле $\mathbb{F}_3[x]/\big(x^2 + 2x + 2\big)$ он имеет корни x и x^3.

Поскольку $x^2 = -2x + 1 = x + 1$, то

$$x^3 = x^2 + x = 2x + 1.$$

Убедимся, что $2x + 1$ — корень $f(x)$:

$$f(x^2 + x) = (2x + 1)^2 + x + 1 = \\ = x^2 + x + 1 + x + 1 = 3 \cdot (x + 1) = 0.$$

Ответ: многочлен $f(x) = x^2 + 2x - 1 \in \mathbb{F}_3[x]$ имеет корни x и $2x + 1$ в поле $\mathbb{F}_3[x]/\big(x^2 + 2x + 2\big)$.

В общем случае для нахождения корней приводимого многочлена уметь раскладывать его на неприводимые множители.

Нахождение минимальных многочленов. Для нахождения м.м. $m_\beta(x)$ элемента $\beta \neq x$ поля $\mathbb{F}_p[x]/\big(a(x)\big)$ вычисляем сопряжённые элементы β^p, β^{p^2}, ..., пока на некотором шаге d окажется, что

1) $\beta^{p^d} = \beta$, тогда
$$m_\beta(x) = (x-\beta)\cdot(x-\beta^p)\cdot\ldots\cdot\left(x-\beta^{p^{d-1}}\right).$$

2) $\beta^{p^d} = x$, тогда $m_\beta(x)$ — многочлен $a(x)$ после нормировки.

Пример 2.14. Найдём минимальные многочлены для элементов x^2+x, $x+1$ поля
$$F = \mathbb{F}_2[x]/\big(x^4+x+1\big).$$

В этом поле $x^4 = x+1$.

1. $\underline{\beta = x^2+x.}$ Вычисляем элементы, сопряжённые с β:
$$\begin{aligned}\beta^2 &= (x^2+x)^2 = x^4+x^2 = x^2+x+1,\\ \beta^4 &= (x^2+x+1)^2 = x^4+x^2+1 = x+\cancel{1}+x^2+\cancel{1} =\\ &= x^2+x = \beta.\end{aligned}$$

Т.о. м.м. $m_\beta(x)$ — квадратный и
$$m_\beta(x) = (x-\beta)(x-\beta^2) = x^2+(\beta^2+\beta)\,x+\beta^3.$$

Вычисляем коэффициенты полинома:
$$\begin{aligned}\beta^2+\beta &= (x^2+x+1)+(x^2+x) = 1,\\ \beta^3 &= (x^2+x+1)(x^2+x) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= x^4 + \cancel{x}^3 + \cancel{x}^3 + \cancel{x}^2 + \cancel{x}^2 + x = \\ &= (x+1) + x = 1,\end{aligned}$$

и окончательно $m_\beta(x) = x^2 + x + 1$.

Ясно, что коэффициенты перед степенями x могут оказаться только константы 0 или 1, иначе — ошибка в вычислениях.

Заметим также, что в данном случае вычислений коэффициентов можно было не проводить, т. к. $x^2 + x + 1$ — единственный неприводимый многочлен 2-й степени над $\mathbb{F}_2$.

2. $\underline{\beta = x + 1.}$ Элементы, сопряжённые с β:

$$\begin{aligned}\beta^2 &= x^2 + 1, \\ \beta^4 &= x^4 + 1 = x + 1 + 1 = x,\end{aligned}$$

поэтому $m_\beta(x) = m_x(x) = a(x) = x^4 + x + 1$.

Ясно, что $a(x)$ является м.м. также и для сопряжённых с x элементов

$$x^2, \quad x^4 = \beta = x + 1, \quad x^8 = \beta^2 = x^2 + 1.$$

2.5 Существование и единственность поля $GF(p^n)$

Вычисления в мультипликативной группе расширения поля. Построим поле $\mathbb{F}_2^4$. Его можно представить как факторкольцо $\mathbb{F}_2/(a(x))$ по любому (*пока не доказано!*) из трех неприводимых над $\mathbb{F}_2$ многочленов 4-й степени:

$$x^4+x+1, \quad x^4+x^3+1, \quad x^4+x^3+x^2+x+1.$$

Сделаем это, взяв многочлен $a(x) = x^4+x+1$.

Будем задавать элементы $\mathbb{F}_2^4$ наборами коэффициентов многочлена-остатка при делении на $a(x)$, записывая их в порядке возрастания степеней.

Порождающим является элемент $\alpha = x$, который записывается как $(0,1,0,0)$. Вычислим степени α, сведя результаты в таблицу (антилогарифмов).

$\alpha^4=\alpha+1$ степень α	1	x	x^2	x^3
α	(0,	1,	0,	0)
α^2	(0,	0,	1,	0)
α^3	(0,	0,	0,	1)
$1+\alpha=\alpha^4$	(1,	1,	0,	0)
$\alpha+\alpha^2=\alpha^5$	(0,	1,	1,	0)
$\alpha^2+\alpha^3=\alpha^6$	(0,	0,	1,	1)
$\alpha^3+\alpha+1=\alpha^3+\alpha^4=\alpha^3\alpha^4=\alpha^7$	(1,	1,	0,	1)
$1+\alpha^2=\alpha+1+\alpha^2+\alpha=\alpha^8$	(1,	0,	1,	0)
$\alpha+\alpha^3=\alpha^9$	(0,	1,	0,	1)
$\alpha^2+1+\alpha=\alpha^2+\alpha^4=\alpha^{10}$	(1,	1,	1,	0)
$\alpha+\alpha^2+\alpha^3=\alpha^{11}$	(0,	1,	1,	1)
$1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3=\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=\alpha^{12}$	(1,	1,	1,	1)
$1+\alpha^2+\alpha^3=\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=\alpha^{13}$	(1,	0,	1,	1)
$1+\alpha^3=\alpha+\alpha^3+\alpha^4=\alpha^{14}$	(1,	0,	0,	1)
$1=\alpha+\alpha^4=\alpha^{15}$	(1,	0,	0,	0)

Имея такую таблицу, можно очень просто производить умножение.

Пример 2.15. Как найти $P = (x^3+x+1)\cdot(x^2+x+1)$?

1. Перемножить, учитывая $x^4 = x+1$ — можно, но сложно...
2. С помощью таблицы:
   - представляем многочлены в векторной форме и по ней — в виде степеней α:
   $$x^3+x+1 \longleftrightarrow (1,1,0,1) \longleftrightarrow \alpha^7,$$
   $$x^2+x+1 \longleftrightarrow (1,1,1,0) \longleftrightarrow \alpha^{10}$$
   - перемножая, с учётом $\alpha^{15}=1$, получаем:
   $$P = \alpha^7\alpha^{10} = \alpha^{17} = \alpha^2 = x^2.$$

Существование поля $GF(p^n)$ для всех n. Установим существование неприводимого нормированного многочлена f степени n над $GF(p)$, откуда последует существование поля из $GF(p^n)$ как факторкольца по идеалу (f).

Символом $((n))$ обозначим число нормированных неприводимых многочленов степени n над полем $\mathbb{F}_p$.

Лемма 2.3. $\displaystyle\sum_{d|n} d\cdot((d)) = p^n.$

Следствием этого результата является существование неприводимых многочленов любой степени: из

$$n((n)) = p^n - \sum_{k|n,\,k<n} k\cdot((k)) \geqslant p^n - \sum_{k=0}^{n-1} p^k =$$
$$= p^n - \frac{p^n-1}{p-1} > 0\,.$$

следует, что $((n)) > 0$, т. е. для любых простого p и натурального n над полем $\mathbb{F}_p$ существует *хотя бы один* неприводимый нормированный многочлен степени n.

Приведём ещё одну формулу для $((n))$.

Функция Мёбиуса $\mu(n)$ определяется для всех $n \in \mathbb{N}$: $\mu(n) = 1$ и для $n > 1$

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{если примарное разложение } n \text{ состоит из \textit{чётного числа различных} сомножителей;} \\ -1, & \text{если примарное разложение } n \text{ состоит из \textit{нечётного числа различных} сомножителей;} \\ 0, & \text{иначе (примарное разложение не свободно от квадратов).} \end{cases}$$

Например: $\mu(p) = -1$, p — простое,

$\mu(6) = \mu(2 \cdot 3) = 1$, $\mu(30) = \mu(2 \cdot 3 \cdot 5) = -1$,
$\mu(4) = \mu(2^2) = 0$.

Основное свойство функции Мёбиуса:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n > 1. \end{cases}.$$

Теорема 2.9 (формула Гаусса).

$$((n)) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d)\, p^{\frac{n}{d}}.$$

Например:

$$p=2,\ ((4)) = \tfrac{1}{4}\left[\mu(1)2^4+\mu(2)2^2+\mu(4)2\right] = \\ = \tfrac{1}{4}\left[2^4-2^2+0\right] = 3;$$
$$p=2,\ ((5)) = \tfrac{1}{5}\left[\mu(1)2^5+\mu(5)2\right] = \tfrac{1}{5}[32-2] = 6;$$
$$p=3,\ ((6)) = \tfrac{1}{6}\left[\mu(1)3^6+\mu(2)3^3+\mu(3)3^2+\mu(6)3\right] = \\ = 116.$$

Без доказательства укажем теорему, откуда следует изоморфизм *любых двух полей с одинаковым числом элементов.*

Теорема 2.10. *Пусть* $m_\alpha(x)$ *— м.м. элемента* $\alpha \in \mathbb{F}_p^n$ *и* $d = \operatorname{ord}\alpha$. *Тогда поле* $\mathbb{F}_p[x]/\bigl(m_\alpha(x)\bigr)$ *изоморфно подполю* $\mathbb{F}_p^d$, *порожденному степенями* α.

2.6 Циклические подпространства колец вычетов

Далее будем рассматривать кольцо многочленов $R = \mathbb{F}_p[x]/(f)$ по модулю главного идеала (f) *возможно приводимого* многочлена $f \in \mathbb{F}_p[x]$.

Идеалы в кольцах классов вычетов. Если f неприводим, то R — поле и этот случай уже рассмотрен. Но в любом случае R — векторное пространство над $\mathbb{F}_p$, совокупность всех многочленов степени меньшей $\deg f$.

Теорема 2.11. *Пусть* $f, \varphi \in \mathbb{F}_p[x]$, $\varphi \mid f$, *а* φ *— неприводимый нормированный многочлен.*

1. *совокупность всех многочленов, кратных* φ, *образует идеал* (φ) *в кольце* $\mathbb{F}_p[x]/(f)$.
2. φ — *единственный в* (φ) *нормированный многочлен минимальной степени.*
3. *идеал* (φ) — *векторное пространство размерности* $\deg f - \deg\varphi$.

Доказательство. $u, v, \varphi \in \mathbb{F}_p[x]$, $k = \deg\varphi \leqslant \deg f$,

$$\varphi = a_0 + a_1x + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k, \quad f = \psi\varphi.$$

1. Проверим, что (φ) — идеал в кольце $\mathbb{F}_p[x]/(f)$. Во-первых,

$$\begin{cases} \overline{g} \in (\varphi) \\ \overline{h} \in \mathbb{F}_p[x]/(f), \overline{h} \subseteq \overline{g} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{g} = u\varphi \\ \overline{h} = vg = vu\varphi \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overline{h} \in (\varphi).$$

И, во-вторых,

$$\overline{g}, \overline{h} \in (\varphi) \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{g} = u\varphi \\ \overline{h} = v\varphi \end{cases} \Rightarrow \overline{g} + \overline{h} = (u+v)\varphi \in (\varphi).$$

2. Покажем, что в (φ) нет других, кроме

$$\varphi = a_0 + a_1x + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k$$

нормированных многочленов степени, меньшей $k = \deg\varphi$.

Пусть $g = b_0 + b_1x + \ldots + x^m$. Тогда

$$\overline{g} \in (\varphi) \Leftrightarrow g = u\varphi \Rightarrow \deg g = m \geqslant \deg\varphi = k.$$

3. Без доказательства. □

Циклическое пространство. Пусть V — n-мерное векторное пространство над некоторым полем F. При фиксировании некоторого базиса получаем

$$V \cong F^n = \{\, (\, a_0,\, \ldots,\, a_{n-1}\,) \mid a_i \in F,\ i \,=\, 0, 1, \ldots, n-1\, \}$$

— координатное пространство.

Определение 2.4. Подпространство координатного пространства F^n называется *циклическим*, если вместе с набором $(a_0,\, \ldots,\, a_{n-1})$ оно содержит циклический сдвиг вправо этого набора (т.е. $(a_{n-1},\, a_0,\, \ldots,\, a_{n-2})$, а следовательно и все циклические сдвиги на произвольное число позиций влево и вправо).

Конкретно, в кольце $\mathbb{F}_p[x]/(x^n - 1)$, рассматриваемом как векторное пространство имеется естественный базис $\left\{ \overline{1},\, \overline{x},\, \ldots,\, \overline{x^{n-1}} \right\}$.

Циклический сдвиг координат в этом базисе равносилен умножению на $\overline{x}$:

$$\overline{a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1}} \cdot \overline{x} \,= \\ = \overline{a_0 x + a_1 x^2 + \ldots + a_{n-2}x^{n-1} + a_{n-1}\underbrace{x^n}_{=1}} = \\ = \overline{a_{n-1} + a_0 x + a_1 x^2 + \ldots + a_{n-2}x^{n-1}}\,.$$

Теорема 2.12. *В кольце классов вычетов по модулю многочлена $x^n - 1$ подпространство является циклическим iff оно идеал.*

Доказательство. Если подпространство I — идеал, то оно замкнуто относительно умножения на $\overline{x}$, а это умножение и есть циклический сдвиг $\Rightarrow$ I — циклическое.

И в обратную сторону, пусть I — циклическое подпространство кольца $\mathbb{F}_p/(x^n-1)$ и $g \in I$.
Тогда $g \cdot \overline{x}$, $g \cdot \overline{x^2}$, … — циклические сдвиги, т. е. также принадлежат I.
Значит, $g \cdot \overline{f} \in I$ для любого многочлена f, поэтому I — идеал. □

Разложение бинома $x^n - 1$ на неприводимые множители. Легко показать, что корни бинома $x^n - 1 = 0$ (корни из 1) образуют *циклическую группу*.

Вопрос: какие корни из единицы будут порождать в неприводимый делитель $f(x)$ бинома $x^n - 1$?

Пусть бином $x^n - 1$ разлагаться в произведение k неприводимых многочленов степеней $d_1, \ldots, d_k$. Если β — корень неприводимого многочлена $f(x)$ степени d, то β^p, β^{p^2}, … $\beta^{p^{d-1}}$ — также его корни.

Подгруппа в циклической группе существует iff её порядок делит порядок циклической группы. Поэтому все степени $d_1, \ldots, d_k$ должны быть делителями $p^n - 1$ (и F_p^n — поле разложения $x^n - 1$) и количество и степени многочленов-неприводимых делителей $x^n - 1$ можно найти, разбив $\mathbb{F}_p$ на *орбиты* отображения

$$t \mapsto pt \mod n.$$

Пример 2.16. 1. Рассмотрим ещё раз разложение многочлена $x^{15} - 1$ над $\mathbb{F}_2$. Относительно умножения на 2 вычеты по модулю 15 — $\{0, 1, \ldots, 14\}$ — разбиваются на орбиты:

$$\{\overline{0}\},\ \{\overline{1},\ \overline{2},\ \overline{4},\ \overline{8}\},\ \{\overline{3},\ \overline{6},\ \overline{12},\ \overline{9}\},\ \{\overline{5},\ \overline{10}\},$$
$$\{\overline{7},\ \overline{14},\ \overline{13},\ \overline{11}\}$$

Поэтому $x^{15}-1$ разлагается в произведение

- одного неприводимого многочлена степени 1,
- одного неприводимого многочлена степени 2,
- трех неприводимых многочленов степени 4.

Конкретно (разложение было раньше):

$$x^{15}+1 = (x+1)\cdot(x^2+x+1)\cdot(x^4+x+1)\cdot$$
$$\cdot(x^4+x^3+1)\cdot(x^4+x^3+x^2+x+1).$$

2. Рассмотрим разложение многочлена $x^{23}-1$ над $\mathbb{F}_2$. Относительно умножения на 2 вычеты по модулю 23 разбиваются на три орбиты:

$$\{\overline{0}\},\{\overline{1},\ \overline{2},\ \overline{4},\ \overline{8},\ \overline{16},\ \overline{9},\ \overline{18},\ \overline{13},\ \overline{3},\ \overline{6},\ \overline{12}\},$$
$$\{\overline{5},\ \overline{10},\ \overline{20},\ \overline{17},\ \overline{11},\ \overline{22},\ \overline{21},\overline{19},\overline{15},\overline{7},\overline{14}\}$$

Поэтому $x^{23}-1$ разлагается в произведение одного неприводимого многочлена степени 1 и двух неприводимых многочленов степени 11.

Кольца многочленов над конечным полем и конечные поля: резюме

- Характеристика конечного поля — простое число.
- Любое конечное поле характеристики p состоит из $q = p^n$ элементов $n \in \mathbb{N}$.
- $\alpha \in \left\{GF(q) \setminus 0\right\} \Rightarrow \operatorname{ord}\alpha \mid (q-1)$.
- Мультипликативная группа поля $GF(q)$ является циклической: в ней существует $\varphi(q-1)$ примитивных элементов (генераторов, элементов порядка $q-1$).

  Для нахождения самих примитивных элементов нет эффективных алгоритмов.
- Любые два конечных поля, содержащих одинаковое количество элементов, изоморфны.
- $GF\left(p^m\right)$ — подполе $GF\left(p^n\right) \Leftrightarrow m \mid n$.
- Одночлены $\left\{\overline{1}, \overline{x}, \overline{x^2}, \ldots \overline{x^{n-1}}\right\}$ — базис в векторном пространстве над кольцом $\mathbb{F}_p[x]/\big(a(x)\big)$, $\deg a(x) = n$.
- Для каждого натурального n в кольце многочленов $\mathbb{F}_p[x]$ над простым полем $\mathbb{F}_p$ имеются неприводимые многочлены.

  $\mathbb{F}_p[x]$ — кольцо с однозначным разложением многочленов на неприводимые. Для нахождения неприводимых многочленов нет эффективных алгоритмов.

- Идеал $\big(a(x)\big)$, порождённый многочленом $a(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ составляют многочлены, кратные $a(x)$.

- Фактор-кольцо $\mathbb{F}_p[x]/\big(a(x)\big)$ является полем, если и только если $a(x)$ — неприводимый многочлен в кольце $\mathbb{F}_p[x]$.

  Если при этом $\deg a(x) = n$, то элементы $\mathbb{F}_p[x]/\big(a(x)\big)$ — классы многочленов степени $< n$ (их всего p^n элементов).

- Минимальный многочлен элемента $\beta \in GF(p^n)$ есть нормированный многочлен минимальной степени, для которого β является корнем. Минимальные многочлены неприводимы и единственны для каждого β.

- Любой элемент поля $F = \mathbb{F}_p^n$ является корнем многочлена $x^{p^n} - x$:

$$x^{p^n} - x = \prod_{a \in F} (x - a).$$

- Для того, чтобы векторное подпространство V кольца $R = \mathbb{F}_p[x]/(x^n - 1)$ было циклическим, необходимо и достаточно, чтобы оно было идеалом R.

  Многочлен $g(x)$ порождает идеал R, если он является делителем $x^n - 1$.

2.7 Задачи с решениями

<u>Задача</u> 2.1. *В поле* $F = \mathbb{F}_2^2$ *вычислить произведение*

$$P = \prod_{i=1}^{3}(x - \beta_i),$$

где β_1, β_2, β_3 *— все ненулевые элементы поля.*

Решение. Имеем

$$F = \mathbb{F}_2[x]/(x^2 + x + 1) = \{\, 0,\, 1 = \alpha^3,\, \alpha,\, \alpha + 1 = \alpha^2 \,\},$$

где α — порождающий элемент мультипликативной группы F^*. Поэтому

$$\begin{aligned} P = \prod_{i=1}^{3}(x - \beta_i) &= (x+1)(x+\alpha)(x+\alpha+1) = \\ &= (x+1)\left(x^2 + \alpha x + x + \alpha x + \alpha^2 + \alpha\right) = \\ &= (x+1)\left(x^2 + x + \alpha^2 + \alpha\right) = \\ &= \big(x^3 + (\alpha+1)x^2 + (\alpha+1)x^2 + (\alpha^2+\alpha+1)x + \\ &\qquad + \alpha^2 + \alpha\big) = x^3 + 1, \end{aligned}$$

как и следует по Теореме 2.4 о поле разложения:

$$(x - \beta_1) \cdot \ldots \cdot (x - \beta_{p^n - 1}) = x^{p^n - 1} - 1.$$

<u>Задача</u> 2.2. *Сумму ненулевых элементов поля* $\mathbb{F}_p$.

Решение. Все элементы $\mathbb{F}_p^*$ — корни уравнения

$$x^{p-1} - 1 = 0,$$

их *сумма* по теореме Виета есть коэффициент при x^{p-2} в этом уравнении), т. е. 0.

Задача 2.3 (Теорема Вильсона). *Доказать, что*

$$(p-1)! \equiv_p -1$$

для простого p.

Решение. При $p = 2$ утверждение тривиально.

При $p > 2$ порядки всех элементов мультипликативной циклической группы $\mathbb{F}_p^* = \{1, \ldots, p-1\}$ делят её порядок т. е. все они являются корнями уравнения

$$x^{p-1} - 1 = 0. \tag{$*$}$$

Других корней у этого уравнения нет (многочлен степени $p-1$ имеет не больше $p-1$ корней). По теореме Виета их произведение равно свободному члену многочлена $(*)$, т. е. -1.

Ещё одно Решение. Для $p = 2, 3$ утверждение тривиально. При $p > 3$ обозначим

$$P = 1 \cdot \underbrace{\overbrace{2 \cdot \ldots \cdot (p-2)}^{=\pi}}_{\text{чётное число сомножителей}} \cdot (p-1) = (p-1)!$$

и заметим, что $(p-1)^2 = p^2 - 2p + 1 \equiv_p 1$.

Легко видеть, что $\pi = 1$: каждый из элементов $2, \ldots, p-2$ поля $\mathbb{F}_p$ имеет единственный обратный, но это не $p-1$, т. к. он обратен сам к себе.

Отсюда $P = p-1$, или, что то же, $(p-1)! \equiv_p -1$.

Задача 2.4. *Построить поле из* 4-*х элементов.*

Решение. Это поле $\mathbb{F}_2^2$, оно может быть построено как фактор-кольцо $\mathbb{F}_2[x]/\left(a(x)\right)$, где $a(x)$ — неприводимый многочлен из $\mathbb{F}_2[x]$ степени 2. Но такой многочлен только один: $x^2 + x + 1$.

Следовательно, $\mathbb{F}_2^2 = \{\,0,\, 1,\, x,\, x+1\,\}$ и $x^2 = x+1$ (черту над элементами не пишем).

Таблицы сложения и умножения в построенном поле[4]:

$+$	1	x	$x+1$
1	0	$x+1$	x
x	$x+1$	0	1
$x+1$	x	1	0

$\times$	1	x	$x+1$
1	1	x	$x+1$
x	x	$x+1$	1
$x+1$	$x+1$	1	x

Альтернативная запись поля:

$$\mathbb{F}_2^2 = \left\{\,0,\, 1,\, x,\, x^2\,\right\},\; x^2 = x+1.$$

Задача 2.5. *Доказать, что если производная ненулевого многочлена над полем характеристики p тождественно равна 0, то он приводим.*

Решение. Имеем:

- производная монома $(x^k)' = kx^{k-1}$ тождественно равна 0 iff $k \equiv_p 0 \Leftrightarrow p \mid k$;
- $f' \equiv 0 \;\Rightarrow\;$ показатели степеней всех мономов многочлена f делятся на p;

[4] операции с 0 опускаем

- поэтому $f(x) = g(x^p) = g^p(x)$.

Задача 2.6. *Найти над* $\mathbb{Z}_2[x]$

$$\text{НОД}\left(x^5 + x^2 + x + 1,\, x^3 + x^2 + x + 1\right).$$

Решение. Воспользуемся алгоритмом Евклида:

$$x^5 + x^2 + x + 1 = (x^2 + x)(x^3 + x^2 + x + 1) + \underline{(x^2 + 1)},$$
$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)\underline{(x^2 + 1)}.$$

Ответ: НОД $\left(x^5 + x^2 + x + 1,\, x^3 + x^2 + x + 1\right) = x^2 + 1$.

Задача 2.7. *В расширении F простого поля $\mathbb{F}_2$, построенного с помощью образующего полинома*

$$a(x) = x^3 + x + 1$$

1. *построить таблицу соответствий между полиномиальным и степенным представлением его ненулевых элементов;*
2. *построить таблицу умножения элементов;*
3. *для каждого элемента поля указать обратные;*
4. *найти порождающие элементы поля;*
5. *найти минимальные многочлены всех элементов поля.*

Решение.
Поле $F = \mathbb{F}_2[x]/(x^3 + x + 1)$ содержит 8 элементов: 0 и степени $1, \ldots, 7$ порождающего элемента α. Можно полагать $x = \alpha$, т. к. $a(x)$ — примитивный многочлен.

1. Таблица соответствий между полиномиальным и степенным представлением его ненулевых элементов:

$x^3 = x+1$ степень x	1	x	x^2
x	$(0,$	$1,$	$0)$
x^2	$(0,$	$0,$	$1)$
$x^3 = x+1$	$(1,$	$1,$	$0)$
$x^4 = x^2+x$	$(0,$	$1,$	$1)$
$x^5 = x^2+x+1$	$(1,$	$1,$	$1)$
$x^6 = x^2+1$	$(1,$	$0,$	$1)$
$x^7 = 1$	$(1,$	$0,$	$0)$

2. Таблица умножения:

$\times$	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
x	x^2	$x+1$	x^2+x	x^2+x+1	x^2+1	1
x^2	$x+1$	x^2+x	x^2+x+1	x^2+1	1	x
x^3	x^2+x	x^2+x+1	x^2+1	1	x	x^2
x^4	x^2+x+1	x^2+1	1	x	x^2	$x+1$
x^5	x^2+1	1	x	x^2	$x+1$	x^2+x
x^6	1	x	x^2	$x+1$	x^2+x	x^2+x+1

3. Обратные элементы:

x	x^2	$x+1$	x^2+x	x^2+x+1	x^2+1
x^2+1	x^2+x+1	x^2+x	$x+1$	x^2	x

4. Поле F имеет $\varphi(7) = 6$ порождающих элементов: все кроме 0 и 1.

5. Находим м.м. элементов поля. Ясно, что
   - $m_0(x) = x$;
   - $m_1(x) = x + 1$;
   - остальные элементы F суть порождающие его мультипликативной группы, и их м.м. будут совпадать с $a(x)$.

Задача 2.8. *Перечислить все подполя поля* $GF\left(2^{30}\right)$.

Решение. Поле $\mathbb{F}_p^n$ содержит подполе $\mathbb{F}_p^k$ iff $k \mid n$, поэтому подполями $GF\left(2^{30}\right)$ будут поля $GF\left(2^k\right)$, $k \in D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, $GF\left(2\right)$ — *простейшее* и $GF\left(2^{30}\right)$ — *несобственное* подполя.

Задача 2.9. *Многочлен* $f(x) = x^5 + x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ *разложить на неприводимые множители.*

Решение. В поле $\mathbb{F}_2$ имеем $x - 1 = x + 1$.

1. $f(1) = 0 \Rightarrow 1$ — корень f.
2. Делим $f(x)$ на $x + 1$, получаем
$$x^4 + x^3 + x + 1 = f_1(x).$$
3. $f_1(1) = 0 \Rightarrow 1$ — корень f_1; $\frac{f_1}{x+1} = x^3 + 1 = f_2(x)$.
4. $f_2(1) = 0 \Rightarrow 1$ — корень f_2; $\frac{f_2}{x+1} = x^2 + x + 1$.
5. Многочлен $x^2 + x + 1$ неприводим.

Ответ: $x^5 + x^3 + x^2 + 1 \; = \; (x+1)^3(x^2+x+1)$.

Задача 2.10. *Многочлен* $f(x) \; = \; x^3+2x^2+4x+1 \in \mathbb{F}_5[x]$ *разложить на неприводимые множители.*

Решение.

1. $f(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^2 + 1 \; = \; 25 \; \equiv_5 0$,
   $(x-2) \; \equiv_5 \; (x+3)$
2. $$\begin{array}{rrrr|r} x^3 & +2x^2 & +4x & +1 & x+3 \\ \cline{5-5} x^3 & +3x^2 & & & x^2+4x+2 \\ \cline{1-2} & 4x^2 & +4x & & \\ & 4x^2 & +2x & & \\ \cline{2-3} & & 2x & +1 & \\ & & 2x & +1 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$
3. Перебором убеждаемся, что многочлен x^2+4x+2 неприводим в $\mathbb{F}_5$.

Ответ: $x^3 + 2x^2 + 4x + 1 \; = \; (x+3)(x^2+4x+2)$.

Задача 2.11. *Многочлен* $f(x) = x^4 + x^3 + x + 2 \in \mathbb{F}_3[x]$ *разложить на неприводимые множители.*

Решение.

1. 0, 1, 2 — не корни $f(x) \; \Rightarrow \; f(x)$ линейных делителей не содержит.
2. Неприводимые многочлены над $\mathbb{F}_3$ степени 2:
   $$x^2+1, \quad x^2+x+2, \quad x^2+2x+2.$$

3. Подбором получаем: $f(x) = (x^2+1)(x^2+x+2)$.

Ответ: $x^4+x^3+x+2 = (x^2+1)(x^2+x+2)$.

Задача 2.12. *Многочлен*

$$f(x) = x^4+3x^3+2x^2+x+4 \in \mathbb{F}_5[x]$$

разложить на неприводимые множители.

Решение. 1. $f(x) \neq 0$ ни при каком $x = 0,1,2,3,4$, т. е. $f(x)$ не имеет линейных делителей.

2. Перебирая неприводимые многочлены степени 2 над $\mathbb{F}_5$, получаем

Ответ: $f(x) = (x^2+x+1)(x^2+2x+4)$.

Задача 2.13. *Разложить на неприводимые множители все нормированные многочлены 3-й степени из $\mathbb{F}_2[x]$.*

Решение. Вычисляя значения при $x = 0,\ 1$ всех нормированных многочленов 3-й степени из $\mathbb{F}_2[x]$, определяем их линейные делители и получаем, что

$$\begin{aligned}
&f_1(x) = x^3 = x\cdot x\cdot x,\\
&f_2(x) = x^3+1 = (x+1)(x^2+x+1),\\
&f_3(x) = x^3+x = x(x+1)^2,\\
&f_4(x) = x^3+x^2 = x^2(x+1),\\
&f_5(x) = x^3+x+1 \text{ — неприводим},\\
&f_6(x) = x^3+x^2+1 \text{ — неприводим},
\end{aligned}$$

$$f_7(x) = x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 1),$$
$$f_8(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)^3.$$

Задача 2.14. *Найти все нормированные неприводимые многочлены 2-й степени над $GF(3)$.*

Решение. Должно быть: $f(0) \neq 0,\ f(1) \neq 0,\ f(2) \neq 0.$

Перебором коэффициентов $b, c \in \{\,0,\ 1,\ 2\,\}$ в выражении $x^2 + bx + c$, находим подходящие многочлены:

$$f_1(x) = x^2 + 1,$$
$$f_2(x) = x^2 + x + 2,$$
$$f_3(x) = x^2 + 2x + 2.$$

Задача 2.15. *Найти все нормированные многочлены 3-й третьей степени, неприводимые над полем вычетов по модулю 3.*

Решение. Должно быть: $f(0) \neq 0,\ f(1) \neq 0,\ f(2) \neq 0.$

$$f_1(x) = x^3 + 2x + 1,$$
$$f_2(x) = x^3 + 2x + 2,$$
$$f_3(x) = x^3 + x^2 + 2,$$
$$f_4(x) = x^3 + 2x^2 + 1,$$
$$f_5(x) = x^3 + x^2 + x + 2,$$
$$f_6(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1,$$
$$f_7(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1,$$
$$f_8(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 2.$$

Задача 2.16. *1. Проверить, что*

$$F = \mathbb{F}_7[x]/\big(x^2 + x - 1\big)$$

является полем.

2. В F найти обратный элемент к $1 - x$.

Решение. 1. $a(x) = x^2 + x - 1$, $a(0) = 6$, $a(1) = 1$, $a(2) = 5$, $a(3) = 4$, $a(4) = 6$, $a(5) = 1$, $a(6) = 6$, т. е. многочлен $a(x)$ — *неприводим* в $\mathbb{F}_7$ и F — поле ($\cong \mathbb{F}_7^2$).

2. $\mathbb{F}_7^2 = \big\{\, ax + b \mid a, b \in \mathbb{F}_7,\ x^2 = 1 - x = 6x + 1 \,\big\}$

$$(ax + b) \cdot (6x + 1) = \ldots = (2a + 6b)x + (6a + b) = 1$$

$$\begin{cases} 6a + b & = 1 \\ a + 3b & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Ответ: $(1 - x)^{-1} = x + 2$ в F.

Задача 2.17. *Найти порядок элемента $\beta = x + x^2$ в мультипликативной группе*

1. поля $F_1 = \mathbb{F}_2[x]/\big(x^4 + x + 1\big)$;

2. поля $F_2 = \mathbb{F}_2[x]/\big(x^4 + x^3 + 1\big)$.

Решение. $\beta = x + x^2 = x(x + 1)$.

Мультипликативная группа указанных полей состоит из $2^4 - 1 = 15$ элементов.

Примарное разложение 15: $15 = 3 \cdot 5$, поэтому равенство $\beta^d = 1$ нужно проверить для $d = \frac{15}{5} = 3$ и $d = \frac{15}{3} = 5$.

1. $\underline{x^4 = x + 1}$

$$\begin{aligned}
\beta^2 &= x^4 + x^2 = x^2 + x + 1, \\
\beta^3 &= x(x+1)(x^2+x+1) = x(x^3+1) = \\
&= x^4 + x = x + 1 + x = 1.
\end{aligned}$$

Ответ: В поле F_1 $\operatorname{ord}\beta = 3$.

2. $\underline{x^4 = x^3 + 1}$

$$\begin{aligned}
\beta^2 &= x^4 + x^2 = x^3 + x^2 + 1, \\
\beta^3 &= x(x+1)(x^3+x^2+1) = \\
&= x(x^4+x^2+x+1) = x(x^3+x^2+x) = \\
&= x^4 + x^3 + x^2 = x^2 + 1 \neq 1, \\
\beta^5 &= x^2x^3 = (x^3+x^2+1)(x^2+1) = \\
&= (x^5+x^4+x^2+x^3+x^2+1) = \ldots \\
\ldots &= (x^3+1)\,x = x^4 + x = x^3 + x + 1 \neq 1.
\end{aligned}$$

Ответ: В поле F_2 $\operatorname{ord}\beta = 15$.

Задача 2.18. *Найти количество нормированных неприводимых многочленов*

1) *степени* 7 *над полем* $\mathbb{F}_2$*;*
2) *степени* 6 *над полем* $\mathbb{F}_5$.

Решение.

$$\sum_{d|n} d\cdot((d)) = p^n.$$

1. $\underline{((7))\ \text{над}\ \mathbb{F}_2}$

$$\sum_{d|7} d((d)) = 2^7 = 1\cdot((1)) + 7\cdot((7)) = 128.$$

$((1)) = 2$: это x и $x+1$, отсюда $((7)) = \frac{128-2}{7} = 18$.

2. $((6))$ над $\mathbb{F}_5$

$$((6)) = \frac{1}{6}\sum_{d|6}\mu(d)\,5^{\frac{6}{d}} = \frac{1}{6}\big[\,\mu(1)5^6+\mu(2)5^3+$$

$$+\mu(3)5^2+\mu(6)5\,\big] = \frac{15625-125-25+5}{6} = 2\,580.$$

Задача 2.19. *Для поля* $F = \mathbb{F}_3[x]/\big(-2x^2+x+2\big)$ *построить таблицу соответствий между полиномиальным и степенным представлением его ненулевых элементов.*

С помощью данной таблицы вычислить выражение

$$S = \frac{1}{2x+1} - \frac{2(2x)^7}{(x)^9(x+2)}\,.$$

Решение. $\operatorname{char} F = 3$, поэтому
$-2x^2+x+2 \equiv_3 x^2+x+2 = a(x)$.

$F = \mathbb{F}_3^2$, F^* содержит $3^2-1=8$ элементов и все они могут быть представлены как степени $\alpha^i, i=\overline{1,8}$ примитивного элемента α.

Если элемент x окажется примитивным, то положим $\alpha = x$ и, поскольку вычисления в $\mathbb{F}_3^2$ проводятся по $\bmod\ a(x)$, будем иметь

$$x^2+x+2 = 0 \Rightarrow x^2 = -x-2 = 2x+1.$$

Найдём порядок элемента x: т. к. $8 = 2^3$, $\frac{8}{2} = 4$, проверим равенство $x^4 = 1$:

$$x^4 = (x^2)^2 = (2x+1)^2 = x^2+x+1 = \cancel{2x}+1+\cancel{x}+1 = 2 \neq 1,$$

т. е. x — примитивный элемент F: $\operatorname{ord} x = 8$, $x^8 = 1$.

Повезло: $a(x) = x^2+x+2$ оказался примитивным многочленом над $\mathbb{F}_3$, иначе примитивный элемент поля F пришлось бы искать.

Теперь вычислим значение заданного выражения. Имеем $2^8 = 256 \equiv_3 1$, $x+2 = -x^2$, $x^4 = 2$ и далее:

$$S = \frac{1}{2x+1} - \frac{(2x)^7(2)}{(x)^9(x+2)} = \frac{1}{x^2} + \frac{x^7}{x^9x^2} = \frac{x^8}{x^2} + \frac{x^7x^8}{x^{11}} =$$
$$= x^6+x^4 = (x^2)^3+2 = (2x+1)^3+2 = 2x^3+\cancel{1}+\cancel{2} =$$
$$= 2x(2x+1) = x^2+2x = 2x+1+2x = x+1.$$

<u>Задача</u> 2.20. *Для поля* $F = \mathbb{F}_3[x]/\big(x^2+1\big) \cong \mathbb{F}_3^2$ *построить таблицу соответствий между полиномиальным и степенным представлением для всех ненулевых элементов поля.*

Решение. В данном 9-элементном поле $x^2+1=0 \Rightarrow x^2 = -1 \equiv_3 2$.

1. Найдём порядок элемента x, для чего проверим равенство $x^4 = 1$ (т. к. $9-1 = 8 = 2^3$, $\frac{8}{2} = 4$):

$$x^4 = (x^2)^2 = 4 \equiv_3 1.$$

Следовательно $\operatorname{ord} x = 4$ и элемент x не является генератором группы F^* (и x^2+1 — не есть примитивный многочлен над $\mathbb{F}_3$:

$x^4-1=x^4+2 = (x^2+1)(x^2+2))$.

2. Проверим на примитивность элемент $x+1$:

$$(x+1)^4 = (x+1)(x+1)^3 = (x+1)(x^3+1) =$$
$$= (x+1)(2x+1) = 2x^2+\cancel{x}+\cancel{2}x+1 = 4+1 = 2 \neq 1$$

т. е. $\alpha = x+1$ оказался примитивным элементом. Его степени:

$$\begin{aligned}
\alpha^1 &= x+1, & \alpha^5 &= 2(x+1) = 2x+2,\\
\alpha^2 &= x^2+2x+1 = 2x, & \alpha^6 &= \alpha^2\cdot\alpha^4 = 4x = x,\\
\alpha^3 &= 2x(x+1) = 2x+1, & \alpha^7 &= x(x+1) = x+2,\\
\alpha^4 &= 4x^2 = x^2 = 2, & \alpha^8 &= (\alpha^4)^2 = 4 = 1.
\end{aligned}$$

Замечание: вычисление очередной степени α^{i+j} часто бывает удобным провести как $\alpha^i\cdot\alpha^j$, а не как $\alpha\cdot\alpha^{i+j-1}$.

<u>Задача</u> 2.21. *В факторкольце* $R = \mathbb{F}_3[x]/\big(x^4+1\big)$ *найти все элементы главного идеала* $\big(x^2+x+2\big)$.

Решение. 1. Сначала проверим, является ли многочлен $f(x)=x^2+x+2$ делителем x^4+1?

$x^4+1 = (x^2+x+2)\cdot(x^2+2x+2)$ — да, является

Поэтому искомый идеал составят многочлены из R, кратные $f(x)$:

$$\big(x^2+x+2\big) = \left\{\,(x^2+x+2)(ax+b) \mid a,b\in\mathbb{F}_3, x^4=1\,\right\}.$$

2. Проведём умножение:

$$(x^2+x+2)(ax+b) \;=\; ax^3+(a+b)\,x^2+(2a+b)\,x+2b.$$

Теперь, перебирая все возможные значения $a, b \in \mathbb{F}_3$, найдём все элементы идеала $\big(x^2+x+2\big)$:

a	b	$ax^3+(a+b)x^2+(2a+b)x+2b$
0	0	0
0	1	x^2+x+2
0	2	$2x^2+2x+1$
1	0	x^3+x^2+2x
1	1	x^3+2x^2+2
1	2	x^3+x+1
2	0	$2x^3+2x^2+x$
2	1	$2x^3+2x+2$
2	2	$2x^3+x^2+1$

А если бы $f(x) \not| a(x)$? Тогда кратные $f(x)$ составят в R идеал $(\text{НОД}(f(x), a(x)))$.

Задача 2.22. *В поле* $F = \mathbb{F}_7[x]/\big(x^4+x^3+x^2+3\big)$ *найти элемент, обратный к* x^2+x+3 .

Решение. Обратный элемент к x^2+x+3 находим, решая соотношение Безу

$$\underbrace{(x^4+x^3+x^2+3)\cdot\chi(x)}_{=0}+(x^2+x+3)\cdot y(x) \;=\; 1 \quad (*)$$

с помощью расширенного алгоритма Евклида: им будет полином $y(x)$. Вычислять полином $\chi_i(x)$ нет необходимости.

Шаг 0. // *Инициализация*

$$\begin{aligned} r_{-2}(x) &= x^4 + x^3 + x^2 + 3, \\ r_{-1}(x) &= x^2 + x + 3, \\ y_{-2}(x) &= 0, \\ y_{-1}(x) &= 1. \end{aligned}$$

Шаг 1. // *Делим* $r_{-2}(x)$ *на* $r_{-1}(x)$ *с остатком*

$$\begin{aligned} r_{-2}(x) &= r_{-1}(x)q_0(x) + r_0(x), \\ q_0(x) &= x^2 + 5, \\ r_0(x) &= 2x + 2, \\ y_0(x) &= y_{-2}(x) - y_{-1}(x)q_0(x) = \\ &= -q_0(x) = -x^2 - 5. \end{aligned}$$

Шаг 2. // *Делим* $r_{-1}(x)$ *на* $r_0(x)$ *с остатком*

$$\begin{aligned} r_{-1}(x) &= r_0(x)q_1(x) + r_1(x), \\ q_1(x) &= 4x, \\ r_1(x) &= 3, \\ y_1(x) &= y_{-1}(x) - y_0(x)q_1(x) = \\ &= 1 + 4x(x^2 + 5) = 4x^3 + 6x + 1. \end{aligned}$$

Алгоритм заканчивает свою работу на Шаге 2, т. к. степень 0 очередного остатка $r_1(x) = 3$ равна степени многочлена в правой части $(*)$: 1 — *многочлен* 0*-й степени.*

В результате работы алгоритма получено:

$$(x^2 + x + 3)(\underbrace{4x^3 + 6x + 1}_{= y_1(x)}) = r_1(x) = 3.$$

Чтобы найти $y(x)$, нужно домножить $y_1(x)$ на $3^{-1} \equiv_7 5$:

$$y(x) = 5y_1(x) = 5 \cdot (4x^3 + 6x + 1) = 6x^3 + 2x + 5.$$

Задача 2.23. *В поле* $F = \mathbb{F}_5[x]/\big(x^2+3x+3\big)$ *найти обратную к матрице*

$$M = \begin{pmatrix} 3x+4 & x+2 \\ x+3 & 3x+2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для матриц размера 2×2 обратная матрица записывается в виде

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

1. Сначала вычислим $\det M = ad - bc$ с учётом $x^2 = 2x+2$:

$$\begin{aligned} \det M &= (3x+4)(3x+2) - (x+2)(x+3) = \\ &= 4x^2 + 3x + 3 - x^2 - 1 = \\ &= 3x^2 + 3x + 2 = 3(2x+2) + 3x + 2 = 4x + 3. \end{aligned}$$

2. Найдём обратный к $4x+3$ элемент, решая соотношение

$$(x^2+3x+3)a(x) + (4x+3)b(x) = 1$$

с помощью расширенного алгоритма Евклида:

Шаг 0. // *Инициализация*

$$\begin{aligned} r_{-2}(x) &= x^2+3x+3,\\ r_{-1}(x) &= 4x+3,\\ y_{-2}(x) &= 0,\\ y_{-1}(x) &= 1. \end{aligned}$$

Шаг 1. // *Делим* $r_{-2}(x)$ *на* $r_{-1}(x)$ *с остатком*

$$\begin{aligned} r_{-2}(x) &= r_{-1}(x)q_0(x)+r_0(x),\\ q_0(x) &= 4x+4,\\ r_0(x) &= 1, \quad // \ \deg r = 0 \ \Rightarrow \ \textit{ОСТАНОВ}\\ y_0(x) &= y_{-2}(x)-y_{-1}(x)q_0(x) = \\ &= -q_0(x) = -4x-4 = x+1. \end{aligned}$$

3. Вычислим обратную матрицу

$$M^{-1} = (x+1)\begin{pmatrix} 3x+2 & 4x+3\\ 4x+2 & 3x+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3 & 1\\ 4x & 3x \end{pmatrix}.$$

Задача 2.24. *Разложить на неприводимые множители многочлен*

$$f(x) = x^{11}+x^9+x^8+x^4+x^3+x^2+1 \in \mathbb{F}_2[x].$$

Решение. 1. Сначала пытаемся найти корни $f(x)$ в $\mathbb{F}_2$: получим $f(0)=f(1)=1$, и значит $f(x)$ не имеет корней в $\mathbb{F}_2$ т. е. не имеет линейных множителей.

2. Далее ищем делители $f(x)$ среди неприводимых многочленов степени 2.

Таковых над $\mathbb{F}_2$ только один — x^2+x+1.

При делении $f(x)$ на x^2+x+1, получаем

$$f(x) = (x^2+x+1)\times$$

$$\times\,(\underbrace{x^9+x^8+x^7+x^6+x^4+x^3+x^2+x+1}_{g(x)}).$$

Делим частное $g(x)$ на x^2+x+1:

$$\begin{aligned} g(x) &= x^9+x^8+x^7+x^6+x^4+x^3+x^2+x+1 = \\ &= (x^2+x+1)\cdot(x^7+x^4+x^3+x^2+x+1)+x \end{aligned}$$

— не делится нацело, т. е. x^2+x+1 — делитель $f(x)$ кратности 1.

3. Неприводимых многочленов 3-й степени над $\mathbb{F}_2$ только два: x^3+x+1 и x^3+x^2+1.
Пробуем поделить $g(x)$ на x^3+x+1:

$$\begin{aligned} &x^9+x^8+x^7+x^6+x^4+x^3+x^2+x+1 = \\ &\qquad\qquad = (x^3+x+1)(\underbrace{x^6+x^5+x^3+x^2+1}_{h(x)}) \end{aligned}$$

— делится!

Производя далее попытки деления $h(x)$ на неприводимые многочлены 3-й степени, получаем

$$\begin{aligned} &x^6+x^5+x^3+x^2+1 = \\ &\qquad = (x^3+x+1)\cdot(x^3+x^2+x+1)+x^2, \\ &x^6+x^5+x^3+x^2+1 = (x^3+x^2+1)\cdot x^3+x^2+1. \end{aligned}$$

Поскольку многочлен $h(x)$ 6-ой степени не имеет делителей 3-й и меньших степеней, то он является неприводимым.

Ответ: В $\mathbb{F}_2[x]$ справедливо разложение

$$f(x) = x^{11} + x^9 + x^8 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 =$$
$$= (x^2 + x + 1)(x^3 + x + 1)(x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1).$$

Задача 2.25. *Найти поле характеристики 3, в котором многочлен $f(x) = x^3 + x + 2 \in \mathbb{F}_3[x]$ раскладывается на линейные множители и найти в нём все корни данного многочлена.*

Решение. 1. Найдём разложение многочлена $f(x)$ на *неприводимые* множители над $\mathbb{F}_3$.

- Ищем корни: $f(0) = 2$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$. Поскольку $x - 2 \equiv_3 x + 1$, то $f(x) = (x + 1)(x^2 + 2x + 2)$.
- Пробуем разложить многочлен $g(x) = x^2 + 2x + 2$: он не имеет корней в $\mathbb{F}_3$, его степень $= 2 \Rightarrow$ он неприводим.
- Окончательно: $f(x) = (x + 1)(x^2 + 2x + 2) \in \mathbb{F}_3[x]$.

2. Известно, что если $g(x)$ — неприводимый многочлен степени n над $\mathbb{F}_p$, то он:

- в поле своего расширения $F = \mathbb{F}_p[x]/(g(x))$ раскладывается на n линейных множителей —
$$g(x) = (x - \alpha) \cdot (x - \alpha^p) \cdot \left(x - \alpha^{p^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(x - \alpha^{p^{n-1}}\right),$$
где α – произвольный корень $g(x)$ в F;
- не имеет корней ни в каком конечном поле, содержащим менее, чем p^n элементов.

3. Рассмотрим поле $\mathbb{F}_3[x]/(g(x))$ расширения многочлена $g(x) = x^2 + 2x + 2$.

В этом поле если α — корень $g(x)$, то и α^3 — тоже его корень. Вычисляем:

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= -2\alpha - 2 = \alpha + 1,\\ \alpha^3 &= \alpha(\alpha+1) = \alpha^2 + \alpha = 2\alpha + 1\end{aligned}$$

Построенное поле $\mathbb{F}_3[x]/\big(x^2+2x+2\big)$ — содержит найденный ранее корень 2, поэтому многочлен $f(x)$ в этом поле раскладывается на следующие линейные множители:

$$f(x) = x^3 + x + 2 = (x-2)(x-\alpha)(x-2\alpha-1) = \\ = (x+1)(x+2\alpha)(x+\alpha+2).$$

4. Определить корни многочлена

$$g(x) = (x-\alpha)(x-2\alpha-1)$$

в поле $\mathbb{F}_3[x]/\big(x^2+2x+2\big)$ легко: всегда можно взять $\alpha = x$, откуда второй корень $\alpha^3 = 2\alpha + 1 = 2x + 1$.

Ответ: многочлен $f(x) = x^3 + x + 2$ имеет корни 2, x, $2x+1$ в поле $\mathbb{F}_3[x]/\big(x^2+2x+2\big) = GF(3^2)$.

Задача 2.26. *Найти м.м. для всех элементов β поля $F = \mathbb{F}_2[x]/\big(x^4+x+1\big)$.*

Решение. $\beta \in \{0, 1, \alpha, \ldots, \alpha^{14}\} = F$, $x^4 = x + 1$.

$\beta = 0$: $m_0(x) = x$.
$\beta = 1$: $m_1(x) = x + 1$.

$\beta = \alpha$: сопряжённые с α элементы — α^2, α^4, α^8 и

$$(x-\alpha)(x-\alpha^2)(x-\alpha^4)(x-\alpha^8) = \ldots$$
$$\ldots = x^4 + x + 1 = 0.$$

Это означает, что x^4+x+1 — примитивный многочлен и $m_\alpha(x) = x^4 + x + 1$.

$\beta = \alpha^3$: сопряжённые с α^3 элементы суть α^6, α^{12}, $\alpha^{24} = \alpha^9$, их м.м. —

$$m_{\alpha^3}(x) = (x-\alpha^3)(x-\alpha^6)(x-\alpha^9)(x-\alpha^{12}) =$$
$$= x^4 + \left(\alpha^3 + \alpha^6 + \alpha^9 + \alpha^{12}\right)x^3 +$$
$$+ \left(\alpha^3\alpha^6 + \alpha^3\alpha^9 + \alpha^3\alpha^{12} + \alpha^6\alpha^9 + \alpha^6\alpha^{12} + \alpha^9\alpha^{12}\right)x^2 +$$
$$+ \left(\alpha^3\alpha^6\alpha^9 + \alpha^3\alpha^6\alpha^{12} + \alpha^3\alpha^9\alpha^{12} + \alpha^6\alpha^9\alpha^{12}\right)x +$$
$$+ \left(\alpha^3\alpha^6\alpha^9\alpha^{12}\right) = x^4 + \left(\alpha^3 + (\alpha^3+\alpha^2) + (\alpha^3+\alpha) +\right.$$
$$\left. + (\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)\right)x^3 + (\ldots)\,x^2 + (\ldots)\,x + \alpha^{30} =$$
$$= x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

$\beta = \alpha^5$: единственный сопряжённый с α^5 элемент — α^{10} (т. к. $\alpha^{20} = \alpha^5$), их м.м. —

$$m_{\alpha^5}(x) = (x-\alpha^5)(x-\alpha^{10}) = x^2 + x + 1.$$

$\beta = \alpha^7$: сопряжённые с α^7 элементы — α^{14}, $\alpha^{28} = \alpha^{13}$, $\alpha^{56} = \alpha^{11}$, их м.м. —

$$m_{\alpha^7}(x) = (x-\alpha^7)(x-\alpha^{11})(x-\alpha^{13})(x-\alpha^{14}) =$$
$$= x^4 + x^3 + 1.$$

Задача 2.27. *Найти минимальный многочлен элемента α^3, где α — примитивный элемент поля*

$$F = \mathbb{F}_5[x]/\left(x^2+x+2\right).$$

Решение. 1. Любой многочлен в поле характеристики 5 вместе с корнем α^3 содержит все сопряжённые с ним $(\alpha^3)^5 = \alpha^{15}$, $(\alpha^3)^{5^2} = \alpha^{75}$, $(\alpha^3)^{5^3} = \alpha^{375}$ и т.д.

2. В поле F имеем $\alpha^{5^2-1} = \alpha^{24} = 1$, и сопряжённым с α^3 будет только элемент α^{15}, т. к. $\alpha^{75} = \alpha^{24\cdot 3+3} = \alpha^3$. Поэтому минимальный многочлен элемента α^3 — квадратный:

$$m_{\alpha^3}(x) = (x-\alpha^3)(x-\alpha^{15}) = x^2 - (\alpha^3+\alpha^{15})x + \alpha^{18}.$$

3. Найдём коэффициенты данного многочлена, учитывая $\alpha^2 = -\alpha - 2 = 4\alpha + 3$:

$$\begin{aligned}
\alpha^3 &= \alpha\cdot\alpha^2 = \alpha(4\alpha+3) = 4\alpha^2+3\alpha = \\
&= 4(4\alpha+3)+3\alpha = 4\alpha+2, \\
\alpha^{15} &= (\alpha^3)^5 = (4\alpha+2)^5 = 4\alpha^5+2 = \\
&= 4\alpha^2\alpha^3+2 = 4(4\alpha+3)(4\alpha+2)+2 = \\
&= 4(\alpha^2+1)+2 = 4(4\alpha+4)+2 = \alpha+3, \\
\alpha^3+\alpha^{15} &= 4\alpha+2+\alpha+3 = 0, \\
\alpha^{18} &= \alpha^3\alpha^{15} = (4\alpha+2)(\alpha+3) = \\
&= 4(4\alpha+3)+4\alpha+1 = 3.
\end{aligned}$$

Ответ: $m(x) = x^2+3$.

Задание: убедитесь, что x — примитивный элемент поля F.

Задача 2.28. *Найти корни многочлена*

$$f(x) = x^3+3x^2+4x+4 \in \mathbb{F}_5[x].$$

Решение. Вычисляем значения $f(x)$ для $x \in GF(5) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$:

$$f(0) = 4, \; f(1) = 2, \; f(2) = 1, \; f(3) = 0.$$

Таким образом, $x = 3$ — корень $f(x)$.

Деля «уголком» $f(x)$ на $f_1(x) = x - 3$ (или на $x+2$), получим $x^3+3x^2+4x+4 = (x-3)\cdot(x^2+x+2)$.

Перебором элементов $x \in GF(5)$ убеждаемся $f_2(x) = x^2 + x + 2$ — неприводимый многочлен.

В поле $\mathbb{F}_5[x]/\big(x^2 + x + 2\big)$ корни многочлена $f_2(x) = 0$ суть $\{\, x, \, x^5 \,\}$ и $x^2 = -x - 2 = 4x + 3$.

Вычисляем:

$$\begin{aligned} x^5 &= \big(x^2\big)^2 x = x(4x+3)^2 = x(x^2+4x+4) = \\ &= x(4x+3+4x+4) = x(3x+2) = 3x^2 + 2x = \\ &= 2x + 4 + 2x = 4x + 4. \end{aligned}$$

Ответ: $\{\, 3, \, x, \, 4x + 4 \,\}$.

Задача 2.29. *Является ли многочлен*

$$f(x) = x^2 + x + 2 \in \mathbb{F}_5[x]$$

примитивным?

Решение. Подстановкой в $f(x)$ всех элементов $0, \ldots, 4$ поля $\mathbb{F}_5$ убеждаемся, что данный многочлен 2-й степени не имеет линейных делителей и, следовательно, *неприводим*.

Порядок мультипликативной группы $GF(5^2)$ есть $25 - 1 = 24 = 2^3 \cdot 3$. Определим порядок элемента её x, для которого $x^2 = -x - 2 = 4x + 3$.

Поскольку простые делители 24 суть 2 и 3, проверим равенство $x^d = 1$ для $d \in \{\, \frac{24}{2} = 12, \, \frac{24}{3} = 8 \,\}$. Имеем:

$$
\begin{aligned}
x^4 &= (x^2)^2 = (4x+3)^2 = x^2+4x+4 = \ldots \\
&\qquad \ldots = 3x+2 \neq 1, \\
x^8 &= (x^4)^2 = (3x+2)^2 = -x^2+2x+4 = \ldots \\
&\qquad \ldots = 3x+1 \neq 1. \\
x^{12} &= x^8x^4 = (3x+1)(3x+2) = -x^2+4x+2 = \ldots \\
&\qquad \ldots = 4 \neq 1.
\end{aligned}
$$

Следовательно $\operatorname{ord} x = 24$ и рассматриваемый многочлен *примитивен* в поле $\mathbb{F}_5[x]/\big(x^2+x+2\big)$.

Задача 2.30. *Для бинома* $x^{40}-1 \in \mathbb{F}_5[x]$ *определить количество и степени неприводимых сомножителей.*

В каком минимальном поле расширения $\mathbb{F}_5[x]$ *данный бином раскладывается на линейные множители?*

Решение. Поскольку $n = 40 = 5 \times 8$, то корни бинома $x^{40}-1$ суть все[5] корни x^8-1, но 5-й кратности.

Рассмотрим разложение многочлена x^8-1 над $\mathbb{F}_5$. Относительно умножения на 5 вычеты по модулю 8 $\{\,\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{7}\,\}$ разбиваются на орбиты:

$$\{\,\overline{0}\,\}, \{\,\overline{1}, \overline{5}\,\}, \{\,\overline{2}\,\}, \{\,\overline{3}, \overline{7}\,\}, \{\,\overline{4}\,\}, \{\,\overline{6}\,\}.$$

Пояснение: $5 \cdot 5 = 25 \equiv_8 1$, $2 \cdot 5 = 10 \equiv_8 2$ и т.д.

Поэтому:

- бином $x^8-1 \in \mathbb{F}_5[x]$ разлагается в произведение 4-х линейных и 2-х неприводимых квадратных многочленов;

[5] они все различны

- бином $x^{40}-1$ разлагается в произведение 20-и многочленов степени 1 (4-х линейных кратности 5 каждый) и 10-и неприводимых многочленов степени 2 (2-х квадратных кратности 5 каждый);
- максимальная степень неприводимых делителей-многочленов есть 2, следовательно полем расширения данного бинома будет $\mathbb{F}_5^2$.

Замечание. В данном случае разложение $x^8-1 \in \mathbb{F}_5[x]$ на неприводимые множители легко находится (первые 3 равенства справедливы в любом кольце):

$$\begin{aligned}
x^8-1 &= (x^4-1)(x^4+1),\\
x^4-1 &= (x^2-1)(x^2+1),\\
x^2-1 &= (x-1)(x+1),\\
x^2+1 &\equiv_5 x^2-4 = (x-2)(x+2),\\
x^4+1 &\equiv_5 x^4-4 = (x^2-2)(x^2+2),\\
&\text{итого в } \mathbb{F}_5[x]:\\
x^8-1 &= (x+1)(x-1)(x+2)(x-2)(x^2+2)(x^2-2).
\end{aligned}$$

И далее

$$x^{40}-1 = (x+1)^5(x-1)^5(x+2)^5(x-2)^5(x^2+2)^5(x^2-2)^5.$$

Задача 2.31. *Найти корни* $f(x)=x^2+x+1=0$, *если* (1) $f(x)\in\mathbb{F}_2[x]$; (2) $f(x)\in\mathbb{F}_3[x]$; (3) $f(x)\in\mathbb{F}_5[x]$.

Решение. $\deg f(x)=2$ и поэтому $f(x)$ имеет 2 корня.

(1) Полином $f(x)$ неприводим над $\mathbb{F}_2 \Rightarrow$ его корни x и x^2.

(2) Полином $f(x)$ приводим над $\mathbb{F}_3$:

$$x^2 + x + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2,$$

поэтому $f(x)$ над $\mathbb{F}_3$ имеет корень 1 степени 2.

(3) Полином $f(x)$ неприводим над $\mathbb{F}_5 \Rightarrow$ его корни x и x^5.

<u>Задача</u> 2.32. *Решить уравнение*

$$f(x) = 2x^4 + x^3 + 4x^2 + 4 = 0, \quad \textit{где } f(x) \in \mathbb{F}_5[x].$$

Решение. Вычисляем значения $f(x)$ для всех $x \in \mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$: $f(0) = 4$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$ и т. о. $x = 2$ — корень $f(x)$.

Деля «уголком» $f(x)$ на $f_1(x) = x - 2 = x + 3$, получим $2x^4 + x^3 + 4x^2 + 4 = (x+3)\cdot(2x^3 + 4x + 3)$.

Для удобства нормируем частное $2x^3 + 4x + 3$: т. к. $2^{-1} = 3$, то вместо уравнения $2x^3 + 4x + 3 = 0$ можно решать уравнение

$$f_2(x) = 3\cdot(2x^3 + 4x + 3) = x^3 + 2x + 4 = 0.$$

Перебором элементов $x \in \mathbb{F}_5$ —

$$f(0) = 4, \ f(1) = 2, \ f(2) = 1, \ f(3) = 2, \ f(4) = 1,$$

убеждаемся, что $f_2(x) = x^3 + 2x + 4$ — неприводимый многочлен[6].

В поле $\mathbb{F}_5[x]/\big(x^3 + 2x + 4\big)$ корнями многочлена $f_2(x) = 0$ будут x, x^5, x^{25}.

[6]а если бы это был многочлен 4-й степени?

Вычисляем — с учётом $x^3 = -2x - 4 = 3x + 1$:

$$\begin{aligned} x^5 &= x^2(3x+1) = 3x^3 + x^2 = 4x + 3 + x^2 = \\ &= x^2 + 4x + 3; \\ x^{25} &= \bigl(x^5\bigr)^5 = \bigl(x^2+4x+3\bigr)^5 = x^{10} + 4^5 x^5 + 3^5 = \\ &= x^{10} + 4(x^2+4x+3) + 3 = x^{10} + 4x^2 + x. \end{aligned}$$

(поскольку $4^5 = 2^{10} = 102\underline{4}$ и $3^5 = 81 \cdot 3 = 24\underline{3}$).

Найдём отдельно x^{10}:

$$\begin{aligned} x^{10} &= \bigl(x^5\bigr)^2 = \bigl(x^2+4x+3\bigr)^2 = \\ &= x^4 + x^2 + 3^2 + 3x^3 + 4x + x^2 = \\ &= x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 4x + 4 = \\ &= \cancel{3}x^2 + \cancel{x} + \cancel{4}x + 3 + \cancel{2}x^2 + 4x + 4 = 4x + 2. \end{aligned}$$

Продолжаем:

$$x^{25} = x^{10} + 4x^2 + x = \cancel{4}x + 2 + 4x^2 + \cancel{x} = 4x^2 + 2.$$

Ответ: уравнение $f(x) = 2x^4 + x^3 + 4x^2 + 4 = 0$, где $f(x) \in \mathbb{F}_5[x]$ имеет корни 2, x, x^2+4x+3, $4x^2+2$ в поле $F = \mathbb{F}_5[x]/\bigl(x^3+2x+4\bigr)$ (поскольку корень $2 \in F$).

<u>Задача</u> 2.33. *Решить уравнение*

$$f(x) = x^8 + x^4 + x^2 + x + 1 = 0, \quad \textit{где } f(x) \in \mathbb{F}_2[x].$$

Решение. В таблицах неприводимых многочленов данный многочлен отсутствует.

Подбором находим, что $f(x)$ разлагается в произведение двух неприводимых над $\mathbb{F}_2$ многочленов:

$$x^8+x^4+x^2+x+1 = \underbrace{(x^4+x^3+1)}_{f_1(x)} \cdot \underbrace{(x^4+x^3+x^2+x+1)}_{f_2(x)}.$$

Уравнения $f_1(x) = 0$ и $f_2(x) = 0$ ранее были решены: их корни соответственно суть

$x,\ x^2,\ x^3+1,\ x^3+x^2+x$ в поле $F_1 = \mathbb{F}_2[x]/\big(x^4+x^3+1\big)$

и

$x,\ x^2,\ x^3,\ x^3+x^2+x+1$

в поле $F_2 = \mathbb{F}_2[x]/\big(x^4+x^3+x^2+x+1\big)$.

Степени обоих расширений поля $GF(2)$ совпадают (=4) и поля F_1 и F_2 изморфны (*пока не доказано!*), т.о. все 8 корней уравнения $f(x) = 0$ лежат в поле $GF(2^4)$.

Для записи данных корней выберем представление F_1 поля $GF(2^4)$. Тогда запись корней $f_1(x) = 0$ останется без изменений, а корни $f_2(x) = 0$ надо представить как элементы F_1.

Приравнивая многочлены, порождающие данные поля, получим

$$x^4+x^3+1 = x^4+x^3+x^2+x+1 \ \Rightarrow\ x^2+x = x(x+1) = 0.$$

Ясно, что при подстановке $x \mapsto x+1$ полученное равенство останется справедливым. Применим данную постановку для изоморфного преобразования полей $F_1 \leftrightarrow F_2$.

Находим представления корней многочлена $f_2(x)$ в поле F_1:

$$x \mapsto x+1,$$

$$\begin{aligned} x^2 &\mapsto (x+1)^2 = x^2+1, \\ x^3 &\mapsto (x+1)^3 = x^3+x^2+x+1, \\ x^3+x^2+x+1 &\mapsto (x^3+x^2+x+1)+(x^2+1)+ \\ &\quad +(x+1)+1 = x^3. \end{aligned}$$

Удостоверимся, что, например, x^2+1 — корень $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x^2+1) &= (x^2+1)^8+(x^2+1)^4+(x^2+1)^2+(x^2+1)+1 = \\ &= (x^{16}+1)+(x^8+1)+(x^4+1)+x^2. \end{aligned}$$

Очевидно $x^{16}=x$, $x^4=x^3+1$ и $x^8=(x^3+1)^2=x^6+1$. Поскольку $x^5=x^4+x=x^3+x+1$, то $x^6=x^4+x^2+x=x^3+x^2+x+1$ и $x^8=x^3+x^2+x$.

Подставляя в выражение для $f(x^2+1)$ полученные полиномиальные представления степеней x, получим

$$f(x^2+1) = (x+1)+(x^3+x^2+x+1)+x^3+x^2 = 0.$$

Ответ: многочлен $f(x)=x^8+x^4+x^2+x+1\in\mathbb{F}_2[x]$ имеет в поле $\mathbb{F}_2[x]/\big(x^4+x^3+1\big)$ корни x, x^2, x^2+1, x^3, x^3+1, x^3+x^2+x, $x+1$, x^3+x^2+x+1.

Задача 2.34. *Найти корень многочлена*

$$f(x) = x^4+2x+2\in\mathbb{F}_3[x].$$

Решение. Выясним сначала разложимость $f(x)$. Поскольку $f(0)=f(1)=2$, $f(2)=1$, то $f(x)$ линейных делителей не имеет.

Проверим существование квадратичных делителей:

$$\begin{aligned} f(x) \;=\; x^4+2x+2 \;=\; (x^2+ax+b)(x^2+cx+d) \;= \\ =\; x^4+cx^3+dx^2x+ax^3+acx^2+adx+bx^2+bcx+bd \;= \\ =\; x^4+(a+c)x^3+(b+ac+d)x^2+(ad+bc)x+bd. \end{aligned}$$

Отсюда

1) $c=-a$ и коэффициент при x^2 есть $b-a^2+d=0$;
2) из $bd=2$ следует, что либо $b=1$ и $d=2$, либо $b=2$ и $d=1$, т. е. в любом случае $b+d=3=0$;
3) но тогда из п. (1) $a^2=0$, т. е. $a=c=0$ и коэффициент при x равен $0 \Rightarrow$ противоречие.

Т.о. полином $f(x)=x^4+2x+2=0$ над $\mathbb{F}_3$ *неприводим.*

Теперь рассмотрим поле $\mathbb{F}_3[x]/\bigl(x^4+2x+2\bigr)$.

В нём $f(x)=x^4+2x+2=0$, т. е. $x^4=x+1=0$, и корни $f(x)$ суть x, x^3, x^{3^2}, x^{3^3}.

Вычислим x^9 и x^{27}:

$$\begin{aligned} x^9 \;&=\; \bigl(x^4\bigr)^2 x \;=\; (x+1)^2x \;=\; x^3+2x^2+x; \\ x^{27} \;&=\; \bigl(x^9\bigr)^3 \;=\; (x^3+2x^2+x)^3 \;=\; x^9+2x^6+x^3 \;= \\ &=\; (x^3+2x^2+x)+2x^2x^4+x^3 \;= \\ &=\; x^3+2x^2+x+2x^3+2x^2+x^3 \;= \\ &=\; x^3+x^2+x. \end{aligned}$$

Ответ: полином $f(x)=x^4+2x+2$ имеет корни x, x^3, x^3+2x^2+x, x^3+x^2+x в поле $\mathbb{F}_3[x]/(f)$.

<ins>Задача</ins> 2.35. *Решить уравнение* $f(x)=x^5+x^2+1=0$ *для* $f(x)\in\mathbb{F}_2[x]$.

Решение. Поскольку $f(0) = f(1) = 1$, полином $f(x)$ линейных делителей не имеет. Кроме того, легко устанавливается, что

$$x^5 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 + x^2) + 1,$$

т. е. полином $f(x)$ не имеет и (единственного) квадратичного неразложимого делителя и, поскольку его степень равна 5, то он *неприводим*.

Рассмотрим теперь поле $\mathbb{F}_2[x]/\big(x^5 + x^2 + 1\big)$. В нём $f(x) = x^5 + x^2 + 1 = 0$, т. е. $x^5 = x^2 + 1 = 0$ и корни $f(x)$ суть x, x^2, x^{2^2}, x^{2^3}, x^{2^4}.

Вычислим x^8 и x^{16}:

$$x^8 = x^5x^3 = (x^2 + 1)x^3 = x^5 + x^3 = x^3 + x^2 + 1;$$

$$\begin{aligned} x^{16} &= \big(x^8\big)^2 = (x^3 + x^2 + 1)^2 = x^6 + x^4 + 1 = \\ &= x^5x + x^4 + 1 = (x^3 + x) + x^4 + 1 = \\ &= x^4 + x^3 + x + 1. \end{aligned}$$

Ответ: в поле $\mathbb{F}_2[x]/\big(x^5 + x^2 + 1\big)$ уравнение

$$f(x) = x^5 + x^2 + 1 = 0$$

имеет корни x, x^2, x^4, $x^3 + x^2 + 1$, $x^4 + x^3 + x + 1$.

Глава 3

Коды, исправляющие ошибки

3.1 Блоковое кодирование. Коды Хэмминга

Задача помехоустойчивого кодирования. По каналу с шумом проходит поток *битовой* информации (или хранимая информация искажается), вследствие чего возникают ошибки.

- *Модель ошибок*: биты случайно, независимо и с равными вероятностями могут оказаться инвертированными (*двоичный симметричный канал*), вставки/выпадения битов нет.
- *Задача*: обеспечить автоматическое исправление ошибок.

Подход к решению (один из возможных!):

1) входной поток информации разбить на *сообщения* — непересекающиеся блоки фиксированной длины k;

2) каждый блок *кодировать* (модифицировать) —
а) независимо от других — *блоковое кодирование*;
б) в зависимости от предыдущих — *свёрточное* или *потоковое кодирование* (турбо-коды).

Далее рассматривается исключительно *блоковое кодирование*:

- есть набор всех *сообщений* $S_1, \ldots, S_t$, длины k каждое ($t = 2^k$), которые нужно передать по каналу связи с шумом;

- для обеспечения помехозащищённости вместо этих сообщений передают *кодовые слова*, каждое длины $n > k$, т. е. вводят *избыточность* при передаче информации: дополнительные m бит, $n = k + m$.

- *код* — инъективное отображение $\varphi : \{\,0, 1\,\}^k \to \{\,0, 1\,\}^n,\ k < n$;

- *кодовые слова* — область значений $C = Im\,\varphi \subset \{\,0, 1\,\}^n$ кода.

- $R = k/n$ — *скорость*, $m/n = 1 - R$ — *избыточность кода.*

Чем меньше избыточность и чем больше число ошибок, которые может исправить код, тем он лучше. Ясно, что эти требования противоречат друг другу и одно достигается за счёт другого.

Кодовое расстояние. Понятия, связанные с единичным (булевым) кубом B^n.

- *Норма* или *вес* $\|\widetilde{\gamma}\|$ = число единичных координат в наборе $\widetilde{\gamma} \in B^n$.

- *Метрика* на множестве бинарных наборов — *хэммингово расстояние* (+ — сумма по $\bmod 2$):

$$\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = \left\| \widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta} \right\|.$$

- *Шар Хэмминга с центром в* $\widetilde{\alpha}$ *и радиусом* $r > 0$:
$$S_r(\widetilde{\alpha}) = \left\{ \widetilde{\beta} \in B^n \mid \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \leqslant r \right\}.$$

Определение 3.1. Минимальное расстояние между парами слова кода C называется его *кодовым расстоянием*, символически $d(C)$ или просто d.

Утверждение 3.1. *Множество* C *образует код с исправлением не менее* r *ошибок, если*
$$\forall\, \widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in C : \widetilde{\alpha} \neq \widetilde{\beta} \Rightarrow S_r(\widetilde{\alpha}) \cap S_r(\widetilde{\beta}) = \varnothing.$$

Доказательство. Если в векторе $\widetilde{\alpha}$ искажено не более r бит, то набор останется в шаре $S_r(\widetilde{\alpha})$. Если шары не пересекаются, то искомое кодовое слово — ближайший к полученному набору центр шара. □

Следствие. *У кода, исправляющего* r *ошибок, кодовое расстояние* d *должно быть не менее* $2r + 1$.

Определение кодового расстояния произвольного кода C — *трудоёмкая задача*: показано, что эта задача NP-тудна. В общем случае для нахождения $d(C)$ требуется перебрать все $\frac{2^k(2^k-1)}{2}$ пар кодовых слов, что практически невозможно уже начиная с $k = 50$.

Поэтому важной задачей является построение *кодов с заданным кодовым расстоянием*. Она решается при использовании, например, БЧХ-кодов, которые будут рассмотрены далее.

Блоковое кодирование и декодирование

Блоковое кодирование — взаимно-однозначное преобразование сообщений длины k в кодовые слова длины $n > k$.

Декодирование — определение сообщения по принятому слову.

Пример 3.1 (тривиальный код-повторение). Информация разбивается на блоки по $k = 1$ бит, т. е. передаются 2 сообщения: $S_0 = 0$ и $S_1 = 1$.

Кодирование ($n = 3$): $0 \mapsto 000, \quad 1 \mapsto 111$ *исправляет одну ошибку*. Однако такое кодирование крайне неэффективно: длина сообщения *утраивается*.

Код-повторение $a \mapsto \underbrace{a \dots a}_{2r+1}$, очевидно, исправит r ошибок. Этот и другие *тривиальные* n*-коды* — с 2^n кодовыми словами и сообщениями нулевой длины не рассматриваем.

Кодирование. Обозначения:

- сообщение — вектор-столбец $\boldsymbol{u} \in \{0,1\}^k$:

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \cdots \\ u_k \end{bmatrix};$$

- кодовое слово — вектор-столбец[1] $\boldsymbol{v} \in \{0,1\}^n$;
- множество всех кодовых слов — (n,k)-*код*, или, с кодовым расстоянием — (n,k,d)-*код*.

[1] некоторые авторы используют векторы-строки; будьте внимательны!

Блоковое кодирование всегда можно осуществить с использованием таблицы размера $2^k \times n$. Однако такое «табличное» кодирование весьма неэффективно: значения n и k могут достигать *десятков и сотен тысяч*.

При передаче по каналу с шумом кодовое слово $\boldsymbol{v}$ превращается в *принятое слово* $\boldsymbol{w}$ той же длины n,

$$\boldsymbol{v} \ \rightarrow \ \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{e},$$

где $\boldsymbol{e} \in \{0, 1\}^n$ — *вектор ошибок*:

$$e_i = \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-ом бите произошла ошибка.} \\ 0, & \text{если ошибки нет.} \end{cases}$$

Декодирование (n, k, d)-кода *обычно значительно сложнее* кодирования. Оно основано на разбиении единичного куба B^n на k областей, содержащих шары радиуса $r = \lfloor (d-1)/2 \rfloor$ с центрами в кодовых словах и предположении, что произошло $\leqslant r$ ошибок.

Схема кодирования/декодирования блокового кода:

$$\boldsymbol{u} \xrightarrow[\text{избыточность}]{\text{кодирование}} \boldsymbol{v} \xrightarrow[+e]{\text{ошибка}} \boldsymbol{w} \xrightarrow[\text{ближ. код. слово}]{\text{декод.-1}} \widehat{\boldsymbol{v}} \xrightarrow[\text{удаление избыт.}]{\text{декод.-2}} \widehat{\boldsymbol{u}}$$

Декодирование блокового разделимого (n, k, d) кода проводится в два этапа:

1-й этап: Определение кодового слова $\widehat{\boldsymbol{v}}$ как ближайшего в метрике Хэмминга слову к $\boldsymbol{w}$, т. е. нахождение центра соответствующего шара (*декодирование в ближайшее кодовое слово*). Если произошло до $\lfloor (d-1)/2 \rfloor$ ошибок, то $\widehat{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}$.

<u>*2-й этап:*</u> Удаление избыточности и восстановление исходного сообщения по кодовому слову $\widehat{\boldsymbol{v}}$.

Ясно, что в общем случае при выполнении 1-го этапа надо перебрать все 2^n строк в $2^n{\times}k$-таблице кодовых слов. Поэтому декодирование блокового (n,k)-кода *общего вида* является крайне ресурсоёмким процессом, и использование таких кодов возможно лишь при небольших значениях n и k.

Однако, приняв дополнительные ограничения на множество кодовых слов, можно перейти от *экспоненциальных* требований по памяти и по сложности алгоритмов кодирования/декодирования к *линейным* по n и k. Эти ограничения приводят к использованию блоковых кодов специального вида: *групповых*, а из групповых — *циклических*.

Плотная упаковка шаров в единичный куб. Чтобы построить код минимальной избыточности исправляющий данное количество r ошибок, нужно вложить в единичный куб B^n максимально возможное число непересекающихся шаров радиуса r — это *задача плотной упаковки.*

Вопрос: При каких n и r в куб B^n можно уложить непересекающиеся шары радиуса r «плотно», «без зазоров»?

Ответ: Такое удаётся только в двух нетривиальных случаях:

1) $n = 2^q - 1$, $r = 1$ — *коды Хэмминга*, у них $m = q$ и $k = 2^m - 1 - m$;

2) $n = 23$, $r = 3$ — *код Голея*, к него $m = 11$ и $k = 12$.

Это *совершенные* или *экстремальные коды*.

Теорема 3.1 (Хэмминга). *При $2r < n$ максимальное число t кодовых слов находится в пределах*

$$\frac{2^n}{C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{2r}} \leqslant t \leqslant \underbrace{\frac{2^n}{C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^r}}_{\text{граница Хэмминга}} .$$

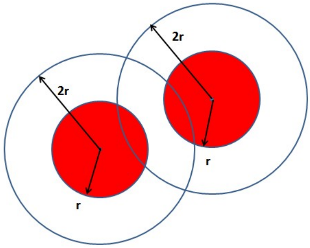
Доказательство. Для получения *верхней оценки* числа непересекающихся шаров радиуса r разделим объём булева куба на объём шара. Шар радиуса r содержит: центр $+$ все точки с одной, двумя, ..., r измененными координатами.

Для *оценки снизу* построим негрупповой код:

1) берем произвольную точку B^n и строим вокруг неё шар радиуса $2r$;
2) берем произвольную точку вне построенного шара и строим вокруг неё шар радиуса $2r$;
3) и т.д., каждая новая точка выбирается вне построенных шаров.

В результате:

- шары, возможно, пересекаются, но каждый шар занимает $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{2r}$ точек $\Rightarrow$ шаров не менее $2^n / \left(C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{2r}\right)$;
- шары радиуса r с центрами в выбранных точках не пересекаются.



□

Построим конкретный код Хэмминга длины $2^m - 1$ и покажем, что для него граница Хэмминга достигается.

Рассмотрим таблицу:

$$
k = 2^m - (m+1) \left\{
\begin{array}{cc}
100\ldots000 & 1100\ldots000 \\
010\ldots000 & 1010\ldots000 \\
001\ldots000 & 1001\ldots000 \\
\ldots & \ldots \\
000\ldots100 & 1111\ldots101 \\
000\ldots010 & 1111\ldots110 \\
000\ldots001 & 1111\ldots111 \\
\underbrace{}_{k = 2^m - (m+1)} & \underbrace{}_{m}
\end{array}
\right.
$$

Слева — единичная матрица порядка $2^m - 1 - m$, справа — все бинарные наборы длины m, содержащие *не менее двух* единиц.

Просуммировав всевозможные совокупности строк таблицы, получим $t = 2^k = 2^{2^m - (m+1)}$ различных кодовых слов, но

$$
t = 2^{2^m - (m+1)} = \frac{2^{2^m - 1}}{2^m} = \frac{2^n}{1+n}.
$$

Найдём кодовое расстояние построенного кода:

- в каждой строке таблицы — не менее 3 единиц;
- если сложить

две строки — в левой части будет 2 единицы, а в правой — хотя бы одна,
не менее трёх строк — в левой части будет не менее 3 единиц.

Т. е. всегда $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \geqslant 3 \;\Rightarrow\;$ шары единичного радиуса с центрами в полученных наборах не пересекаются.

Заметим, что при таком кодировании исходное сообщение окажется в первых k позициях кодового слова.

Пример 3.2 (код Хэмминга $(7,4)$).
Для $m = 3$ ($2^3 - 1 = 7$) составим таблицу

1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1

Складывая по $\bmod 2$ все, включая пустую, совокупности строк полученной таблицы, получаем $2^4 = 16$ различных бинарных слов длины 7, которыми можно закодировать 16 сообщений.

Этот код содержит по одному слову веса 0 и 7, по семь слов веса 3 и 4.

Код Голея — (23, 12, 7)-код. М. Голей обнаружил, что
$$\underbrace{C_{23}^0 + C_{23}^1 + C_{23}^2 + C_{23}^3}_{\text{объём шара радиуса 3}} = 2^{11}.$$
Это позволило предположить, что существует содержащий
$$t = 2^{23}/2^{11} = 2^{12} = 4096$$
кодовых слов совершенный (23, 12, 7)-код, исправляющий до 3-х ошибок, и М. Голей в своей статье указал такой код.

Доказано, что других пар (n, r), удовлетворяющих условию
$$\frac{2^n}{C_n^0 + \ldots + C_n^r} \quad \text{— целое,}$$
кроме кодов Хэмминга и тривиальных — не существует.

3.2 Линейные коды

Линейные коды: определение, свойства

Бо́льшая часть теории блокового кодирования построена на *линейных* кодах, позволяющих реализовывать эффективные алгоритмы кодирования/декодирования. В двоичном случае их называют *групповыми*, т. к. они образуют *группу относительно операции «сумма по* mod 2».

Утверждение 3.2. *Устойчивая относительно операции суммы по* mod 2 $(+)$ *совокупность кодовых слов* C *образует группу.*

Доказательство.

Устойчивость (*предполагается*): для любых кодовых слов $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in C$ выполняется $\widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta} = \widetilde{\gamma} \in C$;

Ассоциативность: свойство операции $+$;

Существование 0: $\widetilde{\alpha} + \widetilde{\alpha} = (0, \ldots, 0) = \widetilde{0} \in C$;

Противоположные элементы: $-\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}$.

□

Теорема 3.2 (кодовое расстояния группового кода). *Кодовое расстояние d группового кода равно*

$$d = \min_{\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{\beta}} \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = \min_{\widetilde{\gamma} \neq \widetilde{0}} \|\widetilde{\gamma}\|,$$

где $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ и $\widetilde{\gamma}$ — кодовые слова из C.

Доказательство. Для произвольных кодовых слов $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ всегда существует их сумма — кодовое слово γ:

$$\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = \left\| \widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta} \right\| = \|\widetilde{\gamma}\|,$$

причем $\widetilde{\gamma} \neq \widetilde{0}$ при $\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{\beta}$.

Отсюда получаем оценку $\min\limits_{\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{\beta}} \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \geqslant \min\limits_{\widetilde{\gamma} \neq \widetilde{0}} \|\widetilde{\gamma}\|$, которая достигается, например, при $\widetilde{\beta} = \widetilde{0}$. □

Следствие. Для вычисления кодового расстояния группового кода достаточно перебрать $2^k - 1$ кодовых слов.

Единичный куб $B^n = \{0, 1\}^n$ можно рассматривать как n-мерное координатное векторное пространство над конечным полем $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$.

Определение 3.2. Блоковый (n, k)-код называется *линейным*, если он образует *векторное подпространство* размерности k координатного пространства B^n.

Это означает, что в *линейном* коде C —

1) сумма любых кодовых слов — кодовое слово, т. е. это *групповой* код;
2) кодовое расстояние $d(C) = \min\limits_{\widetilde{\gamma} \in C} \|\widetilde{\gamma}\|$;
3) существует базис $\{\boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_{k-1}\}$ из k векторов-столбцов $\boldsymbol{g}_i \in B^n$, $i = 0, \ldots, k-1$, и любой вектор $\boldsymbol{v} \in C$ может быть представлен как
$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=0}^{k-1} u_i \boldsymbol{g}_i, \quad u_i \in \{0, 1\}.$$

Порождающая матрица. Систематическое кодирование

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=0}^{k-1} u_i \boldsymbol{g}_i = G\boldsymbol{u}\,, \text{ где } G_{n\times k} = [\,\boldsymbol{g}_0\, \boldsymbol{g}_1 \, \ldots \, \boldsymbol{g}_{k-1}\,]$$

— *порождающая матрица* линейного кода.

Матрица G определена с точностью до *элементарных преобразований столбцов* — их перестановкам и сложению по $\bmod 2$ данного столбца с любым другим. Данные преобразования эквивалентны переходу к другому базису *этого же* кода[2].

[2] Элементарные преобразования *строк* G приведут к *другому блоковому линейному коду* в B^n.

Пусть линейный код задан порождающей матрицей $G_{n,k}$. Из неё с помощью элементарных преобразований столбцов может быть получена матрица $\widetilde{G}$, у которой *первые* k строк образуют единичную подматрицу I_k. Тогда при кодировании $\boldsymbol{v} = \widetilde{G}\boldsymbol{u}$ первые k бит сообщения перейдут в первые биты кодового слова.

Кодирование, при котором информационные биты переходят в фиксированные позиции сообщения, называют *систематическим* или *разделимым*. Остальные (избыточные) биты сообщения называют *проверочными*. Систематическое кодирование упрощает 2-й этап декодирования: тривиальная процедура удаления проверочных бит восстанавливает исходное сообщение.

Пример 3.2 (продолжение — (7, 4)-код Хэмминга).

Ранее была получена таблица, сложением различных групп строк которой получаются все кодовые слова данного кода Хэмминга. Порождающая матрица кода получается транспонированием этой таблицы:

$$G_{7\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

— порождающая матрица в систематической форме: при кодировании исходные сообщения помещаются в первые 4 бита кодового слова

Историческая справка. Первой ЭВМ, в которой использовался код Хэмминга, была IBM 7030, построенная в

1960 г., через 10 лет после появления кода Хэмминга. До этого использовался лишь простейший способ повышения надежности — *проверка на чётность*.

Ортогональное дополнение к коду и проверочная матрица

Итак, линейный код C есть k-мерное подпространство n-мерного линейного пространства $\{0, 1\}^n = B^n$.

Элементы B^n, ортогональные ко всем элементам C, образуют *ортогональное подпространство* $C^{\perp}$:

$$\underset{C}{\forall}\boldsymbol{v}\ \underset{C^{\perp}}{\forall}\boldsymbol{w} :\ \boldsymbol{v}^T \times \boldsymbol{w} = 0.$$

Замечания:

- $\dim B^n = n = \underbrace{\dim C}_{k} + \underbrace{\dim C^{\perp}}_{m=n-k}$;
- $C \cup C^{\perp} \neq B^n$, т. е. B^n — *не есть прямая сумма* подпространств C и $C^{\perp}$;
- произвольный вектор из B^n может либо не разлагаться, либо разлагаться неоднозначно в сумму векторов из C и $C^{\perp}$.

Пусть $\{\boldsymbol{h}_0, \ldots, \boldsymbol{h}_{m-1}\}$ — базис $C^{\perp}$, $\boldsymbol{h}_i$ — векторы-столбцы из B^n, $i = 0, \ldots, m-1$. Тогда матрица

$$H_{m\times n} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{h}_0^T \\ \boldsymbol{h}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{h}_{m-1}^T \end{bmatrix}$$

называется *проверочной матрицей* линейного кода C.

Ясно, что

- $\forall\, \boldsymbol{v} \in C\colon\ H\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ — нулевой m-мерный вектор;
- $HG = O_{m\times k}$ — нулевая матрица;
- проверочная матрица определена с точностью до элементарных преобразований *строк*.

Пусть I_k и I_m — единичные матрицы порядков k и m соответственно. Тогда если порождающая матрица имеет вид
$$G = \begin{bmatrix} I_k \\ P_{m\times k} \end{bmatrix},$$
то матрица $H = \begin{bmatrix} P_{m\times k} & I_m \end{bmatrix}$ будет проверочной. Действительно, в этом случае
$$H\boldsymbol{v} = HG\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} P & I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} \boldsymbol{u} = (P + P)\boldsymbol{u} = \mathbf{0}.$$

Проверочную матрицу называют также *матрицей проверки на чётность*, а строки — *правилами проверки на чётность*.

Пример 3.2 (продолжение — $(7,4)$-код Хэмминга). Для построенной порождающей матрицы $G_{7\times 4}$ проверочной будет
$$H_{3\times 7} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Легко видеть, что столбцами проверочной матрицы кода кода Хэмминга являются все ненулевые векторы длины m.

Задание линейного кода. Пример кодирования

Резюмируем: линейный код C для сообщений длины k имеет длину $n = k + m$, m — число избыточных (при систематическом кодировании — проверочных) символов, и задаётся

либо порождающей матрицей $H_{n \times k}$,

либо проверочной матрицей $G_{m \times n}$.

Эти матрицы определены с точностью до элементарных преобразований столбцов и строк соответственно, что соответствует выбору различных базисов кода в пространствах C и $C^{\perp}$. Однако *фиксирование позиций информационных бит при систематическом кодировании* задаёт H и G *однозначно.*

Увеличение m ведёт к увеличению кодового расстояния d (как конкретно — очень трудный вопрос) и, следовательно, к увеличению количества ошибок, которые может исправить код.

Пример 3.3 (кодирования блоковым линейным кодом). Пусть дан линейный $(6, 3)$-код задан порождающей матрицей

$$G_{6\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Требуется:

1) с использованием данного кода осуществить

   (a) несистематическое и

(б) систематическое кодирование векторов $\boldsymbol{u}_1 = [0\ 1\ 1]^T$ и $\boldsymbol{u}_2 = [1\ 0\ 1]^T$;

2) построить проверочную матрицу H;

3) определить кодовое расстояние d данного кода.

1 (а). Несистематическое кодирование находим непосредственно:

$$[\,\boldsymbol{v}_1^n\,\boldsymbol{v}_2^n\,] = G\times[\,\boldsymbol{u}_1\,\boldsymbol{u}_2\,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1 (б). Для систематического кодирования с помощью элементарных преобразований *столбцов* выделим в матрице G единичную подматрицу размера 3×3 (над стрелкой указано проводимое преобразование столбцов):

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)+(2)\mapsto(1)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \widetilde{G}.$$

В полученной матрице в строках 3, 5 и 1 стоит единичная подматрица — это приведёт к тому, что 1, 2 и 3-й биты исходного сообщения последовательно перейдут в 3, 5 и 1-й биты кодового слова.

Найдём систематическое кодирование $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$:

$$[\,\boldsymbol{v}_1^s\,\boldsymbol{v}_2^s\,] = \widetilde{G}\times[\,\boldsymbol{u}_1\,\boldsymbol{u}_2\,] = \begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&1\\1&0&0\\0&1&1\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1\\1&0\\0&1\\0&1\\1&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

2. Находим проверочную матрицу H, формируя матрицу $P_{3\times 3}$ из строк $\widetilde{G}$, отличных от строк единичной подматрицы:

$$P_{3\times 3} = \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

Для построения проверочной матрицы H нужно

- последовательно разместить *столбцы* P в 3, 5 и 1-м её столбцах соответственно,
- остальные 2, 4 и 6-й столбцы H должны образовывать единичную подматрицу.

В итоге получим проверочную матрицу

$$H_{3\times 6} = \begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\1&0&0&1&1&0\\1&0&1&0&1&1\end{bmatrix}.$$

Предлагается самостоятельно проверить, что $HG = H\widetilde{G} = \mathbf{0}$ — нулевая (3×3)-матрица.

Проверим, что в результате как систематического, так и несистематического кодирований были действительно найдены кодовые слова:

$$H \times [\,\boldsymbol{v}_1^n\,\boldsymbol{v}_2^n\,\boldsymbol{v}_1^s\,\boldsymbol{v}_2^s\,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = $$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Найдем кодовое расстояние d. Для этого закодируем все $2^3 = 8$ сообщений и найдем минимальный ненулевой хэммингов вес кодового слова:

$$C = [\boldsymbol{v}_1 \ldots \boldsymbol{v}_8] = \widetilde{G} \times [\boldsymbol{u}_1 \ldots \boldsymbol{u}_8] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_8$ — все 8 возможных сообщений, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_8$ — все 8 возможных кодовых слов. Оказалось $d = 3$.

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.3 Декодирование линейных кодов

Наиболее эффективные методы декодирования линейных кодов, основанные на вычислении исправляющего вектора, который принято называть синдромом[3].

Синдром

<u>Определение</u> 3.3. *Синдромом слова* $\boldsymbol{w} \in \{0,1\}^n$, принятого при передаче сообщения, закодированного линейным (n,k)-кодом и, возможно, содержащего ошибки, назовём вектор $\boldsymbol{s} = H\boldsymbol{w} \in \{0,1\}^m$, где H — проверочная матрица, $m = n - k$.

Свойства синдрома:

- $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{w}$ — кодовое слово, ошибок нет[4];
- $\boldsymbol{s} = H\boldsymbol{w} = H(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{e}) = \underbrace{H\boldsymbol{v}}_{=0} + H\boldsymbol{e} = H\boldsymbol{e}$.

Отсюда ясно, что вектор ошибок $\boldsymbol{e}$ удовлетворяет неоднородной недоопределенной СЛАУ

$$H\boldsymbol{e} = \boldsymbol{s}, \qquad (*)$$

а кодовые слова являются решениями соответствующей однородной системы

$$H\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0},$$

[3] *Синдром* — совокупность явлений, вызванных отклонением от нормы.

[4] Точнее, $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}$ означает отсутствие ошибок определённого типа, а не их отсутствие вообще; это замечание относится и к декодированию всех рассматриваемых далее кодов.

(или, иными словами — ядром линейного преобразования $H : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$).

Таким образом, вектор $\boldsymbol{e}$ может быть представлен как частное решение $\widehat{\boldsymbol{e}}$ неоднородной системы $(*)$ и общее решение $\boldsymbol{v} = G\boldsymbol{u}$ соответствующей однородной —

$$\boldsymbol{e} = \widehat{\boldsymbol{e}} + G\boldsymbol{u}.$$

и среди всех возможных векторов $\widehat{\boldsymbol{e}}$ для всех сообщений $\boldsymbol{u}$ необходимо выбрать имеющий минимальный вес.

Схема декодирования по синдрому:

$$\boldsymbol{w} \xrightarrow{\qquad\qquad} \boldsymbol{s} = H\boldsymbol{w} \xrightarrow[H\boldsymbol{e}=\boldsymbol{s}]{} \boldsymbol{e} = \widehat{\boldsymbol{e}} + G\boldsymbol{u} \xrightarrow[\|\boldsymbol{e}\|\to\min]{} \widehat{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{e}$$

Декодирование по синдрому

Поскольку и принятый вектор $\boldsymbol{w}$, и соответствующий ему вектор ошибок $\boldsymbol{e}$ имеют одинаковые синдромы, можно попытаться восстановить неизвестный вектор $\boldsymbol{e}$, используя тот факт, что он является решением системы $(*)$.

Для этого нужно составить *словарь синдромов* — таблицу, строки которой соответствуют всем возможным синдромам $\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_{2^m}$, а каждая строка содержит *наиболее вероятный вектор ошибок*, данному синдрому соответствующий. Этот вектор должен иметь наименьший вес среди возможных решений системы $(*)$ для данного $\boldsymbol{s}$ и его называют *лидером* класса векторов ошибок, имеющих общий синдром $\boldsymbol{s}$. Если таких векторов минимального веса несколько, то в качестве лидера может быть выбран любой из них.

Таким образом, данный метод потребует хранения проверочной матрицы размера $m \times n$, словаря синдромов размера $2^m \times n$, но не требует нахождения векторов ошибок минимального веса (они уже найдены на этапе проектирования декодирующего устройства).

Однако в любом случае алгоритм декодирования остаётся *экспоненциально трудоёмким* и по памяти, и по числу операций.

Пример 3.4 (декодирования линейного кода). Рассмотрим линейный $(6,3)$-код из *Примера* 3.3.

1. Закодируем сообщения $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 = [0\ 1\ 1]^T$.

Систематическое кодирование для него было уже получено: $\boldsymbol{v} = [1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0]^T$.

Пусть при передаче происходит ошибка во 2-м бите, т. е. принят вектор $\boldsymbol{w} = [1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0]^T$.

Найдём синдром принятого слова $\boldsymbol{w}$:

$$H\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{s}\,.$$

Заранее, при проектировании устройства декодирования, должны быть найдены лидеры классов векторов ошибок для всех возможных синдромов.

Для полученного синдрома этот класс составляют столбцы матрицы всех кодовых слов C (уже полученной в п. 3 *Примера* 3.3), сложенные, например, с вектором $\boldsymbol{w}$. В этом случае для синдрома $\boldsymbol{s} = [1\ 0\ 0]^T$ был получен класс

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Наименьший вес в этой матрице имеет 4-й столбец, и, таким образом, лидером интересующего нас класса является вектор $\boldsymbol{e} = [0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$. Он-то и помещается в словарь синдромов.

Складывая найденный по словарю синдромов данный лидер с принятым словом, получаем

$$\widehat{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{e} = [1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0]^T + [0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T = \\ = [1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0]^T = \boldsymbol{v},$$

и переданное кодовое слово восстановлено верно.

Пусть передаётся сообщение $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_2 = [1\ 0\ 1]^T$; оно кодируется словом $\boldsymbol{v} = [1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0]^T$. Пусть также ошибка опять возникла во втором разряде.

Вычисляем синдром принятого слова $\boldsymbol{w} = [1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0]^T$:

$$H\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{s},$$

т. е. синдром остаётся прежним. Ему соответствует тот же лидер $\boldsymbol{e} = [0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ и кодовое слово также верно восстанавливается.

Декодирование кода Хэмминга

В случае кода Хэмминга декодирование можно существенно упростить.

Особенностью проверочной матрицы $H_{m\times n}$ кода Хэмминга является то, что её столбцы представляют собой двоичные коды чисел от 1 до $n = 2^m - 1$.

Например, в *Примере* 3.2 получена матрица

$$H_{3\times 7} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 4 \end{matrix} \end{array}.$$

Хэмминг предложил использовать коды, у которых расположение столбцов проверочной матрицы H было такое, чтобы *синдром являлся двоичным представлением позиции ошибки в принятом сообщении.*

Для этого столбцы H должны быть двоичными представлениями чисел от 1 до $2^m - 1$ *последовательно.* Тогда любой синдром есть соответствующий столбец H, т. е. двоичное представление своего номера = позиция ошибки.

Заметим, что единичную подматрицу такой матрицы будут образовывать столбцы с номерами, являющимися степенью 2: 1, 2, $\ldots$, 2^{m-1}.

Пример 3.5.

Для рассматриваемого $(7,4)$-кода Хэмминга получаем матрицу

$$\widetilde{H}_{3\times 7} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccccc} \underline{1} & \underline{2} & 3 & \underline{4} & 5 & 6 & 7 \end{array} \end{array}.$$

Тогда порождающая матрица есть

$$G_{7\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Она помещает сообщение последовательно в 3, 5, 6 и 7-ю позиции кодового слова, а остальные биты являются проверочными: подматрица образованная 1, 2 и 4-й строками является подматрицей H^T, оставшейся после удаления единичной подматрицы. Ясно, что G осуществляет несистематическое кодирование.

Закодируем данным кодом сообщение $\boldsymbol{u} = [0\,1\,0\,1]^T$:

$$\boldsymbol{v} = G\boldsymbol{u} = [0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1]^T.$$

Пусть при передаче ошибка произошла в 2-м бите, т. е. получено слово $\boldsymbol{w} = [0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1]^T$. Тогда синдром

$$\boldsymbol{s} = \widetilde{H}\boldsymbol{w} = [0\ 1\ 0]^T$$

указывает позицию ошибки.

Дуальные коды. Поскольку $HG = O = G^T H^T$, то можно использовать H^T как порождающую, а G^T — как проверочную матрицу некоторого другого кода и из линейного (n, k)-кода получить $(n, n-k)$-код. Коды, связанные таким образом, называются *дуальными* или *двойственными* друг другу.

Если исходный код был получен так, чтобы иметь минимальную избыточность при заданной исправляющей способности, то гарантировать хорошее качество дуального ему кода уже нельзя: обычно дуальный код имеет такую же исправляющую способность, как и исходный, но большую избыточность.

Код, двойственный к расширенному коду Хэмминга, называется *кодом Макдональда.*

Линейные коды (n, k): резюме

- Линейные коды могут иметь произвольные параметры n и $k < n$.
- Требование линейности производить позволяет упростить кодирование и декодирование.

  Кодирование осуществляется особенно просто — умножением вектора сообщения на порождающую матрицу.

  Но вопрос «*как найти порождающую матрицу для получения кода с хорошими характеристиками?*» остаётся открытым: общие методы синтеза оптимальных линейных кодов до сих пор не разработаны.

Декодирование возможно с помощью легко вычисляемых синдромов. Однако процесс декодирования остаётся трудоёмким.

3.4 Циклические коды

Определение и построение циклических кодов

Определение 3.4. Код C называется *циклическим (сдвиговым)*, если он инвариантен относительно циклических сдвигов, т. е. для любого $0 \leqslant s \leqslant n-1$ справедливо

$$(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in C \Rightarrow \\ \Rightarrow (\alpha_s, \alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_0, \ldots, \alpha_{s-1}) \in C.$$

Ранее было показано:

- В кольце $R = \mathbb{F}_p[x]/(x^n-1)$, рассматриваемом как n-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{F}_p$, имеется базис
$$\left\{\overline{1}, \overline{x}, \ldots, \overline{x^{n-1}}\right\}.$$
Циклический сдвиг координат в этом базисе равносилен умножению на $\overline{x}$.
- Векторное подпространство I кольца R является циклическим iff I — идеал R.
- R — КГИ, любой идеал порождается некоторым полиномом-элементом R.

Поэтому построить циклический (n, k)-код длины можно следующим образом.

1. Выбираем любой делитель $g(x)$ бинома $x^n - 1$. Многочлен $g(x)$ называют *порождающим* или *образующим*.
2. Найденный полином порождает идеал $(g(x))$ в кольце $R = \mathbb{F}_p[x]/(x^n - 1)$, а *коэффициенты многочленов из этого идеала* будут кодовыми словами. Тогда $m = \deg g(x)$ и $k = n - m$.
3. При удачном выборе порождающего полинома будут получен код с приемлемым значением d.

Однако:

- есть только несколько конструкций циклических кодов с хорошими параметрами;
- определение кодового расстояния циклического кода в общем случае является чрезвычайно трудоёмкой задачей.

Избыточный циклический код — англ. CRC, Cyclic Redundancy Code. Из всех *линейных* (n, k)-кодов будем далее рассматривать *циклические*.

Полиномиальное представление слов. Установим соответствие векторов сообщения $\boldsymbol{u} \in \{0, 1\}^k$ и кодового слова $\boldsymbol{v} \in \{0, 1\}^n$ с их полиномиальными представлениями $u(x)$, $v(x) \in \mathbb{F}_2[x]$:

$$\boldsymbol{u} = [\, u_0,\, u_1,\, \ldots,\, u_{k-1} \,]^T \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow u(x) = u_0 + u_1 x + \ldots + u_{k-1} x^{k-1},$$

$$\boldsymbol{v} = \left[v_0, v_1, \ldots, v_{n-1} \right]^T \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow v(x) = v_0 + v_1 x + \ldots + v_{n-1} x^{n-1}.$$

Любое кодовое слово $v(x)$ есть элемент

$$(g(x)) = \{ g(x)q(x) \mid q(x) \in \mathbb{F}_2[x],\ x^n = 1 \}.$$

Замечание. Представление сообщений и кодовых слов в виде многочлена изоморфно их представлению как элементов линейного векторного пространства. При этом, операции с коэффициентами многочленов производятся по привычным правилам арифметики по $\bmod 2$, а степени переменной x используются только для обозначения места соответствующей компоненты вектора и никакой иной смысловой нагрузки не несут.

Код, представленный порождающим полиномом называется *полиномиальным.*

Коды Хэмминга могут быть циклическими. Построенная *Примере* 3.2 таблица 4×7 для кода Хэмминга *не порождает циклического кода.*

Однако если переставить 3-элементные окончания некоторых строк, то полученная таблица

1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1

уже *порождает циклический код* (проверьте!).

Пример 3.6 (построения циклического кода). Построим *циклический код длины* $n = 23$.

Для определения порождающего полинома кода находим разложение бинома $x^{23} - 1$ на неприводимые многочлены:

$$f(x) = (x+1) \cdot (\underbrace{x^{11} + x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x + 1}_{f_1(x)}) \cdot \\ \cdot (\underbrace{x^{11} + x^{10} + x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + 1}_{f_2(x)}).$$

Поскольку $\deg f_1(x) = \deg f_2(x) = 11 = m$, любой из полиномов $f_1(x)$, $f_2(x)$ может быть выбран порождающим[5] для построения $(23, 12)$-кода.

Можно показать, что в обоих случаях кодовое расстояние оказывается равным 7. Например, при выборе порождающим полинома $g(x) = f_2(x)$ и несистематическом кодировании сообщения $[100000000000]^T$ получаем кодовое слово $[10101110001100000000000]^T$ веса 7.

Ясно, что построен *код Голея*.

Кодирование циклическими кодами. Пусть определён порождающий полином $g(x)$, делящий бином $x^n - 1$, $\deg g(x) = m < n$, задающий код C.

Несистематическое кодирование осуществляется путём умножения кодируемого полинома на порождаю-

[5] При выборе $g(x) = x+1$ получим код с проверкой на чётность ($m = 1$), при $g(x) = (x+1)f_1(x)$ или $g(x) = (x+1)f_2(x)$ получим *расширенный* код Голея с $m = 12$.

щий:

$$u(x) \mapsto v(x) = g(x)u(x).$$

Столбцы соответствующей порождающей матрицы — базисные векторы кода — соответствуют полиномам $x^i g(x)$, $i = \overline{0, k-1}$.

Систематическое кодирование осуществляется приписыванием к кодовому слову *слева (в младшие разряды)* остатка $r(x)$ от деления $x^m u(x)$ на $g(x)$.

Действительно, умножение $u(x)$ на x^m помещает сообщение в старшие разряды n-битного слова. Поделим $x^m u(x)$ на $g(x)$ с остатком:.

$$x^m u(x) = g(x)q(x) + r(x), \quad \deg r(x) < m$$

откуда

$$x^m u(x) + r(x) = g(x)q(x) \in C.$$

Это означает, что кодирование

$$u(x) \mapsto v(x) = x^m u(x) + r(x).$$

будет систематическим.

Столбцы соответствующей порождающей матрицы — базисные векторы кода — соответствуют полиномам

$$x^{m+i} + r_i(x), \text{ где } r_i(x) \equiv_{g(x)} x^{m+i},\ i = \overline{0, k-1}.$$

Пример 3.7. 1. Построим циклический код длины $n = 7$.

Сначала нужно найти какой-либо делитель бинома $x^7 - 1$, для чего необходимо разложить его на неприводимые множители.

Заметим, что $7 = 2^3 - 1$. Но $F = \mathbb{F}_2^3$ — поле разложения бинома $x^{2^3-1} - 1$ и поэтому его корнями являются все ненулевые элементы поля F.

Делаем вывод: *выбор длины кода* $n = 2^q - 1$ *очень удобен*, т. к. легко определяются число и степени неприводимых делителей бинома $x^n - 1 = x^{2^q-1} - 1$.

Пусть α — произвольный примитивный элемент поля $F = \mathbb{F}_2^3$. Тогда с учетом $\alpha^7 = 1$ находим разбиение корней $x^7 - 1$ ($=$ всех элементов F^*) на орбиты:

$$\{\,1\,\},\ \{\,\alpha,\, \alpha^2,\, \alpha^4\,\},\ \{\,\alpha^3,\, \alpha^6,\, \alpha^5\,\}.$$

Таким образом, многочлен x^7+1 имеет один неприводимый делитель 1-й степени и два неприводимых делителя 3-й степени (их вообще всего два).

В результате получаем разложение

$$x^7 - 1 \;=\; x^7 + 1 \;=\; (x+1)\cdot\underbrace{(x^3+x+1)}_{g(x)}\cdot(x^3+x^2+1).$$

В качестве порождающего полинома $g(x)$ можно выбрать любой из вышеуказанных полиномов 3-й степени. Тогда $m = 3$, $k = 4$ и будет построен *циклический* $(7,4)$-*код*[6]. Выберем конкретно $g(x) = x^3 + x + 1$.

2. Закодируем несистематическим и систематическим кодами сообщение

$$\boldsymbol{u} = [0\ 0\ 1\ 1]^T \;\leftrightarrow\; u(x) = x^3 + x^2.$$

[6] Ясно, это код Хэмминга!

Несистематическое кодирование.

$$v(x) = u(x)g(x) = (x^3 + x^2)(x^3 + x + 1) = \\ = x^6 + x^5 + x^4 + x^2 \leftrightarrow [0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1]^T = \boldsymbol{v}.$$

Систематическое кодирование.
Находим остаток $r(x)$ от деления многочлена $x^3u(x)$ на $g(x)$:

$$x^3(x^3 + x^2) = x^6 + x^5 = (x^3 + x^2 + x)(x^3 + x + 1) + x,$$

поэтому

$$v(x) = x^3u(x) + r(x) = x^6 + x^5 + x \leftrightarrow [0\,1\,0\ \underbrace{0\ 0\ 1\ 1}_{\boldsymbol{u}}]^T = \boldsymbol{v}.$$

Декодирование циклических кодов

Определение 3.5. *Синдромом* $s(x)$ *полинома* $w(x)$, принятого при передаче сообщения закодированного циклическим кодом и, возможно, содержащего ошибки, назовём *остаток от деления* $w(x)$ *на порождающий код многочлен* $g(x)$.

Определение синдрома для циклического кода, очевидно, есть перефразировка в терминах полиномов определения синдрома для линейных кодов.

Свойства синдрома-полинома $w(x)$:

- $0 \leqslant \deg s(x) < m = n - k$;
- $s(x) \equiv 0 \Leftrightarrow w(x)$ — кодовое слово;
- $s(x) \equiv_{g(x)} w(x) \equiv_{g(x)} (v(x) + e(x)) \equiv_{g(x)} e(x)$.

Декодирование циклического кода проходит по общей схеме декодирования линейного кода:

1) *вычисляется синдром* $s(x)$ принятого слова $w(x)$;
2) вычисляются полиномы $e(x) = s(x) + g(x)u(x)$ для всех 2^k возможных сообщений $u(x)$.
3) определяется *полином ошибок* $e_0(x)$ как полином с минимальным числом мономов.
4) восстанавливается *переданное сообщение* $u(x) = w(x) + e_0(x)$.

Примеры декодирования циклических кодов будут даны при рассмотрении БЧХ-кодов[7].

Циклические линейные коды (n, k): резюме

- Линейный код будет циклическим, только если он *принадлежит идеалу* $(g(x))$ в кольце многочленов $\mathbb{F}_2[x]/(x^n - 1)$.

  Порождающий полином $g(x)$ циклического (n, k)-кода является делителем бинома $x^n - 1$; $\deg g(x) = m$ — число проверочных бит кода.

  Можно выбрать любой делитель, однако нахождение полинома $g(x)$, порождающего код с большим кодовым расстоянием d — *сложная задача.*

[7] Существуют и альтернативные методы декодирования циклических кодов общего вида (декодеры Меггита, Касами-Рудольфа, пороговый, мажоритарный, ...) также экспоненциальной по k трудоёмкости.

- *Циклические коды* общего вида могут иметь произвольную длину, но, в отличие от линейных кодов общего вида, его параметр k уже не произволен, что является существенным ограничением.

- *Кодирование* и *декодирование* сводится к выполнению операций умножения и деления полиномов, *легко реализуемые* на регистрах сдвига с обратными связями.

  Однако алгоритмы декодирования по-прежнему имеют *экспоненциальную сложность* по k.

3.5 Коды Боуза-Чоудхури-Хоквингема

Определение и основные свойства БЧХ-кодов. *Коды Боуза-Чоудхури-Хоквингема* (*БЧХ*, BCH) — подкласс циклических кодов, исправляющих *не менее заранее заданного числа ошибок*, предложены Р. Ч. Боузом и Д. К. Рей-Чоудхури в 1960 г. независимо от опубликованной на год ранее работы А. Хоквингема.

Основные свойства минимальных многочленов (напоминание):

1. $\forall\, \beta \in \mathbb{F}_p^n\ \ \exists!\, m_\beta(x)$, м.м. $m_\beta(x)$ неприводим и его степень $\leqslant n$;
2. если β — корень некоторого полинома $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$, то $m_\beta(x) \mid f(x)$;
3. м.м. примитивного элемента поля называется *примитивным многочленом.*

Циклотомический класс элемента поля

Определение 3.6 (для полей характеристики 2).

Пусть $n \mid N$. *Циклотомическим классом* (или *классом сопряжённости*) элемента α поля $\mathbb{F}_2^N$ над своим подполем $\mathbb{F}_2^n$ называется множество всех различных элементов $\mathbb{F}_2^N$, являющихся 2^n-ми степенями α: $\alpha^{2^{nt}}$, $t = 0, 1, \ldots$.

Свойства циклотомических классов.

1. Циклотомические классы различных элементов либо совпадают, либо не пересекаются $\Rightarrow$ все они образуют *разбиение* данного поля.

   Любой элемент поля принадлежит только одному циклотомическому классу.

2. Если α — *примитивный элемент* поля $\mathbb{F}_2^{qn}$, то его циклотомический класс над $\mathbb{F}_2^n$ *содержит ровно* q *элементов*, т. е. это класс
$$\left\{ \alpha^{2^{0\cdot n}} = \alpha,\, \alpha^{2^{1\cdot n}} = \alpha^{2^n},\, \alpha^{2^{2n}},\, \ldots,\, \alpha^{2^{(q-1)\cdot n}} \right\}.$$

3. Если α — *примитивный элемент* поля $\mathbb{F}_2^{qn}$ и циклотомический класс элемента α^k над $\mathbb{F}_2^n$ содержит s элементов, то полином
$$m_\beta(x) = \prod_{t=0}^{s-1} \left(x - (\alpha^k)^{2^t} \right)$$
является м.м. *для всех элементов, входящих в данный циклотомический класс.*

Рассматривают разбиения на циклотомические классы мультипликативные группы полей.

Пример 3.8. Приведём примеры разложения *мультипликативных групп* полей $\mathbb{F}_2^{qn}$ на циклотомические классы над своими подполями $\mathbb{F}_2^n$.

1. $n = 1$, $q = 3$, т. е. рассматриваются поля $\mathbb{F}_2$ и $\mathbb{F}_2^3 = F$. Пусть α — примитивный элемент F.

Тогда $\alpha^7 = 1$ и разложение F^* над $\mathbb{F}_2$ есть (каждый элемент данного циклотомического класса последовательно возводим в степень $2^n = 2$)

$$\{1\},\ \{\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^4\},\ \{\alpha^3,\ \alpha^6,\ \alpha^5\}.$$

2. $n = 2, q = 2$, рассматриваемые поля $\mathbb{F}_2^2$ и $\mathbb{F}_2^4 = F$, и пусть α — примитивный элемент F.

Тогда $\alpha^{15} = 1$ и разложение F^* над $\mathbb{F}_2^2$ есть (каждый элемент данного циклотомического класса последовательно возводим в степень $2^n = 4$)

$$\{1\},\ \{\alpha,\ \alpha^4\},\ \{\alpha^2,\ \alpha^8\},\ \{\alpha^3,\ \alpha^{12}\},\ \{\alpha^5\},$$
$$\{\alpha^{10}\},\ \{\alpha^6,\ \alpha^9\},\ \{\alpha^7,\ \alpha^{13}\},\ \{\alpha^{11},\ \alpha^{14}\}.$$

3. $n = 1, q = 4$, рассматриваемые поля — $\mathbb{F}_2$ и $\mathbb{F}_2^4 = F$, и пусть α — примитивный элемент F.

Тогда $\alpha^{15} = 1$ и разложение F^* над $\mathbb{F}_2$ есть

$$\{1\},\ \{\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^4,\ \alpha^8\},\ \{\alpha^3,\ \alpha^6,\ \alpha^{12},\ \alpha^{24} = \alpha^9\},$$
$$\{\alpha^5,\ \alpha^{10}\},\ \{\alpha^7,\ \alpha^{14},\ \alpha^{28} = \alpha^{13},\ \alpha^{26} = \alpha^{11}\}.$$

БЧХ-коды: определение (простейший случай) и основное свойство

Пусть выбраны параметр q, определяющий длину кода $n = 2^q - 1$ и *конструктивное расстояние* $d_c < n$. Далее рассматривается поле $\mathbb{F}_2^q$ разложения бинома

$x^n - 1$ и некоторый примитивный элемент α этого поля.

Код БЧХ есть циклический (n, k, d)-код, в котором делящий бином $x^n - 1$ порождающий многочлен $g(x)$ является полиномом минимальной степени, имеющим корнями *нули кода* α, α^2, α^3, ..., $\alpha^{d_c - 1}$.

Для построенного кода $\deg g(x) = m > d_c - 1$ (т. е. кроме указанных нулей кода $g(x)$ имеет и другие корни); $k = n - m$. При этом кодовое расстояние d оказывается не менее выбранного конструктивного расстояния d_c — *важнейшее свойство построенного БЧХ-кода.*

Коды БЧХ: синдромы. Поскольку все кодовые слова циклического кода C делятся на полином $g(x)$ с корнями α, α^2, ..., α^{d-1}, то эти корни — одновременно и корни любого кодового слова:

$$v(x) \in C \;\Leftrightarrow\; v(\alpha^i) \;=\; 0, \quad i = 1, \ldots, d - 1.$$

Определение 3.7. *Синдромами полинома* $w(x)$, принятого при передаче сообщения, закодированного БЧХ-кодом с нулями α^i, $i = \overline{1, d-1}$ и, возможно, содержащего ошибки, назовём набор значений $w(x)$ в нулях кода: $s_i = w(\alpha^i)$.

Ясно, что определение синдрома для БЧХ-кода, очевидно, есть *перефразировка в терминах нулей кода полиномов* синдрома для циклического кода. Далее, поскольку

$$w(x) = v(x) + e(x), \quad \text{то} \quad s_i = w(\alpha^i) = e(\alpha^i),$$

то «*все синдромы равны нулю*» $\Leftrightarrow$ $w(x)$ — кодовое слово.

3.6 Построение БЧХ-кодов

Алгоритм построения БЧХ-кода. БЧХ (n, k)-код, как и любой циклический, задаётся порождающим полиномом $g(x)$ — делителем бинома $x^n - 1$, $\deg g(x) = m$, $k = n - m$.

Для построения кода БЧХ нужно:

1) задать величину q, определяющую длину кода $n = 2^q - 1$;
2) задать величину конструктивного расстояния $d_c = 2r + 1 < n$, если предполагается исправлять до r ошибок;
3) выбрав неприводимый полином $a(x) \in \mathbb{F}_2[x]$ степени q определить поле $\mathbb{F}_2^q = \mathbb{F}_2[x]/(a(x))$ его примитивный элемент α;
4) определить циклотомические классы элемента $\alpha \in \mathbb{F}_2^q$ над полем $\mathbb{F}_2$, в которые попадают нули кода α, α^2, ..., α^{d_c-1}; пусть таких классов h;
5) найти минимальные многочлены $g_1(x)$, ..., $g_h(x)$ каждого циклотомического класса;
6) вычислить порождающий полином
$$g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot \ldots \cdot g_h(x).$$

Пример 3.9 (построения кодов БЧХ). Выберем $q = 3$ и построим различные БЧХ-коды длины $n = 2^3 - 1 = 7$.

Для получения разложения бинома $x^7 - 1$ возьмём многочлен $a(x) = x^3 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$, $\deg a(x) = q = 3$ и образуем поле поле $F = \mathbb{F}_2[x]/(a(x)) \cong \mathbb{F}_2^3$. Поскольку многочлен $a(x)$ — примитивный, то элемент $\alpha = x$ примитивен и F^*, как показано ранее, разбивается на следующие циклотомические классы над $\mathbb{F}_2$:

$$\{1\},\ \{\alpha,\, \alpha^2,\, \alpha^4\},\ \{\alpha^3,\, \alpha^6,\, \alpha^5\}.$$

Для построения кодов, исправляющих заданное количество ошибок, необходимо определить соответствующий порождающий полином.

1. *Код БЧХ длины $n = 7$, исправляющий $r = 1$ ошибку* (код Хэмминга).

В этом случае $d_c - 1 = 2r = 2$ и нули кода α, α^2 попадают в *один* циклотомический класс.

Минимальный многочлен для обоих элементов этого класса — $a(x)$, поэтому порождающий полином $g(x) = a(x)$, $m = \deg g(x) = 3$ и в результате получаем уже известный $(7, 4, 3)$-код Хэмминга.

2. *Код БЧХ длины $n = 7$, исправляющий не менее $r = 2$ ошибок.*

Теперь $d_c - 1 = 2r = 4$. Нули строящегося кода α, α^2, α^3, α^4 входят в *два* циклотомических класса: $\{\alpha,\, \alpha^2,\, \alpha^4\}$ и $\{\alpha^3,\, \alpha^6,\, \alpha^5\}$, порождаемых α и α^3 соответственно, поэтому

$$g(x) = g_\alpha(x) \cdot g_{\alpha^3}(x),$$

где $g_\alpha(x)$ и $g_{\alpha^3}(x)$ — м.м. для α и α^3.

М.м. для α известен: $g_\alpha(x) = a(x) = x^3 + x + 1$.

Найдем м.м. для $\alpha^3 = \alpha + 1$:

$$g_{\alpha^3}(x) = \left(x - \alpha^3\right)\left(x - \alpha^5\right)\left(x - \alpha^6\right) =$$

$$= x^3 + \left(\alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6\right) x^2 + \left(\alpha^8 + \alpha^9 + \alpha^{11}\right) x + \alpha^{14}.$$

Вычислим коэффициенты полинома $g_{\alpha^3}(x)$ с учётом $\alpha^7 = 1$ и $\alpha^3 = \alpha + 1$:

$$\begin{aligned}
\alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6 &= (\alpha+1) + \alpha^2(\alpha+1) + (\alpha+1)^2 = \\
&= \alpha + 1 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha^2 + 1 = 1\,, \\
\alpha^8 + \alpha^9 + \alpha^{11} &= \alpha^2 + \alpha + \alpha^4 = \alpha^2 + \alpha + \alpha(\alpha+1) = 0\,, \\
\alpha^{14} &= 1\,.
\end{aligned}$$

Таким образом $g_{\alpha^3}(x) = x^3 + x^2 + 1$ (что можно было определить сразу: это второй из двух неприводимых многочленов степени 3) и

$$\begin{aligned}
g(x) = g_\alpha(x) \cdot g_{\alpha^3}(x) &= (x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1) = \\
&= x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.
\end{aligned}$$

Получаем $\deg g(x) = m = 6$ и $k = 7 - 6 = 1$, т. е. построен тривиальный код с 7-кратным повторением, исправляющий 3 ошибки и содержащий всего два кодовых слова: $[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ и $[1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]^T$.

Хотя код и исправляет больше ошибок, чем планировалось, его скорость $R = 1/7$ чрезвычайно мала.

Пример 3.10. Попытаемся построить лучший код для исправления 2-х ошибок, взяв бóльшую его длину: выберем $q = 4$, т. е. длина кода будет $n = 2^q - 1 = 15$.

Для получения разложения бинома $x^{15} - 1$ рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_2[x]/(a(x)) \cong \mathbb{F}_2^4$, $\deg a(x) = q = 4$. Тогда F^* разбивается на следующие циклотомические классы над $\mathbb{F}_2$ относительно примитивного элемента α:

$$\{1\},\ \{\alpha,\,\alpha^2,\,\alpha^4,\,\alpha^8\},\ \{\alpha^3,\,\alpha^6,\,\alpha^{12},\,\alpha^9\},$$
$$\{\alpha^5,\,\alpha^{10}\},\ \{\alpha^7,\alpha^{14},\alpha^{13},\alpha^{11}\}.$$

Конкретно в качестве порождающего многочлена возьмём примитивный многочлен

$$a(x) = x^4 + x + 1,$$

который является м.м. для примитивного элемента $\alpha = x$ и всего класса $\{\alpha,\,\alpha^2,\,\alpha^4,\,\alpha^8\}$.

1. *Код БЧХ длины* $n = 15$, *исправляющий* $r = 2$ *ошибки.*

В этом случае $d_c - 1 = 2r = 4$ и нули $\alpha,\,\alpha^2,\,\alpha^3,\,\alpha^4$ конструируемого кода располагаются в двух циклотомических классах — для элементов α и α^3.

М.м. для (всех) элементов этих классов:

первого (α): $g_\alpha(x) = a(x)$.

второго (α^3): $g_{\alpha^3}(x) =$

$$= (x - \alpha^3)(x - \alpha^6)(x - \alpha^9)(x - \alpha^{12}) = \ldots$$
$$\ldots = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Тогда порождающий полином кода есть

$$g(x) = g_\alpha(x) \cdot g_{\alpha^3}(x) = x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1.$$

Получено $m = 8$, $k = 7$ и, как можно показать, $d = d_c = 5$, т. е. построен БЧХ $(15, 7, 5)$-код со скоростью уже $R = 7/15 > 1/7$.

Построим теперь

2. *Код БЧХ длины* $n = 15$, *исправляющий* $r = 3$ *ошибки.*

Теперь нужно найти полином, являющийся м.м. для нулей α, α^2, ..., α^6, которые попадают в 3 циклотомических класса:

$$\{\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^8\}, \{\alpha^3, \alpha^6, \alpha^9, \alpha^{12}\}, \{\alpha^5, \alpha^{10}\}$$

(имеются ещё по одному 1- и 4-х элементному классу).

Пусть поле разложения бинома $x^{15}-1$ то же, тогда м.м. для α и α^3 уже найдены.

Очевидно $g_{\alpha^5}(x) = x^2+x+1$ (единственный неприводимый квадратный полином над $\mathbb{F}_2$) и порождающий полином полученного кода есть

$$g(x) = g_\alpha(x) \cdot g_{\alpha^3}(x) \cdot g_{\alpha^5}(x) = \\ = x^{10} + x^8 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1.$$

Получено $m = 10$, $k = 5$ и можно показать, что $d = d_c = 7$.

Этот $(15, 5, 7)$-код БЧХ при той же длине, что и предыдущий, исправляет больше ошибок, но имеет меньшую скорость $R = 1/3$.

Декодирование кодов БЧХ

Декодирование кода Хэмминга как линейного кода с помощью проверочной матрицы и вычисляемого с её помощью вектора-синдрома было уже рассмотрено в Разделе 3.3. Опишем ещё один метод декодирования кодов Хэмминга как простейших кодов БЧХ.

В этом случае $d = 3$, и поэтому нулями кода являются α и α^2, где α — примитивный элемент поля $\mathbb{F}_2^n$, $n = 2^q - 1$.

Для декодирования принятого слова $w(x)$ вычисляем синдром $s_1 = w(\alpha)$ (синдром $s_2 = w(\alpha^2)$ нам не потребуется).

- При $s = 0$ считаем, что ошибок не произошло.
- Если $s \not\equiv 0$, то определяем значение j, для которого α^j и считаем, что произошла единичная ошибка в j-м разряде для $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Пример 3.11 (декодирование кода Хэмминга). Рассматриваем $(7,4)$-код Хэмминга, построенный в *Примере* 3.7 для циклических кодов.

Там был выбран порождающий полином $g(x) = x^3 + x + 1$ и найдено систематическое кодирование $v(x)$ сообщения $u(x) = x^3 + x^2 \leftrightarrow [0\ 0\ 1\ 1]^T$:

$$v(x) = x^6 + x^5 + x \leftrightarrow [0\ 1\ 0\ \underbrace{0\ 0\ 1\ 1}]^T.$$

Пусть при передаче сообщения $u(x)$ произошла ошибка в 5-й позиции, т. е. принято слово

$$[0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1]^T \leftrightarrow w(x) = x^6 + x\,.$$

Для декодирования $w(x)$ найдем синдром, учитывая, что $\alpha^3 = \alpha + 1$ и $\alpha^7 = 1$:

$$s = w(\alpha) = \alpha^6 + \alpha = \left(\alpha^3\right)^2 + \alpha = (\alpha + 1)^2 + \alpha = \\ = \alpha^2 + \alpha + 1 \neq 0\,.$$

Определим теперь значение $j \in \{\,0, \ldots, 6\,\}$, для которого $\alpha^j = s$:

$$\begin{aligned}
\alpha^0 &= 1, & \alpha^3 &= \alpha + 1, \\
\alpha^1 &= \alpha, & \alpha^4 &= \alpha(\alpha + 1) = \alpha^2 + \alpha, \\
\alpha^2 &= \alpha^2, & \alpha^5 &= \alpha^3 + \alpha^2 = \alpha^2 + \alpha + 1 = s.
\end{aligned}$$

Т.о. 5-я позиция ошибки определена верно. Другой способ нахождения позиции ошибки кода Хэмминга см. в Задаче 3.3 на с. 166.

Декодирование кодов БЧХ в общем случае.

Рассмотрим (n, k, d)-код БЧХ длины $n = 2^q - 1$ при построении которого для определения порождающего полинома использовалось поле $F = \mathbb{F}_2^q = \mathbb{F}_2[x]/(a(x))$, $\deg a(x) = q$ и α — нуль кода.

Пусть при передаче кодового слова произошло $\nu \leqslant r = \lfloor (d-1)/2 \rfloor$ ошибок в позициях $j_1, \ldots, j_\nu$. Тогда

$$e(x) = x^{j_1} + x^{j_2} + \cdots + x^{j_\nu}.$$

Отметим, что ни само ν, ни значения $j_1, \ldots, j_\nu$ неизвеастны.

Вычислим синдромы принятого полинома $w(x)$: $s_i = w(\alpha^i) = e(\alpha^i)$, $i = \overline{1, 2r}$. Если не все они равны 0 (т.е. $1 \leqslant r$), запишем их значения через степени примитивного элемента α:

$$\begin{cases} s_1 = \alpha^{j_1} + \alpha^{j_2} + \ldots + \alpha^{j_\nu}, \\ s_2 = (\alpha^{j_1})^2 + (\alpha^{j_2})^2 + \ldots + (\alpha^{j_\nu})^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{2r} = (\alpha^{j_1})^{2r} + \ldots + (\alpha^{j_\nu})^{2r}. \end{cases}$$

Значения $\nu, j_1, \ldots, j_\nu$, удовлетворяющие данной системе, определят число и позиции ошибок[8].

Введём обозначения $\beta_i = \alpha^{j_i}$, $i = 1, \ldots, \nu$; эти величины называют *локаторами ошибок*.

Перепишем систему:

[8] Такое решение всегда существует и единственно, т. к. код по построению способен исправлять до r ошибок.

$$\begin{cases} s_1 = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu, \\ s_2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots + \beta_\nu^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{2r} = \beta_1^{2r} + \beta_2^{2r} + \ldots + \beta_\nu^{2r}. \end{cases}$$

Определим *полином локаторов ошибок*

$$\sigma(x) = \prod_{i=1}^{\nu}(1 + \beta_i x) = 1 + \sigma_1 x + \sigma_2 x^2 + \cdots + \sigma_\nu x^\nu,$$

корнями которого будут величины $\beta_i^{-1} = \alpha^{-j_i},\ i = \overline{1,\nu}$.

Связь между коэффициентами полинома локаторов ошибок и самими локаторами определяет теорема Виета:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu, \\ \sigma_2 = \beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_3 + \beta_1\beta_3 + \ldots + \beta_{\nu-1}\beta_\nu, \\ \sigma_3 = \sum\limits_{i_1<i_2<i_3} \beta_{i_1}\beta_{i_2}\beta_{i_3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma_\nu = \beta_1\beta_2\ldots\beta_\nu. \end{cases}$$

Введённые системы задают величины синдромов и коэффициентов полинома локаторов ошибок как значения *симметрических полиномов*: первая — суммы k-х степеней и вторая — элементарных.

Соотношения между этими двумя типами симметрических полиномов задаются *тождествами Ньютона-Жирара*, которые в двоичной арифметике записываются как

$$
\begin{aligned}
&s_1 + \sigma_1 = 0,\\
&s_2 + \sigma_1 s_1 + 2\sigma_2 = 0,\\
&s_3 + \sigma_1 s_2 + \sigma_2 s_1 + 3\sigma_3 = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&s_\nu + \sigma_1 s_{\nu-1} + \ldots + \sigma_{\nu-1} s_1 + \nu\sigma_\nu = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&s_{\nu+1} + \sigma_1 s_\nu + \ldots + \sigma_{\nu-1} s_2 + \sigma_\nu s_1 = 0,\\
&s_{\nu+2} + \sigma_1 s_{\nu+1} + \ldots + \sigma_{\nu-1} s_3 + \sigma_\nu s_2 = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&s_{2r} + \sigma_1 s_{2r-1} + \ldots + \sigma_{\nu-1} s_{2r-\nu+1} + \sigma_\nu s_{2r-\nu} = 0.
\end{aligned}
\right\} \quad (*)
$$

Последние $2r - \nu$ равенств данной системы могут быть записаны как СЛАУ относительно $\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu$. Стандартными методами эта система не может быть решена, поскольку *значение ν неизвестно.*

Алгоритмы решения системы $(*)$ называют *декодерами.* Например, *декодер PGZ (Peterson-Gorenstein-Zierler, Перерсона-Горенштейна-Цирлера)* состоит в последовательных попытках решения данных соотношений для $\nu = r, r-1, \ldots$ до тех пор, пока матрица очередной СЛАУ не окажется невырожденной.

Далее рассмотрен декодер на основе расширенного алгоритма Евклида.

В результате работы декодера находят полином локаторов ошибок $\sigma(x)$; при этом, ясно, число произошедших ошибок $\nu = \deg \sigma(x)$.

После нахождения $\sigma(x)$ можно, например, перебором[9], отыскать все ν его корней α^{-j_i}, а по ним — по-

[9] т.н. *процедура Ченя*

зиции ошибок $j_1, \ldots, j_\nu$.

Алгоритм декодирования (n, k, d)*-кода БЧХ*
Пусть $n = 2^q - 1$ и $\alpha \in \mathbb{F}_2^q = F$ — нуль кода, т. е. примитивный элемент поля $F = \mathbb{F}_2[x]/\left(a(x)\right)$, $\deg a(x) = q$ и принято слово $w(x)$.

1. Найти все синдромы $s_i = w(\alpha^i)$, $i = \overline{1, d-1}$; если все они равны 0, то, считаем, что ошибок нет, в противном случае — переход к следующему пункту.
2. Найти полином локаторов ошибок $\sigma(x)$, используя тот или иной декодер; число произошедших ошибок $\nu = \deg \sigma(x)$.
3. Найти все корни $\sigma(x)$ перебором элементов F^*; пусть эти корни суть $\alpha^{k_1}, \ldots, \alpha^{k_\nu}$.
4. Найти *позиции ошибок* $j_i \equiv_n -k_i$, $i = \overline{1, \nu}$.
5. Исправить ошибки, инвертировав позиции j_i, $i = \overline{1, \nu}$ в $w(x)$, получив кодовое слово $v(x) = w(x) + x^{j_1} + \ldots + x^{j_\nu}$.
6. По кодовому слову $v(x)$ восстановить переданное сообщение $u(x)$ (в случае систематического кодирования — тривиальная процедура).

Опишем *декодер на основе расширенного алгоритма Евклида*, который будем далее использовать.

Введём вспомогательный *синдромный полином*

$$s(x) = 1 + s_1 x + s_2 x^2 + \ldots + s_{2r} x^{2r},$$

где s_i, $i = \overline{1, 2r}$ — синдромы и, формально, $s_0 = 1$. Заметим, что это полностью определённый полином с коэффициентами из F.

Если перемножить полиномы — синдромный и локаторов ошибок — получим *полином значений ошибок*:

$$s(x)\sigma(x) = 1 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_{2r+\nu} x^{2r+\nu}.$$

Коэффициенты этого полинома определяются соотношением для произведения многочленов —

$$\lambda_i = \sum_{j=0}^{i} s_j \sigma_{i-j}, \quad i = \overline{1, 2r+\nu}.$$

Замечаем, что значения λ_i по данной формуле для $i = \nu+1, \ldots, 2r$ суть левые части соотношений $(*)$, т. е. все они равны 0.

Значит, полином значений ошибок имеет нулевую среднюю часть. Обозначим его начальную часть $\lambda(x)$, а из заключительной части вынесем за скобку x^{2r+1}:

$$s(x)\sigma(x) = \underbrace{\left(1 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_\nu x^\nu\right)}_{=\lambda(x)} +$$
$$+ x^{2r+1}\left(\lambda_{2r+1} + \ldots + \lambda_{2r+\nu} x^{\nu-1}\right), \quad 1 \leqslant \nu \leqslant r.$$

Это означает, что $s(x)\sigma(x)$ при делении на x^{2r+1} даст в остатке $\lambda(x)$, т. е.

$$s(x)\sigma(x) \equiv_{x^{2r+1}} \lambda(x).$$

Данное соотношение называют *ключевым уравнением.*

Очевидно, ключевое уравнение в поле $\mathbb{F}_2[x]/(a(x))$ может быть записано в виде соотношения Безу

$$s(x)\sigma(x) + x^{2r+1}a(x) = \lambda(x),$$

которое может быть решено относительно $\sigma(x)$ расширенным алгоритмом Евклида. При этом:

- условие остановки — степень очередного полученного остатка $\leqslant r$;
- при решении не требуется знать многочлен $\lambda(x)$.

Пример 3.12 (декодирования БЧХ-кода).

Рассмотрим БЧХ $(15, 5, 7)$-код, т. е. $q = 4$ и $n = 15$, исправляющий до $r = 3$ ошибок.

Пусть при построении кода в качестве поля разложения бинома $x^{15} - 1$ использовалось поле $\mathbb{F}_2^4 \cong \mathbb{F}_2[x]/\big(x^4 + x + 1\big) = F$ и α — нуль кода.

Пусть также передаётся сообщение

$$[0\ 1\ 1\ 0\ 1]^T \leftrightarrow u(x) = x^4 + x^2 + x\,.$$

При систематическом кодировании (опустим этот этап) кодовое слово есть

$$v(x) = x^{14} + x^{12} + x^{11} + x^8 + x^4 + x^3 + x^2 + x \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow [0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ \underline{0\ 1\ 1\ 0\ 1}]^T.$$

Пусть ошибки произошли в 0, 6 и 12-й позициях, т. е. принятое слово —

$$w(x) = x^{14} + x^{11} + x^8 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow [\underline{1}\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ \underline{1}\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ \underline{0}\ 0\ 1]^T.$$

Для дальнейших вычислений нам понадобится представление ненулевых элементов поля $\mathbb{F}_2[x]/\big(x^4 + x + 1\big)$ как степеней его генератора α (что уже сделано в таблице со с. 65):

α^1	α
α^2	α^2
α^3	α^3
α^4	$\alpha+1$
α^5	$\alpha^2+\alpha$
α^6	$\alpha^3+\alpha^2$
α^7	$\alpha^3+\alpha+1$
α^8	α^2+1
α^9	$\alpha^3+\alpha$
α^{10}	$\alpha^2+\alpha+1$
α^{11}	$\alpha^3+\alpha^2+\alpha$
α^{12}	$\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1$
α^{13}	$\alpha^3+\alpha^2+1$
α^{14}	α^3+1
α^{15}	1

1. Поскольку $d-1=2r=6$, найдём все 6 синдромов для принятого слова:

$$s_1 = w(\alpha) = \\ = (\alpha^3+1)+(\alpha^3+\alpha^2+\alpha)+(\alpha^2+1)+(\alpha^3+\alpha^2)+ \\ +(\alpha+1)+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1 = \alpha,$$

$$s_2 = w(\alpha^2) = (w(\alpha))^2 = s_1^2 = \alpha^2,$$

$$s_3 = w(\alpha^3) = \underbrace{\alpha^{42}}_{=\alpha^{12}}+\underbrace{\alpha^{33}}_{=\alpha^3}+\underbrace{\alpha^{24}}_{=\alpha^9}+\underbrace{\alpha^{18}}_{=\alpha^3}+\alpha^{12}+\alpha^9+ \\ +\alpha^6+\alpha^3+1 = \alpha^3+\alpha^6+1 = \cancel{\alpha}^3+\alpha^2+\cancel{\alpha}^3+1 = \\ = \alpha^2+1 = \alpha^8,$$

$$s_4 = w(\alpha^4) = s_1^4 = \alpha^4,$$

$$s_5 = w(\alpha^5) = \alpha^{70}+\alpha^{55}+\alpha^{40}+\alpha^{30}+\alpha^{20}+\alpha^{15}+$$

$$+\,\alpha^{10} + \alpha^5 + 1 \,=$$
$$=\, \alpha^{10} + \alpha^{10} + \alpha^{10} + 1 + \alpha^5 + 1 + \alpha^{10} + \alpha^5 + 1 \,=\, 1,$$
$$s_6 \,=\, w(\alpha^6) \,=\, s_3^2 \,=\, \alpha^{16} \,=\, \alpha.$$

Таким образом, синдромный полином есть

$$s(x) \,=\, \alpha x^6 + x^5 + \alpha^4 x^4 + \alpha^8 x^3 + \alpha^2 x^2 + \alpha x + 1.$$

2. По декодеру на базе расширенного алгоритма Евклида, зная $a(x)$ и $s(x)$, решаем относительно $\sigma(x)$ соотношение Безу

$$x^7 a(x) \,+\, s(x)\sigma(x) \,=\, \lambda(x).$$

Шаг 0. // *Инициализация*

$r_{-2}(x) \,=\, x^7,$
$r_{-1}(x) \,=\, s(x) \,=\, \alpha x^6 + x^5 + \alpha^4 x^4 + \alpha^8 x^3 +$
$+\alpha^2 x^2 + \alpha x + 1,$
$\sigma_{-2}(x) \,=\, 0, \quad \sigma_{-1}(x) \,=\, 1.$

Шаг 1. // *Делим с остатком* $r_{-2}(x)$ *на* $r_{-1}(x)$

$r_{-2}(x) \,=\, r_{-1}(x) q_0(x) + r_0(x),$
$q_0(x) \,=\, \alpha^{14} x + \alpha^{13},$
$r_0(x) \,=\, \alpha^8 x^5 + \alpha^{12} x^4 + \alpha^{11} x^3 + \alpha^{13},$
$\deg r_0(x) = 5 > 3 = r,$
$\sigma_0(x) \,=\, \sigma_{-2}(x) + \sigma_{-1}(x) q_0(x) \,=$
$=\, q_0(x) \,=\, \alpha^{14} x + \alpha^{13}.$

Шаг 2. // *Делим с остатком* $r_{-1}(x)$ *на* $r_0(x)$

$$r_{-1}(x) \;=\; r_0(x)q_1(x) \;+\; r_1(x),$$
$$q_1(x) \;=\; \alpha^8 x + \alpha^2,$$
$$r_1(x) \;=\; \alpha^{14}x^4 + \alpha^3 x^3 + \alpha^2 x^2 + \alpha^{11}x,$$
$$\deg r_1(x) = 4 > 3 = r,$$
$$\sigma_1(x) \;=\; \sigma_{-1}(x) + \sigma_0(x)q_1(x) \;= \;=\; \alpha^7 x^2 + \alpha^{11}x.$$

Шаг 3. // *Делим с остатком* $r_0(x)$ *на* $r_1(x)$

$$r_0(x) \;=\; r_1(x)q_2(x) \;+\; r_2(x),$$
$$q_2(x) \;=\; \alpha^9 x,$$
$$r_2(x) \;=\; \alpha^5 x + \alpha^{13},$$
$$\deg r_2(x) = 1 \leqslant 3 = r,$$
$$\sigma_2(x) \;=\; \sigma_0(x) \;+\; \sigma_1(x)q_2(x) \;= \;=\; \alpha x^3 + \alpha^5 x^2 + \alpha^{14}x + \alpha^{13} \;=\; \sigma(x).$$

Это последний шаг алгоритма Евклида, т. к. степень остатка $r_2(x)$ не превосходит r.

Таким образом, полином локаторов ошибок найден:

$$\sigma(x) \;=\; \alpha x^3 + \alpha^5 x^2 + \alpha^{14}x + \alpha^{13}.$$

и $\nu \;=\; \deg\sigma(x) \;=\; 3.$

3. Найдём корни $\sigma(x)$ перебором элементов F^*, используя построенную ранее таблицу степеней α:

$$\sigma(\alpha) \;=\; \alpha^4 + \alpha^7 + 1 + \alpha^{13} \;=\; \alpha^2,$$
$$\sigma(\alpha^2) \;=\; \alpha^7 + \alpha^9 + \alpha + \alpha^{13} \;=\; \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha,$$
$$\sigma(\alpha^3) \;=\; \alpha^{10} + \alpha^{11} + \alpha^2 + \alpha^{13} \;=\; \mathbf{0},$$
$$\sigma(\alpha^4) \;=\; \alpha^{13} + \alpha^{13} + \alpha^3 + \alpha^{13} \;=\; \alpha^2 + 1,$$
$$\sigma(\alpha^5) \;=\; \alpha + 1 + \alpha^4 + \alpha^{13} = \alpha^{13},$$

$$\sigma(\alpha^6) = \alpha^4 + \alpha^2 + \alpha^5 + \alpha^{13} = \alpha^3 + \alpha^2,$$
$$\sigma(\alpha^7) = \alpha^7 + \alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^{13} = \alpha^3 + 1,$$
$$\sigma(\alpha^8) = \alpha^{10} + \alpha^6 + \alpha^7 + \alpha^{13} = \alpha^3 + \alpha^2 + 1,$$
$$\sigma(\alpha^9) = \alpha^{13} + \alpha^8 + \alpha^8 + \alpha^{13} = \mathbf{0},$$
$$\sigma(\alpha^{10}) = \alpha + \alpha^{10} + \alpha^9 + \alpha^{13} = \alpha,$$
$$\sigma(\alpha^{11}) = \alpha^4 + \alpha^{12} + \alpha^{10} + \alpha^{13} = \alpha^2 + \alpha,$$
$$\sigma(\alpha^{12}) = \alpha^7 + \alpha^{14} + \alpha^{11} + \alpha^{13} = 1,$$
$$\sigma(\alpha^{13}) = \alpha^{10} + \alpha + \alpha^{12} + \alpha^{13} = \alpha^2 + \alpha + 1,$$
$$\sigma(\alpha^{14}) = \alpha^{13} + \alpha^3 + \alpha^{13} + \alpha^{13} = \alpha^2 + 1,$$

поскольку корней всего 3, то ясно, что $\sigma(\alpha^{15}) = 0$; действительно:

$$\sigma(\alpha^{15}) = \alpha + \alpha^5 + \alpha^{14} + \alpha^{13} = \mathbf{0}.$$

4. По найденным корням α^3, α^9, α^{15} вычисляем позиции ошибок:

$$j_1 = -3 \equiv_{15} 12,$$
$$j_2 = -9 \equiv_{15} 6,$$
$$j_3 = -15 \equiv_{15} 0.$$

5. Таким образом полином ошибок $e(x) = x^{12} + x^6 + 1$ определён и переданное кодовое слово есть

$$v(x) = w(x) + e(x) \leftrightarrow [0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ \underbrace{0\ 1\ 1\ 0\ 1}]^T.$$

Справка. В системах передачи данных широко используется двоичный $(255, 231, 7)$-код БЧХ, у которого

- степень порождающего код многочлена $g(x)$ — $m = n - k = 24$;
- $q = 8$ и в общем количестве слов длины 255 доля кодовых — $2^{-24} \approx 17 \cdot 10^{-6}$;
- все шары радиуса 3 с центрами в кодовых словах занимают $\approx 16,5\%$ объёма куба B^{255}.

В течении многих лет не было случая, чтобы ошибка передачи прошла незамеченной.

БЧХ (n, k, d)-коды: резюме

- БЧХ-коды являются *подклассом циклических*. *Самое ценное их свойство* — возможность построения кода с кодовым расстоянием не меньше заданного.
- *Кодирование* осуществляется с помощью порождающего полинома, имеющего корнями степени некоторого примитивного элемента поля.
- *Декодирование* может быть проведено с помощью эффективных алгоритмов (Берлекэмпа-Мэсси, Питерсона-Горенстейна-Цирлера, Евклидов алгоритм, ...).
- При небольших n среди кодов БЧХ существуют хорошие коды, но, как правило, не лучшие из известных.
- Теоретически коды БЧХ могут исправлять *произвольное количество ошибок*, но при этом существенно увеличивается длина кодового слова n,

что приводит к уменьшению скорости передачи данных и усложнению приёмно-передающей аппаратуры; поэтому при больших длинах приходится использовать другие коды.

Помехоустойчивое кодирование применяется:

- для получения *надежной связи*, когда мощность принимаемого сигнала близка к мощности тепловых шумов. Например, циклические коды используются в мобильной связи в стандартах GSM и CDMA.
- для *защиты против шума, намеренно организованного противником* в военных приложениях;
- при передаче данных *в вычислительных системах*, которые чрезвычайно чувствительны к ошибкам.

  Типичное значение вероятности ошибки на бит без кодирования в вычислительных сетях составляет 10^{-6}. Использование простейших кодов с небольшой избыточностью позволяет понизить эту вероятность более, чем на 3 порядка.
- для защиты данных во внутренних и внешних ЗУ: ленты, SSD диски, flash-память — коды БЧХ, Хэмминга;
- при *синтезе отказоустойчивых дискретных устройств* (например, БИС);
- для получения *устойчивых признаков из биометрических характеристик* (сетчатка глаза, отпечатки пальцев, ...).

Для выбора минимальных многочленов при построении БЧХ-кодов *составлены специальные таблицы*.

Коррекция ошибок может требоваться не всегда: многие современные каналы связи обладают хорошими характеристиками, и принимающей стороне часто достаточно лишь проверить, успешно ли прошла передача и в случае наличия ошибок повторить её. Также при синтезе сбоеустойчивых ИМС часто требуется лишь зафиксировать наличие ошибки, которая исчезает при повторном вычислении. В этих случаях применяются коды специально предназначенные для *обнаружения ошибок*, а не для их исправления.

Вся математика делится на три раздела: небесная механика, гидродинамика и теория кодирования (*В. И. Арнольд*, академик РАН, один из крупнейших математиков XX века).

3.7 Задачи с решениями

<u>Задача</u> 3.1. *Для линейного кода, заданного своей проверочной матрицей*

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

требуется

1) *построить порождающую матрицу G кода для систематического кодирования, при котором биты исходного сообщения переходят в последние биты кодового слова;*

2) *найти такое кодирование для сообщений*
$$\boldsymbol{u}_1 = [1\ 1\ 0\ 1]^T,\ \boldsymbol{u}_2 = [1\ 0\ 0\ 1]^T.$$

Решение. Проверочная матрица H имеет размерность 3×7, следовательно код при длине $n = 7$ содержит $m = 3$ проверочных и $k = 7 - 3 = 4$ информационных бит.

Порождающая матрица кода G, обеспечивающая требуемое систематическое кодирование, должна иметь вид $\begin{bmatrix} P \\ I_4 \end{bmatrix}$.

Матрицу P можно получить, если привести проверочную матрицу H к виду $\begin{bmatrix} I_3 & P \end{bmatrix}$, преобразуя *строки*:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{(1)+(3)\mapsto(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Теперь можно построить требуемую порождающую матрицу и осуществить кодирование для $\boldsymbol{u}_1 = [1101]^T$, $\boldsymbol{u}_2 = [1001]^T$:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] \,=\, G \times [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2] \,=\, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Очевидно был задан $(7,4)$-код Хэмминга.

Задача 3.2. *Циклический* $(9,3)$*-код задан своим порождающим полиномом*

$$g(x) = x^6 + x^3 + 1.$$

Требуется определить его кодовое расстояние d*, а также осуществить систематическое кодирование полинома*

$$u(x) \,=\, x^2 + x \,\leftrightarrow\, [0\ 1\ 1]^T.$$

Решение. Для определения кодового расстояния найдём все кодовые слова:

$$v(x) \,=\, g(x)(ax^2{+}bx{+}c) \,=\, (x^6{+}x^3{+}1)(ax^2{+}bx{+}c) \,=$$
$$=\, ax^8 + bx^7 + cx^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + ax^2 + bx + c.$$

В векторном виде все кодовые слова представляются как
$$[\,a,\,b,\,c,\,a,\,b,\,c,\,a,\,b,\,c\,].$$
Очевидно, это тривиальный код 3-кратного повторения и $d = 3$.

Проводим систематическое кодирование сообщения $u(x)$:
$$u(x) \;\mapsto\; v(x) = x^6u(x) + r(x),$$
$$x^6u(x) \;=\; x^6(x^2 + x) \;=\; x^8 + x^7.$$

Находим остаток $\deg r(x)$ от деления $x^6u(x)$ на $g(x)$:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^8 & +x^7 & & & & x^6+x^3+1 \\
\cline{6-6}
x^8 & & +x^5 & +x^2 & & x^2+x \\
\cline{1-4}
 & x^7 & +x^5 & +x^2 & & \\
 & x^7 & +x^4 & & +x & \\
\cline{2-5}
 & & x^5+x^4 & +x^2 & +x &
\end{array}$$

Т.о. $r(x) = x^5 + x^4 + x^2 + x$ и

$$v(x) \;=\; x^8+x^7+x^5+x^4+x^2+x \;\leftrightarrow\; [0\;1\;1\;0\;1\;1\;\underline{0\;1\;1}]^T.$$

Задача 3.3. *Рассмотрим код Хэмминга систематического кодирования с порождающим примитивным полиномом $a(x) = x^3 + x + 1$.*

Требуется декодировать полиномы

1. $w_1(x) \;=\; x^6 + x^2 + x,$
2. $w_2(x) \;=\; x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x,$
3. $w_3(x) \;=\; x^6 + x^3 + x^2 + x.$

Решение. Декодирование систематического кода Хэмминга можно провести делением принятого полинома на порождающий: остаток от деления определяет синдром s с учётом таблицы соответствий между полиномиальным и степенным представлением элементов рассматриваемого поля (дублируем таблицу со с. 167):

$x^3 = x+1$ степень x	1	x	x^2
x	(0,	1,	0)
x^2	(0,	0,	1)
$x^3 = x+1$	(1,	1,	0)
$x^4 = x^2+x$	(0,	1,	1)
$x^5 = x^2+x+1$	(1,	1,	1)
$x^6 = x^2+1$	(1,	0,	1)
$x^7 = 1$	(1,	0,	0)

Находим позицию ошибки j.

1. $x^6+x^2+x \;=\; (x^3+x+1)^2+\underbrace{x+1}$, $j=3$.

   Действительно,

$$w(\alpha) \;=\; \alpha^6+\alpha^2+\alpha \;=\; (\alpha^3)^2+\alpha^2+\alpha \;=$$
$$=\; \alpha^2+1+\alpha^2+\alpha \;=\; \alpha+1.$$

2. $x^6+x^5+x^3+x^2+x \;=$
   $= (x^3+x^2+x+1)(x^3+x+1)+\underbrace{x^2+x+1}$, $j=5$;

   Действительно,

$$w(\alpha) \;=\; \alpha^6+\alpha^5+\alpha^3+\alpha^2+\alpha \;=$$
$$=\; \alpha^2+1+\alpha^5+\alpha+1+\alpha^2+\alpha \;=\; \alpha^5.$$

3. $x^6 + x^3 + x^2 + x = (x^3 + x)(x^3 + x + 1) + \underbrace{0}$, т. е. ошибки не произошло.

Задача 3.4. *Пусть α — примитивный элемент поля $\mathbb{F}_2^4 = \mathbb{F}_2[x]/\big(x^4 + x + 1\big)$. Для кода БЧХ с нулями α, α^2, α^3 и α^4 и принятого слова*

$$w(x) = x^{14} + x^{10} + x^5 + x^4.$$

найти полином локаторов ошибок $\sigma(x)$.

Решение. Для удобства вычислений продублируем таблицу соответствий между степенным и полиномиальным представлением элементов данного поля со с. 65:

α^1	α	(0010)
α^2	α^2	(0100)
α^3	α^3	(1000)
α^4	$\alpha + 1$	(0011)
α^5	$\alpha^2 + \alpha$	(0110)
α^6	$\alpha^3 + \alpha^2$	(1100)
α^7	$\alpha^3 + \alpha + 1$	(1011)
α^8	$\alpha^2 + 1$	(0101)
α^9	$\alpha^3 + \alpha$	(1001)
α^{10}	$\alpha^2 + \alpha + 1$	(0111)
α^{11}	$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha$	(1110)
α^{12}	$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$	(1111)
α^{13}	$\alpha^3 + \alpha^2 + 1$	(1101)
α^{14}	$\alpha^3 + 1$	(1001)
α^{15}	1	(0001)

С помощью этой таблицы вычислим синдромы:

$$\begin{aligned}
s_1 &= w(\alpha) = \alpha^{14} + \alpha^{10} + \alpha^5 + \alpha^4 = \\
&= (\alpha^3 + 1) + (\alpha^2 + \alpha + 1) + (\alpha^2 + \alpha) + (\alpha + 1) = \\
&= \alpha^3 + \alpha + 1 = \alpha^7, \\
s_2 &= w(\alpha^2) = (w(\alpha))^2 = \alpha^{14}, \\
s_3 &= w(\alpha^3) = \alpha^{12} + 1 + 1 + \alpha^{12} = 0, \\
s_4 &= w(\alpha^4) = \big(w(\alpha^2)\big)^2 = \alpha^{28} = \alpha^{13}.
\end{aligned}$$

Синдромный полином —

$$s(x) = \alpha^{13}x^4 + \alpha^{14}x^2 + \alpha^7 x + 1.$$

Синдромов всего четыре, следовательно число возникших ошибок ν не более $2 = r$.

Полином локаторов ошибок $\sigma(x)$ удовлетворяет соотношению Безу

$$x^{2r+1}a(x) + s(x)\sigma(x) = \lambda(x), \quad \deg\lambda(x) \leqslant 2.$$

Решаем с данное соотношение помощью расширенного алгоритма Евклида:

$$\begin{array}{ll}
\text{Шаг 0.} & r_{-2}(x) = x^5, \qquad // \textit{ Инициализация} \\
& r_{-1}(x) = \alpha^{13}x^4 + \alpha^{14}x^2 + \alpha^7 x + 1, \\
& \sigma_{-2}(x) = 0, \\
& \sigma_{-1}(x) = 1.
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
\text{Шаг 1.}\quad & r_{-2}(x) = r_{-1}(x)q_0(x) + r_0(x),\\
& \;\text{// \textit{Делим} } r_{-2}(x) \text{ \textit{на} } r_{-1}(x) \text{ \textit{с остатком}}\\
& q_0(x) = \alpha^2 x,\\
& r_0(x) = \alpha x^3 + \alpha^9 x^2 + \alpha^2 x,\\
& \sigma_0(x) = \sigma_{-2}(x) - \sigma_{-1}(x)q_0(x) =\\
& \qquad\quad = -q_0(x) = \alpha^2 x.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Шаг 2.}\quad & r_{-1}(x) = r_0(x)q_1(x) + r_1(x),\\
& \;\text{// \textit{Делим} } r_{-1}(x) \text{ \textit{на} } r_0(x) \text{ \textit{с остатком}}\\
& q_1(x) = \alpha^{12} x + \alpha^5,\\
& r_1(x) = \alpha^{14} x^2 + 1,\\
& \quad \deg r_1(x) = 2 \leqslant r,\\
& \sigma_1(x) = \sigma_{-1}(x) - \sigma_0(x)q_1(x) =\\
& \qquad\quad = 1 + \alpha^2 x(\alpha^{12} x + \alpha^5) =\\
& \qquad\quad = \underbrace{\alpha^{14} x^2 + \alpha^7 x + 1}_{\text{полином локаторов ошибок}} = \sigma(x).
\end{aligned}
$$

<u>Задача</u> 3.5. *Рассмотрим код БЧХ, нули которого определяются степенями* α, *где* α *— примитивный элемент поля* $\mathbb{F}_2^4 = \mathbb{F}_2[x]/\big(x^4 + x + 1\big)$.

Пусть для некоторого принятого слова $w(x)$ *полином локаторов ошибок есть*

$$\sigma(x) = \alpha^2 x^2 + \alpha^6 x + 1.$$

Требуется определить позиции ошибок в $w(x)$.

Решение. Найдём корни (их 2, полином квадратный) полинома локаторов ошибок полным перебором.

Для вычислений удобно пользоваться таблицей соответствий между степенным и полиномиальным представлением элементов поля, вычисленной в предыдущей задаче.

$$
\begin{aligned}
\sigma(\alpha) &= \alpha^4+\alpha^7+1 = \alpha^3,\\
\sigma(\alpha^2) &= \alpha^6+\alpha^8+1 = \alpha^3,\\
\sigma(\alpha^3) &= \alpha^8+\alpha^9+1 = \alpha^3+\alpha^2+\alpha,\\
\sigma(\alpha^4) &= \alpha^{10}+\alpha^{10}+1 = 1,\\
\sigma(\alpha^5) &= \alpha^{12}+\alpha^{11}+1 = \mathbf{0},\\
\sigma(\alpha^6) &= \alpha^{14}+\alpha^{12}+1 = \alpha^2+\alpha+1,\\
\sigma(\alpha^7) &= \alpha^{16}+\alpha^{13}+1 = \alpha^3+\alpha^2+1,\\
\sigma(\alpha^8) &= \alpha^{18}+\alpha^{14}+1 = \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

Дальше можно не вычислять: оба корня $\sigma(x)$ найдены. Итак, данный полином локаторов ошибок имеет корни α^5 и α^8.

Определяем позиции ошибок:

$$-5 \equiv_{15} 10, \qquad -8 \equiv_{15} 7.$$

Задача 3.6. *Построить 31-разрядный БЧХ-код для исправления не менее $r=3$ ошибок.*

Решение. Имеем $n = 31 = 2^5-1$, $q = 5$, $d_c-1 = 2r = 6$.

Порождающий многочлен $g(x)$ конструируемого кода должен иметь корни $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6$, где α — примитивный элемент поля $F = \mathbb{F}_2^5$.

При разбиении F^* на циклотомические классы всегда[10] будет присутствовать пятиэлементный класс $\{\,\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^8, \alpha^{16}\,\}$.

[10] см. п. Циклотомический класс элемента поля на с. 142.

Остальные рассматриваемые степени α будут входить в циклотомические классы

$$\{\,\alpha^3,\,\alpha^6,\,\ldots\,\} \;\text{ и }\; \{\,\alpha^5,\,\ldots\,\}\,.$$

Нетрудно установить, что эти классы также будут пятиэлементными:

$$\begin{gathered}\{\,\alpha^3,\,\alpha^6,\,\alpha^{12},\,\alpha^{24},\,\alpha^{48}=\alpha^{17}\,\},\;\;(\text{т. к. } 34\equiv_{31}3)\,;\\ \{\,\alpha^5,\,\alpha^{10},\,\alpha^{20},\,\alpha^{40}=\alpha^{9},\,\alpha^{18}\,\},\;\;(\text{т. к. } 36\equiv_{31}5)\,.\end{gathered}$$

Ранее[11] были приведены неприводимые многочлены 5-й степени над $\mathbb{F}_2$: их шесть —

1) x^5+x^2+1,
2) x^5+x^3+1,
3) $x^5+x^3+x^2+x+1$,
4) $x^5+x^4+x^2+x+1$,
5) $x^5+x^4+x^3+x+1$,
6) $x^5+x^4+x^3+x^2+1$.

Во многих монографиях[12] есть соответствующие таблицы. В этих таблицах указано, что все эти многочлены являются примитивными, т. е. все они могут быть выбраны в качестве порождающего поле полинома $a(x)$.

Положим $a(x)=x^5+x^3+1$ (многочлен № 2) и тогда $g_\alpha(x)=a(x)$, $\alpha^5=\alpha^3+1$, $\alpha^{31}=1$.

Определим, какие из остальных многочленов соответствуют циклотомическим классам для α^3 и α^5.

Имеем:

для многочлена № 3 —

[11] см. с. 34

[12] Например, *Лидл Р., Нидеррайтер Г.* Конечные поля, Том 1, Таблица С.

$$(x^5+x^3+x^2+x+1)\big|_{x=\alpha^3} = \alpha^{15}+\alpha^9+\alpha^6+\alpha^3+1 =$$
$$= (\alpha^3+1)^3+\alpha^4(\alpha^3+1)+\alpha(\alpha^3+1)+\alpha^3+1 = \ldots = 0,$$

для многочлена № 5 —

$$(x^5+x^4+x^3+x+1)\big|_{x=\alpha^5} = \alpha^{25}+\alpha^{20}+\alpha^{15}+\alpha^5+1 =$$
$$= (\alpha^3+1)^5+(\alpha^3+1)^4+(\alpha^3+1)^3+\alpha^5+1 = \ldots = 0.$$

Таким образом,

$g_{\alpha^3}(x) = x^5+x^3+x^2+x+1,\ g_{\alpha^5}(x) = x^5+x^4+x^3+x+1$

и порождающий многочлен для $(31,16,7)$-кода БЧХ есть

$$g(x) = g_\alpha(x)\cdot g_{\alpha^3}(x)\cdot g_{\alpha^5}(x) =$$
$$= x^{15}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^5+x^3+x^2+x+1,$$
$$\deg g(x) = m = 15,\ k = n-m = 16.$$

Задача 3.7. *Рассмотрим БЧХ-код, нули которого определяются степенями примитивного элемента* α *поля* $F = \mathbb{F}_2[x]/\big(x^4+x+1\big)$.

Пусть для некоторого принятого слова полином локаторов ошибок есть $\sigma(x) = \alpha^6 x + \alpha^{15}$. *Определить позиции ошибок в данном слове.*

Решение. Для вычислений в поле F нам понадобится таблица, уже построеная в начале раздела *Существование и единственность поля* $GF(p^n)$ и в Задаче 3.4.

α^1	α
α^2	α^2
α^3	α^3
α^4	$\alpha+1$
α^5	$\alpha^2+\alpha$
α^6	$\alpha^3+\alpha^2$
α^7	$\alpha^3+\alpha+1$
α^8	α^2+1
α^9	$\alpha^3+\alpha$
α^{10}	$\alpha^2+\alpha+1$
α^{11}	$\alpha^3+\alpha^2+\alpha$
α^{12}	$\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1$
α^{13}	$\alpha^3+\alpha^2+1$
α^{14}	α^3+1
α^{15}	1

Перебором найдём корни полинома ошибок

$$\sigma(x) \,=\, \alpha^6 x + \alpha^{15} \,=\, (\alpha^3+\alpha^2)\,x+1:$$

$$\sigma(\alpha) \,=\, \alpha^4+\alpha^3+1 \,=\, \alpha+1+\alpha^3 \,\neq\, 0;$$

$$\sigma(\alpha^2) \,=\, \alpha^5+\alpha^4+1 \,=\, \alpha^2+\alpha+\alpha+1+1 \,=\, \alpha^2 \,\neq\, 0;$$

$$\ldots\ldots$$

$$\sigma(\alpha^9) \,=\, \alpha^{12}+\alpha^{11}+1 \,= \,(\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)+(\alpha^3+\alpha^2+\alpha)+1 \,=\, \mathbf{0}.$$

Линейный полином $\sigma(x)$ имеет один корень — α^9, и поэтому позиция единственной ошибки есть $-9 \equiv_{15} 6$.