Часть VII

Решение булевых уравнений II

Разделы

Булева алгебра логических функций

АС $\mathbf{P}_2 = \langle P_2, \vee, \&, \neg, \leqslant, 0, 1 \rangle$,
где P_2 — множество всех двузначных булевых функций, 0 и 1 — функции «тождественный нуль» и «тождественная единица» соответственно, называют булевой структурой логических функций.

Рассмотрим методы решения т.н. обыкновенные функциональных булевых уравнений и их систем в $\mathbf{P}_2$.

Пример обыкновенного функционального БУ: $x \cdot \neg y = 0$.
Здесь $y = y(x) \in P_2$ — неизвестная булева функция булева функция одного переменного x, а x — параметр из $\{0, 1\}$.

Решение данного уравнения — $y(x) = x \vee u(x)$, где $u(x)$ — произвольная булева функция одного переменного x.

Обыкновенные функциональные БУ

Определение

Обыкновенным функциональным булевым уравнением в $\mathbf{P}_2$ *назовём уравнение вида*

$$f(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = 0, \qquad (*)$$

где $\widetilde{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \{0,1\}^n$ *— набор неизвестных,*
$\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \{0,1\}^m$ *— набор параметров,*
f *— булева функция* $f : \mathbf{2}^{m+n} \to \mathbf{2}$.

Решить булево уравнение $(*)$ *— значит найти такое семейство булевых функций* $\{\, \psi_i(\widetilde{x}) \,\}_{i=1}^{n}$ *и область* $D \subset \mathbf{2}^m$*, что при подстановке* $\widetilde{y}_i \mapsto \psi_i(\widetilde{x})$, $i = \overline{1, n}$ *справедливо*

$$\forall x \in D : f\left(\widetilde{x}, \widetilde{\psi}(\widetilde{x})\right) = 0,$$

где $\widetilde{\psi}(\widetilde{x}) = (\psi_1(\widetilde{x}), \ldots, \psi_n(\widetilde{x}))$ *— вектор-функция.*

Разделы

Обыкновенные функциональные БУ с одним неизвестным: вид

Требуется решить уравнение

$$f(y, x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

где $x_1, \ldots, x_n \in \{0, 1\}$, $y = y(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$,
f — логическая формула в произвольном базисе.

Решение БУ не в алгебре логики, а в алгебре логических функций позволяет получать не «табличное» решение, а решение в общем функциональном виде.

Решение ОФБУ с одним неизвестным

Преобразуем уравнение $f(y, x_1, \ldots, x_n) = 0$ в эквивалентное вида $f(1, \widetilde{x}) \cdot y \vee f(0, \widetilde{x}) \cdot \neg y = 0.$

Из доказанного ранее следует, что это уравнение имеет решение iff выполняется соотношение

$$f(1, \widetilde{x}) \cdot f(0, \widetilde{x}) = 0 \quad \text{или} \quad f(0, \widetilde{x}) \leqslant \neg f(1, \widetilde{x}),$$

а само решение $y = y(x_1, \ldots, x_n)$ даётся интервальной

$$y_0(\widetilde{x}) \leqslant y(\widetilde{x}) \leqslant y_1(\widetilde{x})$$

или парметрической формой

$$y(\widetilde{x}) = y_0(\widetilde{x}) \vee \alpha(\widetilde{x})\, y_1(\widetilde{x}),$$

где $y_0(\widetilde{x}) = f(0, \widetilde{x})$, $y_1(\widetilde{x}) = \neg f(1, \widetilde{x})$ — базисные решения исходного уравнения,

$\alpha(\widetilde{x})$ — произвольная булева функция от переменных $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Решение ОФБУ с одним неизвестным: примеры

Пример ① Ранее было решено уравнение $y_1 \supset y_2 = 1$ в алгебре логики как уравнения с двумя неизвестными. Рассмотрим теперь его как уравнение с одним неизвестным в алгебре логических функций.

Представим заданное уравнение в виде $y \cdot \neg x = 0$.

1. Решим это уравнение относительно y.

Из установленного ранее имеем

$$y_0(x) = 0, \quad y_1(x) = x.$$

Условие существование решения $y_0(x)(\neg y_1(x)) = 0$, очевидно, выполняется.

Общее решение: $y(x) = y_0(x) \vee \alpha(x) y_1(x) = \alpha(x) x$,

где $\alpha(x)$ — произвольная булева функция одной переменной x.

Решение ОФБУ с одним неизвестным: примеры...

2. Решим уравнение $y \cdot \neg x = 0$ относительно x.

В этом случае базисные решения суть

$$x_0(y) = y, \quad x_1(y) = 1,$$

условие существования решения $x_0(y)(\neg x_1(y)) = 0$ выполнено, а общее решение есть

$$x(y) = x_0(y) \vee \alpha(y) x_1(y) = y \vee \alpha(y),$$

где $\alpha(y)$ — произвольная булева функция одной переменной y.

Решение ОФБУ с одним неизвестным: примеры...

Пример ② Построение операции, обратной конъюнкции: требуется разрешить уравнение $z = yx$ относительно y.

Решение. Считая $x_1 = x$ и $x_2 = z$, перепишем уравнение в требуемом виде

$$x_1\overline{x}_2y \vee \overline{(x_1y)}x_2 = x_1\overline{x}_2y \vee (\overline{x}_1 \vee \overline{y})x_2 =$$
$$= x_1\overline{x}_2y \vee x_2\overline{y} \vee (\overline{x}_1x_2)(y \vee \overline{y}) =$$
$$= (x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1x_2)y(x_1,\, x_2) \vee x_2\,(\neg y(x_1,\, x_2)) = 0,$$

откуда $f(1, x_1, x_2) = x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1x_2 = \neg y_1(x_1, x_2)$ и
$f(0, x_1, x_2) = x_2 = y_0(x_1, x_2)$.

Условие существования решения принимают вид

$$f(0,\, x_1,\, x_2)f(1,\, x_1,\, x_2) = \overline{x}_1x_2 = 0 \quad \text{или} \quad x_2 \leqslant x_1\ (z \leqslant x).$$

Решение ОФБУ с одним неизвестным: примеры...

Для определения решения определим $y_1(x_1, x_2)$:

$$y_1(x_1, x_2) = \overline{x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 x_2} = x_1 x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2.$$

При их выполнении общее решение есть

$$y(x_1, x_2) = y_0(x_1, x_2) \vee \alpha(x_1, x_2)\, y_1(x_1, x_2) =$$
$$= x_2 \vee \alpha(x_1, x_2)(x_1 x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2) =$$
$$= x_2 \vee \alpha(x_1, x_2)\overline{x}_1\overline{x}_2; \text{ или } y(x, z) = z \vee \alpha(x, z)\,\overline{x}\,\overline{z}.$$

Привлекая условие существования решений $z \leqslant x$, получим

$$z \vee x = x \Leftrightarrow \overline{z}\,\overline{x} = \overline{x}$$

и окончательно — $\quad y(x, z) = z \vee \alpha(x, z)\,\overline{x}$,

где α — любая булева функция от двух переменных x и z.

Необязательная **проверка**: $yx = xz \overset{z \leqslant x}{=} z$.

Решение ОФБУ с одним неизвестным: примеры...

Пример ③ Решить уравнение $f(y, x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_3 y = 1.$

Решение. Приводим уравнение к требуемому виду:

$$(\overline{x}_3(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2))\, y \,\vee\, (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2)\,\overline{y} \,=\, 0,$$

откуда $f(1, \widetilde{x}) \,=\, \overline{x}_3(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2)$ и $f(0, \widetilde{x}) \,=\, \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$.

Условие существования решения рассматриваемого уравнения —

$$f(1, \widetilde{x}) f(0, \widetilde{x}) \,=\, (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2)\overline{x}_3 \,=\, 0,$$

при выполнении которого решение в интервальной форме —

$$\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \,\leqslant\, y \,\leqslant\, x_1 x_2 \vee x_3,$$

а в функциональной —

$$y(\widetilde{x}) \,=\, \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \alpha(\widetilde{x})(x_1 x_2 \vee x_3),$$

где $\widetilde{x} \,=\, (x_1,\, x_2,\, x_3)$, и $\alpha(\widetilde{x})$ — произвольная функция.

Разделы

ОФБУ со многими неизвестными: решение

Решаем уравнение $$f(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = 0, \qquad (*)$$
в котором $f : \mathbf{2}^{m+n} \to \mathbf{2}$, $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{2}^m$ — набор параметров, а $\widetilde{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{2}^n$ — набор неизвестных.

Пусть $y_1(\widetilde{x}), \ldots, y_n(\widetilde{x})$ — одно из его решений уравнения $(*)$.
Произведём в $(*)$ замену $y_1 \mapsto y_i(\widetilde{x})$, $i = \overline{2, n}$ и рассмотрим уравнение относительно одной неизвестной y_1 —

$$f(\widetilde{x}, y_1, y_2(\widetilde{x}), \ldots, y_n(\widetilde{x})) = 0,$$

которое разрешимо iff справедливо условие $(SC1)$:

$$f_1(\widetilde{x}, y_2, \ldots, y_n) = f(\widetilde{x}, 1, y_2, \ldots, y_n) f(\widetilde{x}, 0, y_2, \ldots, y_n) = 0$$

При выполнении $(SC1)$ базисные решения y_1 суть

$$y_1^1(\widetilde{x}) = \neg f(\widetilde{x}, 1, y_2, \ldots, y_n), \;\; y_1^0(\widetilde{x}) = f(\widetilde{x}, 0, y_2, \ldots, y_n), \;\; (BS1)$$

а общее решение — $$y_1(\widetilde{x}) = y_1^0(\widetilde{x}) \vee \alpha_1(\widetilde{x}) y_1^1 \qquad (GS1),$$
где $\alpha_1(\widetilde{x})$ — произвольная булева функция от m переменных.

ОФБУ со многими неизвестными: решение...

Рассмотрим теперь условие разрешимости $(SC1)$ как следующее уравнение относительно y_2:

$$f_1(\widetilde{x}, y_2, \ldots, y_n) = 0.$$

Аналогично случаю переменной y_1, это уравнение разрешимо относительно y_2 iff справедливо

$$f_2(\widetilde{x}, y_3, \ldots, y_n) \stackrel{\text{def}}{=} f_1(\widetilde{x}, 1, y_3, \ldots, y_n)\cdot f_1(\widetilde{x}, 0, y_3, \ldots, y_n) = 0,$$

а базисные решения y_2^1 и y_2^0 при этом суть

$$y_2^1(\widetilde{x}) = \neg f_1(\widetilde{x}, 1, y_3, \ldots, y_n),\ y_2^0(\widetilde{x}) = f_1(\widetilde{x}, 0, y_3, \ldots, y_n).$$

Общее решение для y_2 принимает вид

$$y_2(\widetilde{x}) = y_2^0(\widetilde{x}) \vee \alpha_2(\widetilde{x}) y_2^1.$$

ОФБУ со многими неизвестными: решение...

Далее находя последовательно базисные и общие решения для $y_3(\widetilde{x}), \ldots, y_n(\widetilde{x})$, получаем, что переменная y_n удовлетворяет уравнению $f_{n-1}(\widetilde{x}, y_n) = 0$ iff

$$f_n(\widetilde{x}) = f_{n-1}(\widetilde{x}, 1) f_{n-1}(\widetilde{x}, 0) = 0. \qquad (SCn)$$

Базисные решения y_n не зависят от поведения остальных решений и принимают вид

$$y_n^1(\widetilde{x}) = \neg f_{n-1}(\widetilde{x}, 1)\,, \quad y_n^0(\widetilde{x}) = f_{n-1}(\widetilde{x}, 0). \qquad (BSn)$$

Общее решение зависит от произвольной булевой функции $\alpha_n(\widetilde{x})$:

$$y_n(\widetilde{x}) = y_n^0(\widetilde{x}) \vee \alpha_n(\widetilde{x}) y_n^1.$$

Учитывая связь между функциям $f, f_1, \ldots, f_{n-1}$ легко обнаружить, что соотношение (SCn) переписывается в виде

$$\mathop{\&}_{\widetilde{y} \in \mathbf{2}^n} f(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = 0. \qquad (GS)$$

ОФБУ со многими неизвестными: решение...

Подставляя теперь обще решение для $y_n(\widetilde{x})$ в выражение для общего решения $y_{n-1}(\widetilde{x})$, зависящего (кроме $\widetilde{x}$) только лишь от $y_n(\widetilde{x})$, найдём выражение для $y_{n-1}(\widetilde{x})$.

Далее, используя $y_n(\widetilde{x})$ и $y_{n-1}(\widetilde{x})$, найдём $y_{n-2}(\widetilde{x})$ и т.д. вплоть до $y_1(\widetilde{x})$.

Приведённые рассуждения можно оформить оформляются в виде теоремы.

Замечание. Из построения общего решения видно, что в нём содержится не более n произвольных булевых функций $\alpha_i(\widetilde{x})$, $i = \overline{1, n}$.
Их будет меньше n, если базисные решения для какой-то переменной y_i совпадают.

Потеря некоторых $\alpha_i(\widetilde{x})$ может происходить также в процессе подстановки уже найденных общих решений в соотношения для базисных решений.

ОФБУ со многими неизвестными: примеры

Пример ① Решить уравнение

$$f(x_1,\, x_2,\, y_1,\, y_2) \,=\, \overline{x}_1 y_1 \vee x_1 \overline{y}_1 \vee x_2 y_1 \overline{y}_2 \,=\, 0$$

относительно переменных y_1 и y_2 при всех $(x_1,\, x_2) \in \mathbf{2}^2$.

Решение. Условия разрешимости данного уравнения по (GS) имеют вид $\underset{\widetilde{y}\,\in\,\mathbf{2}^n}{\&} f(\widetilde{x},\, \widetilde{y}) \,=\, x_1(\overline{x}_1 \vee x_2) \cdot x_1 \overline{x}_1 \,=\, 0$, т.е. выполняются тождественно.

Найдём теперь функцию $f_1(\widetilde{x},\, y_2)$: согласно $(SC1)$ она представима в виде

$$f_1(\widetilde{x},\, y_2) \,=\, f(\widetilde{x},\, 1,\, y_2) f(\widetilde{x},\, 0,\, y_2) \,=\, (\overline{x}_1 \vee x_2 \overline{y}_2)\, x_1 \,=\, x_1 x_2 \overline{y}_2.$$

Базисные решения для $y_2(\widetilde{x})$ находятся из соотношения

$$f_1(\widetilde{x},\, y_2) \,=\, x_1\, x_2\, \overline{y}_2 \,=\, 0$$

и равны $y_2^1 \,=\, 1,\; y_2^0 \,=\, x_1 x_2$.

Общее решение есть

$$y_2(x_1, x_2) \,=\, x_1 x_2 \,\vee\, \alpha_2(x_1, x_2). \qquad (1)$$

ОФБУ со многими неизвестными: пример 1

Для нахождения $y_1(\widetilde{x})$ используем соотношения $(GS1)$, подставив в них (1):

$$y_1^1(\widetilde{x}) = \neg f(\widetilde{x}, 1, y_2(\widetilde{x})) = x_1\left(\overline{x}_2 \vee \alpha_2(x_1, x_2) \vee \neg\alpha_2(x_1, x_2)x_1x_2\right),$$
$$y_1^0(\widetilde{x}) = x_1.$$

Общее решение для y_1 есть

$$y_1(\widetilde{x}) = \alpha_1(\widetilde{x})\, x_1\overline{x}_2 \vee \alpha_1(\widetilde{x})\alpha_2(\widetilde{x})\, x_1 \vee \alpha_1(\widetilde{x})\, x_1x_2 \vee x_1 = \\ = x_1. \quad (2)$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения задаётся парой функций (y_1, y_2), компоненты которых определены в (2) и (1).

ОФБУ со многими неизвестными: пример 1...

Отметим, что общее решение для $y_1(\widetilde{x})$ единственно, а для $y_2(\widetilde{x})$ — содержит произвольную булеву функцию переменных $\alpha_2(x_1, x_2)$.

Чтобы перечислить, какие функции возникают в $y_2(\widetilde{x})$ при различном выборе α_2, представим эту функцию в виде разложения по переменным x_1 и x_2:

$$\alpha_2(x_1, x_2) = \omega_3\, x_1 x_2 \vee \omega_2\, x_1 \overline{x}_2 \vee \omega_1\, \overline{x}_1 x_2 \vee \omega_0 \overline{x}_1 \overline{x}_2, \qquad (B^3)$$

где $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ — произвольные числа из $\{0, 1\}$.

Подставив (B^3) в (1), получим $y_2(\widetilde{x})$ в виде

$$y_2(\widetilde{x}) = x_1 x_2 \vee \omega_2 x_1 \overline{x}_2 \vee \omega_1 \overline{x}_1 x_2 \vee \omega_0 \overline{x}_1 \overline{x}_2\,. \qquad (3)$$

ОФБУ со многими неизвестными: пример 1...

Соотношение (2) показывает, что первая компонента $y_1(\widetilde{x})$ решения исходного уравнения сводится к единственной функции $y_1 = x_1$.

Из (3) видно, что существуют 8 различных функций, образующих вторую компоненту $y_2(\widetilde{x})$ решения исходного уравнения: придавая тройкам чисел $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ все значения из $\mathbf{2}^3$, получим функции

1. x_1x_2,
2. $x_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 = x_1 + x_2$,
3. $x_1x_2 \vee \overline{x}_1x_2 = x_2$,
4. $x_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1x_2 = \overline{x}_1x_2$,
5. $x_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2 = x_1$,
6. $x_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_2 = x_1\overline{x}_2$,
7. $x_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1x_2 = x_1 \vee x_2$,
8. $x_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 = 1.$

ОФБУ со многими неизвестными: пример 1...

Заметим, что решение исходного уравнения, записанное в инерциальной форме есть

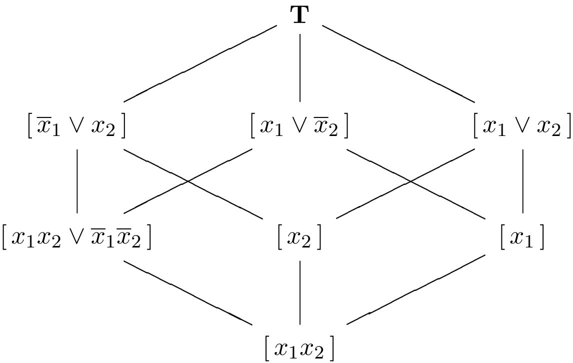
$$y_2^0 = x_1 x_2 \leqslant y_2(x_1, x_2) \leqslant 1 = y_2^1\,,$$

Это означает, что конкретные функции, которые удовлетворяют условиям, налагаемым на $y_2(\widetilde{x})$ суть элементы интервала $[\,y_2^0,\, y_2^1\,]$ в булевой алгебре L_2^*, элементами которой являются классы эквивалентных формул, реализующие булевы функции от 2 переменных.

Ясно, что $L_2^* \cong_b \mathbf{2}^4$. Диаграмма Хассе интервала $[\,y_2^0,\, y_2^1\,]$ изображена на следующем слайде.

Класс формул, реализующих функцию 1 обозначен $\mathbf{T}$.

ОФБУ со многими неизвестными: пример 1...



Интервал в L_2^*, содержащий классы формул, реализующих функции, удовлетворяющие ограничениям на $y_2(x_1\,x_2)$

ОФБУ со многими неизвестными: пример 2

Пример ②

Решим уравнение

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) =$$
$$= y_1 y_2 \vee x_1 y_1 \overline{y}_2 \vee x_1 \overline{x}_2 \, \overline{y}_2 \vee \overline{x}_2 y_1 \overline{y}_2 \vee x_1 \, x_2 \overline{y}_1 \, y_2 \vee \overline{x}_1 x_2 \overline{y}_1 \overline{y}_2 =$$
$$= 0.$$

Решение Легко проверить, что условия (GS) разрешимости этого уравнения относительно y_1 и y_2 выполнены при всех $(x_1, x_2) \in \mathbf{2}^2$.

Функция $f_1(x_1, x_2, y_1) = x_1 x_2 y_2 \vee x_1 \overline{x}_2 \overline{y}_2$. Значит, базисные решения для y_2 принимают вид

$$y_2^1 = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \,, \quad y_2^0 = x_1 \overline{x}_2 \,,$$

а общее решение —

$$y_2 = x_1 \overline{x}_2 \vee \alpha_2(x_1, x_2)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2) \,. \tag{4}$$

ОФБУ со многими неизвестными: пример 2...

Базисные решения для y_1 получаются из функции $f(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ после подстановки в неё вместо y_2 общего решения (4), т.е.

$$y_1^1 = y_1^0 = \neg\alpha_2(x_1, x_2)\,\overline{x}_1\,x_2,$$

а общее решение для y_1 принимает вид

$$y_1 = \neg\alpha_2(x_1, x_2)\,\overline{x}_1\,x_2,$$

т.е. зависит только от одной произвольной функции $\alpha_2(x_1, x_2)$, используемой при построении общего решения для y_2.

ОФБУ со многими неизвестными: пример 2...

Подставляя $\alpha_2(x_1, x_2)$ в виде (B^3), легко получить следующее семейство решений исходного уравнения:

$$y_1 = \neg\omega_1 \overline{x}_1 x_2 \,,$$
$$y_2 = x_1\overline{x}_2 \vee \omega_1\overline{x}_1 x_2 \vee \omega_0 \overline{x}_1\overline{x}_2 \,.$$

где $\omega_0 \, \omega_1 \in \{0, 1\}$.

Оно зависит только от двух параметров.

Придавая им все значения (00), (01), (10), (11), получим следующие решения

1. $y_1 = \overline{x}_1 x_2 \,, \qquad y_2 = x_1\overline{x}_2 \,;$
2. $y_1 = \overline{x}_1 x_2 \,, \qquad y_2 = \overline{x}_2 \,;$
3. $y_1 = 0 \,, \qquad y_2 = x_1 + x_2 \,;$
4. $y_1 = 0 \,, \qquad y_2 = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \,.$

ОФБУ со многими неизвестными: пример 3

Пример ③

Рассмотрим уравнение

$$0 = f(x_1, x_2, y_1, y_2) =$$
$$= y_1\overline{y}_2 \vee \overline{x}_1 y_2 \vee x_1 x_2 \vee \overline{y}_1 y_2 \vee x_2\overline{y}_1 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 y_1.$$

Решение. Условие разрешимости данного уравнения задаётся уравнением $f_2(\widetilde{x}) = f_2(x_1, x_2) = x_1\, x_2 = 0$.
Таким образом, исходное уравнение может быть решено относительно (y_1, y_2) только в области

$$D = \left\{ \widetilde{x} \in \mathbf{2}^2 \mid x_1\, x_2 = 0 \right\}.$$

Эквивалентным образом область D может быть описано любым из неравенств $x_1 \leqslant \overline{x}_2$ или $x_2 \leqslant \overline{x}_1$.

Будем далее считать, что все функции заданы на D.

Имеем $$f_1(x_1, x_2, y_2) = x_1\overline{y}_2 \vee \overline{x}_1 y_2 \vee x_2\, y_2,$$
$$f_1(x_1, x_2, 1) = \overline{x}_1, \quad f_1(x_1, x_2, 0) = x_1.$$

ОФБУ со многими неизвестными: пример 3...

Таким образом, базисные решения для y_2 совпадают и

$$y_2 = x_1.$$

Подставляя это решение в функцию f, найдём

$$y_1^1 = \neg f(x_1, x_2, 1, x_1) = x_1 \vee x_2,$$
$$y_1^0 = f(x_1, x_2, 0, x_1) = x_1 \vee x_2,$$

т.е. решение для y_1 также единственно: $y_1 = x_1 \vee x_2$.

Подстановка y_1 и y_2 в исходное уравнение даёт

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2\,,$$

и, таким образом, $f(x_1, x_2) = 0$ в области D.

Разделы

Разделы

Производная булевой функции

Определение

Производной первого порядка $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ *булевой функции* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *по переменной* x_i *называется функция, определяемая равенством* (+ — *сумма по* $\mod 2$)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) + \\ + f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Производная $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ определяет условия, при которых функция $f(\widetilde{x})$ изменяет значение при инвертиировании x_i.

Пример: для $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2x_3$ —

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = (\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_2x_3) + \overline{x}_2\overline{x}_3 = x_2x_3$$

и $f(\widetilde{x})$ изменяет значение при $x_2 = x_3 = 1$ $(f(x_1, 1, 1) = x_1)$.

Смешанная производная булевой функции

Определение

Смешанной производной $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}}$ *булевой функции* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *по переменным* $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ *называется выражение вида*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_{k-1}}}\right).$$

Порядок фиксации переменных не имеет значения.

Производная k-го порядка функции $f(\widetilde{x})$ по переменным $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ определяет условия, при которых эта функция изменяет значение при одновременном изменении значений указанных переменных.

Смешанная производная булевой функции: пример

Пример

: для $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1\overline{x}_3$ —

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 \vee \overline{x}_3\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 + x_1\overline{x}_3 = x_1x_3\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1x_2 + x_1 = x_1\overline{x}_2\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = x_3\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = x_1\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = \overline{x}_2\,,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = 1.$$

Производная булевой функции по набору аргументов

Определение

Производной булевой $\frac{\partial f}{\partial A}$ *функции* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *по набору аргументов* $A = \{ x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} \}$ *называется функция*

$$\frac{\partial f}{\partial A}(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + + f(x_1, \ldots, \overline{x}_{i_1}, \ldots, \overline{x}_{i_k}, \ldots, x_n).$$

Утверждение.

$$\frac{\partial f}{\partial A} = \bigoplus_{i} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \bigoplus_{\substack{i,j \\ i \neq i}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \bigoplus_{\substack{i,j,s \\ i \neq j,\, i \neq s,\, j \neq s}} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_s} + \ldots \ldots + \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}}.$$

Производная булевой функции по набору аргументов: свойства

Отметим следующие свойства оператора $\dfrac{\partial}{\partial A}$:

1. $\dfrac{\partial(f+g)}{\partial A} = \dfrac{\partial f}{\partial A} + \dfrac{\partial g}{\partial A}$.

2. Если б.ф. g не зависит существенно ни от одного аргумента из набора A, то
$$\frac{\partial(gf)}{\partial A} = g\frac{\partial f}{\partial A}\,.$$

Рассмотрим уравнение вида
$$\frac{\partial F}{\partial A} = f,$$
в котором булева функция f и набор аргументов A заданы, а б.ф. F — искомая.

Интегрирование булевых функций

Определение

Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется интегрируемой по набору аргументов $A = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$, $1 \leqslant i_1, i_2, \ldots, i_k \leqslant n$, если существует б.ф. $F(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что $\dfrac{\partial F}{\partial A} = f$. В этом случае F называют первообразной б.ф. f относительно набора A, символически $F = \displaystyle\int f\, dA$.

Определение

Совокупность

$$J_A(f) = \left\{ F : \frac{\partial F}{\partial A} = f \right\}$$

назовём множеством первообразных б.ф. f по набору переменных A.

Интегрирование булевых функций: пример

Пример

① Пусть $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3 + x_2x_3 + x_3$ и $A = \{ x_1, x_2 \}$.

1. Положим $F_1 = x_1x_2x_3$; тогда:

$$\frac{\partial F_1}{\partial A} = x_1x_2x_3 + (x_1+1)(x_2+1)x_3 =$$

$$= \underline{x_1x_2x_3} + \underline{x_1x_2x_3} + x_1x_3 + x_2x_3 + x_3 = x_1x_3 + x_2x_3 + x_3 = f,$$

т.е. $F_1 \in J_A(f)$.

2. Положим $F_2 = x_1x_2x_3 + x_3$; тогда:

$$\frac{\partial F_1}{\partial A} = x_1x_2x_3 + x_3 + (x_1+1)(x_2+1)x_3 + x_3 =$$

$$= \underline{x_1x_2x_3} + \underline{x_3} + \underline{x_1x_2x_3} + x_1x_3 + x_2x_3 + \underline{x_3} + x_3 =$$

$$= x_1x_3 + x_2x_3 + x_3 = f,$$

т.е. $F_2 \in J_A(f)$.

Интегрирование булевых функций: пример

Пример (продолжение)

② Пусть $g = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ и $A = \{\, x_1,\, x_2 \,\}$.

Ищем первообразную F б.ф. g в АНФ

$$F = a_{123}x_1x_2x_3 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + \\ + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0$$

и убеждаемся, что $J_A(g) = \varnothing$.

Таким образом, интегрирование булевых функций не всегда возможно — множество $J_A(f)$ может быть пустым.
С другой стороны, поскольку производная постоянной булевой функции по любому набору переменных равна 0, то

$$|J_A(f)| = \left[\begin{array}{l} 0 \\ > 1 \end{array}\right. .$$

Классы функций $J_A(0)$ и $J_A(1)$

Опредлим классы булевых функций $J_A(0)$ и $J_A(1)$:

$$J_A(0) = \left\{ f : \frac{\partial f}{\partial A} = 0 \right\} \qquad \text{и} \qquad J_A(1) = \left\{ f : \frac{\partial f}{\partial A} = 1 \right\}.$$

Очевидно, классы $J_A(0)$ и $J_A(1)$ составляют функции, для которых при $A = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$ справедливо

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, \overline{x}_{i_1}, \ldots, \overline{x}_{i_k}, \ldots, x_n) \quad \text{и}$$
$$f(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f(x_1, \ldots, \overline{x}_{i_1}, \ldots, \overline{x}_{i_k}, \ldots, x_n)}$$

соответственно.

Теорема об интегрируемости булевых функций

Теорема (об интегрируемости булевых функций)
Б.ф. f *интегрируема по набору переменных* A *если и только если АНФ функции* f *представима в виде*

$$f = \frac{\partial g_1}{\partial A} + \ldots + \frac{\partial g_m}{\partial A},$$

где g_i *— элементарная монотонная конъюнкция,* $i = \overline{1, m}$.

В этом случае

$$J_A(f) = \{ F = g_1 + \ldots + g_q + F_0 \mid F_0 \in J_A(0) \}.$$

Замечание. В частном случае, если $g = \&_{i \in I} x_i$ — э.м.к., то $\frac{\partial g}{\partial A}$ есть сумма $2^s - 1$ э.м.к., которые получаются вычёркиванием из э.м.к. g всевозможных комбинаций по $1, 2, \ldots, s$ элементов множества $B = A \cap I$, $s = |B|$.