О метрических свойствах медианы Кемени

Двоенко С. Д.[1], *Пшеничный Д. О.*[2]
sergedv@yandex.ru; denispshenichny@yandex.ru
[1,2]Тульский государственный университет, г.Тула

Рассмотрена новая задача построения медианы Кемени с метрическими свойствами. При согласовании экспертных мнений требуется получить ранжирование, наименее отличающееся от остальных и имеющее смысл группового мнения. Медиана Кемени является эквивалентом среднего в шкалах (квази)порядков и свободна от противоречий, связанных с выявлением групповых мнений по правилу большинства (парадокс Эрроу). Известный локально-оптимальный алгоритм построения медианы Кемени основан на вычислении матрицы штрафов. Считая, что ранжирования, представленные парными расстояниями, погружены в евклидово метрическое пространство, мы можем определить средний элемент как центр такого множества. Такой центральный элемент также является ранжированием и должен иметь такой же смысл, как и медиана Кемени. Разработана процедура формирования скорректированной матрицы штрафов для построения метрической медианы Кемени, совпадающей со средним элементом данного множества.

Индивидуальный выбор

- Выбор заключается в определении элемента множества $A = \{a_1, \dots a_N\}$, который обладает некоторыми наилучшими с нашей
  точки зрения характеристиками
- Элементы такого множества рассматриваются как альтернативы
- Выбор часто довольно трудно рационально обосновать – он обычно основан на опыте и интуиции эксперта и является индивидуальным
- Если удается выбрать наилучшую альтернативу, то из оставшихся можно снова выбрать наилучшую и т.д. В итоге, получается ранжирование (строгое или нестрогое):

$$P = a_1 \succ a_2 \succ \dots \succ a_N \qquad P = a_1 \succcurlyeq a_2 \succcurlyeq \dots \succcurlyeq a_N$$

Проблема согласования ранжирований

- Пусть имеется *n* индивидуальных ранжирований
- Нужно построить групповое (общее) ранжирование *P*, согласованное с индивидуальными $P_1, \ldots P_n$
- Способы (принципы) согласования могут быть любыми, если не них не накладывается никаких ограничений
- Известны различные принципы согласования: Кондорсе, Борда (на основе правила большинства), Парето, на основе расстояний между ранжированиями
- Согласование по правилу большинства (мажоритарный принцип) имеет вид: $a_i \succ a_j$ в групповом отношении *P*, если $n(i,j) \geqslant n(j,i)$. Для строгих ранжирований $n(i,j) \geqslant n/2$.

Проблема согласования ранжирований

- Известно, что мажоритарное отношение в общем случае не является ациклическим, т.е. не порождает функции выбора
- Мажоритарное отношение может быть нетранзитивным, даже если все индивидуальные предпочтения транзитивны (ранжирования). Усиление правила большинства не влияет на возможную нетранзитивность
- Пусть тем или иным способом можно определить расстояния *d* между ранжированиями $P_1, \ldots P_n$
- Медиана *P** - это такое ранжирование, расстояние от которого до остальных минимально:

$$P^* = \arg\min_P \sum_{u=1}^{n} d(P, P_u) \, .$$

- Оказывается, если мажоритарное отношение транзитивно или приведено к такому виду специально, то оно является медианой и, в частности, медианой Кемени

Принципы согласования и парадокс Эрроу

- Они должны удовлетворять формальным требованиям и быть достаточно очевидными и естественными
- Но являются ли они непротиворечивыми?
- Считается, что известно 5 принципов согласования индивидуальных отношений, которые являются естественными и отражают суть группового (коллективного) выбора:

1. Независимость альтернатив
2. Универсальность отношений
3. Монотонность группового отношения
4. Ненавязанность группового отношения
5. Отсутствие диктатора

Принципы согласования и парадокс Эрроу

- **Принцип 1.** Независимость альтернатив:

  расширение или сужение множества альтернатив при сохранении отношений на общем подмножестве не меняет результирующего отношения на этом подмножестве.

- Многие эксперты считают этот принцип слишком сильным, т.е предполагается, что:

  - при расширении множества альтернатив новое групповое отношение в части, соответствующей исходному подмножеству до расширения, может измениться

  - естественным поэтому считается, что расширение множества альтернатив также расширяет представления экспертов и изменяет их первоначальные представления об исходных альтернативах

  - поэтому можно считать естественными только четыре принципа согласования из пяти: 2-5

Принципы согласования и парадокс Эрроу

- **Принцип 2.** Универсальность отношений:

  считается, что принцип согласования должен быть универсальным и быть применимым к большому классу отношений на $A \times A$, чтобы описать различные мнения о парах альтернатив
- **Принцип 3.** Монотонность группового отношения:

  предполагается, что групповое отношение не должно измениться, если индивидуум изменил свое мнение в пользу группового отношения
- **Принцип 4.** Ненавязанность группового отношения:

  групповое отношение формируется не априорно (относительно некоторых или всех пар альтернатив), а на основе индивидуальных отношений
- **Принцип 5.** Отсутствие диктатора:

  не должно существовать индивидуального отношения такого, что групповое совпадет с ним в любом случае

Принципы согласования и парадокс Эрроу

- Парадокс Эрроу заключается в том, что принципы 1-5 противоречивы, их совместное выполнение невозможно
- Можно показать, что принципы 1-4 справедливы для тривиального группового отношения: $$P = \bigcap_{i=1}^{n} P_i$$
- Но предполагается, что групповые отношения должны быть более разнообразными, чем тривиальные
- Поэтому считается разумным принцип Парето, где
$$\bigcap_{i=1}^{n} P_i \subseteq P \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i$$
- Принципы 1,3,4 справедливы для принципа Парето
- Принципы 2-5 справедливы для медианы Кемени: на ранжированиях МК удовлетворяет принципу Кондорсе (правило большинства) и не приводит к парадоксу Кондорсе

Построение медианы Кемени

- Всякое ранжирование P представлено матрицей отношений $M_P(N,N)$, где N – число альтернатив, с элементами

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & a_i \succ a_j \\ 0, & a_i \sim a_j \\ -1, & a_i \prec a_j \end{cases}$$

- Расстояние между ранжированиями Pu и Pv при условии одинакового перечисления элементов множества

$$d(P_u, P_v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} |m_{ij}^u - m_{ij}^v|$$

- Известно, что $d(P_u, P_v)$ является метрикой на бинарных отношениях линейного (квази)порядка
- Алгоритм Кемени основан на вычислении матрицы штрафов (потерь) $Q(N,N)$ с элементами

$$q_{ij} = \sum_{u=1}^{n} d_{ij}(P, P_u)$$ де $$d_{ij}(P, P_u) = \begin{cases} 0, & m_{ij}^u = 1 \\ 1, & m_{ij}^u = 0 \\ 2, & m_{ij}^u = -1 \end{cases}$$

Построение медианы Кемени

Шаг 0. Пусть $Q^{(0)}$ – матрица потерь на нулевой итерации для заданного множества ранжирований экспертов. Пусть $I^{(0)} = \{1, 2,\ldots, N\}$ – множество строк (столбцов) матрицы Q.

Шаг 1. Подсчитаем все штрафы на несовпадение предпочтений $a_1 \succ a_j ,\ldots, a_N \succ a_j$ с предпочтениями экспертов

$$s_1^{(1)} = \sum_{j=1}^{N} q_{1j} ,\ldots, \; s_N^{(1)} = \sum_{j=1}^{N} q_{Nj}$$

и найдем минимальный штраф $S^{(1)} = S_{i_1} = \min_i s_i^{(1)}$. Альтернативу a_{i_1} ставим на первое место и вычеркиваем строку и столбец i_1. Получим новую матрицу потерь $Q^{(1)}$ и новое множество номеров строк (столбцов) $I^{(1)} = \{1, 2,\ldots, N\} \setminus i_1$.

Шаг *k*. Подсчитаем все штрафы в матрице потерь $Q^{(k-1)}$:

$$s_i^{(k)} = \sum_{j \in I^{(k-1)}} q_{ij} , \;\; i \in I^{(k-1)}$$

и найдем минимальный штраф $S_{i_k} = \min_i s_i^{(k)}$. Альтернативу a_{i_k} ставим на k-ое место и вычеркиваем строку и столбец i_k в матрице $Q^{(k-1)}$ и получаем матрицу $Q^{(k)}$. Получим новое множество номеров строк (столбцов) $I^{(k)} = I^{(k-1)} \setminus i_k$. Получим $S^{(k)} = S^{(k-1)} + S_{i_k}$.

Построение медианы Кемени

Ранжирование P_{I} **.** Алгоритм завершается после N-го шага, когда оказываются вычеркнутыми все строки и столбцы исходной матрицы потерь.

Ранжирование P_{II}**.** Необходимо проверить ранжирование P_{I} на выполнение необходимых соотношений:

$$q_{i_k\, i_{k+1}} \le q_{i_{k+1}\, i_k},\ k = N-1, N-2, \ldots, 1.$$

Последовательно, начиная с конца, проверяем ранжировку P_{I} на справедливость приведенных неравенств по матрице потерь $Q^{(0)}$. Как только справедливость очередного неравенства оказывается нарушенной, соответствующие альтернативы a_{i_k} и $a_{i_{k+1}}$ в ранжировании меняют местами, а соотношение $q_{i_k\, i_{k+1}} \le q_{i_{k+1}\, i_k}$ продолжаем проверять, начиная с альтернативы, непосредственно предшествующей альтернативе, подвергшейся перестановке.

Результат. Ранжирование P_{II} является медианой Кемени.

Найденное ранжирование имеет минимальную сумму элементов Q над ее диагональю.

Погружение в метрическое пространство

- Вполне очевидно, что частичные «расстояния»

$$d_{ij}(P, P_u) = \begin{cases} 0, & m_{ij}^u = 1 \\ 1, & m_{ij}^u = 0 \\ 2, & m_{ij}^u = -1 \end{cases}$$

  достаточно условны. Из-за этого часто рассматривают т.н. метризованные бинарные отношения, где элементы w_{ij} матрицы отношений отличаются от значений {-1,0,1}
- Поэтому конфигурация множества ранжирований в пространстве, формально представленном метрикой

$$d(P_u, P_v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} |m_{ij}^u - m_{ij}^v| \quad ,$$

  часто не является метрической.
- Расположение ранжирований в таком пространстве, как элементов множества, часто нарушает как неравенство треугольника, так и более точные соотношения в треугольниках (теорема о косинусах)

Погружение в метрическое пространство

- Пусть ранжирования погружены в метрическое пространство без нарушений метрической конфигурации или нарушения исправлены:

  1. Двоенко С.Д., Пшеничный Д.О. Оптимальная коррекция метрических нарушений в матрицах парных сравнений// Машинное обучение и анализ данных. 2014. Т.1., №7. С. 885-890.

  2. Двоенко С.Д., Пшеничный Д.О. О метрической коррекции матриц парных сравнений// Машинное обучение и анализ данных. 2013. Т.1., №5. С. 606-620.

- Ранжирования $P_1, \dots P_n$ как неупорядоченное множество погружены в метрическое пространство без нарушений и представлены матрицей $D(n, n)$ парных расстояний
- Центральный элемент P_0 множества представлен своими расстояниями до остальных ранжирований:

$$d^2(P_0, P_i) = d^2_{0i} = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} d^2_{ip} - \frac{1}{2n^2}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} d^2_{pq}, \ i = 1, \dots n$$

Погружение в метрическое пространство

- По свойству среднего арифметического такой элемент P_0 как и медиана P^* наименее удален от отстальных элементов множества
- Элемент P_0 также является ранжированием

Совпадают ли эти ранжирования $P^* = P_0$?

- Проблема заключается в том, медиана P^* представлена ранжированием и своими расстояниями до остальных ранжирований
- Центральный элемент P_0 как ранжирование не существует, но тоже представлен своими расстояниями до остальных ранжирований
- Очевидно, что каждое из ранжирований P^* и P_0 представлено своими расстояниями до остальных ранжирований
- Чтобы доказать, что $P^*= P_0$, нужно показать, что удается представить их одинаковыми расстояниями до остальных ранжирований

Формирование матрицы штрафов

- Известно, что ранжирования – это измерения в шкалах строгого и нестрогого порядка, где корректным преобразованием, переводящим шкалы данного типа друг в друга, является монотонное преобразование
- Монотонное преобразование перераспределяет положение альтернатив как точек на числовой оси, не изменяя их упорядоченности
- Поэтому МК, как ранжирование, соответствует некоторому множеству эквивалентных шкал порядка
- Если найдется такое монотонное преобразование шкалы порядка для ранжирования Pi каждого (или некоторых) из экспертов, что его матрица отношения M_{Pi} естественным образом окажется метризована, то построенная медиана окажется метрической – совпадет со средним по множеству
- В этом случае ранжирования P^* и P_0 будут представлены одинаковыми расстояниями до остальных ранжирований

Формирование матрицы штрафов

Рассмотрим ранжирования P_u, P_0 и P^*, где $\delta = d(P_0, P_u) - d(P^*, P_u) \neq 0$. Пусть $\delta > 0$. Для компенсации такой разницы в расстояниях, необходимо равномерно распределить значение $\delta > 0$ по ненулевым элементам матрицы отношений M_{P_u}, сформировав новую матрицу отношений с элементами:

$$m_{ij}^u = \begin{cases} +1 + 2\delta/k\,, & a_i \succ a_j \\ 0\,, & a_i \sim a_j \\ -1 - 2\delta/k\,, & a_i \prec a_j \end{cases}$$

где $k = N^2 - N - N_0$ – общее число ненулевых элементов без главной диагонали, N_0 – число нулевых недиагональных элементов $m_{ij}^u = 0$. Очевидно, что такая матрица отношений не изменяет ранжирования эксперта P_u.

В этом случае при $m_{ij} = 1$ предположение $a_i \succ a_j$ в неизвестном ранжировании P штрафуется экспертом с формированием частичных расстояний:

$$d_{ij}(P, P_u) = \begin{cases} 2\delta/k\,, & m_{ij}^u = +1 + 2\delta/k \\ 1\,, & m_{ij}^u = \quad 0 \\ 2 + 2\delta/k\,, & m_{ij}^u = -1 - 2\delta/k \end{cases}$$

Формирование матрицы штрафов

Пусть $\delta < 0$. Для компенсации такой разницы в расстояниях также необходимо равномерно распределить значение $\delta < 0$ по ненулевым элементам матрицы отношений M_{P_u}. Кроме того, множество изменяемых элементов $k' = k - \Delta k$ дополнительно уменьшается за счет Δk совпадающих элементов $m_{ij}^u = m_{ij}^*$ в матрицах отношений, представляющих ранжирование эксперта P_u и медиану P^*. Действительно, в этом случае $d_{ij}(P^*, P_u) = 0$ и уменьшить его невозможно. Добавление любой отрицательной величины к значению m_{ij}^u в этом случае будет означать изменение ранжирования эксперта, при котором расстояние между ранжированиями P_u и P^* только возрастет.

Формирование матрицы штрафов

Если величина $-1 < 2\delta/k' < 0$, то можно, не изменяя ранжирования P_u, сформировать новую матрицу отношений M_{P_u} с элементами:

$$m_{ij}^u = \begin{cases} +1 - |2\delta/k'|, & a_i \succ a_j \\ 0, & a_i \sim a_j \\ -1 + |2\delta/k'|, & a_i \prec a_j \\ m_{ij}^*, & m_{ij}^u = m_{ij}^*, \end{cases}$$

где при $m_{ij} = 1$ предположение $a_i \succ a_j$ в неизвестном ранжировании P штрафуется экспертом с формированием частичных расстояний:

$$d_{ij}(P, P_u) = \begin{cases} 0, & m_{ij}^u = 1 \\ 1, & m_{ij}^u = 0 \\ 2, & m_{ij}^u = -1 \\ |2\delta/k'|, & m_{ij}^u = +1 - |2\delta/k'| \\ 2 - |2\delta/k'|, & m_{ij}^u = -1 + |2\delta/k'|. \end{cases}$$

Формирование матрицы штрафов

Если величина $2\delta/k' \leqslant -1$, то корректировка элементов матрицы отношений M_{P_u} неизбежно изменит знак некоторых элементов m^u_{ij}, что означает изменение ранжирования P_u. Т.к. изменять экспертное ранжирование мы не имеем права, то следует изменить ранжирование, соответствующее медиане P^*. Фактически, это означает, что ранжирования P_0 и P^* различны.

Поэтому, изменяя P^*, мы найдем другое ранжирование, лучше соответствующее P_0. В этом случае при $-2 \leqslant 2\delta/k' \leqslant -1$ формируется новая матрица отношений M_{P^*} с элементами:

$$m^*_{ij} = \begin{cases} +1 - |2\delta/k'|, & a_i \succ a_j \\ 0, & a_i \sim a_j \\ -1 + |2\delta/k'|, & a_i \prec a_j \\ m^u_{ij}, & m^u_{ij} = m^*_{ij}\ , \end{cases}$$

где при $m_{ij} = 1$ предположение $a_i \succ a_j$ в неизвестном ранжировании P штрафуется ранжированием P^* с формированием частичных расстояний:

$$d_{ij}(P, P^*) = \begin{cases} 0, & m^*_{ij} = 1 \\ 1, & m^*_{ij} = 0 \\ 2, & m^*_{ij} = -1 \\ |2\delta/k'|, & m^*_{ij} = +1 - |2\delta/k'| \\ 2 - |2\delta/k'|, & m^*_{ij} = -1 + |2\delta/k'|\ . \end{cases}$$

Формирование матрицы штрафов

Если величина $2\delta/k' < -2$, то распределим по ранее указанным k' элементам только величину -2. Тогда отрицательный остаток $(2\delta/k' + 2)k' = 2\delta + 2k' < 0$ следует распределить по k_0 нулевым элементам $m^*_{ij} = 0$ матрицы отношений для ранжирования P^*. В итоге, формируется новая матрица отношений M_{P^*} с элементами:

$$m^*_{ij} = \begin{cases} +1 - 2\,, & a_i \succ a_j \\ -|2\delta/k_0 + 2k'/k_0|\,, & a_i \sim a_j \\ -1 + 2\,, & a_i \prec a_j \\ m^u_{ij}\,, & m^u_{ij} = m^*_{ij}\,, \end{cases}$$

где при $m_{ij} = 1$ предположение $a_i \succ a_j$ в неизвестном ранжировании P штрафуется ранжированием P^* с формированием частичных расстояний:

$$d_{ij}(P, P^*) = \begin{cases} 0, & m^*_{ij} = 1 \\ 1, & m^*_{ij} = 0 \\ 2, & m^*_{ij} = -1 \\ 1 + |2\delta/k_0 + 2k'/k_0|, & m^*_{ij} = -|2\delta/k_0 + 2k'/k_0|\,. \end{cases}$$

Формирование матрицы штрафов

Легко увидеть, что после такой корректировки матрицы отношений M_{P*} новое ранжирование P^*, вообще говоря, уже не является медианой, т.к. в нем произошли перестановки (инверсии) на некоторых парах альтернатив.

При вычислении матрицы штрафов Q учитываются только измененные матрицы отношений для ранжирований $P_1, ...P_n$ и измененные матрицы для ранжирования P^* в тех случаях, когда оно корректировалось вместо соответствующего ранжирования эксперта.

Эксперимент 1

Исходные данные о ранжировании проектов. В качестве экспериментальных данных были рассмотрены материалы исследования 2000 г. по оценке и выбору 14 проектов, обеспечивающих достижение стратегических целей ОАО «Газпром» [9]. В таблице 1 приведен перечень инвестиционных проектов, в осуществлении которых предполагалось участие «Газпрома». Указанный перечень был сформирован по материалам открытой и зарубежной печати.

Проекты ранжировались по 8 критериям двух видов (выгоды и негативных эффектов):

1. финансово-экономическая выгода,
2. выгода от изменения конъюнктуры рынка,
3. производственно-технологическая выгода,
4. социально-политическая выгода,
5. политические негативные последствия,
6. негативные последствия рыночной конкуренции,
7. социальные негативные последствия,
8. негативные финансово-экономические последствия.

Таблица 1. Перечень инвестиционных

№	Проекты	Содержание проектов
1	Южный Парс	Освоение двух новых нефтегазонос «Южный Парс» (Иран).
2	Голубой Поток	Строительство морского участка га протяженностью 380 км) и компрес
3	Ямал-Европа	Завершение строительства трансков трубопровода для транспортировки
4	Псковская ГРЭС	Приобретение в счет долгов «Газпр завершение строительства 3-го энер
5	Метан Кузбасс	Создание компанией «Метан Кузба Кемеровской области опытно-пром добыче метана из угольных пласто
6	Приразломное	Освоение совместно с партнерами а месторождения «Приразломное».
7	Трансбалканский трубопровод	Строительство газокомпрессорной с газопроводе. Расширение мощносте Трансбалканском газопроводе.
8	Газопровод Петрозаводск-Кондопога	Строительство в Карелии 68-килом обеспечения газом Кондопожского комбината и жителей севера респуб
9	Экология	Совместный проект сокращения эм газа на участке «Ужгородского кор
10	Дегазификация энергетики	Снижение расхода газа на нужды э
11	Штокмановское	Освоение Штокмановского газоконденсатного месторождения, разведка и освоение добычи газа и газового конденсата Штокмановского газоконденсатного месторождения.
12	Газификация автотранспорта	Газификация автотранспорта в Новосибирской области, отказ от бензина, использование пропан-бутановой смеси метана.
13	Космическая связь	Создание группировки спутниковой связи для обеспечения «Газпрома» коммерческой технологической связью.
14	АСУ корпоративными финансами	Создание для ОАО «Газпром» автоматизированной системы управления корпоративными финансами.

Эксперимент 1

Таблица 1. Перечень инвестиционных проектов

№	Проекты	Содержание проектов
1	Южный Парс	Освоение двух новых нефтегазоносных участков на месторождении «Южный Парс» (Иран).
2	Голубой Поток	Строительство морского участка газопровода (двух ниток протяженностью 380 км) и компрессорной станции «Береговая».
3	Ямал-Европа	Завершение строительства трансконтинентального трубопровода для транспортировки сибирского газа в Европу.
4	Псковская ГРЭС	Приобретение в счет долгов «Газпрому» Псковской ГРЭС и завершение строительства 3-го энергоблока.
5	Метан Кузбасс	Создание компанией «Метан Кузбасса» и администрацией Кемеровской области опытно-промышленного производства по добыче метана из угольных пластов.
6	Приразломное	Освоение совместно с партнерами арктического нефтяного месторождения «Приразломное».
7	Трансбалканский трубопровод	Строительство газокомпрессорной станции на Трансбалканском газопроводе. Расширение мощностей транспортировки газа на Трансбалканском газопроводе.
8	Газопровод Петрозаводск-Кондопога	Строительство в Карелии 68-километрового трубопровода для обеспечения газом Кондопожского целлюлозно-бумажного комбината и жителей севера республики.
9	Экология	Совместный проект сокращения эмиссии углекислого газа на участке «Ужгородского коридора» (Волготрансгаз).
10	Дегазификация энергетики	Снижение расхода газа на нужды электроэнергетики.
11	Штокмановское	Освоение Штокмановского газоконденсатного месторождения, разведка и освоение добычи газа и газового конденсата Штокмановского газоконденсатного месторождения.
12	Газификация автотранспорта	Газификация автотранспорта в Новосибирской области, отказ от бензина, использование пропан-бутановой смеси метана.
13	Космическая связь	Создание группировки спутниковой связи для обеспечения «Газпрома» коммерческой технологической связью.
14	АСУ корпоративными финансами	Создание для ОАО «Газпром» автоматизированной системы управления корпоративными финансами.

Эксперимент 1

По характеристикам 1-4 один проект является предпочтительнее другого, если соответствующее значение критерия имеет значение больше, чем у другого проекта. По характеристикам 5-8 проект тем предпочтительнее, чем меньшее значение имеет соответствующий критерий. Наиболее предпочтительная альтернатива получает ранг 1, следующая за ней – 2 и т.д. Возможны случаи, когда две и более альтернатив имеют одинаковые значения критериев, т.е. одинаковый ранг. Нам удобно рассматривать критерии как экспертов, а ранжирования – как результат экспертизы. В таблице 2 представлены 8 экспертных ранжирований 14 проектов, где ранжирования представлены стандартизированными рангами, т.к. некоторые проекты имели одинаковый ранг.

Таблица 2. Стандартизированные ранги инвестиционных проектов

№	Проекты	1	2	3	4	5	6	7	8	МК
1	Южный парс	5	4	14	8	11	12	4.5	5.5	9
2	Голубой поток	1	1	3.5	4	12.5	14	9.5	10	4
3	Ямал-Европа	3	3	8.5	3	14	3	11	7	10
4	Псковская ГРЭС	9	7	10	8	9	4.5	4.5	2	2
5	Метан Кузбасс	8	9.5	5.5	8	2.5	7.5	4.5	11	5
6	Приразломное	6	6	8.5	8	9	9	12.5	13	13
7	Трансбалканский трубопровод	10	5	12.5	13.5	6	4.5	4.5	4	7
8	Газопровод Петрозаводск-Кондопога	11	12.5	11	1	2.5	2	4.5	8.5	3
9	Экология	13	12.5	5.5	12	2.5	2	4.5	3	6
10	Дегазификации энергетики	12	12.5	1	8	12.5	6	14	1	14
11	Штокмановское	2	2	2	2	6	7.5	12.5	14	1
12	Газификация автотранспорта	4	8	12.5	8	9	10.5	4.5	5.5	8
13	Космическая связь	7	9.5	7	8	6	10.5	4.5	12	11
14	АСУ корпоративными финансами	14	12.5	3.5	13.5	2.5	2	9.5	8.5	12

Эксперимент 1

Алгоритм построения медианы Кемени [1] для матрицы штрафов:

$$\begin{pmatrix}
0 & 8 & 8 & 10 & 8 & 7 & 9 & 9 & 9 & 7 & 12 & 11 & 8 & 6 \\
8 & 0 & 6 & 8 & 6 & 4 & 8 & 10 & 8 & 7 & 8 & 8 & 6 & 8 \\
8 & 10 & 0 & 8 & 8 & 5 & 8 & 8 & 10 & 8 & 12 & 8 & 8 & 8 \\
6 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 6 & 7 & 7 & 5 & 10 & 5 & 8 & 6 \\
8 & 10 & 8 & 8 & 0 & 5 & 7 & 8 & 7 & 7 & 9 & 8 & 5 & 7 \\
9 & 12 & 11 & 8 & 11 & 0 & 10 & 10 & 10 & 7 & 13 & 8 & 9 & 10 \\
7 & 8 & 8 & 10 & 9 & 6 & 0 & 9 & 11 & 6 & 9 & 6 & 8 & 7 \\
7 & 6 & 8 & 9 & 8 & 6 & 7 & 0 & 8 & 5 & 6 & 7 & 7 & 6 \\
7 & 8 & 6 & 9 & 9 & 6 & 5 & 8 & 0 & 9 & 8 & 7 & 7 & 5 \\
9 & 9 & 8 & 11 & 9 & 9 & 10 & 11 & 7 & 0 & 10 & 9 & 9 & 7 \\
4 & 8 & 4 & 6 & 7 & 3 & 7 & 10 & 8 & 6 & 0 & 4 & 5 & 8 \\
5 & 8 & 8 & 11 & 8 & 8 & 10 & 9 & 9 & 7 & 12 & 0 & 7 & 6 \\
8 & 10 & 8 & 8 & 11 & 7 & 8 & 9 & 9 & 7 & 11 & 9 & 0 & 8 \\
10 & 8 & 8 & 10 & 9 & 6 & 9 & 10 & 11 & 9 & 8 & 10 & 8 & 0
\end{pmatrix}$$

дает ранжирование P^* (МК), которое также представлено в таблице 2.

Эксперимент 1

Построение ранжирования, представленного средним объектом. Рассмотрим теперь матрицу парных расстояний между ранжированиями:

$$\begin{pmatrix}
0 & 27 & 98 & 50 & 131 & 156 & 102 & 124 \\
27 & 0 & 105 & 65 & 128 & 137 & 101 & 113 \\
98 & 105 & 0 & 88 & 83 & 82 & 128 & 106 \\
50 & 65 & 88 & 0 & 109 & 116 & 96 & 112 \\
131 & 128 & 83 & 109 & 0 & 37 & 61 & 101 \\
156 & 137 & 82 & 116 & 37 & 0 & 80 & 74 \\
102 & 101 & 128 & 96 & 61 & 80 & 0 & 74 \\
124 & 113 & 106 & 112 & 101 & 74 & 74 & 0
\end{pmatrix}$$

и проверим метричность конфигурации множества ранжирований как множества элементов, погруженных в метрическое пространство. Скорректируем метрические нарушения

$$\begin{pmatrix}
0 & 41.281 & 98 & 50 & 125.72 & 143.32 & 102 & 124 \\
41.281 & 0 & 103.35 & 64.011 & 127.52 & 137.96 & 99.346 & 113.92 \\
98 & 103.35 & 0 & 88 & 95.464 & 97.307 & 128 & 106 \\
50 & 64.011 & 88 & 0 & 108.47 & 120.33 & 96 & 112 \\
125.72 & 127.52 & 95.464 & 108.47 & 0 & 53.025 & 81.431 & 90.68 \\
143.32 & 137.96 & 97.307 & 120.33 & 53.025 & 0 & 94.451 & 73.325 \\
102 & 99.346 & 128 & 96 & 81.431 & 94.451 & 0 & 74 \\
124 & 113.92 & 106 & 112 & 90.68 & 73.325 & 74 & 0
\end{pmatrix}$$

Эксперимент 1

Т.к. медиана Кемени построена (МК, табл. 2), то определим расстояния от нее до остальных ранжирований по их матрицам отношений. Для скорректированной матрицы расстояний вычислим средний элемент P_0 (СР) и представим его своими расстояниями до остальных элементов множества. Также вычислим разницу δ в расстояниях от среднего элемента и медианы Кемени до остальных элементов множества (табл.3).

Таблица 3. Корректировка матриц отношений для ранжирований экспертов

МК	СР	Разница (δ)	Число корректируемых элементов (k)	Среднее ($2\delta/k$)
76	70.625	-5.375	76	-0.14144
73	69.458	-3.542	66	-0.10732
92	69.102	-22.898	88	-0.52041
66	57.353	-8.647	44	-0.39302
71	65.747	-5.253	58	-0.18113
84	74.666	-9.334	78	-0.23934
68	62.120	-5.880	38	-0.3095
88	66.313	-21.687	86	-0.50435

Эксперимент 1

Пример исправленной матрицы отношений для 1 эксперта

$M(P_1)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	-1	-0.85842	0.85842	0.85842	1	0.85842	0.85842	0.85842	1	-1	-1	1	1
2	1	0	1	0.85842	1	1	1	0.85842	1	1	0.85842	1	1	1
3	0.85842	-1	0	0.85842	0.85842	1	0.85842	0.85842	0.85842	1	-1	0.85842	1	1
4	-0.85842	-0.85842	-0.85842	0	-0.85842	-0.85842	1	1	1	1	-1	-0.85842	-0.85842	1
5	-0.85842	-1	-0.85842	0.85842	0	-0.85842	1	0.85842	1	1	-1	-0.85842	-0.85842	1
6	-1	-1	-1	0.85842	0.85842	0	0.85842	0.85842	0.85842	1	-1	-1	0.85842	0.85842
7	-0.85842	-1	-0.85842	-1	-1	-0.85842	0	0.85842	0.85842	1	-1	-0.85842	-0.85842	1
8	-0.85842	-0.85842	-0.85842	-1	-0.85842	-0.85842	-0.85842	0	1	1	-1	-0.85842	-0.85842	1
9	-0.85842	-1	-0.85842	-1	-1	-0.85842	-0.85842	-1	0	-0.85842	-1	-0.85842	-0.85842	1
10	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0.85842	0	-1	-1	-1	0.85842
11	1	-0.85842	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
12	1	-1	-0.85842	0.85842	0.85842	1	0.85842	0.85842	0.85842	1	-1	0	1	1
13	-1	-1	-1	0.85842	0.85842	-0.85842	0.85842	0.85842	0.85842	1	-1	-1	0	1
14	-1	-1	-1	-1	-1	-0.85842	-1	-1	-1	-0.85842	-1	-1	-1	0

Эксперимент 1

При формировании матрицы штрафов для алгоритма Кемени будем, как и раньше, штрафовать наше предположение о предпочтительности одного проекта перед другим по всем возможным парам, когда соответствующий элемент неизвестной матрицы отношений равен 1. Если при этом корректировалась матрица отношений для ранжирования эксперта, то его ранжирование штрафует наши предположения. Если корректировалась матрица отношений для медианы, то только это ранжирование штрафует наши предположения.

В итоге, алгоритм построения медианы Кемени для измененной матрицы штрафов:

$$
\begin{pmatrix}
0 & 9.23 & 6.84 & 10.25 & 8.75 & 6.06 & 9.64 & 9.75 & 9.64 & 5.74 & 12.81 & 11.11 & 7.06 & 5.06 \\
6.77 & 0 & 4.86 & 9.162 & 5.27 & 3.58 & 6.77 & 10.77 & 6.77 & 5.74 & 9.06 & 6.77 & 5.27 & 7.08 \\
9.16 & 11.14 & 0 & 9.16 & 9.15 & 4.58 & 9.16 & 9.27 & 10.64 & 6.55 & 12.81 & 9.16 & 6.75 & 6.75 \\
5.75 & 6.84 & 6.84 & 0 & 7.16 & 7.23 & 5.71 & 6.19 & 6.06 & 3.98 & 11.05 & 4.86 & 7.16 & 5.06 \\
7.25 & 10.73 & 6.85 & 8.84 & 0 & 4.75 & 6.15 & 8.77 & 6.26 & 5.74 & 9.995 & 7.25 & 4.86 & 5.74 \\
9.94 & 12.42 & 11.42 & 8.77 & 11.25 & 0 & 11.06 & 10.77 & 10.64 & 5.74 & 13.50 & 8.87 & 9.49 & 10.64 \\
6.36 & 9.23 & 6.84 & 10.29 & 9.85 & 4.95 & 0 & 9.75 & 11.25 & 4.58 & 10.05 & 5.47 & 6.95 & 6.06 \\
6.25 & 5.23 & 6.73 & 9.81 & 7.23 & 5.23 & 6.25 & 0 & 6.98 & 3.98 & 7.63 & 6.25 & 6.23 & 5.48 \\
6.36 & 9.23 & 5.36 & 9.94 & 9.74 & 5.36 & 4.75 & 9.02 & 0 & 7.44 & 9.23 & 6.36 & 6.36 & 4.48 \\
10.26 & 10.26 & 9.45 & 12.03 & 10.26 & 10.26 & 11.42 & 12.03 & 8.56 & 0 & 11.26 & 10.26 & 10.26 & 8.56 \\
3.19 & 6.94 & 3.19 & 4.95 & 6.01 & 2.50 & 5.95 & 8.37 & 6.77 & 4.74 & 0 & 3.19 & 4.19 & 6.77 \\
4.89 & 9.23 & 6.84 & 11.14 & 8.75 & 7.13 & 10.53 & 9.75 & 9.64 & 5.74 & 12.81 & 0 & 6.30 & 5.06 \\
8.94 & 10.73 & 9.25 & 8.84 & 11.14 & 6.51 & 9.05 & 9.77 & 9.64 & 5.74 & 11.81 & 9.70 & 0 & 6.55 \\
10.94 & 8.92 & 9.25 & 10.94 & 10.26 & 5.36 & 9.94 & 10.52 & 11.52 & 7.44 & 9.23 & 10.94 & 9.45 & 0
\end{pmatrix}
$$

дает ту же медиану Кемени (табл. 2), у которой ее расстояния до остальных ранжирований не отличаются от расстояний среднего элемента до остальных элементов множества из табл. 3.

Эксперимент 1

МК	СР
	70.625
	69.458
	69.102
	57.353
	65.747
	74.666
	62.120
	66.313

расстояния до ранжирований

штрафы

0	8	8	10	8	7	9	9	9	7	12	11	8	6
8	0	6	8	6	4	8	10	8	7	8	8	6	8
8	10	0	8	8	5	8	8	10	8	12	8	8	8
6	8	8	0	8	8	6	7	7	5	10	5	8	6
8	10	8	8	0	5	7	8	7	7	9	8	5	7
9	12	11	8	11	0	10	10	10	7	13	8	9	10
7	8	8	10	9	6	0	9	11	6	9	6	8	7
7	6	8	9	8	6	7	0	8	5	6	7	7	6
7	8	6	9	9	6	5	8	0	9	8	7	7	5
9	9	8	11	9	9	10	11	7	0	10	9	9	7
4	8	4	6	7	3	7	10	8	6	0	4	5	8
5	8												
8	10												
10	8												

0	9.23	6.84	10.25	8.75	6.06	9.64	9.75	9.64	5.74	12.81	11.11	7.06	5.06
6.77	0	4.86	9.162	5.27	3.58	6.77	10.77	6.77	5.74	9.06	6.77	5.27	7.08
9.16	11.14	0	9.16	9.15	4.58	9.16	9.27	10.64	6.55	12.81	9.16	6.75	6.75
5.75	6.84	6.84	0	7.16	7.23	5.71	6.19	6.06	3.98	11.05	4.86	7.16	5.06
7.25	10.73	6.85	8.84	0	4.75	6.15	8.77	6.26	5.74	9.995	7.25	4.86	5.74
9.94	12.42	11.42	8.77	11.25	0	11.06	10.77	10.64	5.74	13.50	8.87	9.49	10.64
6.36	9.23	6.84	10.29	9.85	4.95	0	9.75	11.25	4.58	10.05	5.47	6.95	6.06
6.25	5.23	6.73	9.81	7.23	5.23	6.25	0	6.98	3.98	7.63	6.25	6.23	5.48
6.36	9.23	5.36	9.94	9.74	5.36	4.75	9.02	0	7.44	9.23	6.36	6.36	4.48
10.26	10.26	9.45	12.03	10.26	10.26	11.42	12.03	8.56	0	11.26	10.26	10.26	8.56
3.19	6.94	3.19	4.95	6.01	2.50	5.95	8.37	6.77	4.74	0	3.19	4.19	6.77
4.89	9.23	6.84	11.14	8.75	7.13	10.53	9.75	9.64	5.74	12.81	0	6.30	5.06
8.94	10.73	9.25	8.84	11.14	6.51	9.05	9.77	9.64	5.74	11.81	9.70	0	6.55
10.94	8.92	9.25	10.94	10.26	5.36	9.94	10.52	11.52	7.44	9.23	10.94	9.45	0

Эксперимент 2

Построение ранжирования, представленного произвольным объектом.

Рассмотрим теперь элемент P_{00} (ВП), вынесенный за пределы выпуклой оболочки множества элементов, представляющих ранжирования экспертов. Представим его своими расстояниями до остальных элементов множества (табл. 4). Найдем соответствующее ему ранжирование, также применив алгоритм построения медианы Кемени к соответствующим образом измененной матрице штрафов.

$$d^2(P_{00}, P_i) = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} d_{ip}^2, \ i = 1,\dots n$$

Таблица 4. Корректировка матриц отношений для ранжирований экспертов

МК	ВП	Разница (δ)	Число корректируемых элементов (k)	Среднее ($2\delta/k$)
76	97.426	21.426	182	0.23545
73	96.583	23.583	168	0.28075
92	96.327	4.327	174	0.049739
66	88.28	22.28	138	0.32289
71	93.95	22.95	156	0.29423
84	100.39	16.393	170	0.19286
68	91.448	23.448	122	0.38439
88	94.346	6.346	178	0.071308

Эксперимент 2

Алгоритм построения медианы Кемени для измененной матрицы штрафов:

$$
\begin{pmatrix}
0 & 6.17 & 7.95 & 8.88 & 6.88 & 6.56 & 7.55 & 7.55 & 7.55 & 6.12 & 10.17 & 9.95 & 7.95 & 5.24 \\
8.05 & 0 & 5.34 & 6.17 & 5.91 & 3.14 & 8.05 & 8.17 & 8.05 & 6.09 & 6.17 & 8.05 & 5.91 & 7.72 \\
6.17 & 8.17 & 0 & 6.17 & 6.17 & 4.19 & 6.17 & 6.17 & 8.17 & 7.38 & 10.17 & 6.17 & 8.01 & 8.01 \\
5.91 & 7.95 & 7.95 & 0 & 8.03 & 7.92 & 5.90 & 7.17 & 6.63 & 3.73 & 8.17 & 4.64 & 8.03 & 5.24 \\
8.05 & 8.17 & 7.99 & 6.88 & 0 & 4.52 & 6.64 & 6.85 & 6.43 & 6.12 & 7.36 & 8.05 & 4.63 & 6.09 \\
7.49 & 10.17 & 9.22 & 6.79 & 9.49 & 0 & 8.17 & 8.17 & 8.17 & 6.12 & 11.55 & 6.79 & 7.49 & 8.17 \\
7.23 & 6.17 & 7.95 & 8.75 & 7.55 & 5.38 & 0 & 7.55 & 9.55 & 5.06 & 7.462 & 5.72 & 8.06 & 6.56 \\
6.73 & 5.30 & 7.44 & 7.55 & 7.99 & 5.30 & 6.73 & 0 & 7.56 & 3.69 & 4.17 & 6.73 & 6.68 & 5.11 \\
7.23 & 6.17 & 5.85 & 7.55 & 7.90 & 5.85 & 4.59 & 7.32 & 0 & 8.81 & 6.17 & 7.23 & 7.23 & 4.04 \\
7.49 & 7.46 & 6.17 & 9.49 & 7.49 & 7.49 & 8.17 & 9.45 & 5.45 & 0 & 8.17 & 7.49 & 7.49 & 5.45 \\
3.08 & 8.11 & 3.08 & 5.47 & 6.86 & 1.70 & 6.76 & 10.7 & 8.05 & 4.80 & 0 & 3.08 & 4.37 & 8.05 \\
4.51 & 6.17 & 7.95 & 10.17 & 6.88 & 7.83 & 8.60 & 7.55 & 7.55 & 6.12 & 10.17 & 0 & 6.76 & 5.24 \\
6.88 & 8.17 & 6.17 & 6.88 & 10.16 & 6.91 & 6.85 & 7.55 & 7.55 & 6.12 & 9.46 & 8.07 & 0 & 7.38 \\
8.17 & 6.60 & 6.17 & 8.17 & 7.46 & 5.85 & 7.49 & 9.01 & 9.94 & 8.81 & 6.17 & 8.17 & 6.17 & 0
\end{pmatrix}
$$

дает новое ранжирование (ВП), показанное в табл. 5.

Эксперимент 2

Легко увидеть, что данное ранжирование отличается от медианы Кемени, расстояние между данным ранжированием и медианой Кемени по матрицам их отношений равно 14.

Таблица 5. Построенные ранжирования

№	ВП	СР	МК
1	11	9	9
2	5	4	4
3	10	10	10
4	2	2	2
5	6	5	5
6	14	13	13
7	7	7	7
8	3	3	3
9	4	6	6
10	12	14	14
11	1	1	1
12	8	8	8
13	9	11	11
14	13	12	12

Заключение

- Показано, что одному ранжированию могут соответствовать разные векторы расстояний до остальных ранжирований. Именно поэтому удалось доказать метричность медианы Кемени (Эксперимент 1).
- Это обеспечивается монотонным преобразованием ранговой шкалы, не нарушающим порядок элементов множества (проекты)
- Показано, что вектор расстояний элемента множества, сильно отличающегося от центрального, формирует другое ранжирование, не совпадающее с ранжированием, представляющим центральный элемент (Эксперимент 2).
- В этом случае ранее построенная медиана Кемени неизбежно подвергается немонотонному преобразованию, которое изменяет в ней упорядочение альтернатив.
- В общем случае и разным ранжированиям могут соответствовать одинаковые векторы расстояний до остальных ранжирований.
- Например, можно показать, что алгоритмом Кемени можно построить ранжирование, имеющее такие же расстояния до остальных, как и у индивидуального ранжирования эксперта.

Спасибо за внимание!