Тема III

Частично упорядоченные множества. I

Разделы

Предпорядки: определение и примеры

Определение

Предпорядками называют рефлексивные *(R)* и транзитивные *(T)* однородные отношения.

Пример

Предпорядками, например, являются следующие отношения:

1. отношение делимости $\mid$ на множестве $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$;
2. отношение выводимости $\vdash$ в логике: если из логической формулы A выводится формула B, то пишут $A \vdash B$;
3. отношение предпочтения (например, по цене и полезности товара) в экономике.

Порядки

Определение

Рефлексивные *(R)*, антисимметричные *(AS)* и транзитивные *(T)* однородные отношения называют отношениями *частичного порядка*.

Пример

Все предпорядки из предыдущего примера не являются частичными порядками:

1. для элементов $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ из $m \mid n$ и $n \mid m$ следует не $m = n$, а лишь $|m| = |n|$.
2. возможно $A \vdash B$ и $B \vdash A$, но $A \neq B$ (формулы A и B не совпадают как строки символов): например, для $A = x \supset y$ и $B = (\neg x \vee y) \,\&\, (z \vee \neg z)$;
3. ясно, что одинаковые и цену, и полезность могут иметь разные товары.

Порядки: примеры

- Отношение $\leqslant$ на множествах натуральных, целых, рациональных, действительных чисел.
- Отношение включения $\subseteq$ на совокупности $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots\}$ подмножеств некоторого множества — важнейший пример частичного порядка. Говорят, что совокупность $\mathcal{A}$ *упорядочена по включению*.
- Диагональное отношение $\triangle$ на произвольном множестве можно рассматривать не только как эквивалентность, но и как частичный порядок.
  Множество с таким порядком называют *тривиально упорядоченным*.

Порядок из предпорядка ρ...

... можно построить, если отождествить такие элементы a и b, для которых одновременно и $a\rho b$ и $b\rho a$.

Теорема

Если $\preceq$ — предпорядок на множестве P, то

1. *бинарное отношение ε на P, определяемое условием*
$$a \, \varepsilon \, b \;\Leftrightarrow\; a \preceq b \,\&\, b \preceq a$$
является эквивалентностью;

2. *бинарное отношение $\leq$ на фактормножестве P/ε, определяемое условием*
$$[a]_\varepsilon \leq [b]_\varepsilon \;\Leftrightarrow\; a \preceq b,$$
является частичным порядком.

Порядок из предпорядка —

Доказательство

1. *Согласно своему определению, отношение ε приобретает свойство симметричности (S) в дополнение к свойствам рефлексивности (R) и транзитивности (T), наследуемых от $\preceq$.*
2. *Свойства рефлексивности (R) и транзитивности (T) $\leq$ наследуются от отношения $\preceq$.*
   В силу свойства классов эквивалентности по ε, оно оказывается ещё и антисимметричным (AS).

Продолжаем рассматривать тот же...

Пример

1. $[n]_\varepsilon = \{n, -n\}$ и частичный порядок $\leq$ есть отношение делимости $\mid$ на фактормножестве $\{\mathbb{Z} \setminus \{0\}\}/\varepsilon$.

2. Если на множестве всех логических формул $\mathcal{A}$ ввести отношение $\simeq$ *дедуктивной эквивалентности* по правилу
$$A \vdash B \text{ и } B \vdash A \Leftrightarrow A \simeq B,$$
то $\mathcal{A}/\simeq$ — фактормножество классов дедуктивно эквивалентных формул, являющееся, более того, булевой алгеброй и называемой *алгеброй Линденбаума–Тарского* (символически L^*).

3. Ситуацию с отношением предпочтения в экономике оставляем для самостоятельного разбора.

Порядки: обозначения и термины

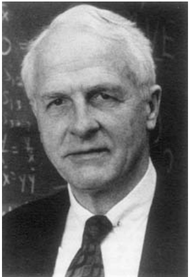
- Символы отношения частичного порядка: $\sqsubseteq, \leqslant, \preccurlyeq \ \ldots$.
- Если $a \sqsubseteq b$, то говорят, что *a предшествует b*, *b следует за a*, *содержит a*.
- *Интервал* (при $a \sqsubseteq b$): $[a, b] = \{ (x \mid a \sqsubseteq x) \,\&\, (x \sqsubseteq b) \}$.
- Если $[a, b] = \{ a, b \}$, то говорят, что *a непосредственно предшествует b* и что *b непосредственно следует за a* или *покрывает*, *доминирует над a* (символически $a \lessdot b$).
- Элементы a и b *сравнимы*, если $(a \sqsubseteq b) \vee (b \sqsubseteq a)$, и *несравнимы* иначе (символически $a \sim b$ и $a \nsim b$).
- Отношение *строгого порядка*: $x \sqsubset y \Leftrightarrow x \sqsubseteq y$ и $x \neq y$,
- *Двойственный порядок*: $x \sqsupseteq y \Leftrightarrow y \sqsubseteq x$ и аналогично для строгого порядка.

Частично упорядоченное множество

Определение

Пару $\mathfrak{P} = \langle P, \sqsubseteq \rangle$, где P — непустое множество, а $\sqsubseteq$ — частичный порядок на нём, называют *частично упорядоченным множеством* (сокращённо *ч.у. множеством*).

Понятие ч.у. множества введено Ф. Хаусдорфом в 1914 г., но развитие теории ч.у. множеств как самостоятельного раздела математики началось с работ Г. Биркгофа в 1930-х годах.



Гаррет Биркгоф (Garrett Birkhoff, 1911–1996) — американский математик. Работал во многих областях “чистой” и прикладной математики, заложил основы универсальной алгебры.

Частично упорядоченное множество

Ч.у. множество представляет собой пример особого типа алгебраической системы — *модели*.

АС является моделью, если в ней отсутствуют операции на носителе, но имеются отношения на нём.

Любое множество можно превратить в частично упорядоченное, задав на нём некоторый порядок.

Например, на двухэлементном множестве $\{x, y\}$ можно построить 3 различных порядка:
тривиальный, $x \sqsubseteq y$ и $y \sqsubseteq x$.

Частично упорядоченные множества: примеры —

- модели $\langle\,\mathbb{R},\leqslant\rangle$, $\langle\,\mathbb{N},\leqslant\rangle$, $\langle\,\mathbb{N},\,|\,\rangle$, $\langle\,B^n,\preccurlyeq\rangle$ и $\langle\,\mathcal{P}(\cdot),\subseteq\rangle$;
- совокупность лучей на прямой с отношением включения;
- совокупность $D(N)$ всех натуральных делителей N — ч.у. множество с упорядочением по делимости;
- для $A \neq \varnothing$ модель $\langle\,\mathcal{E}(A),\subseteq\rangle$ есть ч.у. множество, состоящее из разбиений множества A (имея в виду взаимно-однозначную связь между разбиениями множества и отношениями эквивалентности на нём); при этом говорят, что A *упорядоченно по измельчению*;
- множество конечных возрастающих последовательностей натуральных чисел, где
$$(\,a_1,\,\ldots,\,a_k\,) \sqsubseteq (\,b_1,\,\ldots,\,b_l\,)$$
означает, что $k \leqslant l$ и $a_i = b_i$ при $1 \leqslant i \leqslant k$.

Частично упорядоченное множество: производные

Если $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ — ч.у. множество, $Q \subseteq P$ и $\sqsubseteq|_Q$ — сужение отношения $\sqsubseteq$ на Q, то и $\langle Q, \sqsubseteq|_Q \rangle$ — ч.у. множество, называемое *ч.у. подмножеством* P.

Если на множестве P заданы порядки $\sqsubseteq_1$ и $\sqsubseteq_2$ и $\sqsubseteq_1 \subseteq \sqsubseteq_2$ (из $x \sqsubseteq_1 y$ следует $x \sqsubseteq_2 y$ для всех $x, y \in P$), то говорят, что *порядок* $\sqsubseteq_1$ *содержится в порядке* $\sqsubseteq_2$.

При построении порядка, содержащего данный, говорят о *продолжении* последнего.

Например, тривиальный порядок на неодноэлементном множестве содержится в любом другом и может быть продолжен до него.

Локально конечные ч.у. множества

В зависимости от мощности P различают *конечные* и *бесконечные* ч.у. множества.

Бесконечное ч.у. множество, все интервалы которого конечны, называется *локально конечным*.

Например, ч.у. множества $\langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle$ и $\langle \mathbb{Q}, \leqslant \rangle$ бесконечны, но первое локально конечно, а второе — нет.

Утверждение

Пусть $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ — локально конечное ч.у. множество, и $x, y \in P$. Тогда $x \sqsubseteq y$, если и только если в P существуют такие элементы $z_0, \ldots, z_n$ (для некоторого $n \in \mathbb{N}_0$), что $x = z_0$, $y = z_n$ и $z_i \lessdot z_{i+1}$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Доказательство

проводится индукцией по числу элементов n.

Линейно упорядоченные ч.у. множества

Определение

Если любые два элемента неединичного ч.у. множества P сравнимы, то оно называется *линейно упорядоченным* или *цепью*.

Определение

Пусть $\langle P, \sqsubseteq_P \rangle$ и $\langle Q, \sqsubseteq_Q \rangle$ — линейно упорядоченные множества. Зададим на $P \times Q$ однородное отношение $\sqsubseteq$ следующим образом:

$$(p_1, q_1) \sqsubseteq (p_2, q_2) \Leftrightarrow (p_1 \sqsubset_P p_2) \vee ((p_1 = p_2) \,\&\, (q_1 \sqsubseteq_Q q_2)).$$

Оно называется отношением *лексикографического порядка*.

Ч.у. множество с лексикографическим порядком линейно упорядоченно. Доказательство элементарно.

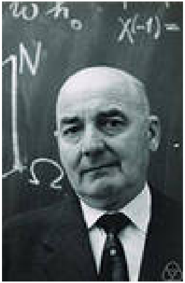
Линейно упорядоченные ч.у. множества

- Для строгого линейного порядка — обозначение $<$.
- Непомеченную n-элементную цепь будем обозначать $\mathbf{n}$ (иногда $\underline{n}$). *Длина цепи* $\mathbf{n}$ есть число $n-1$.
- Цепь $v_1 < \ldots < v_n$ будем записывать как $[\,v_1, \ldots, v_n\,]$. Обозначим $[n] = [\,1, \ldots, n\,]$.
- Одноэлементное ч.у. множество $\mathbf{1}$ называют *тривиальным*.
- Цепь в ч.у. множестве называется *максимальной* или *насыщенной*, если её объединение с любым, не принадлежащим ей элементом, цепью не является. В ч.у. множестве $\langle\, \mathbb{N}, \mid\,\rangle$ цепью будет, например, совокупность некоторых степеней простого числа, а $\{\, 2^n \mid n \in \mathbb{N}\,\}$ — пример его максимальной цепи.

  B^n содержит $n!$ максимальных цепей.

Диаграммы Хассе

Для наглядного представления ч.у. множеств используют *диаграммы Хассе*.

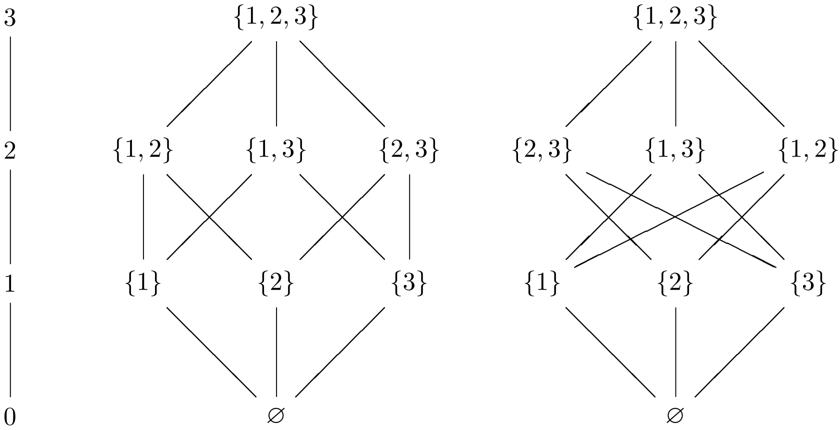


На них изображают элементы ч.у. множеств, и если элемент a предшествует элементу b, то a рисуют ниже b и соединяют их отрезком, если это предшествование непосредственное.

Диаграммы Хассе — не есть представления ч.у. множества в виде направленного графа.

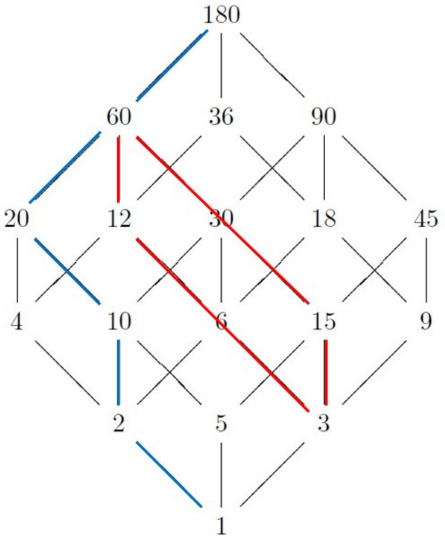
Хельмут Хассе (Helmut Hasse, 1898–1979) — немецкий математик, автор фундаментальных работ по алгебре и теории чисел.

Диаграммы Хассе: цепь 4 и булевой алгебры B^3



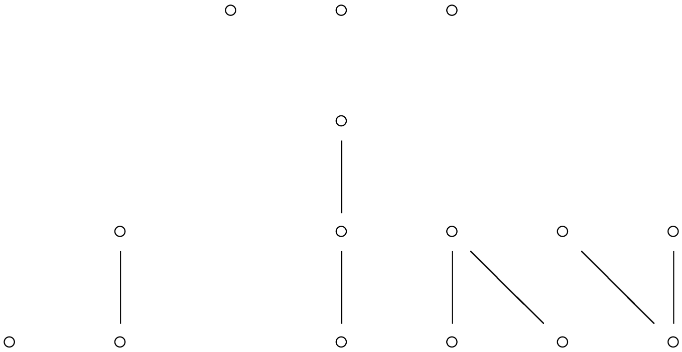
Для данного ч.у. множества обычно можно построить много сильно визуально отличающихся друг от друга диаграмм и поэтому, по возможности, их стараются рисовать без (или с наименьшим количеством) самопересечений

Диаграмма $D(180)$ всех делителей числа $180 = 2^2 3^2 5$



Показаны: одна из максимальных цепей и интервал $[3, 60]$.

Диаграммы трёхэлементных ч.у. множеств



Диаграммы всех 4-элементных ч.у. множеств


1)


2)


3)


4)


5)


6)


7)

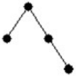

8)

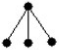

9)

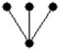

10)


11)


12)


13)


14)


15)


16)

Величины $h(n)$, n, $p(n)$ и $k(n)$

- $h(n)$ — число неизоморфных диаграмм,
- $p(n)$ — число помеченных частичных порядков,
- $k(n)$ — число предпорядков соответственно

на n-элементном множестве.

n	1	2	3	4	5	6	7
$h(n)$	1	2	5	16	63	318	2 045
$p(n)$	1	3	19	219	4 231	130 023	6 129 859
$k(n)$	1	3	29	355	6 942	209 527	9 535 241

Точных эффективных (не содержащих суммирования и не подразумевающих перебора всех или почти всех элементов) формул для них $h(n)$, $p(n)$ и $k(n)$ неизвестно и вряд ли они существуют.

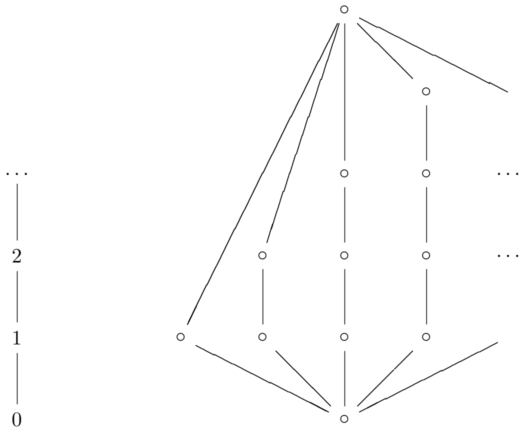
Оценка числа помеченных частичных порядков

Величину $p(n)$ можно легко оценить снизу:
на некотором n-элементном множестве зададим частичный порядок так, что соответствующая диаграмма Хассе есть двудольный граф, а поскольку таких порядков не менее, чем $2^{(n/2)^2}$, $p(n) \geqslant 2^{n^2/4}$.

Доказано равенство $p(n) = 2^{n^2/4+3n/2+O(\log_2 n)}$ и полученная выше грубая оценка оказывается достаточно точной.

Множество всех ч.у. множеств структурно необозримо: неизвестно никакой удобной его характеризации.
В нём выделяют лишь отдельные классы, которые, с одной стороны — в сумме далеко не исчерпывают всех ч.у. множеств, а с другой — сами содержат ч.у. множества с трудно определяемыми характеристиками. Этим во многом объясняются трудности исследования ч.у. множеств.

Диаграммы Хассе бесконечных ч.у. множеств



Разделы

Особые элементы ч.у. множеств: определения

Определение

Элемент $u \in P$ ч.у. множества $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ называют:

- *максимальным*, если $u \sqsubseteq x \Rightarrow u = x$,
- *минимальным*, если $u \sqsupseteq x \Rightarrow u = x$,
- *наибольшим*, если $x \sqsubseteq u$,
- *наименьшим*, если $x \sqsupseteq u$

для любых $x \in P$.

Ясно, что элемент наибольший, если все другие элементы содержатся в нём,
и он максимальный, если нет элементов, содержащих его
(аналогично для наименьшего и минимального элементов).

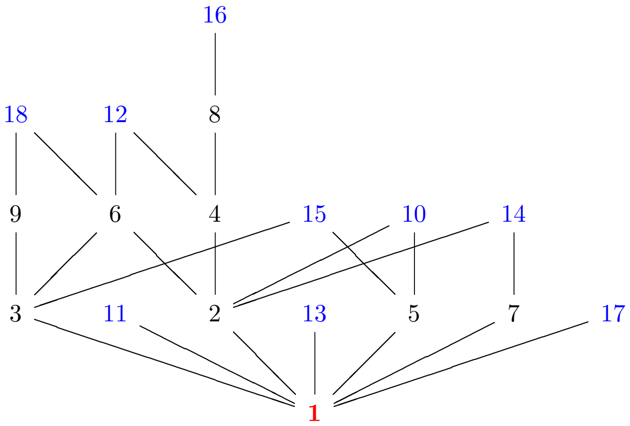
Если ч.у. множество имеет наибольший и наименьший элемент, то оно называется *ограниченным*.

Особые элементы ч.у. множеств: примеры

1. Рассмотрим ч.у. множество $\langle N_f^1, \preccurlyeq \rangle$, где N_f^1 — множество единичных наборов монотонной булевой функции $f(x_1, \ldots, x_5) = x_1 \vee x_2x_3 \vee x_3x_4x_5$.
   Для N_f^1
   - нижние единицы (10000), (01100) и (00111) функции f — минимальные элементы,
   - $\widetilde{1} = (11111)$ — максимальным и наибольшим элементом,
   - наименьший элемент отсутствует.

Особые элементы ч.у. множеств: примеры...

2. Диаграмма ч.у. множества $\langle \{1, \ldots, 18\}, | \rangle$:



1 — наименьший элемент, $10, \ldots, 18$ — максимальные, а наибольшего элемента нет.

Особые элементы ч.у. множеств: примеры...

3. В ограниченном ч.у. множестве $\langle \mathcal{P}(A), \subseteq \rangle$ наименьшим элементом является пустое множество $\varnothing$, а наибольшим — само множество A.

4. В ч.у. множестве $\langle \mathcal{P}^*(A), \subseteq \rangle$ $\{ \mathcal{P}^*(A) = \mathcal{P}(A) \setminus \varnothing \}$ при $|A| > 1$ нет наименьшего элемента, а минимальными являются все одноэлементные подмножества.

5. Будем обозначать через $\mathcal{P}_0(A)$ *совокупность всех конечных подмножеств* бесконечного множества A. В ч.у. множестве $\langle \mathcal{P}_0(A), \subseteq \rangle$ наименьшим элементом будет пустое множество, а максимальных (следовательно, и наибольшего) элементов нет.

Особые элементы ч.у. множеств: свойства

Теорема

В конечном ч.у. множестве каждый элемент содержится в некотором максимальном элементе и содержит некоторый минимальный элемент.

Доказательство

Пусть x *— произвольный элемент ч.у. множества* $\langle P, \sqsubseteq \rangle$.
Если x *не максимален, то найдётся такой элемент* $x_1 \in P$, *что* $x \sqsubseteq x_1$. *Повторяя рассуждения для новых элементов, получаем возрастающую цепь* $x \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq \ldots$.
Поскольку множество P *конечно, то и данная цепь конечна, а её последний элемент* x_n, *по определению будет максимальным элементом* P *и* $x \sqsubseteq x_n$.

Для нахождения минимального элемента рассуждения аналогичны, при этом строится убывающая цепь.

Элементы ч.у. множеств: характеристики

Легко видеть, что ч.у. множество может иметь не более, чем по одному наибольшему и наименьшему элементу.
Их называют соответственно *единицей* и *нулём*, а также *универсальными гранями* данного ч.у. множества; мы будем использовать для них обозначения ι и o соответственно.

- *Высотой* ч.у. множества P, символически $h(P)$, называют длину самой длинной его цепи.
  Высотой элемента v (символически $h(v)$) в конечном упорядоченном множестве называется наибольшая из длин цепей $[v_0, \ldots, v]$, где v_0 — минимальный элемент.

n-элементное тривиально упорядоченное ч.у. множество будем обозначать $n\mathbf{1}$.

Ч.у. множества: антицепи

- *Антицепь* есть непустое подмножество A ч.у. множества P, в котором любые два элемента несравнимы. Например, в ч.у. множестве $\langle \mathbb{N}, | \rangle$ антицепью является произвольное подмножество попарно некратных чисел, а в множестве $\langle B^n, \preccurlyeq \rangle$ — совокупности верхних нулей либо нижних единиц некоторой (не тождественной константам) монотонной булевой функции.
- Антицепь, перестающая быть таковой при добавлении к ней произвольного элемента, назовём *насыщенной*. *Максимальной* назовём антицепь с наибольшим числом элементов.

В ч.у. множестве из $uv + 1$ элементов есть либо цепь из $u + 1$ элементов, либо антицепь из $v + 1$ элементов.

Ч.у. множества: антицепи...

Проблема Дедекинда — задача определения количества $\psi(n)$ антицепей в B^n, ей посвящена обширная литература.

Таблица первых значений $\psi(n)$:

n	1	2	3	4	5	6	7
$\psi(n)$	3	6	20	168	7 581	7 828 354	2 414 682 040 998

Точной формулы для $\psi(n)$ неизвестно и вряд ли она существует. Найдены, однако, приближённые формулы для $\psi(n)$: например, для чётных n для $\psi(n)$ справедливо

$$\psi(n) \sim 2^{\binom{n}{n/2}} e^{\binom{n}{n/2-1}\left(\frac{1}{2^{n/2}}+\frac{n^2-2n}{2^{n+5}}\right)}.$$

(по ней, например, $\psi(6) \approx 7\,996\,118$).

Ч.у. множества: теорема Дилоурса

Шириной ч.у. множества P, символически $w(P)$, называют мощность его максимальной антицепи.

Теорема (Дилоурс)

Ч.у. множество P ширины w и высоты h может быть разбито на w цепей или на $h+1$ антицепей, причём эти значения есть минимально возможные.

Доказательство (второй части утверждения)

Если $h = 0$, то P есть тривиально упорядоченное множество, т.е. антицепь. Пусть $h(P) \geqslant 1$ и теорема справедлива для $h-1$. Обозначим через A_1 множество максимальных элементов P. Поскольку A_1 — антицепь, и $P' = P \setminus A_1$ имеет высоту $h-1$, то ч.у. множество P' может быть разложено в антицепи $A_2, \ldots, A_{h+1}$ и $P = A_1 + \ldots + A_{h+1}$ — искомое разбиение.

Классическая задача разбиения ч.у. множества на минимальное число взаимно непересекающихся цепей

Алгоритм, позволяющий отыскать одно из таких разбиений.
Пусть дано ч.у. множество $\langle \{ v_1, \ldots, v_n \}, \sqsubseteq \rangle$.

1. Построим двудольный граф $\Gamma(P)$ с долями $A = \{ x_1, \ldots, x_n \}$ и $B = \{ y_1, \ldots, y_n \}$, в котором ребро (x_i, y_j) имеется если только если $v_i \sqsubset v_j$.
2. Выберем в графе $\Gamma(P)$ наибольшее паросочетание U. Для каждого ребра $(x_i, y_j) \in U$ фиксируем соответствующую пару элементов, составляющую двухэлементную цепь $[\, v_i, v_j \,]$.
3. Многократно используя свойство транзитивности, объединим двухэлементные цепи из предыдущего шага в максимальные.

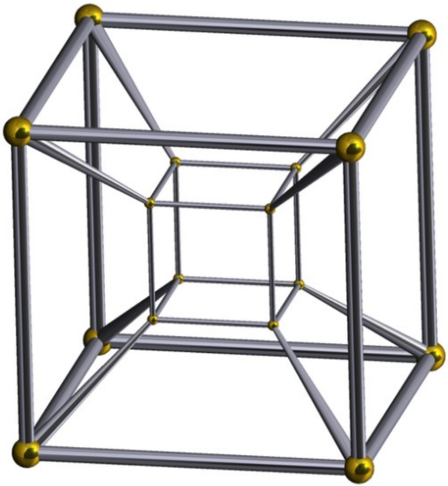
Классическая задача разбиения ч.у. множества...

В результате получится некоторый набор цепей, причем эти цепи попарно общих элементов не имеют.

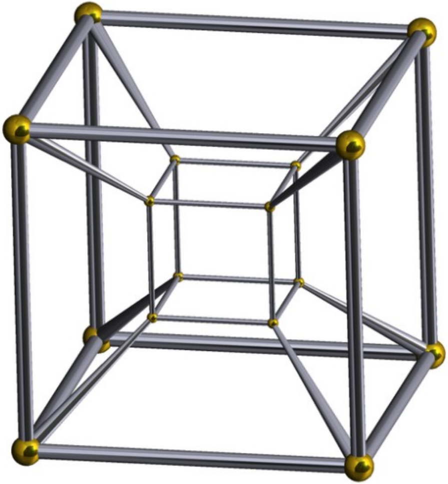
Добавив к этому набору двухэлементные цепи, полученные из всех элементов данного множества, не вошедших в объединение, получим некоторое разбиение данного множества на цепи. Можно доказать, что оно минимально.

***Роберт Дилоурс* (Дилворт)**
(Robert Palmer Dilworth, 1914–1993) — американский математик, внёс значительный вклад в теорию решёток и теорию групп.

Классическая задача разбиения ч.у. множества: куб B^4



Классическая задача разбиения ч.у. множества: куб B^4

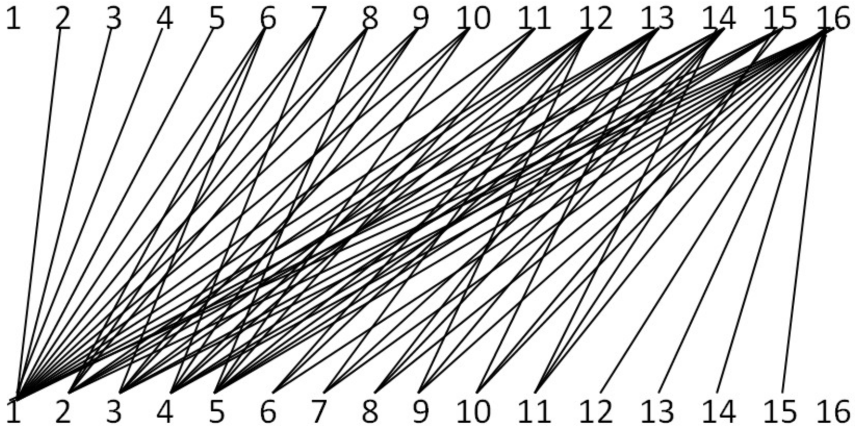


Классическая задача разбиения ч.у. множества: куб B^4...

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1
3	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
4	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
5	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

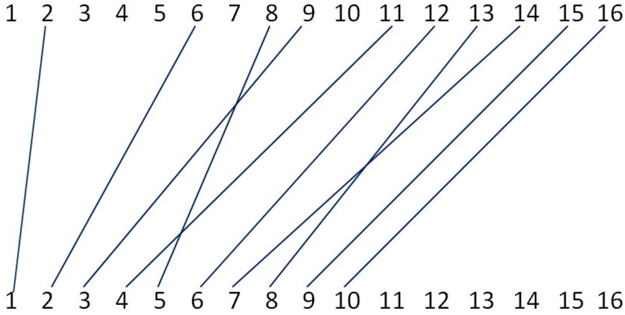
Матрица смежности графа $\Gamma(B^4)$

Классическая задача разбиения ч.у. множества: куб B^4...



Двудольный граф $\Gamma(B^4)$

Классическая задача разбиения ч.у. множества: куб B^4...



Одно из максимальных паросочетаний графа $\Gamma(B^4)$:

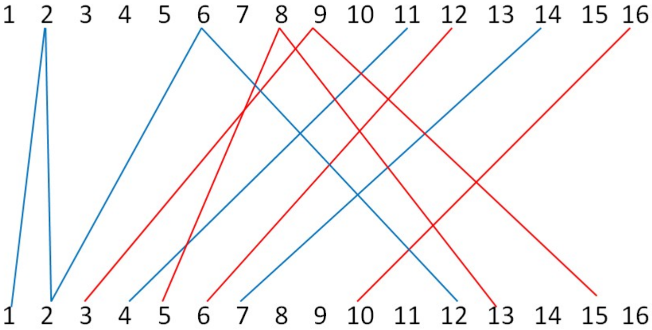
$$U = \{ (x_1, y_2), (x_2, y_6), (x_3, y_9), (x_4, y_{11}), (x_5, y_8), (x_6, y_{12}), (x_7, y_{14}), (x_8, y_{13}), (x_9, y_{15}), (x_{10}, y_{16}) \}$$

Первые двухэлементные цепи суть $[v_1, v_2]$, $[v_2, v_6]$, $[v_3, v_9]$, $[v_4, v_{11}]$, $[v_5, v_8]$, $[v_6, v_{12}]$, $[v_7, v_{14}]$, $[v_8, v_{13}]$, $[v_9, v_{15}]$, $[v_{10}, v_{16}]$.

Классическая задача разбиения ч.у. множества: куб B^4...

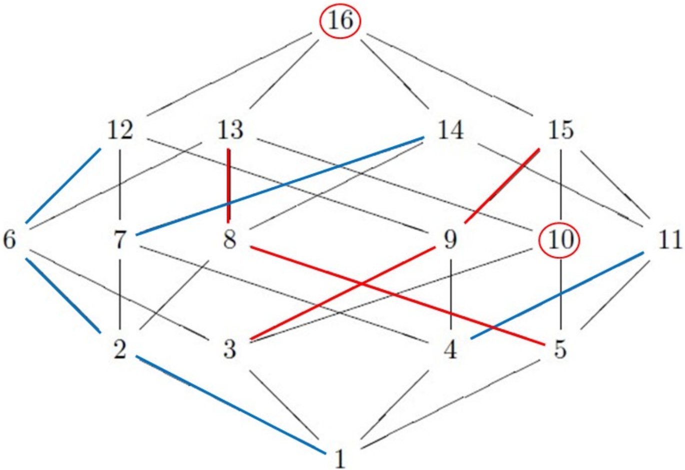
Используя транзитивность частичного порядка, склеим подходящие цепи:

$[v_1, v_2, v_6, v_{12}]$, $[v_3, v_9, v_{15}]$, $[v_4, v_{11}]$, $[v_5, v_8, v_{13}]$, $[v_7, v_{14}]$, $[v_{10}, v_{16}]$.



Поскольку не осталось элементов данного множества вне указанных цепей, этот набор цепей и является искомым.

Классическая задача разбиения ч.у. множества: куб B^4...



Разбиение B^4 на максимальное количество цепей — 6 шт.

В цепи $[v_{10}, v_{16}]$ элементы не следуют друг за другом непосредственно.

Градуированные ч.у. множества

Цепное условие Жордана–Дедекинда

Все максимальные цепи между двумя данными элементами локально конечного ч.у. множества имеют одинаковую длину.

Если все максимальные цепи ч.у. множества P имеет одну и ту же длину t, то говорят, что P — *градуированное (ранжированное) ч.у. множество ранга t*.

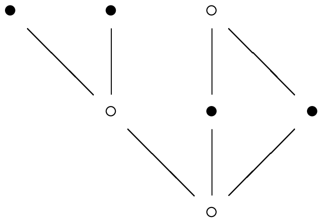
Цепное условие Жордана–Дедекинда выполняется исключительно для градуированных ч.у. множеств.

Для градуированных множеств существует единственная определённая их элементах *ранговая функция* ρ такая, что $\rho(x) = 0$, если x — минимальный элемент и $\rho(y) = \rho(x) + 1$, если $x \lessdot y$.

Если $\rho(x) = k$, то говорят, что элемент x *имеет ранг k*. Элементы одного ранга образуют *слой* ч.у. множества.

Градуированные ч.у. множества: примеры

- Цепь и булеан B^n суть градуированные множества.
- Ч.у. множество $\langle \mathbb{N}, | \rangle$ ранжировано: его k-й $(k > 0)$ уровень состоит из всех тех натуральных чисел, примарное разложение которых содержит k простых сомножителей, не обязательно различных.
- Слой градуированного ч.у. множества есть насыщенная антицепь. Обратное неверно:



Мощность W_k k-го слоя ранжированного ч.у. множества — *число Уитни*.

Градуированные ч.у. множества: разбиение числа

Разбиением $(n_1, \ldots, n_r)$ *натурального числа* n называется его представление неупорядоченной суммой натуральных невозрастающих слагаемых: $n = n_1 + \ldots + n_r$.

Слагаемые n_i — *части* ($i = \overline{1, r}$), r — *ранг* разбиения.

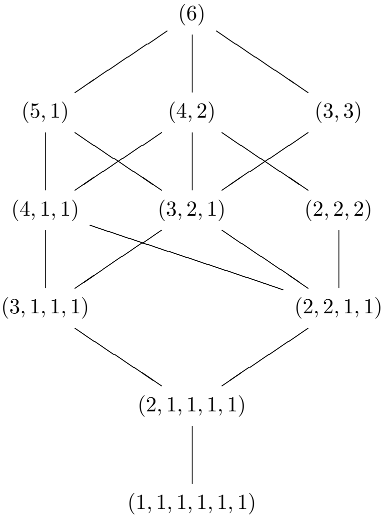
На множестве $\Pi(n)$ всех разбиений числа n устанавливается частичный порядок по их *вложимости* $\preccurlyeq$:

$a \preccurlyeq b \Leftrightarrow$ *«a может быть получено из b подразбиением некоторых элементов»*.

Например, $(2, 2, 2) \preccurlyeq (4, 2)$, но $(2, 2, 2) \not\preccurlyeq (3, 3)$.

$\Pi(n)$ — градуированное множество и $n - r$ есть ранг элемента $(n_1, \ldots, n_r)$.

Диаграмма ч.у. множества $\Pi(6)$



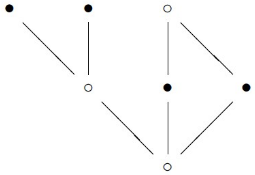
LYM-свойство (Любеля-Ямамото-Мешалкина)

Конечное градуированное ч.у. множество P с ранговой функцией ρ и высоты h обладает *LYM-свойством*, если

LYM-неравенство $$\sum_{x \in Q \subseteq P} \frac{1}{W_{\rho(x)}} \leqslant 1$$

выполняется для любой антицепи Q в P.

Пример: Ч.у. множество —



не обладает *LYM*-свойством:
для выделенной антицепи имеем
$2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3} > 1.$

LYM-свойство: пример

Пример

B^n обладает *LYM*-свойством.

Пусть антицепь в B^n имеет a_k элементов в k-м слое $k = \overline{0, n}$. Но

- каждый элемент k-го слоя содержится в одной и той же $\frac{1}{\binom{n}{k}}$-й доле всех $n!$ максимальных цепей;
- и нет цепи, содержащей более одного элемента некоторой антицепи.

Поэтому сумма долей максимальных цепей, содержащих каждый элемент не может превосходить единицы, т.е.

$$\sum_{x \in Q \subseteq P} \frac{1}{W_{\rho(x)}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \leqslant 1.$$

Сечения цепей

Сечением цепи $\langle C, \leqslant \rangle$ называют разбиение её на два подмножества A (нижний класс сечения) и B (верхний класс сечения) так, что $a < b$ для любых $a \in A$ и $b \in B$.
Различают следующие виды сечений:

- *скачок* — в нижнем классе имеется наибольший элемент, а в верхнем классе — наименьший;
- *дедекиндово сечение* — либо в нижнем классе имеется наибольший элемент, а в верхнем классе наименьшего элемента нет, либо в верхнем классе имеется наименьший элемент, а в нижнем классе наибольшего элемента нет;
- *щель* — в нижнем классе нет наибольшего элемента, а в верхнем — наименьшего.

Цепь называется *непрерывной*, если все её сечения дедекиндовы.

Атомы ч.у. множеств

Если ч.у. множество имеет наименьший элемент, то элементы, непосредственно следующие за ним, называют *атомами*.

Двойственно определяются *коатомы*: это элементы, непосредственно предшествующие наибольшему элементу.

Пример

1. Конечная нетривиальная цепь содержит единственные атом и коатом.
2. В цепи $[0, \ldots, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1]$ атомы отсутствуют.
3. Положим формально, что $0|0$. Тогда в ч.у. множестве $\langle \mathbb{N}_0, | \rangle$ наименьшим элементом является 1, наибольшим — 0, атомы суть простые числа, а коатомы отсутствуют.

Трёхслойные ч.у. множеств

Ч.у. множество P, все элементы которого находятся в трёх непересекающиеся антицепях X_1, X_2 и X_3 таких, что

- $|X_1| \approx |X_3| \approx |P|/4$;
- для всех $a \in X_1$, $c \in X_3$ имеет место $a < c$ (т.е. все элементы из X_3 содержат все элементы X_1);
- если $a < b$ и $a \in X_i$, $b \in X_j$, то $i < j$.

называют *трёхслойным*.

Теорема

При $n \to \infty$ с вероятностью 1 все n-элементные ч.у. множества являются трёхслойными.

Этот результат радикально расходится с обычным представлением о «типичном» ч.у. множестве.

Разделы

Конусы и грани ч.у. множества

Определение

Пусть $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ — ч.у. множество и $A \subseteq P$.
Множества $A^{\vartriangle}$ и $A^{\triangledown}$ определяемые условиями

$$A^{\vartriangle} = \Big\{ x \in P \mid \underset{A}{\forall a} \, (a \sqsubseteq x) \Big\} \text{ и } A^{\triangledown} = \Big\{ x \in P \mid \underset{A}{\forall a} \, (x \sqsubseteq a) \Big\}$$

называются *верхним* и *нижним конусами множества* A,
а их элементы — *верхними* и *нижними гранями множества* A
соответственно.

Для одноэлементного множества $A = \{a\}$ используются обозначения $a^{\vartriangle}$ и $a^{\triangledown}$.

Понятно, например, что если $a \sqsubseteq b$, то $a^{\vartriangle} \cap b^{\triangledown} = [a, b]$.

Основные свойства верхнего и нижнего конусов

Теорема

Пусть $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ *— ч.у. множество,* $A, B \subseteq P$ *и* $x, y \in P$. *Тогда*

1. $A \subseteq B \Rightarrow B^{\triangledown} \subseteq A^{\triangledown}$ *и* $B^{\vartriangle} \subseteq A^{\vartriangle}$ *(антимонотонность конусов подмножеств по включению);*
2. $A \subseteq A^{\vartriangle\triangledown} \cap A^{\triangledown\vartriangle}$;
3. $A^{\vartriangle} = A^{\vartriangle\triangledown\vartriangle}$;
4. $A^{\triangledown} = A^{\triangledown\vartriangle\triangledown}$;
5. $(A \cup B)^{\vartriangle} = A^{\vartriangle} \cap B^{\vartriangle}$;
6. $(A \cup B)^{\triangledown} = A^{\triangledown} \cap B^{\triangledown}$;
7. $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x^{\triangledown} \subseteq y^{\triangledown}$.

Доказательство

1. *Антимонотонность операций перехода к верхнему и нижнему конусам по включению множеств вытекает непосредственно из определения.*

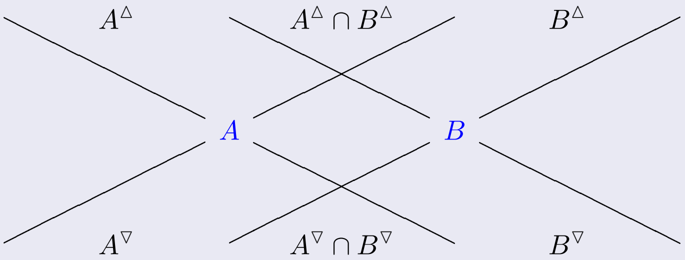
2. *Так как для любых* $x \in A$ *и* $y \in A^{\vartriangle}$ *справедливо* $x \sqsubseteq y$, *то* $A \subseteq A^{\vartriangle\triangledown}$.
Аналогично показывается $A \subseteq A^{\triangledown\vartriangle}$, *откуда и следует требуемое* $A \subseteq A^{\vartriangle\triangledown} \cap A^{\triangledown\vartriangle}$.

3. $A^{\vartriangle} \overset{(2)}{\subseteq} (A^{\vartriangle})^{\triangledown\vartriangle} = (A^{\vartriangle\triangledown})^{\vartriangle} \overset{(1)}{\subseteq} A^{\vartriangle}$ *и аналогично для* **4**.

Основные свойства верхнего и нижнего конусов...

Доказательство (продолжение)

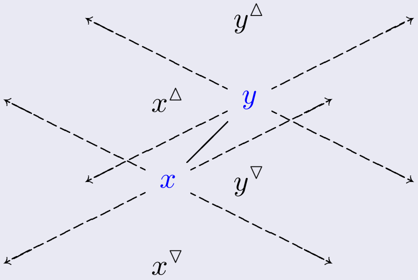
5. *Включение* $(A \cup B)^{\triangle} \subseteq A^{\triangle} \cap B^{\triangle}$ *вытекает из* ❹.
Если же $x \in A^{\triangle} \cap B^{\triangle}$, *то* $y \sqsubseteq x$ *для всех* $y \in A$ *и* $y \in B$, *откуда следует справедливость свойства* ❺.
Аналогично для ❻.
Иллюстрацией к данным свойствам служит следующая схема



Основные свойства верхнего и нижнего конусов...

Доказательство (продолжение)

7. *Свойство* $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x^{\triangledown} \subseteq y^{\triangledown}$ *сразу следует из определений. Иллюстрацией здесь служит схема*



Точные грани ч.у. множества: определение

Определение

Пусть $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ — ч.у. множество и $A \subseteq P$.
Если в $A^{\vartriangle}$ существует наименьший элемент, то он называется *точной верхней гранью множества* A и обозначается $\sup A$.
Если в $A^{\triangledown}$ существует наибольший элемент, то он называется *точной нижней гранью множества* A и обозначается $\inf A$.

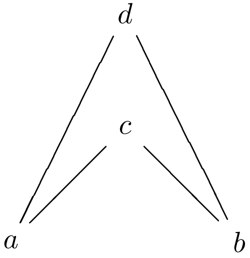
Понятно что

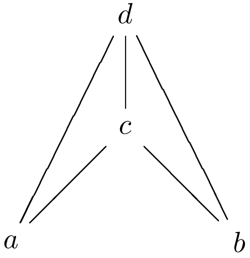
$$\inf A \sqsubseteq a \sqsubseteq \sup A \quad \text{для всех } a \in A.$$

Если $\sup A$ или $\inf A^{\vartriangle}$ существует, то $\sup A = \inf A^{\vartriangle}$ и двойственно,
если $\inf A$ или $\sup A^{\triangledown}$ существует, то $\inf A = \sup A^{\triangledown}$.

Точные грани ч.у. множества: примеры

1. Пусть $P = \{a, b, c, d\}$ и два различных порядка на P задаются следующими диаграммами:





Для $A = \{a, b\}$ имеем $A^{\triangle} = \{c, d\}$ в обоих случаях, но в первом $\sup A$ отсутствует, а во втором $\sup A = c$ (строго говоря, вторая диаграмма не есть диаграмма Хассе: линии, соединяющие d с a и b здесь излишни).

Точные грани ч.у. множества: примеры...

2. Для элемента $\widetilde{\alpha}$ ч.у. множества $\langle B^n, \preccurlyeq \rangle$ имеем
$$\widetilde{\alpha}^{\vartriangle} = [\widetilde{\alpha}, \widetilde{1}], \quad \widetilde{\alpha}^{\triangledown} = [\widetilde{0}, \widetilde{\alpha}].$$

3. Пусть $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ — ч.у. множество и $A \subseteq B \subseteq P$. Если существуют $\sup A$ и $\sup B$ ($\inf A$ и $\inf B$), то $\sup A \sqsubseteq \sup B$ ($\inf A \sqsupseteq \inf B$).

4. Для ч.у. множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ с естественным упорядочением имеем
   - $\sup \{ x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \} = 0$;
   - $\sup \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2 \right\}$ не существует;

5. Если S — совокупность подмножеств некоторого множества, то, по включению, $\sup S$ совпадает с объединением, а $\inf S$ — с пересечением всех подмножеств из совокупности S.

Виды отображений ч.у. множеств: определение

Определение

Пусть $\langle P, \sqsubseteq_P \rangle$ и $\langle Q, \sqsubseteq_Q \rangle$ — ч.у. множества и x, y — произвольные элементы из P.
Отображение $\varphi\colon P \to Q$ называется соответственно

- *изотонным, (монотонными, порядковыми гомоморфизмами)*, если $x \sqsubseteq_P y \;\Rightarrow\; \varphi(x) \sqsubseteq_Q \varphi(y)$;
- *обратно изотонным*, если $\varphi(x) \sqsubseteq_Q \varphi(y) \;\Rightarrow\; x \sqsubseteq_P y$;
- *антиизотонным*, если $x \sqsubseteq_P y \;\Rightarrow\; \varphi(x) \sqsupseteq_Q \varphi(y)$.

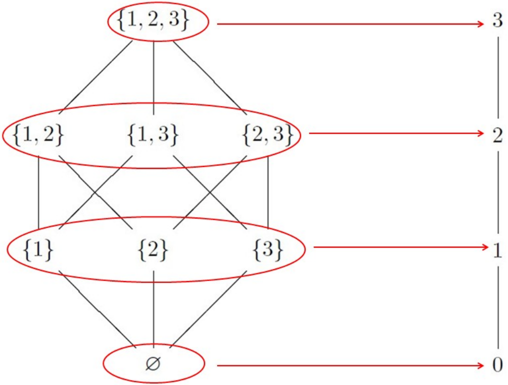
Если φ изотонно, обратно изотонно и инъективно, то его называют *вложением* или *(порядковым) мономорфизмом* ч.у. множества P в ч.у. множество Q, что обозначают $P \overset{\varphi}{\hookrightarrow} Q$.

Виды отображений ч.у. множеств: определения

- Сюръективный мономорфизм ч.у. множеств называют *(порядковым) изоморфизмом* (символически $P \cong Q$ или, с указанием на отображение — $P \overset{\varphi}{\cong} Q$).
- Изоморфизм ч.у. множества в себя называют *(порядковым) автоморфизмом*.
- Понятно, что для ч.у. множеств P и Q отображение $\varphi\colon P \to Q$ их носителей есть порядковый изоморфизм iff φ — изотонная и обратно изотонная биекция, т.е. для любых $x, y \in P$ справедливо $x \sqsubseteq_P y \Leftrightarrow \varphi(x) \sqsubseteq_Q \varphi(y)$.
- Если отображение $\varphi\colon P \to P'$ между носителями ч.у. множеств P и Q биективно и для любых $x, y \in P$ справедливо $x \sqsubseteq_P y \Leftrightarrow \varphi(x) \sqsupseteq_Q \varphi(y)$, то говорят, что P и Q *антиизоморфны*.

Виды отображений ч.у. множеств: примеры

1. Отображение $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) \xrightarrow{\varphi} \mathbf{4}$, $\varphi(x) = |x|$ —



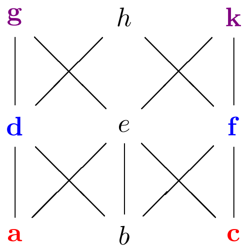
изотонно, но не инъективно и, следовательно, вложением не является.

Виды отображений ч.у. множеств: примеры

2. Тождественное отображение $\langle \mathbb{N}, | \rangle$ в $\langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle$ изотонно, но не обратно изотонно и, следовательно, вложением также не является.
3. Если P — неодноэлементное ч.у. множество с тривиальным порядком, а P' — то же самое множество с произвольным нетривиальным порядком, то тождественное отображение P на себя является изотонным и взаимно-однозначным, но не обратно изотонным.
4. Естественное вложение $n\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$ для натурального n есть мономорфизм.
5. Отображение $\mathcal{P}(X) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{P}(X)$, $\varphi(A) = \overline{A}$, $A \subseteq X \neq \varnothing$ антиизотонно.

Виды отображений ч.у. множеств: примеры...

6. Любая n-элементная цепь изоморфна цепи целых чисел от 1 до n с естественным порядком: $\mathbf{n} \cong \langle [n], \leqslant \rangle$.
7. Ч.у. множество P *самодвойственно*, если $P \cong P^\sharp$.
8. Отображение $\mathbf{a} \leftrightarrow \mathbf{c}$, $b \mapsto b$, $\mathbf{d} \leftrightarrow \mathbf{f}$, $e \mapsto e$, $\mathbf{g} \leftrightarrow \mathbf{k}$, $h \mapsto h$ для ч.у. множества, изображённого на нижеследующем рисунке есть *автоморфизм*:



Неподвижные точки отображений ч.у. множеств: определение

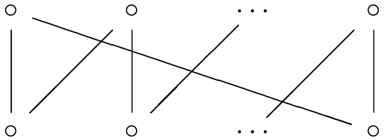
Определение

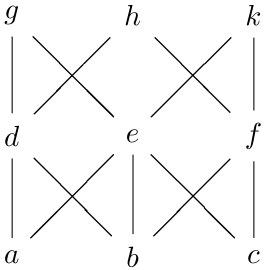
Пусть $f : P \to P$ — изотонное отображение ч.у. множества носителя P ч.у. множества в себя (*изотонный эндоморфизм*). Тогда $p \in P$ называется *неподвижной точкой отображения* f, если и только если $f(p) = p$.

Отображение, не имеющее неподвижных точек называют *свободным от неподвижных точек*.

Говорят, что ч.у. множество P обладает *свойством иметь фиксированные точки* (сокращённо *FPP*), если и только если каждое изотонное отображение его носителя в себя имеет неподвижную точку.

Неподвижные точки отображений ч.у. множеств: примеры





Первое ч.у. множество (корона s_n) не обладает *FPP*, а второе — им обладает.

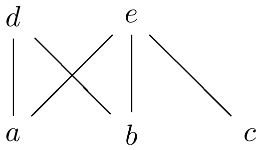
Нетривиальность *FPP* связана, в частности, с тем, что оно не сохраняется при переходу к ч.у. подмножеству.

Неизвестно никакой характеризации ч.у. множеств, обладающих свойством иметь фиксированные точки.

Автоморфные ч.у. множества

Определение

Ч.у. множество *автоморфно* если найдётся его автоморфизм (обратимый эндоморфизм), не имеющий неподвижных точек.



— это ч.у. множество не автоморфно и не обладает *FPP*.

Никакой характеризации автоморфных ч.у. множеств неизвестно.

Порядковые идеалы и фильтры ч.у. множеств: определение

Определение

Пусть $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ — ч.у. множество. Подмножество I элементов P называется его *порядковым идеалом*, если

$$\begin{cases} x \in I \\ y \sqsubseteq x \end{cases} \Rightarrow y \in I.$$

Подмножество F элементов P называется его *порядковым фильтром*, если

$$\begin{cases} x \in F \\ x \sqsubseteq y \end{cases} \Rightarrow y \in F.$$

Объединение и пересечение порядковых идеалов есть порядковый идеал.

$x^{\triangledown}$ и $x^{\vartriangle}$, $x \in P$ — порядковый идеал и фильтр соответственно. Такие идеалы и фильтры называют *главными*

Порядковые идеалы и фильтры ч.у. множеств: свойства

Обозначения:

- $J(x) = x^{\triangledown}$.

- $J(P)$ — множество всех порядковых идеалов ч.у. множества $\langle P, \sqsubseteq \rangle$, упорядоченное по включению — также ч.у. множество.
  Крайние случаи: если $, P$ — n-элементные

  цепь — $J(\mathbf{n}) \cong (\mathbf{n+1})$;

  антицепь — $J(n\mathbf{1}) \cong B^n$.

- $J_0(P)$ — совокупность всех главных порядковых идеалов ч.у. множества P, упорядоченное по включению — также ч.у. множество.
  Понятно, что $J_0(P) \leqslant J(P)$.

Теорема о представлении ч.у. множеств

Теорема

Любое ч.у. множество P изоморфно $J_0(P)$ и, следовательно, может быть вложено в булеан подходящего множества.

Доказательство

Пусть $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ *— ч.у. множество.*
Докажем, что $\varphi(x) = x^\triangledown$ *— искомый изоморфизм.*
1) Покажем, что φ *— биекция.*

а) φ *— вложение, поскольку*

$$\varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow (x^\triangledown = y^\triangledown) \Leftrightarrow (x^\triangledown \subseteq y^\triangledown) \,\&\, (y^\triangledown \subseteq x^\triangledown) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \sqsubseteq y) \,\&\, (y \sqsubseteq x) \Leftrightarrow x = y\,.$$

б) φ *— наложение, т.к. каждому главному идеалу* $x^\triangledown$ *соответствует порождающий его элемент* x.

Теорема о представлении ч.у. множеств...

Доказательство (продолжение)

2) Изотонность и обратная изотонность φ устанавливается свойств нижнего конуса:

$$x \sqsubseteq y \;\Leftrightarrow\; x^{\triangledown} \subseteq y^{\triangledown} \;\Leftrightarrow\; \varphi(x) \subseteq \varphi(y).$$

Таким образом, $P \overset{x^{\triangledown}}{\cong} J_0(P) \overset{\mathrm{id}}{\hookrightarrow} J(P) \overset{\mathrm{id}}{\hookrightarrow} \mathcal{P}(P).$

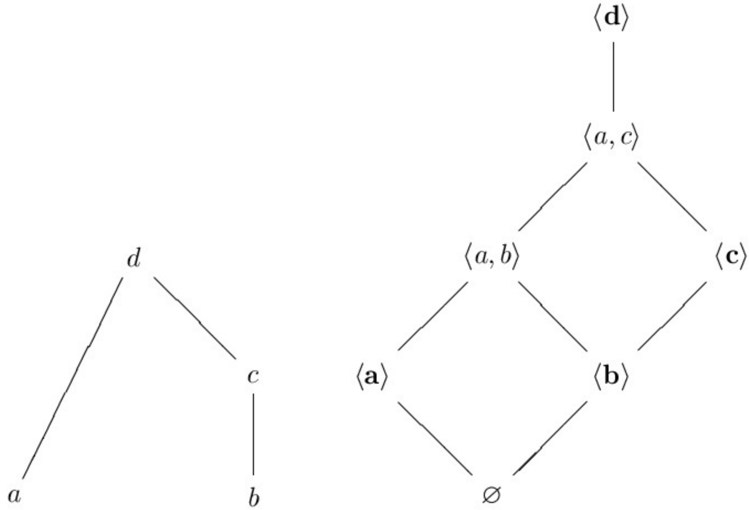
Между антицепями и порядковыми идеалами конечного ч.у. множества существует взаимно-однозначное соответствие.

Пусть $\langle P, \sqsubseteq \rangle$, A — антицепь в P, $I \in J(P)$.

Если $I = \bigcup\limits_{a \in A} a^{\triangledown}$, то говорят, что A *порождает* I.

В случае $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ пишут $I = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ и говорят, что идеал I *конечнопорождённый*. Ясно, что $J(a) = \langle a \rangle$.

Теорема о представлении: иллюстрация



Ч.у. множества P и $J(P)$ (подмножество $J_0(P)$ выделено)

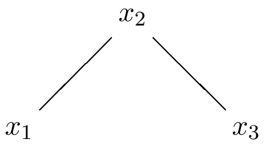
Разделы

Двойственность

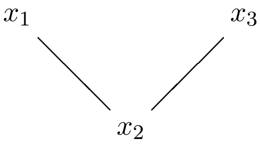
Если P — ч.у. множество с порядком $\sqsubseteq$, то ч.у. множество с тем же носителем и порядком $\sqsupseteq$ называют *двойственным* или *дуальным* к P и обозначают $P^\sharp$.

Если $P \cong P^\sharp$, то P — *самодвойственное* ч.у. множество.

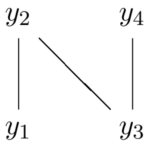
Зигзаги или *заборы* —



Z_3 или Λ



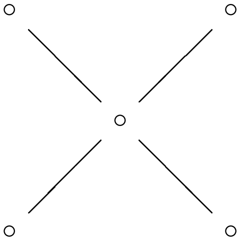
$Z_3^\sharp$ или V

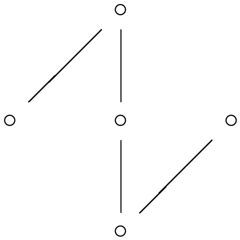


Z_4 или N

Λ и V двойственны друг другу, а N — самодвойственно

Самодвойственные ч.у. множества





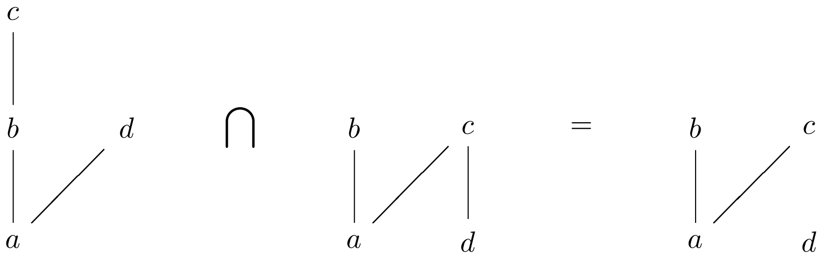
Принцип двойственности для ч.у. множеств —

$$\langle\, P, \sqsubseteq \,\rangle \overset{\mathrm{id}}{\cong} \langle\, P^{\sharp}, \sqsupseteq \,\rangle.$$

Пересечение

Если $\langle P, \sqsubseteq_1 \rangle$ и $\langle P, \sqsubseteq_2 \rangle$ — два ч.у. множества с общим носителем, то их *пересечением* будет ч.у. множество $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ с порядком $\sqsubseteq = \sqsubseteq_1 \cap \sqsubseteq_2$.

Пример:



Свойства ч.у. множеств могут не сохраняются при пересечении, например свойство «быть линейным порядком»: пусть P — цепь, тогда $P^\sharp$ — также цепь, а $P \cap P^\sharp$ — тривиально упорядоченное множество.

Прямая сумма

Если $\langle P, \sqsubseteq_P \rangle$ и $\langle Q, \sqsubseteq_Q \rangle$ — два ч.у. множества $P \cap Q = \varnothing$, то их *прямой* или *кардинальной суммой* $P + Q$ называется множество $P \cup Q$ с частичным порядком $\sqsubseteq$ таким, что

$x \sqsubseteq y$ когда либо $x \sqsubseteq_P y$, либо $x \sqsubseteq_Q y$.

Диаграмма прямой суммы состоит из двух диаграмм соответствующих ч.у. множеств, рассматриваемых как единая диаграмма.

- $\underbrace{P + \ldots + P}_{n} \cong nP$.
- n-элементная антицепь изоморфна $n\mathbf{1}$.

Порядковая сумма

Если $\langle P, \sqsubseteq_P \rangle$ и $\langle Q, \sqsubseteq_Q \rangle$ — два ч.у. множества $P \cap Q = \varnothing$, то их *порядковой* или *ординальной суммой* $P \oplus Q$ называется множество $P \cup Q$ с частичным порядком $\sqsubseteq$ таким, что

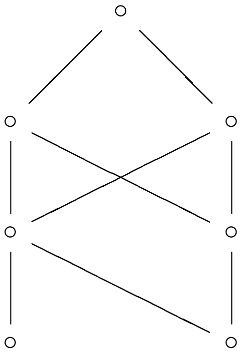
$x \sqsubseteq y$ когда либо $x \sqsubseteq_P y$, либо $x \sqsubseteq_Q y$, либо $x \in P$ и $y \in Q$.

- Операция $\oplus$ ассоциативна, но не коммутативна
- $\mathbf{n} \cong \underbrace{\mathbf{1} \oplus \ldots \oplus \mathbf{1}}_{n}$

Диаграмма порядковой суммы $P \oplus Q$ состоит из диаграмм соответствующих ч.у. множеств, причём диаграмма P располагается под диаграммой Q, и между ними добавлены отрезки, соединяющие максимальные элементы P с минимальными элементами Q.

Порядковая сумма: пример

Порядковая сумма $N \oplus \Lambda$ —



Кардинально и ординально неразложимые ч.у. множества

Ч.у. множество, не представимое в виде кардинальной [ординальной] суммы своих подмножеств, называется *кардинально* [*ординально*] *неразложимым*.

Теорема

Всякое ч.у. множество является кардинальной суммой своих кардинально неразложимых подмножеств.

Верна также аналогичная теорема для ординальной суммы.

Ч.у. кардинально и/или ординально разложимые множества называются *последовательно-параллельными* ч.у. множествами.

Это минимальный класс ч.у. множеств, включающий $\mathbf{1}$ и замкнутый относительно операций прямой и порядковой сумм.

Упорядоченная сумма

Пусть $\langle P, \sqsubseteq_P \rangle$ — ч.у. множество, каждому элементу x которого сопоставлено ч.у. множество $\langle Q_x, \sqsubseteq_x \rangle$. Семейство всех ч.у. множеств Q_x, индексированных элементами P, обозначим $\mathcal{F}$.

Упорядоченной (лексикографической) суммой $\sum_P Q_x$ *семейства ч.у. множеств* $\mathcal{F}$ *над ч.у. множеством* $\langle P, \sqsubseteq_P \rangle$ называется ч.у. множество $\langle R, \sqsubseteq \rangle$, с носителем
$R = \{(x, q) \mid x \in P, q \in Q_x\}$
и порядком на нём, задаваемым соотношением

$$(x, q) \sqsubseteq (x', q') \Leftrightarrow \text{ либо } x \sqsubset_P x', \text{ либо } x = x' \text{ и } q \sqsubseteq_x q'.$$

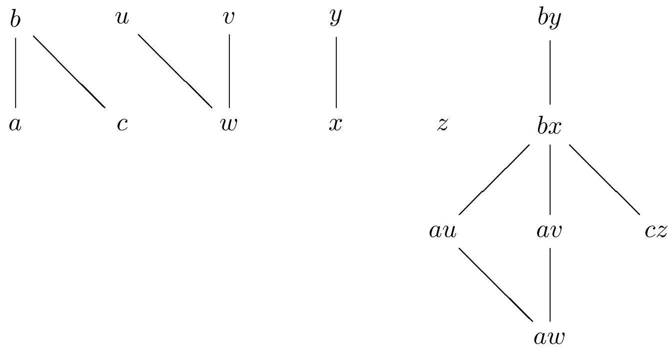
Упорядоченная сумма $\sum_P Q_p$ *тривиальна*, если ч.у. множество P или все множества семейства $\mathcal{F}$ одноэлементны (в этом случае $\sum_P Q_p$ изоморфно либо единственному Q, либо P).

Упорядоченная сумма: построение диаграммы

Построение диаграммы упорядоченной суммы $\sum_P Q_p$ —

1. строят диаграмму ч.у. множества P;
2. отбрасывают отрезки между элементами P;
3. заменяют каждый элемент $x \in P$ диаграммой Q_x;
4. соединяют отрезками все максимальные элементы Q_x со всеми минимальными элементами Q_y, если x непосредственно предшествует y в P.

Упорядоченная сумма: пример



P $\quad Q_a$ $\quad Q_b$ $\quad Q_c$ $\quad \sum_P Q_p$

Прямое произведение

Если $\langle P, \sqsubseteq_P \rangle$ и $\langle Q, \sqsubseteq_Q \rangle$ — два ч.у. множества, то их *прямым* или *декартовым произведением* называется множество $P \times Q$ с частичным порядком $\sqsubseteq$ таким, что

$$(p,\, q) \sqsubseteq (p',\, q') \Leftrightarrow p \sqsubseteq_P p' \text{ и } q \sqsubseteq_Q q'.$$

Обозначение: $P^n \stackrel{\text{def}}{=} P \times \ldots \times P$.

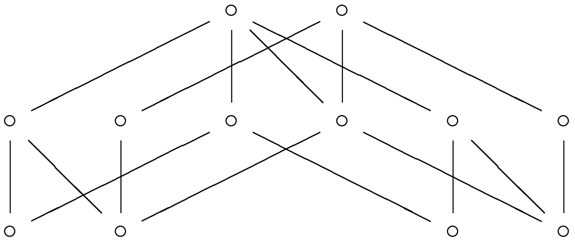
Справедливо соотношение

$$P \times R \cong Q \times R \;\Rightarrow\; P \cong Q\,, \quad \text{откуда} \quad P^n \cong Q^n \;\Rightarrow\; P \cong Q.$$

Построение диаграммы ч.у. множества $P \times Q$:

1. строят диаграмму ч.у. множества P;
2. отбрасывают отрезки между элементами P;
3. заменяют каждый элемент $x \in P$ диаграммой Q_x;
4. соединяют отрезками копии элементов из Q в Q_x и Q_y, если x непосредственно предшествует y в P.

Прямое произведение: пример



Прямое произведение $\Lambda \times N$

Диаграммы изоморфных ч.у. множеств $P \times Q$ и $Q \times P$ обычно выглядят совершенно не похожими друг на друга

Прямое произведение ранжированных ч.у. множеств

Если ч.у. множества P и Q градуированы и их ранговые функции суть ρ_P и ρ_Q, то их прямое произведение также градуировано.

При этом

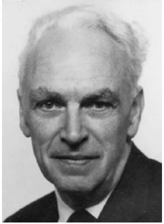
- ранг элемента $x = (x_1, x_2)$ есть $\rho(x) = \rho_P(x_1) + \rho_Q(x_2)$;
- для чисел Уитни W_k справедливо равенство
$$W_k(P \times Q) = \sum_i W_i(P)\, W_{k-i}(Q).$$
Отсюда следует и известное равенство $W_k(\mathbf{2}^n) = \binom{n}{k}$.

Если два ч.у. множества обладают *LYM*-свойством, то их прямое произведение этим свойством может и не обладать;

Теорема Оре и мультипликативная размерность

Теорема (Оре)

Каждый частичный порядок изоморфен некоторому подмножеству декартова произведения цепей.



Ойстин О́ре (Øystein Ore, 1899-1968) — норвежский математик, специалист в области алгебры, теории чисел и теории графов. Увлекался живописью и скульптурой, собирал древние карты и говорил на нескольких языках.

Определение

Мультипликативной размерностью ч.у. множества P называется наименьшее число k линейных порядков L_i таких, существует вложение $P \hookrightarrow L_1 \times \ldots \times L_k$.

Степень

Если $\langle P, \sqsubseteq_P \rangle$ и $\langle Q, \sqsubseteq_Q \rangle$ — два ч.у. множества, то обозначим через Q^P множество всех изотонных отображений из P в Q.
$\langle Q^P, \sqsubseteq \rangle$ — ч.у. множество с порядком $\sqsubseteq$ для $f, g \in Q^P$

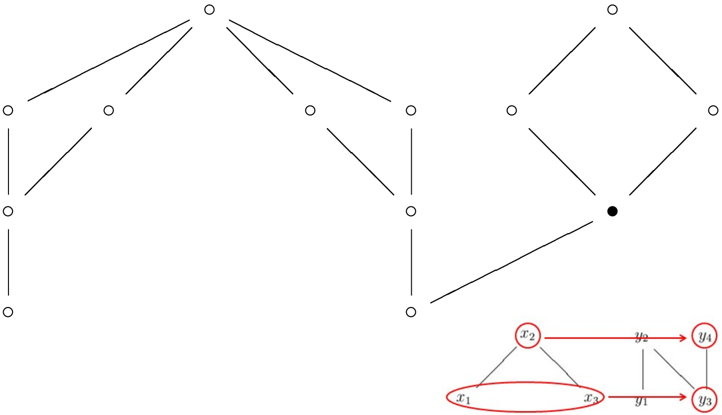
$$f \sqsubseteq g \Leftrightarrow f(x) \sqsubseteq_Q g(x) \text{ для всех } x \in P.$$

Легко показывается справедливость соотношения

$$\mathbf{2^n} \cong (\mathbf{n+1}).$$

(мы заключаем $\mathbf{n+1}$ в скобки, чтобы отличить $n+1$-элементную цепь от прямой суммы n-элементной цепи и тривиального ч.у. множества).

Степень: пример



Ч. у. множество N^{Λ}. Выделенному элементу $\bullet$ соответствует отображение $f\colon \Lambda \to N$, $f(x_1) = f(x_3) = y_3$, $f(x_2) = y_4$.

Арифметика кардиналов

- Для ч.у. множеств — P и произвольных Q и R справедливо
$$R^P \cong R^Q \Rightarrow P \cong Q\,, \quad (Q^P)^\sharp \cong (Q^\sharp)^{P^\sharp}$$
- Для введённых операций $+$, $\times$ над ч.у. множествами выполняются законы ассоциативности, коммутативности и первый дистрибутивный закон —
$$P \times (Q + R) \cong (P \times Q) + (P \times R),$$
и для степени — соотношения
$$R^{P+Q} \cong R^P \times R^Q,\ (P^Q)^R \cong P^{Q\times R},\ (P\times Q)^R \cong P^R \times Q^R$$
- Также справедливы соотношения для «единицы» $\mathbf{1}$:
$$\mathbf{1} \times P \cong P\,, \quad \mathbf{1}^P \cong \mathbf{1}$$
- Важное для практических приложений соотношение —
$$\mathbf{n}^P \cong \left(\mathbf{2}^{\mathbf{n-1}}\right)^P \cong \mathbf{2}^{P\times(\mathbf{n-1})}$$