Часть IV

Математика коллективных решений (I)

Разделы

Пример: выборы в L'Académie royale des Sciences

Одна вакансия, 3 кандидата: A, B, C и 21 выборщик, предпочтения которых:

	I	II	III	или
8	A	B	C	$A \succ B \succ C$
7	B	C	A	$B \succ C \succ A$
6	C	B	A	$C \succ B \succ A$
21				

$\succ$ — *предпочтительнее* (асимметричное, полное и транзитивное однородное отношение)

По правилу относительного большинства будет выбран A, хотя он вряд ли этого достоен: 13 выборщиков ставят его на последнее место.

Начало исследований по теории голосования — работы Кондорсе и Борда (конец XVIII в.)

Мажоритарная система

— победителем считается тот, кто набрал большинство голосов.

Виды большинства:

квалифицированное — большинство в $2/3$ (или $3/4$) голосов;

абсолютное или простое — большинство, составляющее $> 50\%$ голосов (его невозможно превзойти даже при объединении остальных голосующих);

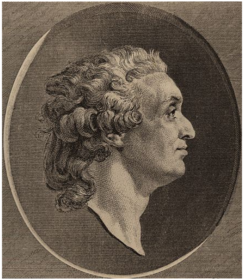
относительное — наибольшее число голосов, поданных за какого-то кандидата, когда ни один из них не имеет абсолютного большинства.

Недостатки мажоритарной системы

- Представительство наиболее мощной партии в парламенте выше, чем действительный процент поддерживающих её избирателей: разбросанные по стране меньшинства не могут добиться большинства в каждом отдельном округе (чтобы провести своего кандидата, требуется компактное проживание $\Rightarrow$ опасность *джерримендеринга*).
- Избиратели, чтобы их голос не пропал, голосуют не за того, кто им нравится, а за наиболее приемлемого из двух лидеров $\Rightarrow$ мажоритарная избирательная система в конце концов приводит к двухпартийной системе (*закон Дюверже*).

Один из выходов — *пропорциональная избирательная система*.

М.Ж.А.Н. Кондорсе



Мари Жан Антуан Никола де Карита маркиз де Кондорсе
(Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, marquis de Condorcet, 1743–1794) — французский философ-просветитель, математик, политический деятель, иностранный почетный член Петербургской академии наук (1776–1792, исключен по указу Екатерины II как член Конвента и участник суда над Людовиком XVI), член Французской академии наук (1769).

Маркиз Кондорсе — один из создателей современного понимания демократии и, в частности, теории голосований.

Выборы в L'Académie royale des Sciences: решение Кондорсе

Подсчитываем количество предпочтений —

8	$A \succ B \succ C$
7	$B \succ C \succ A$
6	$C \succ B \succ A$
21	

$\#(A \succ B) = 8$	$\#(B \succ A) = \mathbf{13}$
$\#(A \succ C) = 8$	$\#(C \succ A) = \mathbf{13}$
$\#(B \succ C) = \mathbf{15}$	$\#(C \succ B) = 6$

— списки предпочтений удобно записывать в виде *матрицы голосования*

В результате при парных сравнениях:

A проигрывает всем;

B выигрывает у всех;

C выигрывает у A проигрывает B.

и B — *победитель по Кондорсе.*

Ж.-Ш. Борда

Жан-Шарль шевалье де Борда
(Jean-Charles de Borda, 1733–1799)
— французский математик,
физик, геодезист, инженер,
политолог и морской офицер.
Член Французской академии наук,
участник военных сражений,
один из создателей теории голосований
(метод оценки Борда).
Автор доказательства теоремы в гидравлике об ударе струи
жидкости или газа, носящей его имя.

По поручению Академии наук вместе с астрономами
П. Мешеном и Ж.-Б. Деламбром работал над определением
длины дуги меридиана.

Выборы в L'Académie royale des Sciences: решение Борда

Присуждаем кандидатам *баллы Борда*:
за первое место — 2, за второе — 1, за третье — 0.
и подсчитываем их количество у кандидатов.

	I	II	III
8	A	B	C
7	B	C	A
6	C	B	A
21	2	1	0

кандидат	$\sum$ баллов
A	16
B	$\mathbf{28}$
C	19

Побеждает набравший максимальное количество баллов

В результате *победитель по Борда* — B ($\neq$ победитель по правилу относительного большинства).

Победитель по Кондорсе $\neq$ победитель по Борда

Пример: 3 кандидата — A, B, C, 81 выборщик, их предпочтения и матрица голосования:

30	$A \succ B \succ C$
29	$B \succ A \succ C$
10	$B \succ C \succ A$
10	$C \succ A \succ B$
1	$A \succ C \succ B$
1	$C \succ B \succ A$
81	$2 \quad 1 \quad 0$

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{pmatrix} 101 & 41 & 60 \\ 40 & 109 & 69 \\ 21 & 12 & 33 \end{pmatrix}$$

по диагонали — баллы Борда, победитель по ним — B.

По Кондорсе $A \overset{41}{\succ} B$, $A \overset{60}{\succ} C$ и победитель — A.

Причина несовпадения: подход Борда учитывает одновременно взаимоотношения всех кандидатов, а подход Кондорсе — только их парные сравнения.

Парадокс Кондорсе

Пример (Кондорсе; *парадокс голосования*).

Число голосующих	Предпочтения
23	$A \succ B \succ C$
17	$B \succ C \succ A$
2	$B \succ A \succ C$
10	$C \succ A \succ B$
9	$C \succ B \succ A$
61	

Решение. $A \overset{33}{\succ} B \overset{42}{\succ} C \overset{36}{\succ} A$ — предпочтения образуют цикл.

Столкнувшись с этим парадоксом, Кондорсе выбрал «наименьшее зло» — поддержал мнение относительного большинства, что избранным следует считать A.

Разные процедуры голосования — разные победители

Пример. Определить победителя по правилам Кондорсе, относительного большинства, Борда и абсолютного большинства при следующих предпочтениях:

Число голосующих	Предпочтения
23	$A \succ C \succ B$
19	$B \succ C \succ A$
16	$C \succ B \succ A$
2	$C \succ A \succ B$
60	2 1 0

Решение. Строим матрицу голосования с баллами Борда по диагонали:

	A	B	C
A	48	25	23
B	35	54	19
C	37	41	78

Разные процедуры голосования — разные победители...

По Кондорсе победитель — C, побеждающий и A, и B при парных сравнениях «один на один»:

$$\begin{tikzcd}
& A & \\
B \arrow[ur, "35"] & & C \arrow[ul, "37"'] \arrow[ll, "41"]
\end{tikzcd}$$

По принципу относительного большинства победитель A: у него 23 голоса из 60 (у $B - 19$, у $C - 18$).

По принципу абсолютного большинства победителя нет: никто не набрал $\geqslant 31$ голосов.

По принципу Борда победитель C: у него максимальное количество баллов — 78.

У Борда тоже проблемы

Пример

31	$A \succ C \succ B$		
12	$B \succ C \succ A$		
17	$C \succ B \succ A$		
1	$C \succ A \succ B$		
61	2	1	0

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 63 & 32 & 31 \\ 29 & 41 & 12 \\ 30 & 43 & 79 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \end{array}$$

По Борда победитель — C, у которого максимальное количество баллов — 79,
но явный победитель — A, т.к. у него абсолютное большинство — 31 голос.

Вывод: победитель по Борда $\neq$ победитель по правилу абсолютного большинства

Двухтуровое голосование — проблемы остаются

Число голосующих	Предпочтения
23	$A \succ B \succ C$
17	$B \succ C \succ A$
2	$B \succ A \succ C$
10	$C \succ A \succ B$
8	$C \succ B \succ A$
60	

Во второй тур выходят набравшие наибольшие число голосов A (23 голоса) и B (у которого 19 голосов, у C — 18).

Однако если двое избирателей (3-я строка) немного изменят своё мнение, поменяв в предпочтениях A и B (т.е. будут считать, что $A \succ B \succ C$), во второй тур выходят A (у него станет 25 голосов) и C (у B останется только 17 голосов), что противоречит здравому смыслу.

Пример: трёхпартийный парламент из 99 депутатов

— представлен партиями X, Y и Z с распределением мест:

X	33
Y	33
Z	33

X	48	$2/7$
Y	48	$2/7$
Z	3	$3/7$

Влияние партий не пропорционально числу их голосов.

Индекс влияния Банцафа $\beta(i)$ для голосований «да/нет»: если b_i — число коалиций, в которых партия i является ключевой (её удаление из коалиции не позволяет коалиции гарантирроованно побеждать), то

$$\beta(i) = \frac{b_i}{\sum\limits_j b_j},$$

Влиятельность участников в Совете Безопасности ООН —

$$\beta(\text{постоянные члены СБ}) \approx 0,835,$$
$$\beta(\text{временные члены СБ}) \approx 0,165.$$

Разделы

Задача голосования

Обозначения:

- множество голосующих (выборщиков, ...) — $V = \{1, \dots, n\}$, $n > 2$;
- множество альтернатив (вариантов, кандидатов, ...) — $A = \{x_1, \dots, x_m\}$, $m \geqslant 2$ (или $A = \{X, Y, \dots\}$);
- мнение i-го голосующего строго линейно упорядочивает множество альтернатив A: $P_i = \langle A, >_i \rangle$, $i = \overline{1, n}$,
  $>_i$ читается как «предпочтительнее», «лучше, чем», ...
- $\overline{P} = (P_1, \dots, P_n)$ — *профиль голосующих*.

Задача голосования заключается в указании элемента $C(A) = a \in A$, в наибольшей степени отражающего мнение коллектива V выборщиков относительно вариантов из A.
Удобно считать, что a — наибольший элемент относительно некоторого частичного порядка $P = F(\overline{P})$ на A.

Правило простого большинства. Мажоритарный граф

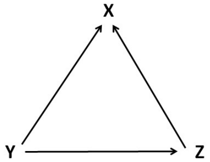
— пара (x, y) включается в P (символически $x >_P y$), если её включает в свои отношения простое большинство голосующих:

$$x >_P y \Leftrightarrow \#\{\, i \in \{1, \ldots, n\} \mid x >_i y \,\} > \frac{n}{2}\,.$$

Граф построенного таким образом отношения P — *мажоритарный граф*.

Для примера Выборы в L'Académie royale des Sciences ($n = 21$):

$\#(X > Y) = 8$	$\#(Y > X) = \mathbf{13}$
$\#(X > Z) = 8$	$\#(Z > X) = 13$
$\#(Y > Z) = \mathbf{15}$	$\#(Z > Y) = 6$



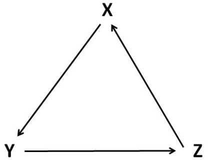
Победитель — Y.

Победитель Кондорсе

— *недоминируемая вершина мажоритарного графа*.

- Если n нечётно, то двух победителей Кондорсе быть не может.
- Победителей Кондорсе быть может вообще не быть (*парадокс Кондорсе*):

пусть $V = \{1, 2, 3\}$, $A = \{X, Y, Z\}$ и



$P_1 : X > Y > Z$
$P_2 : Z > X > Y$
$P_3 : Y > Z > X$

Но при изменении предпочтений 3-го выборщика на $P_3' : Y > X > Z$, имеем

и здесь X — единственный победитель Кондорсе.

Функции выбора по Кондорсе и Борда

По Кондорсе

$$n_{xy} = \#\{\, i \in \{1,\ldots,n\} \mid x >_i y \,\},$$

$$x\rho_{xy}y = n_{xy} \geqslant n_{yx}, \qquad \rho = \bigcup_{\substack{x,y\in A,\\ x\neq y}} \rho_{xy}$$

$$C_{Condorcet}(A) = \{\, x \in A \mid \forall y \in A:\; x\rho y \,\}$$

По Борда

$$B_i(x) = \#\{\, y \in A \setminus x \mid x >_i y \,\},$$

$$b(x) = \sum_{i=1}^{n} B_i(x); \qquad x\rho_A y = b(x) \geqslant b(y);$$

$$C_{Borda}(A) = \{\, x \in A \mid \forall y \in A:\; x\rho_A y \,\}.$$

Основные процедуры голосования I

Приведем наиболее распространенные процедуры голосования и рассмотрим результаты их применения.

Пусть на голосование поставлены три альтернативы: A, B и C и голоса 61 экспертов-выборщиков распределились, как в примере Кондорсе:

Число экспертов	Предпочтения
23	$A > B > C$
17	$B > C > A$
2	$B > A > C$
10	$C > A > B$
9	$C > B > A$
61	$2 \quad 1 \quad 0$

Основные процедуры голосования II

① Процедура (принцип) Кондорсе — лучшей считается альтернатива, которую больше половины экспертов при попарном сравнении считают лучше любой другой.

Сравним предпочтения экспертов по отношению к парам альтернатив: построим таблицу голосования (на будущее — с баллами Борда по диагонали):

	A	B	C
A	46	33	25
B	28	70	42
C	36	19	55

Уже было: переходя от индивидуальных предпочтений экспертов к коллективному — $A \overset{33}{>} B \overset{42}{>} C \overset{36}{>} A$ — лучшая альтернатива отсутствует.

Основные процедуры голосования III

② Процедура Борда —
результаты голосования выражаются в виде числа баллов, набранных каждой альтернативой (при m альтернатив: за первое место присуждается $m-1$ баллов, за второе $m-2$ и т.д., за последнее — 0.
Далее подсчитывается число баллов для каждой альтернативы, и лучшей считается альтернатива, набравшая большую сумму.

Лучшая альтернатива — B (70 баллов).

Основные процедуры голосования IV

③ Редактирующая процедура —
заключается в попарном сравнении альтернатив и отбрасывании тех, которые по большинству голосов признаны худшими.

Среди оставшихся альтернатив снова проводят сравнение до тех пор, пока не останется последняя пара альтернатив, из которой выбирают лучшую.

Эту процедуру использует конгресс США, а также парламенты Швеции и Финляндии.

Основные процедуры голосования V

Проведем попарное сравнение альтернатив:

- для альтернатив A и B альтернатива B хуже, по мнению 33 экспертов;
- для альтернатив B и C альтернатива C хуже, по мнению 42 экспертов;
- для альтернатив A и C альтернатива A хуже, по мнению 36 экспертов;

Наибольшее число голосов экспертов (42) подано за то, что наихудшей является альтернатива C и она исключается. Далее сравниваются альтернативы A и B и альтернатива A признается лучшей.

Основные процедуры голосования VI

④ Процедура Копеланда —
проводятся парные сравнения всех альтернатив, альтернатива, получившая большинство голосов, получает один балл, а набравшая большее число баллов считается лучшей.

Все альтернативы набирают по одному баллу т.е. лучшая альтернатива отсутствует.

Основные процедуры голосования VII

⑤ Процедура максимум —
лучшей считается альтернатива, набравшая при одновременном голосовании всех альтернатив самое большое число голосов (но необязательно больше половины).

За альтернативу A подано 23 голоса, за альтернативы B и C — по 19 голосов.
Лучшей считается альтернатива A.

⑥ Процедура большинства голосов —
лучшей считается та, которая первой набрала больше половины голосов при одновременном голосовании всех альтернатив.

Считается наиболее эффективной для принятия решений.

В рассматриваемом примере лучшая альтернатива отсутствует.

Основные процедуры голосования VIII

⑦ Мягкий рейтинг — участники голосования могут голосовать за любое число альтернатив и лучшей считается набравшая наибольшее число голосов.

Пусть каждый выборщик проголосовал за две лучшие, по его мнению, альтернативы.
Тогда A получает 35 голосов, B — 51 голос, C — 36 голосов, и лучшей альтернативой является B.

Эта процедура иногда используется в ГД РФ.
Процесс голосования иногда может проходить в несколько итераций, если его результаты не удовлетворяют какие-либо влиятельные группы участников, но, как правило, одного голосования бывает достаточно.

Основные процедуры голосования IX

⑧ Процедура квалифицированного большинства —
чтобы предложение прошло, за него должно быть подано не менее $2/3$ голосов и позволяет меньшинству участников заблокировать принятие решения.

В нашем случае $2/3$ голосов > 40 и лучшей альтернативы нет.

Применяется в ГД РФ при принятии конституционных законов и при преодолении вето Совета Федерации или президента.

⑧ Правило единогласия (консенсуса) — полное совпадение всех мнений.
Применяется, например, в процессе согласования решений членами НАТО.

Основные процедуры голосования X

Рассмотренные примеры показывают, что способ определения победителя при системе голосования «один человек — один голос» (называемой демократической) зависит от процедуры обработки результатов голосования.

Один из способов применения рассмотренных систем голосования для многокритериального сравнения альтернатив. Пусть сравнивается альтернатив $x_1, \ldots, x_m$ их качество которых оценено по локальным критериям $z_1, \ldots, z_k$, т.е. для каждой альтернативы $j = \overline{1, m}$ получен вектор критериев $(\, z_1(x_j), \ldots, z_k(x_j)\,)$.

Для выбора лучшей альтернативы предлагается рассмотреть значения альтернатив по i-му критерию z_i как ранжировку, данную i-м экспертом.

Основные процедуры голосования XI

При такой интерпретации значений альтернатив по разным критериям можно воспользоваться системами голосования для выбора лучшей альтернативы.

Например, при использовании процедуры Кондорсе лучшей будет считаться альтернатива, которая по числу локальных критериев, большему, чем $m/2$, при попарном сравнении альтернатив окажется лучше любой другой.

Для повышения объективности выбора лучшей альтернативы можно провести выбор по разным системам голосования и выполнить анализ альтернатив, оказавшихся лучшими.

Данный подход можно рекомендовать для решения задач выбора, в которых велико число критериев ($|V| = m$ — несколько десятков).

Разделы

К. Дж. Эрроу

Кеннет Джозеф Эрроу
(Kenneth Joseph Arrow, род. 1921)
— американский экономист,
лауреат Нобелевской премии по экономике
(1972, совместно с Д. Хиксом)
«за новаторский вклад в общую теорию
равновесия и теорию благосостояния»,
почётный профессор
Высшей школы экономики (2012).

Теорема Эрроу о невозможности коллективного выбора обобщает парадокс Кондорсе. Из неё, в частности, следует, что корректное определение победителя на демократических выборах возможно не всегда.

Аксиоматический подход

Обозначение: подмножество V голосующих, предпочитающих альтернативу x альтернативе y в профиле $\overline{P} = (P_1, \ldots, P_n)$:

$$V_{\overline{P}}(x > y) = \{\, i \in V \mid x >_i y \,\}.$$

Правило голосования F строит по профилю $\overline{P}$ общее отношение предпочтения альтернатив $P = F(\overline{P})$.

В 1951 г. выдающийся американский ученый Кеннет Эрроу для поиска оптимальной системы голосования предложил аксиоматический подход.
Конкретно, им был предложен набор аксиом (условий), которым такая система должна обладать.
Далее они излагаются которые в несколько измененном виде.

Ограничения

— на область определения и область принимаемых значений процедуры голосования:

1) индивидуальные предпочтения $P_1, \ldots, P_n$ голосующих — произвольные нерефлексивные линейные порядки;
2) коллективное решение $P = \langle A, > \rangle$ — линейный порядок.

1-е условие требует, чтобы голосующий имел право высказывать в форме линейных порядков любые предпочтения относительно альтернатив.

2-е условие ограничивает коллективное решение: оно должно быть линейным, коль скоро индивидуальные предпочтения линейны.

— *ординалистский подход*

Аксиомы Эрроу

① Аксиома локальности (независимости от посторонних альтернатив): взаимная предпочтительность любой пары альтернатив x и y в коллективном решении P зависит только и исключительно от их индивидуальных предпочтений (и не зависит от предпочтений других альтернатив):

$$x > y \;=\; F(x >_i y),\; i = \overline{1, n}, \qquad \text{или}$$

$$V_{\overline{P}}(x > y) = V_{\overline{P'}}(x > y) \Rightarrow (x >_P y \Leftrightarrow x >_{P'} y),$$
$$P = F(\overline{P}),\, \mathrm{P}' = F(\overline{\mathrm{P}}').$$

Аксиома локальности фактически постулирует, что групповой выбор должен быть Кондорсе-рациональным (основываться на парных сравнениях альтернатив).

Правило простого большинства удовлетворяет условию локальности: если $V_{\overline{P}}(x > y) = V_{\overline{P'}}(x > y)$, то оба этих множества одновременно либо образуют простое большинство, либо не образуют.

Аксиомы Эрроу...

А вот правило Борда условию локальности не удовлетворяет.

Пример. Пусть $V = \{1, 2, 3\}$, $A = \{x, y, z\}$ и профили индивидуальных предпочтений имеют следующий вид:

$$P_1 : x > y > z, \qquad P_1' : x > y > z,$$
$$P_2 : z > x > y, \qquad P_2' : z > x > y,$$
$$P_3 : y > z > x, \qquad P_3' : z > y > x.$$

По правилу Борда для P имеем $r(x) = r(y) = r(z) = 6$ (нет победителя), а для P' — $r(x) = 6, r(y) = 5, r(z) = 7$ (победитель — Z).

Заметим, что

- $V_{\overline{P}}(x > y) = V_{\overline{P'}}(x > y) = \{1, 2\}$, однако результирующие профили P и P' отличаются: $x \not>_P y$, но $x >_{P'} y$;
- $V_{\overline{P}}(z > x) = V_{\overline{P'}}(z > x) = \{2, 3\}$, но $z \not>_P x$ и $z >_{P'} x$.

Аксиомы Эрроу...

«Бытовые» примеры нарушения аксиомы локальности.

1. Посетитель ресторана сравнивая блюда A и B, склоняется к выбору A, не решаясь выбрать своё любимое блюдо B, т.к. приготовление последнего требует высокой квалификации повара, а, по мнению посетителя, такой повар вряд ли есть в данном ресторане.
Вдруг он замечает в меню блюдо C — очень дорогое и также требующее высокого искусства приготовления.
Тогда посетитель выбирает блюдо B, считая, что повар обладает необходимой квалификацией.

2. Судьи в фигурном катании, давая оценки выступающим, стараются учесть возможность хорошего последующего выступления сильного фигуриста, оставляя ему шансы стать победителем.

Аксиомы Эрроу...

② Аксиома единогласия (оптимальности по Парето): если все участники считают, что x предпочтительнее y, то таким же должно быть и консолидированное мнение:

$$V_{\overline{P}}(x > y) = V \;\Rightarrow\; x >_P y.$$

No comment.

③ Аксиома ненавязанности: коллективное решение зависит только от мнений участников и не может быть навязано процедурой голосования:

$$\left(\exists\,\overline{P} : x >_P y\right) \mathbin{\&} \left(\exists\,\overline{P}' : x \not>_{P'} y\right).$$

Иначе говоря, процедура голосования не может предписать ни $x > y$, ни $x \not> y$ независимо от мнений участников.

Аксиомы Эрроу...

④ Аксиома монотонности:

$$\left\{ \begin{array}{l} x >_P y \\ V_{\overline{P}}(x > y) \subseteq V_{\overline{P'}}(x > y) \end{array} \right. \Rightarrow x >_{P'} y.$$

No comment.

⑤ Аксиома нейтральности: коллективное решение не зависит имён альтернатив —

$$V_{\overline{P}}(x > y) = V_{\overline{P'}}(z > w) \Rightarrow \big((x >_P y) \Leftrightarrow (z >_{P'} w) \big).$$

Условие локальности — сужение условия нейтральности.

Сформулированы естественные аксиомы, которым, казалось бы, должна удовлетворять любая разумная процедура голосования.

Диктатор и диктаторское правило голосования

Правило голосования F, строящее по профилю $\overline{P}$ отношение предпочтения $P = F(\overline{P})$, в соответствии с которым для любой пары альтернатив (x, y) имеет место $x >_P y$ если и только если существует выборщик $i \in V$ такой, что $x >_i y$, называется *диктаторским*, а выборщик i — *диктатором*.

Пример. Пусть $V = \{1, 2, 3\}$ и правило $P = F(\overline{P})$ таково, что для любых альтернатив x и y

$$x >_P y \;\Leftrightarrow\; V_{\overline{P}}(x > y) = \{\,\{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\,\}$$

Тогда для любой пары (x, y) если $x >_2 y$, то такое же будет и коллективное решение независимо от мнений других участников, выборщик 2 — диктатор, а правило $F(\overline{P})$ — диктаторское.

Парадокс Эрроу (Arrow's paradox)

Теорема (Парадокс Эрроу)
Правило голосования F, удовлетворяющее аксиомам 1-5 при $n \geqslant 2$ и $m \geqslant 3$ является диктаторским.

Условия Эрроу, запрещающие дискриминацию альтернатив, приводят к дискриминации голосующих, когда один из них объявляется диктатором, а мнение всех остальных никакого значения не имеет.

Теорема Эрроу (называемая также *теоремой невозможности*), занимает в теории выбора такое же место, как какое занимает в математической логике теорема Гёделя о невозможности построения непротиворечивой математической теории, содержащей аксиомы арифметики.

Парадокс Эрроу: попытки спасти положение

После появления в 1951 г. книги К. Эрроу «Social Choice and Individual Values» предпринимались значительные попытки так ослабить рассмотренные условия, чтобы избежать парадокса.

Пример. Ослабим часть ограничений: коллективное решение — не обязательно линейный порядок.

Тогда получаемое правило голосования называется *олигархией*: выделяется не один, а целая группа ω участников, и при этом коллективное решение — единогласное мнение всех членов этой группы, а мнение всех остальных членов коллектива не учитывается.
Формально:

$$P = \bigcap_{i \in \omega} P_i$$

Парадокс Эрроу: попытки спасти положение...

В частности, группа «олигархов» может совпадать со всем множеством участников ($\omega = V$) и тогда коллективное решение = *правило единогласия* (не путать с аксиомой ② единогласия, которая утверждает, что единогласное мнение членов коллектива должно содержаться в коллективном решении).

Правило единогласия может не давать решения: $P = \varnothing$, если единогласия нет.

Показана возможность разрешения парадокса невозможности на основе замены Кондорсе-рациональности Борда-ранациональность (выбор базируется на сравнениях не пар альтернатив, а их всех в совокупности).

Для нелокальных систем выбора (неудовлетворяющих аксиоме ①) правил общей теории нет, имеются лишь отдельные результаты.