

# Сравнение формы изображений на основе циркулярного разложения

Л.М. Местецкий, А.Б. Семенов  
Тверской государственный университет  
Тверь, Россия  
[l.mest@ru.net](mailto:l.mest@ru.net) [f000115@tversu.ru](mailto:f000115@tversu.ru)

## Аннотация

В статье исследуется вопрос использования геометрических примитивов – жирных линий для построения меры сходства формы объектов. Рассматривается задача представления растрового бинарного изображения в виде объединения жирных линий (циркулярное разложение) и сравнение двух бинарных образов через сравнение циркулярных разложений.

**Ключевые слова:** жирная Б-сплайновая кривая, циркулярное разложение образа, сравнение бинарных образов, распознавание формы объекта.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Классические способы описания формы геометрических объектов в виде объединения площадных примитивов либо в виде задания границы объекта не предоставляют достаточно простых методов для преобразования и анализа формы объекта. Задача сравнения формы изображений является одной из фундаментальных в компьютерной графике, анализе и распознавании изображений. Суть ее состоит в следующем. Даны два растровых бинарных образа, описывающих силуэты объектов и требуется определить степень их сходства. Известны подходы, основанные на сравнении граничных контуров и сравнении скелетов [1]. Первый из них хорошо работает при небольших различиях объектов. Второй оценивает близость структур объектов в топологическом смысле и вычислительно трудоемок. Предлагаемый нами подход основан на представлении исходных бинарных образов в виде совокупности примитивов определенного вида и сравнении их на основе сходства примитивов. В качестве таких примитивов используются жирные линии – объединения однопараметрического семейства кругов переменного радиуса на непрерывных кривых [2,3]. Данный инструмент позволяет осуществлять широкий класс топологических преобразований над объектом (изгиб, кручение, вытягивание, изменение ширины отдельных частей или фигуры в целом) довольно простым и эффективным способом – перемещением контрольных кругов и изменением их радиуса. В предыдущих работах [2-5] жирные линии использовались в качестве графического инструмента для преобразований и синтеза изображений. Спектр применения математического аппарата жирных линий довольно широк в силу своей простоты и универсальности. В данной работе исследуется вопрос их использования для построения меры сходства формы объектов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00667).

## 2. ЖИРНЫЕ ЛИНИИ И ЦИРКУЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ БИНАРНОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ

Жирная линия согласно [2,3] представляет собой след от перемещения окружности переменного радиуса вдоль непрерывной кривой. Жирной линией  $C$  называется множество точек, образованных объединением

$$C = \bigcup_{t \in [a,b]} C_t \text{ однопараметрического семейства кругов}$$

$$C_t = \{(x, y) \in R^2 : (x - u(t))^2 + (y - v(t))^2 \leq r(t)^2\}$$

на евклидовой плоскости  $R^2$ . Кривая  $P(t) = (u(t), v(t))$  называется осью жирной линии, а  $r(t)$  – ее шириной. Жирная элементарная Б-сплайновая кривая [5] задается следующим векторным уравнением

$$C(t) = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^3 B_i(t) * H_i, \text{ где}$$

$t \in [0,1]$  – параметр,

$H_i = \{H_{ix}, H_{iy}, H_{ir}\}$  – семейство контрольных кругов с центрами в  $(H_{ix}, H_{iy})$  и радиусами  $H_{ir}$ ,  $B_i(t)$  – базовые функции кубического Б-сплайна, имеющие следующий вид:

$$B_0(t) = (1-t)^3$$

$$B_1(t) = 3t^3 - 6t^2 + 4$$

$$B_2(t) = -3t^3 + 3t^2 + 3t + 1$$

$$B_3(t) = t^3$$

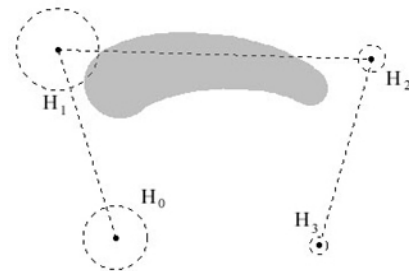


Рис. 1: Жирная Б-сплайновая кривая.

Пример элементарной жирной Б-сплайновой кривой с семейством контрольных кругов  $\{H_0, \dots, H_3\}$  представлен на рис. 1. На практике, как правило, дело имеют с составными кривыми, представляющими собой объединение нескольких элементарных кривых. Жирная линия представляет собой векторный инструмент, позволяющий довольно просто описывать геометрические объекты произвольной формы.

Пусть имеется произвольный бинарный образ, описывающий силуэт объекта. Представление данного объекта в виде конечного объединения жирных линий будем называть циркулярным разложением бинарного изображения. Данное разложение получают следующим образом. Для произвольного растрового бинарного образа строится так называемый скелет [6], затем каждую отдельную ветвь скелета аппроксимируют жирными линиями [5]. На рис. 2 представлен бинарный объект и его циркулярное разложение, состоящее из пяти жирных линий.

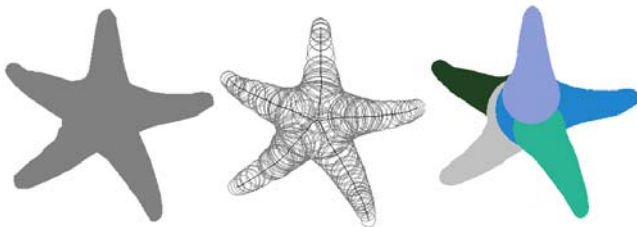


Рис. 2: Бинарный образ, его скелет и циркулярное разложение.

### 3. СРАВНЕНИЕ ЖИРНЫХ ЛИНИЙ

Пусть имеется произвольная составная жирная Б-сплайновая кривая  $C$ , заданная в виде вектор-функции  $C(t) = [x(t), y(t), r(t)]$ , где  $P(t) = [x(t), y(t)]$  задает ось жирной линии, а  $r(t)$  - ее ширину,  $t \in [0, T]$ .

Определим натуральную параметризацию для функции  $r(t)$  [8]. Обозначим через  $l = f(t)$  функцию длины осевой линии, зависящую от параметра  $t$ , тогда  $t = f^{-1}(l)$ .

Рассмотрим функцию  $r(l) = r(f^{-1}(l))$  - зависимости ширины жирной кривой от длины осевой линии. Пример жирной линии и соответствующий ей график функции  $r(l)$  представлен на рис. 3, где по оси абсцисс отложена длина осевой линии, а по оси ординат - ширина жирной кривой.

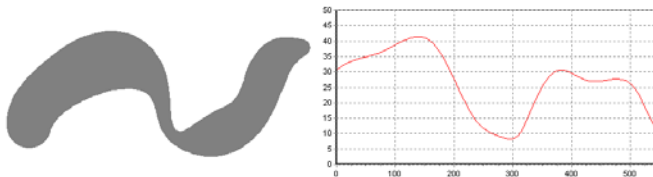


Рис. 3: Жирная Б-сплайновая кривая и график зависимости ширины жирной кривой от длины осевой линии.

Рассмотрим теперь две произвольные жирные линии  $C_1(t)$  и  $C_2(t)$ . Построим в общей системе координат графики функций  $r_1(l)$  и  $r_2(l)$ . Обозначим через  $L_1$  - длину осевой линии жирной кривой  $C_1(t)$ , а через  $L_2$  - длину осевой линии жирной кривой  $C_2(t)$ . Пусть  $L = \max(L_1, L_2)$  и доопределим функции  $r_i(l)$  на  $[0, L]$  как  $r_i(l) = 0$  при  $l > L_i$ , если  $L_i < L$ . Пусть  $D_1$  - множество точек плоскости, ограниченной графиком функции  $r_1(l)$  и осью абсцисс, а  $D_2$  - ограниченное графиком  $r_2(l)$  и осью абсцисс. Обозначим через  $s(D_1 \cup D_2)$  - площадь объединения множеств  $D_1$  и  $D_2$ , а через  $s(D_1 \cap D_2)$  - площадь их пересечения. Под мерой сходства двух жирных линий  $C_1(t)$  и  $C_2(t)$  будем понимать

$$\Delta = \frac{s(D_1 \cap D_2)}{s(D_1 \cup D_2)} = \frac{\int_0^L \min(r_1(l), r_2(l)) dl}{\int_0^L \max(r_1(l), r_2(l)) dl}.$$

Поскольку площадь пересечения двух множеств не превышает площади их объединения, имеем  $s(D_1 \cup D_2) \geq s(D_1 \cap D_2)$  и величина  $\Delta \leq 1$ . Очевидно, что чем больше значение  $\Delta$ , тем две жирные линии более похожи. Следует также заметить, что у абсолютно идентичных жирных линий, величина сходства будет равна единице. Тем самым, нахождение меры близости двух жирных линий сводится к нахождению отношения двух определенных интегралов. На рис. 4 представлены две жирные линии, горизонтальной штриховкой показано объединение множеств, вертикальной их пересечение.

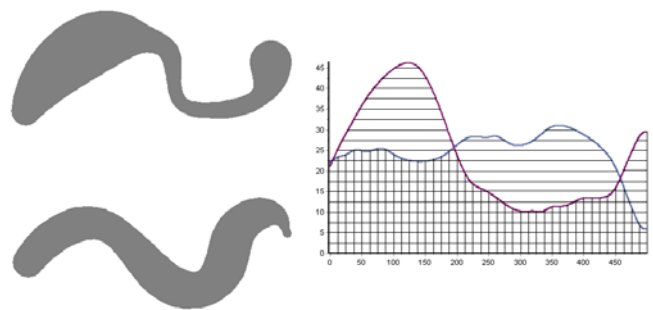


Рис. 4: Графики зависимости ширины жирной кривой от длины осевой линии.

В силу того, что вычислить аналитически функцию  $r(l)$  не представляется возможным, для практических расчетов можно построить кусочно-линейную аппроксимацию этой функции. Разобьем осевую линию жирной кривой  $N$  точками  $(P_0, \dots, P_{N-1})$  на  $N - 1$  достаточно мелких частей.

Обозначим через  $t_i = [0, \tau, 2\tau, \dots, T]$  - вектор значений параметра  $t$ , где  $\tau = \frac{T}{N-1}$ .

Пусть  $P_i = [x(t_i), y(t_i)]$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ . Обозначим

$$L_0 = 0$$

$$L_i = \sum_{j=0}^{i-1} d(P_j, P_{j+1}), i = 1, \dots, N-1$$

где  $d(P_j, P_{j+1})$  - евклидово расстояние между двумя точками. Тогда  $(L_i, r(t_i))$  - последовательность точек кусочно-линейной аппроксимации функции  $r(l)$ . Значение интегралов в дискретном случае можно вычислить, например, методом трапеций. Для жирных линий, представленных на рис. 4 имеем следующие результаты  $s(D_1 \cup D_2) = 15559.18$ ,  $s(D_1 \cap D_2) = 8613.14$ ,  $\Delta = 0.55$ .

При получении циркулярного разложения какого-либо бинарного образа, часть жирных линий может содержать ярко выраженные утолщения кругов, когда относительно короткая часть жирной линии имеет значительно большую ширину по сравнению с остальной частью кривой. Обычно такие утолщения в жирной линии, полученной на этапе аппроксимации кругов из скелетного представления, содержатся в местах ее «соединения» с более широкой линией. На рис. 5 представлен объект, составленный из 12 жирных линий, и показаны две жирные линии, имеющие ярко выраженные утолщения.

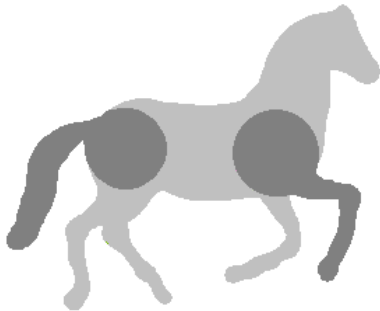


Рис. 5: Объект, составленный из 12 жирных линий, и показаны ярко выраженные утолщения у двух кривых.

При сравнении двух жирных кривых, такие утолщения будут оказывать существенное шумовое влияние на меру близости. Избавление жирной линии от ярко выраженных утолщений будем называть очисткой. Процесс очистки предполагает, что скорость изменения радиуса в жирных линиях, полученных из скелета, относительно небольшая. Наличие «шумовых элементов» в жирной кривой предлагается исследовать по поведению производной функции  $r(l)$ . Будем полагать, что в какой-то точке функции  $r(l)$  присутствует «шумовой

элемент», если  $|r'(l)| \geq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  - наперед заданный порог.

Если значение производной превышает значение  $\varepsilon$ , то мы можем говорить, в этой точке присутствует ярко выраженное утолщение. При вычислении меры близости  $\Delta$  не будем учитывать утолщения в жирных линиях. На рис. 6 представлена жирная линия, полученная из аппроксимации кругов скелета с утолщением в концевой части и показан график функции  $r(l)$ .

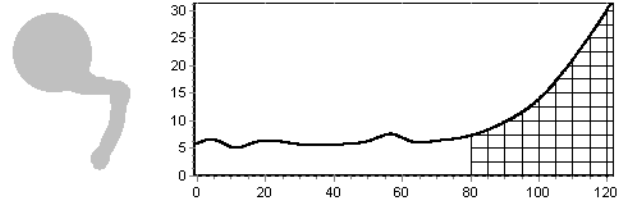


Рис. 6: Жирная Б-сплайновая кривая и соответствующий ей график функции  $r(l)$ .

На графике отчетливо видно, что, начиная с точки  $l = 80$ , значение функции  $r(l)$  быстро увеличивается. Процесс очистки позволит выделить в жирных линиях значимые части и учитывать только их при вычислении меры близости  $\Delta$ . Так, очистка жирной кривой, показанной на рис. 6 удалит из меры близости величину равную площади заштрихованной области на графике.

#### 4. СРАВНЕНИЕ ЦИРКУЛЯРНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Пусть у нас имеется два бинарных образа  $I_1, I_2$  и известны их циркулярные разложения. Предположим, что первый образ состоит из  $N$ , а второй – из  $M$  жирных кривых. Построим матрицу  $\Omega[i, j]$  размером  $N * M$ . Элемент матрицы  $\Omega_{ij}$  показывает меру близости  $i$ -ой кривой из первого разложения с  $j$ -ой кривой из второго. Матрицу  $\Omega$  будем называть матрицей сходства двух циркулярных разложений образов  $I_1, I_2$ . На рис. 7 представлены два циркулярных разложения и показана их матрица сходства. Далее по этой матрице нужно найти наилучшее соответствие элементов-примитивов. Иными словами для каждой жирной линии из первого циркулярного разложения требуется найти такую жирную кривую из второго разложения, чтобы мера сходства этих жирных линий была как можно больше.



	1	2	3	4	5	6
1	0.63	0.12	0.44	0.53	0.32	0.76
2	0.18	0.3	0.22	0.2	0.66	0.21
3	0.57	0.09	0.46	0.6	0.25	0.68
4	0.7	0.11	0.45	0.54	0.3	0.79
5	0.24	0.17	0.33	0.28	0.67	0.26
6	0.5	0.1	0.49	0.63	0.27	0.57

Рис. 7: Циркулярное разложение двух образов и соответствующая матрица сходства (столбец соответствует образу слева, строка – образу справа).

Таким образом, вычисление меры сходства двух бинарных изображений сведется к сравнению их циркулярных разложений. Предлагается следующий алгоритм сравнения двух циркулярных разложений.

Пусть  $e_1, \dots, e_n$  и  $f_1, \dots, f_m$  - жирные линии, входящие соответственно в первое и во второе циркулярные разложения. Пусть  $\Omega_{ij}$  - близость элементов  $e_i$  и  $f_j$ .

Введем матрицу

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } e_i \text{ ставится в соответствие } f_j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

На построенной матрице сходства  $\Omega$  решаем задачу назначения [7], т.е.

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \Omega_{ij} * X_{ij} &\rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^m X_{ij} &\leq 1, i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n X_{ij} &\leq 1, j = 1, \dots, m \\ X_{ij} &= 0 \text{ или } 1 \end{aligned}$$

Результатом задачи назначения является список пар индексов вида  $(i_k, j_k)$ , где  $k = 1, \dots, \min(N, M)$ .

$$X_{i_k j_k} = 1 \text{ обозначает, что наиболее близкими по мере}$$

сходства являются жирные линии  $e_{i_k}$  и  $f_{j_k}$ . Тем

самым, если количество жирных линий в обоих циркулярных разложениях одинаково, то каждой жирной кривой из первого разложения будет поставлена единственным образом жирная кривая из второго разложения. Обозначим через

$$\Delta = \frac{\sum_{k=1}^{\min(N, M)} \Omega_{i_k j_k}}{\min(N, M)}$$

Величину  $\Delta$  будем называть относительной мерой сходства двух циркулярных разложений. Данная мера будет показывать, насколько похожими являются два произвольных бинарных образа. Ясно, что чем больше это значение, тем более похожими являются образы. Для образов, представленных на рис. 7, алгоритм сравнения двух циркулярных разложений выдаст следующие результаты. Список пар индексов: (4:6), (5:5), (6:4), (1:1), (3:3), (2:2). Относительная величина сходства циркулярных разложений: 0,58. Данный результат получен без процесса очистки жирных линий. Относительная величина сходства зависит от качества очистки (выбора  $\varepsilon$ ) жирной линии. Механизм удаления «шумовых элементов» из жирных линий даст следующие результаты.

$\varepsilon$	Относительная величина сходства
0.2	0.42
0.3	0.65
0.4	0.66
0.5	0.67
0.6	0.64

Очевидно, что при таком комбинаторном переборе жирных линий из двух циркулярных разложений мы сможем не учесть важные детали скелетного строения образа. Избежать этого можно путем дополнительного учета топологии скелета. Например, на рис.7 рука (жирная линия №3) из левого образа может быть поставлена в соответствие туловищу (жирная линия №5) из правого образа. Рассмотрим произвольный бинарный образ и его скелет, показанный на рис. 8. В скелете имеются точки, в которых сходятся три ребра. На рис. 8 они обозначены буквами А,В,С,Д. Имеются также так называемые терминальные вершины, обозначенные буквами Е,Ф,Г. Точки А,В,С,Д для простоты иногда называют тройниками скелета. Припишем вершинам-тройникам метку 3, а терминальным вершинам метку 1. Из представленного рисунка видно, что каждое ребро скелета соединяет две вершины с метками либо 3:3, либо 1:3.

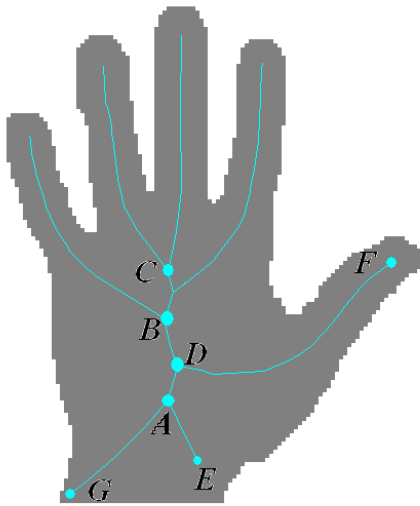


Рис. 8: Растровый образ и его скелетное представление.

Например, ребро DF соединяет две вершины с метками 3 и 1, ребро AD – соответственно 3 и 3. При аппроксимации ветвей скелета жирными линиями каждому терминальному кругу жирной кривой (начальному и конечному) припишем метку, соответствующую метке вершины скелетного графа. Тем самым, к примеру, из ребра AE скелета мы получим жирную B-сплайновую кривую, у которой начальный круг будет иметь метку 3, а конечный – метку 1. Из ребра же BD после аппроксимации получится жирная линия, концевые круги которой будут с метками 3. Теперь при сравнении двух жирных линий из разных циркулярных разложений будем руководствоваться следующим простым правилом. Будем сравнивать только те жирные линии, у которых совпадают метки в концевых кругах. Тем самым сравнение жирных линий с метками 3:1 и 3:3 недопустимо. Случай, когда две жирные кривые имеют метки вида 1:3 и 3:1, приводится к виду 1:3, 1:3 простой перенумерацией контрольных кругов у одной из жирных линий. Данная идея позволяет существенно понизить количество сравнений, увеличить вычислительную эффективность алгоритма сравнения двух циркулярных разложений и повысить топологическую корректность сравнения.

## 5. ПРИМЕР СРАВНЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ ЛАДОНИЙ

Данный подход в сравнении двух произвольных образов через сравнение жирных линий предоставляет возможность в качестве применения исследовать задачу идентификации человека по форме его ладони. Системы подобного рода занимают третье место после распознавания отпечатков пальцев и черт лица и составляют порядка 13 процентов от всех биометрических устройств, применяемых в современном мире [9]. Как утверждает биометрия - прикладная область знаний, учитывающая уникальные характеристики человеческого тела, в мире нет двух одинаковых индивидуумов с идентичными биометрическими данными. Способ аутентификации по форме ладони применяется не так давно. Идея, заложенная в данном

подходе, состоит в том, что любого человека можно идентифицировать по форме его пальцев на ладони.

Задачу распознавания формы человеческой ладони в терминах жирных линий будем решать методом сравнения с эталоном. В качестве меры сравнения двух образов будет выступать относительная величина сходства двух циркулярных разложений. Будем полагать, что два образа являются более похожими, если у них относительная мера сходства наибольшая. В качестве примера рассмотрим изображения четырех ладоней, представленные на рис. 9. Можно полагать, что два образа в левом столбце, обозначенные  $A_1, B_1$ , представляют собой образы эталонов, т.к. принадлежат двум разным людям. Правый столбец содержит образы ладоней тех же людей, но с иным расположением некоторых пальцев:  $A_2, B_2$ . Особенность данной задачи состоит в том, что при сравнении двух циркулярных разложений у нас нет необходимости в полном комбинаторном сравнении всех линий входящих в оба разложения. При построении скелетного представления изображения ладони нас интересует только пять ветвей скелета. Эти пять ветвей соответствуют пяти пальцам на ладони. На рис. 6 данные ветви отчетливо просматриваются.

При распознавании формы ладони имеет смысл сравнивать только соответствующие пальцы между собой. В силу этого сравнение двух форм ладоней сводится к сравнению десяти жирных линий, с последующим вычислением относительной меры сходства двух циркулярных разложений.

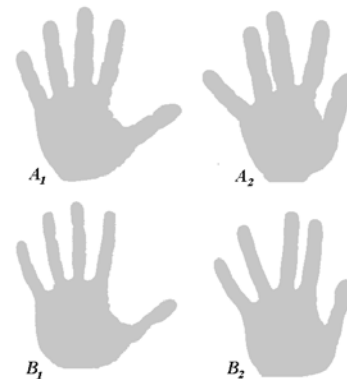


Рис. 9: Пример четырех образов ладоней.

При сравнении между собой данных образов получим следующую симметричную матрицу.

	$A_1$	$B_1$	$A_2$	$B_2$
$A_1$	1	0.72	<b>0.9</b>	0.81
$B_1$	0.72	1	0.65	<b>0.89</b>
$A_2$	<b>0.9</b>	0.65	1	0.75
$B_2$	0.81	<b>0.89</b>	0.75	1

Как видно из таблицы данный метод сравнения отобрал образы ладоней, принадлежащие одному человеку. Очень важным моментом, как показало исследование, в данном подходе является предобработка растрового образа. Конечно же, проверка метода на двух образах не дает право делать выводы об устойчивости такового. Однако идея, заложенная в основу данного подхода, может занять свою нишу в области распознавания формы.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный в статье подход к использованию жирных линий для построения меры сходства формы изображений представляет собой новый инструмент в области распознавания формы объектов.

## 7. ЛИТЕРАТУРА

- [1] T.Sebastian, B. Kimia. *Curves vs skeletons in object recognition*.
- [2] Л.М. Местецкий. *Компьютерная графика на основе жирных линий. Труды международной конференции по компьютерной графике «Графикон-2001», Москва, МГУ, 2000.*
- [3] L.M. Mestetskii. *Fat curves and representation of planar figures. Computers and Graphics, Vol. 24(1-2),2000*
- [4] Л.М. Местецкий, А.Б. Семенов. *Преобразование цветных изображений на основе жирных B-сплайновых кривых. Труды 13 международной конференции. ГРАФИКОН-2003, Москва.*
- [5] А.Б. Семенов, Л.М. Местецкий. *Жирные линии на основе B-сплайнов. Сложные системы: моделирование и оптимизация. Сборник научных трудов. Тверской государственный университет. 2001.*
- [6] Л.М. Местецкий. *Скелетизация многоугольной фигуры на основе обобщенной триангуляции Делоне. Программирование, №3, 1999.*
- [7] *Линейное и нелинейное программирование. Под общей редакцией проф. И.Н.Ляшенко. Киев, 1975.*
- [8] А.П. Норден. *Краткий курс дифференциальной геометрии. Москва. 1958.*
- [9] Д. Карр. *Биометрические устройства новой волны. Открытые системы. LAN № 12, 2001.*

## Авторы

Местецкий Леонид Моисеевич, доктор технических наук, профессор кафедры информационных систем и технологий Тверского государственного университета.

E-mail: [l.mest@ru.net](mailto:l.mest@ru.net)

Семенов Андрей Борисович, аспирант кафедры информационных систем и технологий Тверского государственного университета.

E-mail: [f000115@tversu.ru](mailto:f000115@tversu.ru)

# Image shape comparison based at circular decomposition

Leonid Mestetskii, Andrey Semenov  
Tver State University  
Tver, Russia

## Abstract

A new method for shape comparison is considered. The measure of shape distinction is computed by “circular shape representation” as a union of fat B-spline curves.

**Keyword:** *B-Spline Fat Curve, Binary Bitmap Comparison, Shape Recognition, Circular Representation.*