

## Задание 3. Метод опорных векторов

Курс: Практикум на ЭВМ, осень 2016

Начало выполнения задания: 3 ноября.

Срок сдачи: **20 ноября, 23:59.**

Среда для выполнения задания: Python 3.4 или Python 2.7

## 1 Ликбез

Зафиксируем обозначения:

- $N$  — число объектов в обучающей выборке.
- $D$  — размерность признакового пространства.
- $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^D$  — вектор признаков объекта  $n$ .
- $y_n \in \{-1, 1\}$  — правильный ответ для объекта  $n$ .

## Прямая задача SVM

$$\min_{\mathbf{w}, \xi \geq 0} \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + C \sum_{n=1}^N \xi_n,$$

$$\text{s.t. } y_n(\mathbf{w}^\top \mathbf{x}_n + w_0) \geq 1 - \xi_n, \quad n = 1, \dots, N.$$

**Прямая задача SVM без ограничений** В предыдущей задаче можно избавиться от переменных  $\xi_n$ , если учесть, что  $\xi_n \geq 0$  и  $\xi_n \geq 1 - y_n \mathbf{w}^\top \mathbf{x}_n$ :

$$\min_{\mathbf{w}} \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + C \sum_{n=1}^N \max\{0, 1 - y_n(\mathbf{w}^\top \mathbf{x}_n + w_0)\}.$$

## Двойственная задача SVM

$$\max_{\mathbf{a}} \sum_{n=1}^N a_n - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N a_n a_m y_n y_m k(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m)$$

$$\text{s.t. } 0 \leq a_n \leq C, \quad n = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{n=1}^N a_n y_n = 0,$$

где  $k(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m)$  — ядровая функция, в линейном случае ее значение равно  $\mathbf{x}_n^\top \mathbf{x}_m$ .

**Субградиент** Вектор  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$  является субградиентом выпуклой функции  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , если  $\forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  выполнено неравенство

$$f(\mathbf{z}) \geq f(\mathbf{x}) + \mathbf{g}^\top (\mathbf{z} - \mathbf{x}).$$

Если функция  $f$  дифференцируема в точке  $\mathbf{x}$ , ее субградиент в этой точке совпадает с градиентом. *Субдифференциалом* функции  $f$  в точке  $\mathbf{x}$  называют множество субградиентов в этой точке, обозначают  $\partial f(\mathbf{x})$ .

Рассмотрим пример вычисления субдифференциала для функции  $f(x) = |x|$ . При  $x < 0$  субградиент единственен:  $\partial f(x) = -1$ ; аналогично при  $x > 0$ :  $\partial f(x) = 1$ . При  $x = 0$  субдифференциал определяется неравенством  $|z| \geq gz$  для любого  $z \in \mathbb{R}$ , это неравенство выполнено только при  $g \in [-1, 1]$ , таким образом  $\partial f(0) = [-1, 1]$ .

**Субградиентный спуск** — метод аналогичный методу градиентного спуска, в котором вместо градиента используется субградиент.

## 2 Формулировка задания

Требуется реализовать следующие методы для решения задачи SVM:

1. Метод внутренней точки для решения прямой задачи. Рекомендуется использовать библиотеку `cvxopt`, метод `cvxopt.solvers.qp`.
2. Метод внутренней точки для решения двойственной задачи. Рекомендуется использовать библиотеку `cvxopt`, метод `cvxopt.solvers.qp`.
3. Метод субградиентного спуска для решения прямой задачи, а также его стохастический вариант. Рассмотреть критерий останова как по значению целевой функции, так и по норме аргумента. Реализовать полностью самостоятельно. Для этого потребуется вывести формулу для субградиента функционала в прямой задаче SVM без ограничений, вывод вставить в отчет.
4. Метод, используемый в библиотеке `liblinear`. Рекомендуется использовать биндинги из библиотеки `scikit-learn`, класс `sklearn.svm.LinearSVC`.
5. Метод, используемый в библиотеке `libsvm`. Рекомендуется использовать биндинги из библиотеки `scikit-learn`, класс `sklearn.svm.SVC`.

**Исследовательская часть.** Для проведения исследований необходимо генерировать модельные данные, которые не являются линейно разделимыми, для этого удобно использовать многомерные нормальные распределения. Минимальный размер выборки — по 100 объектов в каждом классе.

Требуется провести следующие исследования:

1. Исследовать зависимость времени работы реализованных методов для решения задачи линейного SVM от размерности признакового пространства и числа объектов в обучающей выборке. Исследовать скорость сходимости методов. Сравнить методы по полученным значениям целевой функции.
2. Провести эти исследования для случая SVM с RBF ядром для тех методов, где возможен ядровой переход.
3. Реализовать процедуру поиска оптимального значения параметра  $C$  и ширины RBF ядра с помощью кросс-валидации (можно воспользоваться библиотекой `scikit-learn`). Исследовать зависимость ошибки на валидационной выборке от значений этих параметров. Рассмотреть случаи хорошо и трудно разделимых выборок.
4. Сравнить (по скорости сходимости и точности решения) несколько стратегий выбора шага  $\alpha_t$  в методе субградиентного спуска:  $\alpha$ ,  $\frac{\alpha}{t}$ ,  $\frac{\alpha}{t^\beta}$ , где  $\alpha$ ,  $\beta$  — некоторые константы,  $t$  — номер итерации.
5. Исследовать, как размер подвыборки, по которой считается субградиент, в методе стохастического субградиентного спуска влияет на скорость сходимости метода и на точность решения. В этом и предыдущем пунктах за точное решение можно взять решение, полученное с помощью одного из методов внутренней точки.
6. Для двумерного случая:
  - Провести визуализацию выборки.
  - Для линейного SVM и для SVM с RBF ядром провести визуализацию разделяющей поверхности
  - Отобразить объекты, соответствующие опорным векторам.

## 3 Требования к оформлению

Для сдачи задания необходимо предоставить:

1. Отчет в формате pdf (оформленный в системе  $\text{\LaTeX}$ ) или IPython notebook с описанием всех проведенных исследований со всеми графиками и выводами.
2. Python модуль `svm.py` со классом `SVM`, в соответствии со спецификациями, приведенными ниже.
3. Если предоставлен отчет в формате pdf, предоставить также IPython notebook с кодом для воспроизведения всех результатов из отчета: таблиц, графиков и т.д.

## 4 Спецификации

Необходимо предоставить модуль `svm.py`, в котором должен быть реализован класс `SVM`.

**Замечание 1.** Все описанные ниже функции должны работать для бинарного случая, в этом случае метки классов принимают значения `1` и `-1`.

**Замечание 2.** Для проверки задания используются автоматические тесты, которые чувствительны к неверным прототипам функций/изменённым названиям атрибутов класса. В используемые прототипы можно добавлять аргументы по умолчанию, в класс можно добавлять свои методы и атрибуты.

В классе должны присутствовать следующие атрибуты:

1. Атрибуты, которые задаются при инициализации:
  - `C` — параметр регуляризации, `float`
  - `method` — метод для решения задачи SVM, должен принимать следующие значения:
    - `'primal'` — метод внутренней точки для решения прямой задачи
    - `'dual'` — метод внутренней точки для решения двойственной задачи
    - `'subgradient'` — метод субградиентного спуска для решения прямой задачи
    - `'stoch_subgradient'` — метод стохастического субградиентного спуска для решения прямой задачи
    - `'liblinear'` — метод, используемый в библиотеке `liblinear`
    - `'libsvm'` — метод, используемый в библиотеке `libsvm`
2. Атрибуты, которые появляются после обучения:
  - `w` — вектор весов SVM для прямой задачи, переменная типа `numpy.array`, матрица размера  $D \times 1$  (только в случае, когда решается прямая задача)
  - `A` — значения двойственных переменных, матрица размера  $N \times 1$  (только в случае, когда решается двойственная задача)
3. Атрибуты, которые необходимо задать, если решается двойственная задача:
  - `kernel` — ядро, использующееся для решения. Может принимать следующие значения:
    - `'linear'` — линейный случай
    - `'rbf'` — RBF ядро
  - `gamma` — ширина RBF ядра (если `kernel = 'rbf'`), `float`

**Замечание 4.** Здесь и далее полагается, что:

`X` — переменная типа `numpy.array`, матрица размера  $N \times D$ , признаковые описания объектов из обучающей выборки,

`y` — переменная типа `numpy.array`, матрица размера  $N \times 1$ , правильные ответы на обучающей выборке,

В классе должны быть реализованы следующие методы:

1. `compute_primal_objective(self, X, y)` — метод для подсчета целевой функции SVM для прямой задачи  
Функция должна возвращать одно число — значение целевой функции.
  2. `compute_dual_objective(self, X, y)` — метод для подсчета целевой функции SVM для двойственной задачи  
Функция должна возвращать одно число — значение целевой функции.
- Замечание.** Учтите, что для разных ядер — разные целевые функции.
3. `fit(self, X, y, tol, max_iter, verbose, stop_criterion, batch_size, lamb, alpha, beta)` — функция для обучения `svm` с помощью метода, заданного параметром `method`.

Функция принимает следующие аргументы:

- `tol` — требуемая точность для метода обучения
- `max_iter` — максимальное количество итераций в методе обучения
- `verbose` — в случае `True`, требуется выводить при обучении отладочную информацию на экран (например номер итерации, значение целевой функции)

Атрибуты, которые необходимо задать, если задача решается с помощью субградиентных методов:

- `alpha` — параметр  $\alpha$  для шага субградиентного спуска
- `beta` — параметр  $\beta$  для шага субградиентного спуска
- `stop_criterion` — критерий останова, может принимать следующие значения:
  - `'objective'` — остановка по значению целевой функции в случае субградиентного метода, для стохастического субградиентного метода необходимо использовать экспоненциальное скользящее среднее
  - `'argument'` — остановка по норме аргумента
- `batch_size` — размер подвыборки, по которой считается субградиент (только если используется стохастический градиентный спуск)
- `lamb` — параметр забывания (только если используется стохастический градиентный спуск и критерий останова `'objective'`)

Функция должна заполнять следующие атрибуты класса:

- `w` в случае прямой задачи и `A` в случае двойственной задачи

Функция должна вернуть словарь со следующими полями:

- `'status'` — 0 или 1, 0 — если после обучения метод вышел по критерию останова, 1 — если по числу итераций (кроме методов `'liblinear'` и `'libsvm'`)
- `'objective_curve'` — список значений целевой функции по итерациям метода (только для `'subgradient'` и `'stoch_subgradient'`)
- `'time'` — время обучения метода

4. `predict(self, X_test, return_classes=False)` — метод для предсказаний ответов по новым данным.

Описание параметров:

- `X_test` — переменная типа `numpy.array`, матрица размера  $M \times D$ , признаковые описания объектов из тестовой выборки
- `return_classes` — если значение равно `True`, необходимо вернуть метки классов, иначе вернуть оценки, выдаваемые классификатором

Функция должна возвращать `numpy array` размера  $M \times 1$ , ответы алгоритма на тестовой выборке.

5. `compute_support_vectors(self, X)` — метод для определения опорных векторов.

Метод работает только в случае двойственной задачи. Метод должен возвращать `numpy.array`, матрицу размера  $K \times D$ , где  $K$  — число найденных опорных векторов.

6. `compute_w(self, X, y)` — метод для получения прямых переменных `w` по двойственным `A`.

Работает только в случае двойственной задачи без ядер. Метод должен возвращать вектор весов SVM для прямой задачи, переменную типа `numpy.array`, матрицу размера  $D \times 1$

Помимо класса необходимо также написать функцию визуализации для двумерного случая, соответствующую требованиям пункта 6 исследовательской части задания:

```
visualize(X, y, alg_svm, show_vectors=False)
```

Описание параметров:

- `alg_svm` — обученный SVM, объект класса SVM
- `show_vectors` — если значение равно `True`, необходимо отразить объекты, соответствующие опорным векторам (только в случае решения двойственной задачи)

**Бонус + 0.3** — даётся за обработку всех некорректных вызовов методов и обращений к атрибутам (т.е. например, при вызове функций для двойственной задачи при решении прямой должно выбрасываться исключение).