Методы оптимизации (ФКН ВШЭ, 2017). Домашняя работа 1. Тема: Скорости сходимости и матричные вычисления.

Срок сдачи: 17 января 2017 (на семинаре)

1 Классифицируйте каждую из следующих последовательностей $(r_k)_{k\geq 1}$ по скорости сходимости (линейная/сублинейная/сверхлинейная). Для сверхлинейно сходящихся последовательностей необходимо дополнительно выяснить, имеет ли место квадратичная сходимость.

(a) $r_k := (0.99)^k$

(b) $r_k := (0.99)^{k^2}$

(c) $r_k := (0.99)^{2^k}$

(d) $r_k := 1/k$

(e) $r_k := 1/\sqrt{k}$

(f) $r_k := 1/k^2$

(g) $r_k := 1/k!$

(h) $r_k := 1/k^k$

(i) $r_k := \begin{cases} (0.99)^{2^k}, & \text{если } k \text{ четное,} \\ \frac{r_{k-1}}{k}, & \text{иначе} \end{cases}$

(j) $(r_k) := \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \dots\right)$

2 Рассмотрим следующие три семейства последовательностей:

(a) (Сублинейные) $r_k := C/k^\gamma$. $\quad [C, \gamma > 0]$

(b) (Линейные) $r_k := Cq^k$. $\quad [C > 0,\ q \in (0,1)]$

(c) (Квадратичные) $r_k := C(C^{-1}R)^{2^k}$. $\quad [C > 0,\ C^{-1}R \in (0,1)]$

Обозначим $k(\varepsilon) := \min\{k \geq 1 : r_k \leq \varepsilon C\}$ — необходимое число шагов для достижения заданной относительной точности $\varepsilon \in (0,1)$.

Для каждого из указанных семейств выпишите явную формулу для $k(\varepsilon)$. Проанализируйте, насколько сильно $k(\cdot)$ зависит от требуемой точности ε и соответствующего параметра семейства (γ, q, R). Заполните следующие таблицы, вписав в пустые ячейки соответствующие числовые значения $k(\varepsilon)$:

Сублинейные			
ε \ γ	1	2	0.5
10^{-1}			
10^{-3}			
10^{-5}			
10^{-7}			
10^{-12}			

Линейные			
ε \ q	0.9	0.999	0.99999
10^{-1}			
10^{-3}			
10^{-5}			
10^{-7}			
10^{-12}			

Квадратичные			
ε \ R	$0.9\,C$	$0.999\,C$	$0.99999\,C$
10^{-1}			
10^{-3}			
10^{-5}			
10^{-7}			
10^{-12}			

Рекомендация: Напишите скрипт, который заполнит все таблицы автоматически. Достаточно выписать одну значимую цифру и показатель мантиссы (например: 3×10^8)

3 Упростите каждое из из следующих выражений:

(a) $\mathrm{Tr}[(AXB)^{-1}ACB]$ $\quad [A, B, C, X \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \mathrm{Det}(AXB) \neq 0]$

(b) $\mathrm{Det}[AXB(C^{-T}X^TC)^{-T}]$ $\quad [A, B, C, X \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \mathrm{Det}(C) \neq 0,\ \mathrm{Det}(C^{-T}X^TC) \neq 0]$

(c) $\mathrm{Tr}[(2I_n + aa^T)^{-1}(uv^T + vu^T)]$ $\quad [a, u, v \in \mathbb{R}^n]$

(d) $\|uv^T - A\|_F^2 - \|A\|_F^2$ $\quad [u \in \mathbb{R}^m,\ v \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{m\times n}]$

4 Перепишите каждое из следующих выражений эквивалентным образом, используя указанные в скобках векторы/матрицы и следующие три операции: матричное произведение, транспонирование и конструирование диагональной матрицы $\mathrm{Diag}\{x\}$ по заданному вектору x. Полученное выражение не должно содержать никаких индексов.

(a) $\sum_{i=1}^n x_i^2$ $[x \in \mathbb{R}^n]$
(b) $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j$ $[A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ x \in \mathbb{R}^m,\ y \in \mathbb{R}^n]$
(c) $\sum_{i=1}^n c_i a_i$ $[c \in \mathbb{R}^n,\ A := [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}]$
(d) $\sum_{i=1}^k u_i v_i^T$ $[U := [u_1, \dots, u_k] \in \mathbb{R}^{m \times k},\ V := [v_1, \dots, v_k] \in \mathbb{R}^{n \times k}]$
(e) $B := (c_i a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ $[A := \mathbb{R}^{m \times n},\ c \in \mathbb{R}^m]$
(f) $B := (c_j a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ $[A := \mathbb{R}^{m \times n},\ c \in \mathbb{R}^n]$
(g) $\sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^T$ $[\sigma \in \mathbb{R}^k,\ U := [u_1, \dots, u_k] \in \mathbb{R}^{m \times k},\ V := [v_1, \dots, v_k] \in \mathbb{R}^{n \times k}]$
(h) $\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^s \sigma_{ij} u_i v_j^T$ $[\Sigma \in \mathbb{R}^{k \times s},\ U := [u_1, \dots, u_k] \in \mathbb{R}^{m \times k},\ V := [v_1, \dots, v_s] \in \mathbb{R}^{n \times s}]$

5 Для каждого из следующих утверждений либо докажите его истинность (для произвольных значений соответствующих переменных), либо приведите пример, демонстрирующий его ложность. Если утверждение является некорректно сформированным, объясните, какие конкретно операции в нем являются недопустимыми.

(a) $xAx^T = x^T A x$ $[x \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{n \times n}]$
(b) $x^T A y + y^T A x = 2x^T A y$ $[x, y \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{n \times n}]$
(c) $\mathrm{Det}(A)\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Det}(A)B)$ $[A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}]$
(d) $a^T x = \beta \quad \Rightarrow \quad x = (a^T)^{-1}\beta$ $[a, x \in \mathbb{R}^n,\ \beta \in \mathbb{R}]$
(e) $(aa^T)x = b \quad \Rightarrow \quad x = (aa^T)^{-1} b$ $[a, b, x \in \mathbb{R}^n]$
(f) $(I_n + aa^T)x = b \quad \Rightarrow \quad x = (I_n + aa^T)^{-1} b$ $[a, b, x \in \mathbb{R}^n]$
(g) $Ax = b \quad \Rightarrow \quad x = A^{-1} b$ $[A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ b \in \mathbb{R}^m,\ x \in \mathbb{R}^n]$
(h) $uu^T \in \mathbb{S}_+^n$ $[u \in \mathbb{R}^n]$
(i) $AA^T \in \mathbb{S}_+^m$ $[A \in \mathbb{R}^{m \times n}]$
(j) $\mathrm{Rank}(AA^T) = 1$ $[A \in \mathbb{R}^{m \times n}]$
(k) $A \in \mathbb{S}_+^n \quad \Rightarrow \quad BAB^T \in \mathbb{S}_+^m$ $[B \in \mathbb{R}^{m \times n}]$
(l) $A \succ 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Det}(A) > 0$ $[A \in \mathbb{S}^n]$

6 Пусть $A \in \mathbb{S}^n$. Докажите эквивалентность следующих утверждений:

(a) (Положительная полуопределенность) $\forall\, x \in \mathbb{R}^n: \quad x^T A x \geq 0$.
(b) (Неотрицательность собственных значений): $\lambda(A) \geq 0$.
(c) (Существование прямоугольного корня) $\exists D \in \mathbb{R}^{m \times n}: \quad A = D^T D$.
(d) (Существование квадратного корня) $\exists B \in \mathbb{S}_+^n: \quad A = B^2$.

(Подсказка: Используйте спектральное разложение.)

7 Для каждого из следующих уравнений найдите множество его всевозможных решений:

(a) $a^T x = 1$ $[a, x \in \mathbb{R}^n]$
(b) $(xx^T)a = b$ $[a, b, x \in \mathbb{R}^n]$
(c) $(I_n + aa^T)x = b$ $[a, b, x \in \mathbb{R}^n]$
(d) $\begin{bmatrix} Q & 2I \\ I & Q^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ $[Q \in \mathbb{R}^{n \times n},\ QQ^T = I_n,\ x_1, x_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^n]$